UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PENSAMENTO ALGÉBRICO: POTENCIAIS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

KELVIN FARIAS SANTOS

ALAGOINHAS – BA
2025

KELVIN FARIAS SANTOS

PENSAMENTO ALGÉBRICO: POTENCIAIS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Monografia apresentada à banca examinadora do Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade do Estado da Bahia – *Campus* II, Alagoinhas, em cumprimento das exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática, sob orientação da Prof. Me. Gustavo Pereira Nascimento.

ALAGOINHAS – BA

2025

KELVIN FARIAS SANTOS

PENSAMENTO ALGÉBRICO: POTENCIAIS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade do Estado da Bahia – UNEB para a obtenção do título parcial de Licenciado em Matemática.

Alagoinhas, 07 de janeiro de 2025.

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
GUSTAVO PEREIRA NASCIMENTO
Data: 17/06/2025 10:59:48-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Gustavo Pereira Nascimento – Orientador
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

Documento assinado digitalmente
MARIDETE BRITO CUNHA FERREIRA
Data: 16/06/2025 17:22:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Maridete Brito Cunha Ferreira
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

Prof.ª Dr.ª Maria de Fatima Costa Leal
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus, o autor da minha vida! Minha força! Sem Ele, nada da minha trajetória de vida seria possível. Acredito em seu amor e justiça, mesmo que muitas vezes eu não entenda seus propósitos. Agradeço a Ti, Senhor, por sempre estar comigo, me ouvir e me dar uma porção de sabedoria a cada dia!

À minha mãe, Sandra, por sempre me amparar e aos vários aprendizados como educadora. Ela sabe das lutas, correria e é o exemplo de força, resiliência e prova de que na vida é preciso seguir em frente. Agradeço também a Dilvan e Arycia Rodrigues, por me apoiarem e se fazerem presentes nesse percurso.

Ao meu irmão, Quevesson, que apesar de termos personalidades bem diferentes, o agradeço pelas várias conversas, apoio, fé e por seu entendimento de que podemos conseguir alcançar nossos sonhos.

À minha família Farias, meu pilar, pelo amor inquestionável que tem por mim. Sinto o amor de vocês quando se referem a mim como “Kel” e “Kekel”, agradeço muito esse afeto! Ao meu avô Carlos Farias (pelo apoio, carinho e atenção), minha avó Maria (“Lior”, por seu incentivo), às minhas tias Sônia, Sonildes e Sara que sempre me apoiaram principalmente quando eu não tinha mais forças e aos meus primos Jennifer Louise, Jordan, Sind Lauren, Rafael (Isaque), Izabella, Enzo Lucas, Maria Alexandra, Ronald e Esther por serem pessoas tão incríveis, pelas brincadeiras, descontrações e seus abraços. Sem vocês, onde estaria minha felicidade?

Agradeço cada palavra de carinho, conforto, conversas e amizades alcançadas na Universidade do Estado da Bahia (UNEB) – *Campus* II, os quais me mostraram que ninguém consegue chegar a lugar algum sozinho. O apoio dessas pessoas me ensinou o que é preciso para continuar a lutar e vencer a vida dia após dia: Acreditar em mim. Não de modo egoísta, isso é sobre (re)conhecer-se.

Agradeço também aos meus colegas do projeto de extensão “Matemática é Show”, aos da residência universitária, aos Matemáticos que conheci no ano de 2019 – especialmente a minha turma – e aos colegas que pude ter a honra de compartilhar momentos formativos no Programa de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).

Cada pessoa que passou por minha vida é lembrada com muito carinho, mas infelizmente é muito difícil citar todas. Eu jamais poderia esquecer de quem esteve me apoiando, principalmente nos momentos de conversas, acolhimento, descontração, aprendizados e compartilhamento dos “ais” da vida em que estiveram presentes:

Aguinaldo de Jesus (inspiração), Alessandra Ramos, Alisson Ribeiro, Amélia Xavier, Antônio Lucas, Beatriz Damasceno, Bruna Mareval, Caique Abades, Carla Mota, Carol Cardim, Cássio Lopes, Clara Moraes, Cleiton Damaceno, Conceição Silva, Cristiano Bispo, Deivisson Santos, Douglas Oliveira, Elisama Nunes, Elza Santos, Emerson Alves, Emily Costa, Emylle Georgia, Evelyn Vitória, Flavia Miranda, Felipe Henrique, Gleiciane Oliveira, Gleidson Vinicius, Guilherme Bastos (e sua família), Jadiel Reis, Jamille e Joalisson Bahia, Jamily Santos, Jhonny Rian, João Paulo, Joelia Santos, Joelma Costa, Josiel Sales, Julia Suzarte (a arte está em você!), Julia Xavier, Juliana Pereira, Larissa Ferreira, Leandro Nascimento, Luan Souza, Lucas Cavalcante, Lucas Ugarte, Luciana Anjos, Maiane Lima, Manoel Almeida, Márcio Batista, Mariana Oliveira, Manuela Santos, Marcia Cerqueira, Matheus Lima, Naylla Oliveira, Paulo Santos, Priscila Cavalcante, Quelvin Oliveira, Rafael Nascimento, Rafael Florencio (amigo querido, professor de milhões, leitor e multiplicador das minhas inspirações), Ramon Alessandro, Raquel Arcanjo, Renata Santos, Rita Fiuza (representação de superações e aprendizados), Ricardo Santana, Stefany Muniz (maravilhosa!), Tainara Mendes, Tainara Souza, Talliny Oliveira, Tayelle Silva, Tereza Cristina, Thalisson Santos, Thulia Karoline, Vanessa Dias, Vilemar Fragas, Vitor Silva e Vitória Silva.

Meus agradecimentos se estendem às professoras de Matemática que conheci ao decorrer deste período: Jocineide Martins, Liliane Lima, Rosangela Anjos e Tania Pinto. A cada acompanhamento minha admiração só aumentava pelas profissionais exemplares que são e agradeço pelo carinho, incentivo e apoio.

Aos meus professores da UNEB, dos quais sou feliz em tê-los conhecido: Carlos Queiroz, Daniela Santos (Pró Dani, coordenadora do “Matemática é Show”, a qual tenho uma grande admiração e carinho), Eliana Silva (admirável em vários aspectos), Danton Freitas, Erivelton Santana (a melhor surpresa que o curso já teve), Grace Baqueiro (minha admiração e carinho especial, desde o primeiro semestre foi minha professora, estivemos juntos no PIBID e seria minha orientadora), Gustavo Nascimento (meu orientador, é lindo ver sua desenvoltura quando se trata de Educação Matemática), Jaíra Bispo (inspiração de vida), Jefferson Correia (pelo apoio, incentivo, carinho e amizade), Maria de Fátima (pelas aulas inspiradoras, sua segurança é impecável), Maridete Ferreira (pró carismática e coordenadora do PIBID que me fez gostar ainda mais de Geometria), Mario Ferreira (por seu incentivo), Paulo Henrique (o diferenciado!), Valber Melo e Viviane Mendonça.

A todos vocês, minha sincera gratidão!

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCRB	Documento Curricular Referencial da Bahia
EBEM	Encontro Baiano de Educação Matemática
EPG	Equações Polinomiais do 1º grau
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PA	Pensamento Algébrico
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
SD	Sequência Didática
UNEB	Universidade do Estado da Bahia
TRRS	Teoria de registros de Representação Semiótica
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo investigar se uma Sequência Didática que explora equação do 1º grau com uma incógnita para estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental tem potencial para evidenciar indicadores do desenvolvimento do Pensamento Algébrico atrelada aos pressupostos de Metodologia de Pesquisa da Engenharia Didática trazendo situações-problema adaptados de livros didáticos e, para isso, foram cumpridas duas fases desta metodologia: (1) Análises prévias e (2) Concepção e análise a *priori*. Como referencial teórico, nos sustentamos nas ideias e resultados de pesquisadores da Educação Matemática para fazer as análises e levamos em consideração os indicadores do Pensamento Algébrico. O desenvolvimento do Pensamento Algébrico está intrinsecamente ligado à capacidade de construir significados para os objetos matemáticos de diversas maneiras com ou sem uso de uma linguagem simbólica e isso envolve a utilização de dos registros de representações semióticas que possibilitam o acesso ao pensamento do estudante. Assim, a forma como as atividades foram organizadas podem favorecer o desenvolvimento da habilidade EF07MA18 da BNCC envolvendo diferentes representações, utilização correta dos conceitos matemáticos e construção dos significados para os símbolos, e então consideramos a possibilidade de aplicação da sequência proposta.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico; Sequência Didática; Equação Polinomial do 1º Grau; Álgebra; Ensino Básico.

ABSTRACT

This study aimed to investigate whether a Didactic Sequence that explores first-degree equations with one unknown for 7th-grade students of Elementary School has the potential to demonstrate indicators of the development of Algebraic Thinking linked to the assumptions of the Didactic Engineering Research Methodology, bringing problem situations adapted from textbooks. For this purpose, two phases of this methodology were completed: (1) Preliminary analyzes and (2) Conception and a priori analysis. As a theoretical reference, we rely on the ideas and results of researchers in Mathematics Education to carry out the analyzes and take into account the indicators of Algebraic Thinking. The development of Algebraic Thinking is intrinsically linked to the ability to construct meanings for mathematical objects in various ways, with or without the use of symbolic language, and this involves the use of records of semiotic representations that allow access to the student's thinking. Thus, the way the activities were organized can favor the development of skill EF07MA18 of the BNCC involving different representations, correct use of mathematical concepts and construction of meanings for symbols, and then we consider the possibility of applying the proposed sequence.

Keywords: Algebraic Thinking; Didactic Sequence; First-degree Polynomial Equation; Algebra; Basic Education.

1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo serão apresentadas as motivações e razões que levaram o autor deste trabalho à escolha do tema, seguida das justificativas para a delimitação do objetivo geral e a pergunta norteadora da pesquisa.

Durante o percurso formativo, especificamente no Ensino Médio, a pergunta “o que você quer ser?” deixa os estudantes reflexivos por ser um momento em que se começa a entender e aprender como as coisas funcionam após a conclusão desta etapa estudantil. Aqueles que desejam dar continuidade aos estudos têm a possibilidade de fazer um curso técnico ou superior. Assim, na minha jornada não foi diferente, veio o desejo de aprofundar meus conhecimentos em relação aos objetos matemáticos e, consequentemente, a inspiração de seguir profissão na área em que muitas pessoas demonstram aversão.

O primeiro motivo que me levou a escolha do tema partiu das minhas dificuldades em entender a resolução de equações durante a Educação Básica, o que me instigou a querer fazer o curso de Licenciatura em Matemática com o sentimento de querer entender o porquê de eu errar o percurso de resolução e a vontade de ajudar outros estudantes em situações parecidas a se desenvolverem.

Até o presente momento, ainda ouço frases como “quem inventou a letra na Matemática?” e “se o x se perdeu, ele que se ache” muitas vezes; e por si só, a forma como os estudantes se expressam revela que alguns deles apresentam dificuldades no estudo da Álgebra, tanto na utilização correta da linguagem algébrica para traduzir uma situação quanto na resolução para saber o valor desconhecido.

O segundo motivo está relacionado à experiência como monitor voluntário do projeto de extensão “Matemática é Show”, coordenado pela prof.ª Ma. Daniela Santos Batista, que através de jogos, palestras e teatro mostram que a aprendizagem de Matemática pode ser prazerosa. Graças a isso, realizei adaptação do jogo de tabuleiro conhecido por ter expressões algébricas dispostas em trilhas e dei carinhosamente o título de “Corrida Show”, pude apresentá-lo à comunidade da cidade de Alagoinhas na 9ª edição do projeto e ao XX Encontro Baiano de Educação Matemática (EBEM).

Durante o decorrer do curso que pude ter certeza no terceiro motivo, que se refere a minha participação como bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) coordenado pelas Prof.ªs Dr.ªs Maridete Brito Cunha Ferreira e Grace Dórea dos Santos Baqueiro em 2020, onde pude ter contato com teorias da Educação Matemática e fui ficando cada vez mais interessado nos objetos de conhecimentos discutidos, principalmente quando se referiam as unidades temáticas Álgebra e Geometria.

Ao decorrer das reuniões do subprojeto foi apresentada a Teoria das Situações Didáticas (TSD) em que discussões de algumas sequências trazidas pelas coordenadoras foram realizadas e, da mesma maneira, aconteceu com aquelas criadas pelos pibidianos, necessitando serem resolvidas, dialogadas e posteriormente foram executados laboratórios com outros participantes.

Com a participação no PIBID pude juntamente com as coordenadoras escrever e apresentar o relato intitulado “Descobertas conceituais de um pibidiano ao resolver uma tarefa exploratória envolvendo função afim” ao XIX EBEM, que consistia na discussão das soluções de uma tarefa exploratória sobre função afim que evidenciou lacunas conceituais.

Graças a esse percurso que se intensificou ainda mais o interesse de considerar como objeto da Educação Matemática como pesquisa o Pensamento Algébrico em minha monografia, sendo ele associado ao objeto de conhecimento equação polinomial do 1º grau.

As equações se mostram fundamentais no desenvolvimento das habilidades cognitivas, servem de base para o entendimento de conceitos, envolvem a capacidade de usar esse objeto no cotidiano na resolução de problemas, explicam generalizações e são essenciais para o fortalecimento dos conhecimentos necessários para o próximo nível de escolaridade, em que serão estudadas as funções, por exemplo.

Os outros capítulos que fazem parte desta monografia estão estruturados conforme a sucinta descrição:

No Capitulo dois apresentamos a Álgebra segundo os documentos oficiais que norteiam os currículos brasileiros que fazem referência a um tipo especial de pensamento, o Pensamento Algébrico, e um dos objetos matemáticos que pode contribuir para o seu desenvolvimento é a equação polinomial do 1ª grau. Além disso, este capitulo traz a pergunta norteadora, o objetivo geral e os objetivos específicos.

No Capitulo três apresentamos a fundamentação teórica a partir das pesquisas e resultados dos seguintes pesquisadores matemáticos: Fiorentini *et al*. (1993, 2005) com relação ao pensar algebricamente e o desenvolvimento da linguagem algébrica, Almouloud (2007) que auxiliará na metodologia, Brousseau (2008) com a Teoria das Situações Didáticas (TSD), Ponte, Branco e Matos (2008, 2009) com relação ao uso dos símbolos e suas interpretações, Duval (2012) com a Teoria dos Registros de

Representação Semiótica (TRRS), Silva (2012) com as adaptações dos indicadores do Pensamento Algébrico para equações do 1º grau, Almeida (2016) acerca da construção de significados e o modelo de Pensamento Algébrico dividido em quatro níveis, Santos (2019) sobre as técnicas relacionadas as equações do 1º grau (EPG), Pires e Rodriguês (2020) com observações sobre livros didáticos acerca das EPG sob a ótica da TRRS, Hilário *et al*. (2021) reforçam os níveis Pensamento Algébrico considerando as estratégias de resolução e Oliveira (2022) com as concepções do símbolo de igualdade.

No capítulo quatro explicamos as fases adotadas da metodologia de pesquisa Engenharia Didática no processo de concepção e análise *a priori* de duas sessões de ensino que relaciona o objeto de conhecimento matemático equação polinomial do 1º grau ao reconhecimento dos indicadores do Pensamento Algébrico presentes nas situações da Sequência Didática elaborada.

O capítulo cinco discute as situações adaptadas na construção da Sequência Didática que busca os conhecimentos disponíveis do estudante para mobilizar a conceituação de equação polinomial do 1º grau, sua representação, solução, uso da incógnita e compreensão do símbolo de igualdade como equivalência condicional. A partir dessas perspectivas, algumas das técnicas de resolução serão desenvolvidas juntamente com as propriedades da igualdade associadas ao equilíbrio da balança de dois pratos e a correlação entre seus membros.

Por fim, no capítulo seis apresentamos as considerações do que foi realizado nesta monografia com reflexões das potencialidades da Sequência Didática sugerida na aprendizagem de equação polinomial do 1º grau.

2 JUSTIFICATIVA

A Matemática muitas vezes é adjetivada como complicada, difícil, confusa, entre outros; e ao se deparar no 7º ano do Ensino Fundamental com letras e números, é possível notar o desconforto e a dificuldade dos estudantes quando lidam com situações em que envolvem a procura do valor desconhecido. A Álgebra, nesse sentido, conecta as ideias de quantidades conhecidas com as desconhecidas, sendo representadas por símbolos (letras do alfabeto).

A desassociação da álgebra com a aritmética pode ser "consequência de um ensino baseado em técnicas e regras, em procedimentos sem significação, dificultando sua capacidade de compreensão dos conceitos que permitem a efetivação do conhecimento" (Oliveira; Rezende, 2016, p. 6).

Essa compreensão tem sido trabalhada durante as fases escolares anteriores e ainda são conceitos matemáticos não internalizados "porque os alunos demoram a aceitar que letras agora são 'números', ou seja, correspondem a quantidades, e isso por si só já causa certo bloqueio" (Silva, 2007, p. 2).

Em sua pesquisa, Santos (2019, p. 36) diz que "os estudantes apresentam erros básicos relacionados à soma de simétricos em equações, jogo de sinais e operações elementares (adição, subtração, divisão e multiplicação). Competências que poderiam ser desenvolvidas em séries anteriores".

Desde os anos 90, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) estava como documento orientador dos currículos escolares no Brasil e, em relação ao terceiro (refere-se aos 6º e 7º anos) e ao quarto (8º e 9º anos) ciclos do Ensino Fundamental, as orientações didáticas para o ensino da Álgebra estavam voltadas ao desenvolvimento da abstração, generalização e do exercício para que o aluno resolvesse problemas. A sugestão era propor situações para garantir o desenvolvimento do Pensamento Algébrico e para isso "o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra" (Brasil, 1998, p. 116).

Já o atual documento normativo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe,

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros

> símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade (Brasil, 2018, p. 270).

Ambos documentos apresentam convergências quando reforçam a necessidade de desenvolver propostas que permitam o estudante construir o Pensamento Algébrico desde os seus Anos Iniciais. Divergências também são reveladas, pois enquanto os PCN relacionam esse pensamento a uma linguagem específica, a BNCC acredita no desenvolvimento de um raciocínio específico (Almeida, 2016, p. 54).

> Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (Brasil, 2018, p. 270).

Para que isso aconteça, o Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB) para educação infantil e ensino fundamental, destaca que:

> É de fundamental importância que os alunos compreendam os procedimentos utilizados, em vez de apenas memorizá-los. Sendo assim, é preciso propor atividades que contribuam com o entendimento de igualdade, estabelecendo relações e comparações entre quantidades conhecidas e desconhecidas, como também tentar expressar alguns significados para uma expressão algébrica (Bahia, 2020, p. 344).

O DCRB aborda que muitos professores do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental se limitam a relacionar a unidade temática Álgebra aos conteúdos de equações e sentenças com números e letras misturados, porém a BNCC não pretende adiantar as relações de abstrações de números e letras. O que se deseja trabalhar é o Pensamento Algébrico.

> Isso significa ‘olhar para a aritmética com mais ênfase na maneira de pensar do que na técnica e no procedimento de cálculo’. Ou seja: é mais importante que as crianças pensem sobre o que está por trás das operações matemáticas do que apenas memorizar o uso dos algoritmos (Bahia, 2020, p. 344-345).

Para então, no Ensino Fundamental II, desenvolver o Pensamento Algébrico com o dever de “preparar o aluno para perceber regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, para interpretar representações gráficas e simbólicas e para resolver problemas por meio de equações e inequações” de modo que compreendam os procedimentos e não se prendam a memorização (Bahia, 2020, p. 345).

Em sua pesquisa, com discentes do curso de licenciatura em matemática, Baqueiro *et al*. (2020) procurava evidenciar os caracterizadores do Pensamento Algébrico através da generalização de padrões na perspectiva das tarefas exploratórias – com o sentido de problematizar, produzir significados e levar o aluno a investigar –, mostraram que o desenvolvimento desse tipo de pensamento vai além do uso da linguagem simbólica mesmo com o primeiro contato ao objeto.

Santos e Buriasco (2009) apresentaram em seu artigo a produção escrita de alunos em diferentes momentos do ensino básico e por meio de resolução de problemas constataram que a presença do Pensamento Algébrico vai se desenvolvendo ao decorrer de cada nível de escolaridade, mesmo que usem estruturas aritméticas.

No que se refere aos estudos das equações polinomiais do 1º grau nos PCN, por exemplo, o aluno precisa “saber fazer” que prioriza a construção de procedimentos tendo a compreensão do conceito e processos para resolver uma equação (BRASIL, 1998); na BNCC, quando o aluno chega ao 7º ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, o objeto de conhecimento equações polinomiais do 1º grau orienta desenvolver a habilidade “(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade” (Brasil, 2018, p. 307).

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 90) avisam que definir *equação* de maneira correta, que se ajuste ao nível de compreensão dos estudantes do ensino básico, é um desafio considerável e sugerem desenvolver essa ideia desde o Ensino Fundamental I com expressões que faltam algum valor, por haver naturalidade para entender as noções de equação e incógnita.

> Estas expressões ocorrem naturalmente no trabalho com números e operações e o professor pode referir-se a elas, dizendo, simplesmente, que se trata de equações. Ou seja, nesta fase bastará dizer que equação é uma igualdade como a indicada, ‘onde há um valor desconhecido’. A ocorrência de situações deste gênero pode levar os alunos a apropriarem-se deste termo, usando-o por sua iniciativa, ao descreverem o seu trabalho (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 92).

Na pesquisa realizada por Santos (2019) ao verificar as técnicas e erros recorrentes apresentadas pelos alunos do 9º ano na resolução de equação do 1º grau, notou que eles ainda possuíam dificuldades conceituais e erros relacionados a soma de simétricos em equações, jogo de sinais e operações elementares.

Hilário *et al*. (2021), trouxeram o resultado de sua investigação que objetivava caracterizar o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico de alunos ao resolverem situações-problema envolvendo equações do 1º grau e perceberam que os alunos da 8ª classe se encontram em transição de linguagem. E pressupõem que “ainda prevalece uma lacuna em conectar os níveis do Pensamento Algébrico com as estratégias adotadas pelos alunos na realização de atividades, no contexto da aprendizagem da Matemática”.

Nesse quesito, concordamos com o DCRB que

> [...] é preciso propor atividades que contribuam com o entendimento de igualdade, estabelecendo relações e comparações entre quantidades conhecidas e desconhecidas, como também tentar expressar alguns significados para uma expressão numérica, para equações e para inequações (Bahia, 2020, p. 345).

Queremos destacar que os conceitos algébricos podem ser ampliados através da participação do estudante na construção do seu conhecimento com situações-problema que ajudem a contribuir para o desenvolvimento das capacidades do Pensamento Algébrico sem que o estudante efetivamente conheça a linguagem simbólica.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) demonstra favorecer a mobilização do Pensamento Algébrico (PA) a partir de situações contextualizadas incentivando o estudante a ativamente pensar, refletir, formular hipóteses, testar soluções e resolver problemas, de modo que, a construção de novos conhecimentos seja mais significativa, contínua e contribua para o desenvolvimento de habilidades.

Desta maneira, desejamos responder o seguinte questionamento: De que modo uma sequência didática pode evidenciar indicadores do desenvolvimento do Pensamento Algébrico na aplicação do conceito de equação do 1º grau por estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental?

Assim, este trabalho objetiva investigar se uma Sequência Didática que explora equação do 1º grau com uma incógnita para estudantes do 7º ano do Ensino

Fundamental tem potencial para evidenciar indicadores do desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Tendo como objetivos específicos:

- Elaborar e discutir uma sequência didática que explora equações do 1º grau;
- Refletir sobre o desenvolvimento do Pensamento Algébrico no ensino de equação do 1º grau no 7º ano do Ensino Fundamental;
- Identificar possíveis dificuldades conceituais na resolução das situações propostas na Sequência Didática.

Para cumprimento do objetivo geral, optamos em realizar a concepção e análise *a priori* de uma sequência didática a luz da metodologia de pesquisa Engenharia Didática.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresentaremos o principal objeto de estudo, trazendo algumas concepções do que vem a ser considerado como Pensamento Algébrico (PA), suas fases, níveis, indicadores, o uso das letras e do símbolo de igualdade. Assim, estaremos associando a Teoria das Situações Didáticas (TSD) envolvendo a construção do significado de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita com base nas contribuições de alguns pesquisadores na área da Educação Matemática.

3.1 Compreendendo o Pensamento Algébrico

A Álgebra é um campo da Matemática que surgiu desde a Antiguidade para resolver problemas essencialmente aritméticos e geométricos que se muniam da linguagem natural, ou seja, escrita e fala para expressar situações. Com o passar do tempo, os estudiosos recorreram a abreviações posteriormente simbólicas para formalizar generalizações e resolver problemas (Ponte; Branco; Matos, 2008, p. 89).

Numa concepção histórica da Matemática, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) salientam três momentos evolutivos que capacitaram pesquisadores a poderem se expressar matematicamente com ideias mais concisas, mostrados o Quadro 1:

Quadro 1 – Momentos da linguagem algébrica

Momentos	Descritor	Ação
Retórica (ou verbal)	Linguagem corrente: descreve esquemas operatórios de números e equações descritos em língua corrente.	Não usa símbolos ou abreviaturas.
Sincopada	Introduz o símbolo para representar incógnita e utiliza abreviação para a expressão.	Usa alguns símbolos e faz abreviaturas.
Simbólica	Representa ideias por símbolos sem uso de palavras.	Usa apenas símbolos.

Fonte: Adaptado a partir de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 79 e 80).

A linguagem retórica ou verbal, foi marcada pelo uso da linguagem corrente, expressava números e equações pelos povos egípcios, babilônicos e gregos pré-diofantinos. Já a linguagem sincopada surgiu por Diofanto, desenvolvida pelos hindus, em especial, por Brahmagupta, depois pelos árabes após aceitarem as contribuições de Al-Khwarizmi e posteriormente pelos italianos. A linguagem simbólica foi originada por Viète que introduziu novos símbolos, como “+” e “−“, e consolidada por Descartes quando utilizou letras do alfabeto para representar quantidades e até mesmo comprimentos (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993).

Com a necessidade de refletir sobre a álgebra ensinada na Educação Básica, também se faz necessário caracterizar o Pensamento Algébrico (PA), que se manifesta através das conjecturas e dos argumentos formais acerca das generalizações e relações matemáticas existentes entre Aritmética, Geometria e diversas situações decorrentes de modelação matemática.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 88), caracterizam o PA como “um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento” e consideram que pode ser expresso em diversas linguagens.

> A análise das situações em que esse pensamento pode se manifestar levou-nos, ainda, a concluir que não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem especifica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993, p. 88).

Nas reflexões de Dias e Silva (2020, p. 2), não há uma definição exata do que seria Pensamento Algébrico, porém existem autores que o caracterizam fundamentados nos objetos estudados pela álgebra e por isso ocorrem diferentes atribuições pois há diferentes objetos.

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10) trazem a seguinte compreensão:

> O Pensamento Algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

A ideia de Pensamento Algébrico defendida por Almeida (2016) se refere a um tipo de pensar no qual os alunos devem construir significado para os objetos algébricos simultaneamente, que são álgebra e sua linguagem, sem haver uma ordem hierárquica para esse desenvolvimento; onde, por exemplo, “o aluno pode pensar algebricamente quando percebe as relações existentes entre as operações com números naturais, identificando suas propriedades” (Almeida, 2016, p. 50).

A diferença entre o pensamento aritmético e algébrico é:

> [...] o pensamento aritmético está intimamente ligado ao cálculo e à realização de operações na procura de um resultado, enquanto que o Pensamento Algébrico está relacionado com as estruturas e ao ‘uso de uma variedade de

> representações que permitem lidar com situações quantitativas de uma forma relacional (Kieran, 1992, p. 4 *apud* Almeida, 2016, p. 58).

Essa é a concepção de alguns pesquisadores matemáticos sobre o desenvolvimento desse tipo de pensamento:

> [...] os estudantes não precisam, necessariamente, dominar uma linguagem simbólica algébrica para desenvolver aspectos referentes ao Pensamento Algébrico. [...] Diante disso, podemos trabalhar com alunos da educação básica, tarefas que potencializem o pensar algebricamente, sem que os estudantes tenham, ainda, domínio da linguagem simbólica algébrica (Fiorentini; Fernandes; Cristóvão, 2005; Radford, 2009; Oliveira; Câmera, 2011; Silva; Savioli, 2012 *apud* Almeida, 2016, p. 51).

Ainda fundamentado em pesquisadores da Educação Matemática, Almeida (2016, p. 51) defende o ensino e aprendizagem na álgebra que visem a compreensão dos conceitos fundamentais para dar sentido aos objetos estudados desde os primeiros anos escolares e isso é possível quando se incluem atividades que potencializam o desenvolvimento do PA e valorizem a construção de significado.

Assim como Hilário *et al*. (2021), defendem que:

> [...] no centro do Pensamento Algébrico está envolvido o conjunto de técnicas que contemplam a modelação, representação, generalização e padronização das expressões algébricas, com finalidade de produzir significados (Canavarro, 2007 *apud* Hilário *et al.*, 2021, p. 5).

Desse modo, quando os estudantes entendem o conceito do objeto bem como seus significados, cria-se “condições do pensar algebricamente, é capaz de criar e usar de forma autônoma técnicas que possam solucionar problemas de caráter algébrico” (Hilário *et al*., 2021, p. 5) e o uso dessas técnicas podem estar associadas ao modo como os símbolos são interpretados.

Ponte, Branco e Matos (2008, p. 89) se referem as letras como “símbolos [que] podem ter significados diversos, conforme o contexto em que são usados, e uma boa parte das dificuldades dos alunos está precisamente nesta interpretação”. Esses autores consideram a compreensão algébrica fundamental para o raciocínio em Álgebra, incentivam a reflexão acerca das dificuldades dos alunos e mencionam três dos sentidos em que as letras são usadas:

- Letra como incógnita: Na representação de um valor específico e desconhecido associado a resolução de equações;
- Letra como número generalizado: Representando valores que podem ser apresentados em sequências;

- Letra como variável: Está associada a ideia das funções acerca do conjunto de valores e das relações de dependência entre elas.

As letras possuem várias interpretações e quando são usadas na Matemática representam números conhecidos, desconhecidos, variáveis ou até mesmo uma generalização de uma regularidade; e nesse quesito, a compreensão do símbolo e o uso da notação dependerá da situação ou do contexto em que se faz necessário expressar matematicamente ideias concisas tendo em vista que "esse pensamento se potencializa à medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele" (Ponte; Branco; Matos, 2008, p. 89).

A partir da resolução de atividades exploratório-investigativas realizadas por grupos de alunos do 7º ano do ensino fundamental e observação do desenvolvimento da linguagem, os pesquisadores Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 16-18) sistematizaram e propuseram organizar as três fases que evidenciam a apropriação desse tipo de linguagem pelos alunos:

- Pensamento pré-algébrico: Utiliza algum elemento considerado algébrico, como a letra, e não consegue entendê-la como um número generalizado;
- Pensamento de transição do pré-algébrico ao algébrico: Evidencia elementos caracterizadores do PA em suas interpretações, podendo ser expressa pela linguagem natural ou simbólica;
- Pensamento Algébrico mais desenvolvido: Salienta mais caracterizadores do PA em sua linguagem, sendo capaz de se expressar pela linguagem natural e também simbólica quando representa – mesmo genericamente – a situação-problema, perceber a relação de dependência e chegar a operá-la.

Essas fases não definem o desenvolvimento da linguagem do aluno, elas permitem entender em que momento de sua evolução ele pode estar levando em conta os elementos que caracterizam o PA e ajudam a identificar o domínio da linguagem algébrica numa determinada situação e resultando na sua tomada de decisão.

Em sala de aula, para que o aluno consiga se expressar algebricamente, há um percurso a ser trilhado no qual "devemos ter em conta que 'o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico não é atribuído à tarefa a ser resolvida em si, mas sim, às estratégias de resolução da tarefa, a atividade Matemática mobilizada pelo aluno'" (Almeida, 2016 *apud* Hilário *et al.*, 2021, p. 6).

Almeida (2016, p. 98) e Hilário *et al*. (2021, p. 6) chamam de “níveis do modelo de Pensamento Algébrico” (sintetizados no Quadro 2) a existência de quatro níveis ao verificar o desenvolvimento desse pensamento em tarefas matemáticas ao levar em conta as fases da linguagem algébrica, o grau de dificuldade e as estratégias de resolução adotadas pelos alunos em cada situação-problema.

Quadro 2 – Modelo de Pensamento Algébrico

Nível	**Caraterísticas ou habilidade à desenvolver**
Nível 0 – Ausência do Pensamento Algébrico	Trabalho virado na aritmética (operação de quantidades conhecidas, reconhecimento das propriedades e prioridades das operações).
Nível 1 – Pensamento Algébrico Incipiente/Primário	Linguagem sincopada (resolve problemas que envolvem quantidades desconhecidas por meio de substituição ou contagem)
Nível 2 – Pensamento Algébrico Intermediário	Linguagem simbólica (estabelece relações entre duas quantidades e reconhece a equação que corresponde o problema).
Nível 3 – Pensamento Algébrico Consolidado	Linguagem algébrica (capacidade de explorar dados do problema, capacidade de identificar e construir significados aos objetos algébricos, capacidade de modelar e generalizar estruturas por meio de incógnitas).

Fonte: Almeida (2016, p. 98 *apud* Hilário *et al*., 2021, p. 6).

O modelo proposto por Almeida (2016) está relacionado a doze problemas de partilha, trazendo em sua tese resultados e discussões da sua pesquisa realizada com alunos do 6º ano do ensino fundamental de Recife (capital do estado de Pernambuco) e Quebec (província do Canadá).

Ele adotou subníveis para descrever graus de dificuldade em cada nível, e ao verificar as respostas entendeu que os caracterizadores só começam a aparecer a partir do nível 1 e afirma que “o aluno está pensando algebricamente quando constrói significado para os objetos algébricos e para a linguagem algébrica formal (simbólica)” (Almeida, 2016, p. 50).

A generalização, por exemplo, é um modo de representar relações matemáticas e o uso da linguagem se manifestará pelo nível de experiência dos alunos, podendo ser: natural, gestual, numérica ou simbólica. E “esse processo pode ocorrer com base em situações aritméticas, geométricas, de modelação matemática ou em quaisquer outras situações matemáticas” (Almeida, 2016, p. 66).

Ao se deparar com uma equação,

> [...] um sujeito está visualizando ou respondendo uma equação como um objeto algébrico quando ele está pensando algebricamente, quando ele entende a equação como uma relação de equivalência entre o primeiro e o segundo membros e para respondê-la ele deve encontrar um valor para o ‘X’ que torne a igualdade verdadeira (Almeida, 2016, p. 66).

Pensar algebricamente envolve a compreensão do papel algébrico que o símbolo “=” tem numa expressão que estabelece uma relação entre quantidades.

3.2 Concepções do símbolo de igualdade

A BNCC trata a “Álgebra” como uma unidade temática que deve ser trabalhada com o objetivo de desenvolver o Pensamento Algébrico (PA), de modo que os objetos do conhecimento estejam vinculados com as noções de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade desde os anos iniciais para que, posteriormente, o estudante aprofunde e amplie seus conhecimentos nos anos finais do Ensino Fundamental e consiga compreender os símbolos e seus significados (Brasil, 2018).

Nos anos iniciais, os princípios da equivalência, a observação de padrões e regularidades são introduzidos, durante os anos finais, momento onde espera-se que o estudante seja capaz de estabelecer generalizações utilizando a linguagem algébrica que relaciona grandezas, e surge o contato com as equações na busca pela incógnita (valor desconhecido) associada com as técnicas de resolução para ser consolidado o uso dessa linguagem no estudo das funções e os diversos significados para a variável.

Baseada em pesquisas da Educação Matemática, Oliveira (2022) traz em seu trabalho de conclusão de curso concepções acerca da utilização do símbolo de igualdade em contextos da aritmética e álgebra, salientando que o domínio da pluralidade dos significados faz a diferença na compreensão desse símbolo.

Na pesquisa, os significados para o símbolo “=” inicialmente foram divididos em três categorias, porém ao obter os dados e análise dos resultados, foram introduzidas mais três novas categorias, são elas “Igualdade Operacional”, “Igualdade Relacional Nome-símbolo” e “Inconclusivo” dispostas no seguinte Quadro 3:

Quadro 3 – Categorias de utilização da igualdade

<table>
<tr><td rowspan="6">Concepções do símbolo “=”</td><td rowspan="3">Aritmética</td><td>Igualdade Operacional</td></tr>
<tr><td>Igualdade Relacional</td></tr>
<tr><td>Relacional Nome-símbolo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Álgebra</td><td>Equivalência em Igualdade Condicional</td></tr>
<tr><td>Concepção Funcional</td></tr>
<tr><td>–</td><td>Inconclusivo</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Oliveira (2022).

Oliveira (2022) esclarece que, quando se refere ao contexto da igualdade operacional, o símbolo indica que haverá uma ação a ser realizada no sentido de obter algum resultado. Na igualdade relacional, o símbolo de igualdade tem a finalidade de identidade, confirmando que ambos os lados da expressão aritmética se equivalem.

Nas representações algébricas, a igualdade que contempla as propriedades de equivalência e determina uma condição de existência de um único número para tornar a sentença verdadeira é o que acontece nas equações; por outro lado, expressões em que a igualdade significa dependência entre variáveis (mudam de valores) tem uma concepção funcional.

Já na concepção Relacional Nome-símbolo, há estudantes que entendem expressões aritméticas com o olhar voltado a operação, “não dando ao símbolo [de igualdade] características específicas o que mostra que os alunos visualizam e o compreendem apenas pelo nome atribuído ao símbolo” (Oliveira, 2022, p. 42). E, a categoria denominada Inconclusivo, se refere às respostas que não se encaixam nas outras categorias.

Quanto ao não entendimento dos contextos em que os significados da igualdade estão presentes, isso pode ser reflexo do percurso dos anos iniciais

> [...] quando é feita transição do aritmético para o algébrico o entendimento continua aritmético o que pode ser este um dos motivos das dificuldades em resolução de questões de álgebra na educação básica. Logo a forma com que o símbolo é tratado influencia na forma com que ele é compreendido” (Oliveira, 2022, p. 46).

Vale destacar que durante a transição para os anos finais, à medida que o estudante aprofunda seus conhecimentos em aritmética e álgebra, deve-se mostrar capaz de construir e compreender conceitos como incógnita, expressão, equação, variável e função, o qual o equipará para enfrentar novos desafios.

3.3 Pensamento Algébrico nas estratégias de resolução de equações do 1º grau

Assim como outros objetos matemáticos, o conceito de equação de 1º grau deve ser trabalhado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental; a partir de expressões aritméticas que envolvam os números e suas operações de forma natural, em que haja a falta de um valor desconhecido e o termo *equação* já poderá ser usado.

Na perspectiva de Ponte, Branco e Matos (2009), em algum momento o valor faltoso nas expressões precisará ser escrito usando letras para representar a incógnita; acreditam que até mesmo os estudantes podem fazer essa sugestão espontaneamente e, se não acontecer, o professor poderá decidir o momento para introduzir a linguagem algébrica.

> Claro que numa equação o valor desconhecido pode ser representado de muitas maneiras diferentes. Em Álgebra é usual designar as variáveis e incógnitas por *x* (variável real) e *n* (variável natural), mas também se usam muitas outras letras. Note-se que um uso exclusivo das letras *x* e *n* pode criar nos alunos a dificuldade em lidar com outras letras no papel de variáveis e incógnitas, enquanto que uma grande variação de símbolos pode criar grande confusão nos alunos. Neste aspecto, como em muitos outros, o bom senso do professor é essencial (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 94).

Ainda reforçam que trabalhar com expressões algébricas, exige que os estudantes tenham entendido algumas terminologias como monômio, coeficiente numérico, parte literal, etc. para quando estudarem equações, novas palavras como “termo” e “membro” sejam usadas. Então, novos conceitos poderão ser introduzidos.

> Para além de serem capazes de resolver equações, os alunos devem ser capazes de verificar se um dado valor é ou não solução de uma certa equação. Além disso, devem saber que duas equações são equivalentes se e só se tiverem as mesmas soluções (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 94).

A álgebra, ao invés de manipulação de letras, preza “a construção do significado dos objetos algébricos e da linguagem simbólica algébrica” para “levar o aluno a reconhecer que uma expressão algébrica pode ser vista como a interpretação de uma relação entre suas grandezas”, como é recomenda na BNCC (Almeida, 2016, p. 54).

O Pensamento Algébrico é um ato institucional em que o professor propõe e modela situações que tem por objetivo o desenvolvimento desse tipo de pensamento no aluno mesmo que haja outros objetivos, onde o aluno estará pensando algebricamente quando ele perceber a relação entre os membros da equação ao encontrar uma equação equivalente à anterior e encontre o valor da incógnita desconhecida para tornar a igualdade verdadeira (Almeida, 2016).

Na visão de Almeida (2016), quando o aluno se depara com uma equação e a resolve, não significa que ele está pensando algebricamente, ele pode estar utilizando uma técnica de resolução e não entende o significado da igualdade ao encontrar o valor desconhecido, visto que há momentos em que pensar no “modelo da balança de dois partos”, por exemplo, não o ajudará.

É possível verificar o desenvolvimento da sua linguagem algébrica a partir da escrita do aluno, isso com base nos caracterizadores desse pensamento e poderá alcançar um dos níveis, dependendo “do seu desempenho no trabalho algébrico por durante a resolução dos problemas relativos a equações do primeiro grau” (Hilário *et al*., 2021, p. 7).

Apoiada nos indicadores propostos por Fiorentini *et al*. (1993, 2005), dentre outros autores, Silva (2012, p. 42) descreve 12 indicadores do Pensamento Algébrico adaptados para análise de atividades relacionadas as equações do 1º grau (EPG) dispostos no Quadro 4.

Quadro 4 – Indicadores de desenvolvimento do PA

Indicadores de desenvolvimento do Pensamento Algébrico	
Indicadores	A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos.
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema
4	Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples
7	Desenvolver algum tipo de processo de generalização
8	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias
9	Perceber o uso da variável como incógnita
10	Perceber o uso da variável como número genérico
11	Perceber o uso da variável como relação funcional
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

Fonte: Adaptações realizadas por Silva (2012, p. 41).

Em sua monografia, Santos (2019) traz cinco técnicas de resolução relacionadas as equações do 1º grau no Quadro 5 a seguir:

Quadro 5 – Técnicas de Resolução

Técnicas	Nomenclatura que utilizaremos
Neutralização de termos	Tec. (NT)
Testar igualdade	Tec. (TI)
Transpor termos ou coeficientes	Tec. (TTC)
Desenvolver ou reduzir expressões	Tec. (DRE)
Reagrupar termos semelhantes	Tec. (RTS)

Fonte: Barbosa e Lima (2015) *apud* Santos (2019, p. 13).

Essas técnicas estão associadas aos subtipos de equações do tipo $ax + b = c$, onde a, b e c são constantes reais:

- Técnica de Neutralização de termos (NT): Somar simétricos aos termos que se deseja neutralizar em ambos os membros da igualdade para isolá-lo;
- Técnica de testar igualdade (TI): Atribuir valor a incógnita para que a equação fique equilibrada, onde é pode-se verificar o único da incógnita capaz de satisfazer a equação;
- Técnica de Transposição termos ou coeficientes (TTC): Inverter as operações para a simplificação dos cálculos;
- Técnica de desenvolver ou reduzir expressões (DRE): Consiste na junção com as técnicas anteriores para reduzir ao máximo e obter o valor da incógnita;
- Técnica de Reagrupar termos semelhantes (RTS): Juntar os termos (literal ou não) semelhantes e utiliza a soma/subtração para resolver a equação.

Ponte, Branco e Matos (2008, p. 89) destacam cinco dificuldades da fase pré-algébrica encontradas nos alunos, destacando a falta da compreensão do significado das expressões algébricas e das suas condições de equivalência, a partir da:

- E1 – Adição incorreta dos termos semelhantes;
- E2 – Adição incorreta dos termos não semelhantes;
- E3 – Interpretação incorreta dos monômios do 1º grau;
- E4 – Separação da parte literal e a parte numérica;
- E5 – Resolução incorreta de uma equação do tipo $ax = b$.

São erros esses comuns na resolução de equações que podem revelar lacunas de compreensão enraizadas na transição da Aritmética para a Álgebra.

> Muitas das dificuldades dos alunos na resolução de equações surgem dos erros que cometem no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado destas expressões ou as condições da sua equivalência. Boa parte destas dificuldades tem a ver com o facto de os alunos continuarem a usar em Álgebra os conceitos e convenções aprendidos anteriormente em Aritmética. Verificam-se, também, dificuldades de natureza pré-algébrica, tais como a separação de um número do sinal “menos” que o precede (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 96).

No Quadro 6, estão indicados alguns dos erros e dificuldades comuns dos alunos na resolução de expressões algébricas e equações, que podem estar relacionados ao conceito do objeto e até mesmo das experiências anteriormente vividas em sala de aula (Ponte; Branco; Matos, 2008, p. 92).

Quadro 6 – Erros e dificuldades na resolução de equação do 1º grau

Erro/ Dificuldade	Autor/es
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+" e "-" como indicadores de uma ação.	Booth (1984, 1988), Kieran (1981, 1992), Küchemann (1981), MacGregor e Stacey (1997)
Interpretação incorreta de monômios do 1º grau	Booth (1984)
Uso de parêntesis	Kieran (1992), Socas, Machado, Palarea e Hernadez (1996)
Não saber como começar a resolver uma equação	Kieran (1985)
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número	Kieran (1985)
Adição incorreta de termos semelhantes	Kieran (2006)
Adição incorreta de termos não semelhantes	Kieran (1985)
Transposição incorreta de termos	Kieran (1985, 1992)
Redistribuição	Kieran (1992)
Eliminação	Kieran (1992)
Conclusão incorreta da resolução da equação	Kieran (1985, 1992), Lima e Tall (2008), Vlassis (2001)

Fonte: Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2008, p. 93).

Esses pesquisadores ainda citam quatro pontos a serem observados que podem ser a origem das dificuldades dos alunos, e que podem estar associados a diferentes estágios do desenvolvimento da sua linguagem algébrica, podendo gerar diversas interpretações como mostra o Quadro 7:

Quadro 7 – Possíveis dificuldades

Interpretações	Atitude
Uso da intuição e raciocínio sobre notações não familiares	Utilizar estratégias convenientes, esquecer a letra proposta no enunciado e/ou atribuir valor a letra.
Estabelecimento de analogias com o uso de simbólicos do cotidiano, outras áreas da Matemática ou de outras disciplinas	Atribuir valor a letra na ordem alfabética.
Interferência de outras aprendizagens em Matemática	Resolver corretamente a equação e verificar outra maneira de solução sem necessidade.
Influência de materiais e estratégias de ensino pouco adaptadas.	Dissociar as letras já abreviadas as palavras ou objetos.

Fonte: Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2008, p. 94).

Antes, os princípios de equivalência eram apresentados como teoremas com demonstrações munidas das propriedades das operações numéricas, e ao decorrer do tempo, deixaram de ser apresentadas, chegando aos estudantes como "regras práticas" que tendem a otimizar o processo de resolução de equações, como:

> O princípio de equivalência que indica que se pode somar ou subtrair a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação deixou progressivamente de ser enunciado deste modo, passando a ser substituído

> pela regra prática de transposição que nos permite mudar um termo de membro trocando-lhe o sinal. O princípio de equivalência que afirma que podemos dividir ou multiplicar ambos os membros de uma equação por um dado número diferente de zero passou a ser ele próprio enunciado como regra prática. Finalmente, o princípio de equivalência que indica que podemos substituir uma expressão dada por outra expressão equivalente deixou, em muitos casos, de ser enunciado (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 95).

A falta de explicação desses princípios "pode reforçar uma perspectiva da Matemática como conjunto de regras arbitrárias. É importante, por isso, que os alunos tenham uma percepção de onde vêm essas regras práticas e qual a sua justificação" (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 95).

O recomendável para a aprendizagem da resolução de EPG é que as técnicas estejam vinculadas aos princípios de equivalência, no qual "os alunos devem começar por resolver equações simples, envolvendo no máximo duas operações" (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 94) para posteriormente entenderem a necessidade da operação inversa.

Ponte, Branco e Matos (2009) ressaltam que o modelo da balança de dois pratos facilita a compreensão da operação que elimina o mesmo termo de ambos membros, entretanto deve ser usado com atenção. Há a possibilidade de que haja estudantes que nunca viram uma balança e não saibam intuitivamente do seu funcionamento.

> Neste caso, como em muitos outros, a aprendizagem dos alunos depende do modo como este material é usado. É importante que os alunos possam fazer as suas experiências e discutir os resultados uns com os outros, bem como relacionar o que se passa na balança com o que se passa nas expressões algébricas (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 95).

Contudo, Almeida (2016, p. 60) associa ao uso desse modelo a equação $3x + 100 = 10$ à técnica e diz que "isso não é o suficiente para garantir que ele compreendeu a equação enquanto uma relação de igualdade numérica, e que o 'X' é um número desconhecido a ser encontrado". Ele sugere que, para que seja construído o significado/sentido de equação como igualdades numéricas, o estudante deve perceber a relação de existência entre os membros da equação e isso o qualifica a estar pensando algebricamente.

3.4 Os Registros Semióticos em equações do 1º grau

As dificuldades em aprendizagem de Matemática impulsionaram Reymond Duval a criar a Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS). Esta teoria investiga as variadas maneiras pelas quais são exteriorizadas as representações mentais do sujeito mediante a conceituação de determinado objeto, situação e mobilização de um pensamento.

Duval (2012) explica que a palavra *semiose* (signo) se refere a apreensão ou produção de representação e *noesis* (intelecto) a apreensão conceitual de um objeto, sendo essas palavras inseparáveis.

> As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que têm inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem (Duval, 2012, p. 4).

Duval (2012, p. 6) ainda reforça que “na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro”; e adverte que o objeto não deve ser confundido com suas representações, elas devem viabilizar o reconhecimento desse objeto às suas representações.

De acordo com Duval (2012, p. 6-8), os registros de representações devem permitir três atividades cognitivas ligadas a semiose:

- A *formação de uma representação identificável* ligadas as regras e seleção dos dados característicos do objeto;
- O *tratamento* de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é a transformação interna a um registro;
- A *conversão* de uma representação é a transformação desta representação em um registro em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente de conteúdo da representação inicial.

O artigo desenvolvido por Pires e Rodriguês (2020) buscou investigar se as abordagens conceituais de alguns livros didáticos possibilitam a transição entre diversas representações e transformações no processo de conceituação de equações do 1º grau (EPG) com uma incógnita com base na TRRS. Como resultado dessa pesquisa, os pesquisadores observaram que o objeto matemático em estudo poderia ser abordado com maior diversidade de registros e conversões.

Dos livros analisados, perceberam que nenhum

> [...] aborda o conceito de EPG com uma incógnita usando o registro inteiramente na língua natural, como por exemplo 'o triplo de um número adicionado a cinco resulta em oito'. Tal abordagem permitiria a relação do novo conteúdo com ideias vistas nos anos anteriores e a relação com os conhecimentos aritméticos dos estudantes (Pires; Rodriguês, 2020, p. 7).

A TRRS "mostra que não basta apenas o uso dos diversos registros semióticos de um mesmo objeto matemático, mas sim se este material possibilita a coordenação de diferentes registros pelo estudante" (Pires; Rodriguês, 2020, p. 7) para o desenvolvimento da conceituação do estudante.

> De fato, as representações semióticas assumem um papel considerável, já que os objetos matemáticos se tornam acessíveis apenas através de suas representações, sendo que, além disso, um mesmo objeto matemático poderá ter diversas representações, em que cada uma evidenciará diferentes conteúdos do objeto estudado (Pires; Rodriguês, 2020, p. 4).

Duval (2003) *apud* Pires e Rodriguês (2020, p. 5), expressam a importância de reconhecer diversos registros, enfatizam que o objeto não deve ser confundido à sua representação e explicam que os objetos matemáticos devem pautados em dois tipos de representações: *tratamento* e *conversão*.

Pires e Rodriguês (2020) ainda ressaltam que o registro de representação evidencia e possibilita o acesso ao objeto matemático, e destacam que, se a finalidade de pesquisas em aprendizagem matemática são as dificuldades, o estudo deve estar pautado na conversão das representações, não somente nos tratamentos.

> Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. É enganosa a ideia de que todos os registros de representações de um objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros (Duval, 2003, p. 31 *apud* Pires; Rodriguês, 2020, p. 4-5).

Em um dos livros, observaram que foi apresentada uma equação em linguagem algébrica seguida de alguns tratamentos em registro algébrico e explicados em língua natural pelos princípios aditivo e multiplicativo; à luz da TRRS, Pires e Rodriguês (2020, p. 10) explicaram que esse tipo de abordagem não caracteriza uma conversão.

Outra observação se refere à conversão de registro em língua natural para o registro algébrico decorrente de tratamentos que determinam e verificam a solução do problema.

> [...] a conversão feita da língua natural para o registro algébrico é uma via de mão única, ou seja, não há um paralelo entre os registros ou ainda a volta ao registro inicial no decorrer da resolução. Assim, é difícil dizer que o uso feito dos dois registros levem a completa coordenação destes, principalmente quando observamos que um destes serve apenas de ponto de partida (Pires; Rodriguês, 2020, p. 11).

Vale ressaltar que "focar em um processo de conversão em um único sentido pode fazer com que o processo de aprendizagem dos estudantes não seja potencializado, segundo a TRRS" (Pires; Rodriguês, 2020, p. 14). No mínimo, dois registros de representação semiótica devem ser utilizados para que o estudante mobilize a apreensão conceitual do objeto de diferentes maneiras.

A forma de conversão do registro figural para o algébrico mais completa para compreensão do conteúdo e coordenação dos registros utilizados, é a "conversão do registro figural para o algébrico, seguida de um tratamento apontando em língua natural que é feito no registro figural de forma a buscar solução do problema" (Pires; Rodriguês, 2020, p. 10).

Pires e Rodriguês (2020), sugerem atividades que leve o estudante a buscar diferentes interpretações das representações abordadas e o permita transitar entre os registros. Isso pode ocorrer a partir da equação em forma figural, solicitar a conversão para o registro algébrico e a volta para o registro inicial.

Oportunizar ao estudante diversas representações semióticas de um mesmo objeto é um elemento crucial, pois permite estabelecer de maneira diversificada aquisição de conhecimento conceitos e significados no processo de aprendizagem.

3.5 A Teoria das Situações Didáticas no processo de aprendizagem em Álgebra

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi proposta pelo matemático francês Guy Brousseau que visa modelar, a partir de situações, o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos contribuindo para a produção de um conjunto de conhecimentos.

Segundo Brousseau (2008), uma "situação" é a ferramenta utilizada pelo professor que promove a interação do sujeito com o *milieu* (meio), sendo por textos ou até mesmo com materiais que auxiliam na transmissão do conhecimento. Porém, o que ele propõe como objeto de estudo são as circunstâncias, ou seja, as situações que levam à difusão e a aquisição dos conhecimentos.

O autor identifica como *situações matemáticas* as atividades matemáticas em que o aluno se desenvolve sem a intervenção do professor, enquanto as *situações didáticas* descrevem atividades do professor e do aluno, levando em conta o contexto entre o aluno, o professor e o sistema educacional.

Em relação a essa teoria, Almouloud (2007) explica que é pela interação com o *meio* que o aluno se adapta, aprende e supera um conhecimento anterior, desde que o professor crie e organize o *meio* com intencionalidade didática engajada nos saberes matemáticos.

Conforme Brousseau (2008), *meio* material é o dispositivo pelo qual se deseja ensinar ou controlar aquisição do conhecimento utilizando regras como acontece no jogo, mas para isso é necessário que haja um acompanhamento do qual se verifica se a aprendizagem pretendida foi alcançada sem que o professor interfira nesse processo. O autor traz três fases para as situações adidáticas:

1) Situação de ação: O aluno vai se deparar com um problema e aprender um método para resolvê-lo;
2) Situação de formulação: O aluno deve saber comunicar a estratégia de resolução;
3) Situação de validação: O aluno precisa convencer que a estratégia utilizada é verdadeira.

Nas duas primeiras classificações, respectivamente, o meio tem o papel de obter um padrão de resposta que serve de suporte às decisões futuras e de envolver o outro sujeito durante o processo de comunicação levando o autor da teoria determinar três categorias: Troca de informações não codificadas ou sem linguagem (ações e decisões); Troca de informações codificadas em uma linguagem (mensagens) e Troca de opiniões (exercem o papel da teoria).

Posteriormente, com as demandas que os professores tinham de verificar os conhecimentos adquiridos e se poderiam ser reutilizados com a consistência, adveio a necessidade de criar a quarta fase:

4) Situação de institucionalização: Determinados conhecimentos adquiridos se mostram fundamentais ao saber, por sua vez, é o resultado cultural de uma instituição.

Brousseau (2008) acredita que cada situação permite que o sujeito progrida na trajetória de aprendizagem, onde é possível que novas perguntas sejam feitas assim como novas respostas sejam obtidas na construção do saber, chamando esse percurso de “Dialética”. Sendo que, o aluno ao se deparar com um problema e o resolve, mostra que sabe; porém, se ele não resolver, ainda precisa de mais informação (ensino). Nesse processo, há três situações onde o professor atua e não dá respostas com a intenção de oportunizar o aluno a adquirir o conhecimento denominadas de situação adidática, situação fundamental e situação didática.

Brousseau (2008) ainda explica a existência de obras que mostram a situação de ensino de forma triangular na interação entre professor, aluno e o saber com foco na ação didática do professor, ocultando as relações existentes dos sujeitos com o meio adidático. A interação da ação didática do professor, com as informações recebidas pelo aluno e sua conexão com o *meio* refere-se a *situação adidática*.

A *situação adidática* propõe que o professor assume o papel de mediador, em que oportuniza condições para que o estudante consiga agir, falar, refletir e evoluir com autonomia, sendo ele o ator principal da aquisição e construção de novos conhecimentos a partir da situação didática (Almouloud, 2007, p. 33).

Decorrente das situações adidáticas, em um determinado momento o conhecimento matemático assumirá algumas restrições, chamada de s*ituação fundamental.* Ela não é uma situação de ensino, representa o saber (conhecimento) específico que dependerá de parâmetros externos (Brousseau, 2008, p. 36).

> Assim, uma situação fundamental constitui um grupo restrito de situações adidáticas cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada/indicada, situações que permitem introduzir os conhecimentos em sala de aula numa epistemologia propriamente científica (Almouloud, 2007, p. 34).

Enquanto o termo *situação didática* é usado na adequação de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos servindo como modelagem para a colaboração e formação dos sujeitos, deixando evidente que isso é possível quando há “a intenção de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais)” (Brousseau, 2008, p. 51).

Numa situação didática, o *meio* se caracteriza pela interação do aluno com os problemas postos pelo professor. Nesse sentido, a *devolução* se refere a forma como os problemas são propostos, deve-se então provocar interação suficiente e permitir o desenvolvimento autônomo do aluno. Esse é “o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema aceitando as consequências dessa transferência" (Almouloud, 2007, p. 35).

Das responsabilidades que interligam o professor (emissor de sinais), aluno (receptor) e os instrumentos que dão condição ao avanço, o autor chama de "contratos" a emissão do conhecimento, a comunicação, a habilidade e a produção de um novo saber quando emissor, a partir de fundamentação teórica, se responsabiliza com o conteúdo (instrumento) e seus efeitos no receptor.

As *situações-problema* permitem que o estudante mobilize seus conhecimentos no processo de aprendizagem, enquanto o mediador (professor) provoca debates das descobertas do estudante.

> situação-problema a escolha de questões abertas e/ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos. Sua função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões colocadas pelos alunos no momento da resolução do problema (Almouloud, 2007, p. 174)

As atividades devem levar em consideração os resultados previstos pelo mediador/orientador e permitir que o aluno desenvolva competências e habilidades no processo de aprendizagem. Segundo Almouloud (2007) explica que se deve delimitar quais são as variáveis didáticas que se deseja provocar para o alcance dos objetivos:

> - Auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes de uma maneira construtiva e significativa.
> - Desenvolver certas habilidades como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar as diferentes representações matemáticas, bem com desenvolver o raciocínio dedutivo (p. 174).

Esses objetivos se mostram capazes de serem alcançados quando o mediador os traça com uma intencionalidade, mostrando-se necessário que as situações-problema careçam mobilizar o estudante a utilizar diferentes representações e linguagens.

No ponto de vista de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 90) "a primeira etapa da Educação Algébrica deve ser o trabalho com situações-problema. Esse trabalho deve ser realizado de forma a garantir o exercício daqueles elementos caracterizadores do pensamento algébrico destacados anteriormente".

Poderemos então, associar a TSD ao que Fiorentini, Miorim e Miguel (2008, p. 90) sugerem:

> Se na primeira etapa o objetivo é chegar às expressões simbólicas através de análise de situações concretas, na segunda, trata-se de percorrer o caminho inverso. Agora, convém partir da expressão algébrica – uma forma pura – e tentar atribuir-lhe algumas significações que ela comporta.
> Finalmente, na terceira etapa, a ênfase deve recair sobre o transformismo, isto é, sobre o modo como uma expressão algébrica transforma-se em outra equivalente e sobre os procedimentos que legitimam essas transformações.

A ordem das etapas sugeridas é flexível e pode ser adaptada, de modo que a interação entre elas permita que o estudante revise ideias e o oportunize a construção mais desenvolvida do pensamento algébrico (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993, p. 90).

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

O presente capítulo apresenta o percurso teórico-metodológico percorrido para a realização deste estudo. Nesta pesquisa adotamos os pressupostos da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa para estruturar o processo de concepção e análise *a priori* de duas sessões de ensino que tem como foco equação polinomial do 1º grau atrelado ao reconhecimento dos indicadores do Pensamento Algébrico.

De acordo com nossas pesquisas, percebemos que o Pensamento Algébrico ainda é pauta de consenso quanto a uma definição precisa por se tratar de um objeto ambíguo para a Educação Matemática.

Reconhecemos como Pensamento Algébrico (PA) aquele que pode ser expresso de diversas maneiras um pensamento, envolvendo a capacidade de construir significados para os objetos matemáticos através da utilização de variadas representações e linguagens (natural, aritmética, geométrica ou algébrica) com ou sem o domínio da linguagem simbólica na interpretação e resolução de problemas munidos ou não de técnicas.

A Engenharia Didática faz analogia ao trabalho de um engenheiro que, para exercer sua profissão, é necessário um conjunto de conhecimentos científicos do seu domínio profissional da mesma maneira que o professor precisa adquirir para exercer seu trabalho em sala de aula.

Umas das referências para a criação dessa metodologia foi a Teoria das Situações Didáticas (TSD) criada por Brousseau, que visa estimular o estudante a desenvolver habilidades como agir, falar, refletir e evoluir ativamente na construção de novos conhecimentos por meio de situações contextualizadas a partir das interações entre professor, aluno e o saber com a intenção de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

> Dentre os estudos desenvolvidos pela Didática da Matemática, a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau e as reflexões sobre Transposição Didática proposta por Yves Chevallard, têm sido citadas por vários pesquisadores como uma referência teórica para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula (Filho, 2019, p. 1).

Essa metodologia é constituída por quatro fases: (1) Análises prévias, (2) Concepção e análise *a priori*, (3) Experimentação e (4) Análise *a posteriori* e validação. Essa é uma metodologia de pesquisa caracterizada pelo processo experimental que visa a construção, realização, observação e análise de sessões de ensino através da comparação (validação) entre a análise *a priori* e a *análise a posteriori*. A “validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste” (Almouloud, 2007, p. 171).

É na primeira fase que são realizadas as análises prévias, com o objetivo de “identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa” (Almouloud, 2007, p. 172) desde de que haja estudo da organização matemática, análise da organização do objeto matemático escolhido e definição da/s questão/ões da pesquisa.

Com os subsídios da Engenharia Didática, nesta fase recorremos a BNCC, DCRB e PCN, documentos que orientam a estrutura do trabalho pedagógico, os saberes e conhecimentos matemáticos relacionados ao objeto de conhecimento Equação Polinomial do 1º grau e elaboramos uma sequência didática (SD) como instrumento com o objetivo de reconhecer os indicadores do desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

A partir da seleção das situações propostas por livros didáticos, buscamos realizar adaptações das atividades que se aproximassem da realidade vivida do estudante inserido na escola pública e dos livros didáticos que são usados.

Utilizamos em nossas análises os indicadores do Pensamento Algébrico sugeridos por Silva (2012, p. 41) para atividades sobre EPG relacionadas ao uso das variáveis. As atividades foram elaboradas levando em consideração os resultados dos estudos prévios sobre Pensamento Algébrico poderá mobilizar ao estudante desenvolver competências e habilidade sobre este objeto matemático em acordo com a habilidade EF07MA18 da BNCC.

Para cumprimento da segunda fase, nos detivemos na concepção e análise a priori dos problemas e construção do conhecimento levando em consideração os indicadores do Pensamento Algébrico, como eles se relacionam a cada nível de PA e como permitem a construção do conceito de equação.

As situações presentes na primeira sessão foram desenvolvidas com a perspectiva de evidenciar alguns indicadores do PA relacionados com as EPG, tais como:

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos;*

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema;*

Indicador 3: *Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema;*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples;*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita;*

Indicador 10: *Perceber o uso da variável como número genérico;*

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

Ao longo das atividades reforçamos alguns conhecimentos prévios juntamente com aqueles que foram desenvolvidos na sessão anterior, e por isso destacamos a presença do/s:

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos;*

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema;*

Indicador 4: *Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica;*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples;*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita;*

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

Percebemos que, quando se tratam de EPG, é imprescindível que o estudante demonstre/desenvolva alguns indicadores da sua linguagem algébrica. Em ambas sessões os indicadores 1, 2, 5, 6, 9 e 12 se fazem presentes para que ele estabeleça relações/comparações entre as equações em língua natural, perceba e tente expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes as situações sugeridas, interprete a igualdade como equivalência entre duas grandezas, transforme uma equação em outra equivalente mais simples, perceba que a variável é tratada incógnita e desenvolva a linguagem simbólica ao se expressar levando-o às técnicas de resolução com compreensão.

Outros indicadores também serão desenvolvidos em conexão com o objeto matemático equação polinomial do 1º grau, porém não são tão recorrentes quanto os mencionados no parágrafo anterior:

Indicador 3: *Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema;*

Indicador 4: *Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica;*

Indicador 10: *Perceber o uso da variável como número genérico.*

Na SD ajustamos o conceito de equação do livro Araribá Conecta Matemática do 7º ano de Gay (2022, p. 173): “Equação é uma sentença matemática com sinal de igual (=) em que números desconhecidos são representados por letras, denominadas incógnitas”. Trazemos também as concepções do símbolo de igualdade conforme o aporte teórico, esperamos que o estudante construa a ideia de que o símbolo de igualdade tem o sentido de equivalência condicional.

Ao decorrer das situações, almejamos que os estudantes possam compreender os dados apresentados em cada atividade, tomando o cuidado de engajá-lo na resolução utilizando seus conhecimentos disponíveis, devendo colocar efetivamente exploração dos seus conhecimentos em que o objeto está inserido. Com os indicadores, esperamos associá-los aos possíveis erros, dificuldades e estratégias que o estudante poderá recorrer durante a resolução das situações e comentar a que nível do PA foi alcançado ou no qual ele possivelmente se encontra.

Em alguns momentos comentamos sobre o modelo dos Níveis de Pensamento Algébrico sugeridos por Almeida (2016) que podem ser mobilizados durante a resolução das atividades sugeridas. Precisamos deixar evidente o que Hilário et al. (2021) disseram sobre esses níveis: ainda prevalece uma lacuna ao conectar esses níveis às estratégias de resolução. Durante o percurso da SD queremos incentivar o estudante que possivelmente se encontra nos níveis 0 e 1 possa se desenvolver para o nível 3 se munindo da formalidade da linguagem matemática sem que ele perceba.

A ideia é que essas situações favoreçam o desenvolvimento da habilidade EF07MA18 da BNCC que consiste em “Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade" (Brasil, 2018, p. 307).

Essas atividades podem ajudar explicitar conhecimentos antigos insuficientes para a resolução de alguns problemas propostos justamente por desejarmos que o estudante alcance um outro nível de conhecimento e acreditamos que esse obstáculo poderá ser superado. Isso poderá ser concebido a cada passo no ato de construção do objeto, salientadas pelos momentos da linguagem algébrica que demonstram a evolução do estudante ao expressar matematicamente ideias concisas quanto à interpretação significativa dos símbolos.

Sugerimos que esta SD seja aplicada em duplas ou trios de estudantes para que participem, discutam, expliquem e troquem ideias entre eles, motivando-os a compreensão de diferentes perspectivas e desenvolvimento de competências sociais.

4.1 Caracterizando a Sequência Didática

Sustentados nas ideias e dos resultados de Fiorentini *et al*. (1993, 2005), Almouloud (2007), Brousseau (2008), Ponte, Branco e Matos (2008, 2009), Duval (2012), Silva (2012), Almeida (2016), Santos (2019), Pires e Rodriguês (2020), Hilário *et al*. (2021) e Oliveira (2022), foram adaptadas algumas situações propostas por livros didáticos na qual desejamos investigar se uma Sequência Didática que explora Equação do 1º grau com uma incógnita para estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental tem potencial para evidenciar indicadores do desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Na busca para alcançar os objetivos específicos da monografia, através da SD buscaremos:

- Averiguar quais indicadores do PA podem ser associados situações da SD;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade EF07MA18;
- Possibilitar a construção, representação e conceituação de equação polinomial do 1º grau com uma incógnita;
- Representar/traduzir situações-problema envolvendo as equações do 1º grau;
- Resolver equações do 1º grau com base nos princípios de equivalência;
- Estimular o desenvolvimento do Pensamento Algébrico (PA) por meio de equações do 1º grau.

Além disso, é esperado que as estratégias de resolução sejam associadas aos níveis do PA, e para isso, buscamos por situações que se aproximem da realidade escolar do ensino público e dos livros didáticos que são usados no Ensino Fundamental II. Uma das atividades é sugerida por Ponte, Branco e Matos (2009, p. 94) para domínio das técnicas de resolução de equações e as demais situações são trazidas dos livros que trataram de equações durante as apresentações, introduções e atividades sugeridas.

As adaptações foram realizadas a partir dos seguintes livros didáticos:

Quadro 8 – Livros utilizados na SD

Títulos dos livros	**Autores/ano**
A conquista da matemática	Giovanni Júnior e Castrucci (2018)
Araribá conecta matemática	Gay (2022)
Matemática Bianchini	Bianchini (2022)
Matemática essencial	Pataro e Balestri (2018)
Matemática realidade & tecnologia	Souza (2018)
SuperAÇÃO! Matemática	Teixeira (2022)
Teláris Essencial	Dante e Viana (2022)

Fonte: Autoral.

A SD foi dividida em duas sessões:

A primeira sessão da SD foi construída na perspectiva diagnóstica, visando os conhecimentos do estudante acerca do uso e reconhecimento do símbolo de igualdade em contextos aritméticos e algébricos estimulando a conceituação de equação do 1º grau, sua representação em linguagem algébrica e a procura da solução. Ao decorrer, espera-se que o estudante relacione as grandezas envolvidas ao uso das letras (incógnitas) na compreensão da igualdade como equivalência condicional entre os membros da equação, consiga entender a construção do conceito e busque a solução da equação.

Observamos a presença dos seguintes indicadores durante o desenvolvimento da 1ª sessão da SD dispostos no Quadro 9.

Quadro 9 – Indicadores presentes na 1ª sessão da SD

		Indicadores												
Sessão	Atividades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Autor/es
	1					X								Autor
	2		X	X										Giovanni Júnior e Castrucci (2018)
	3	X	X			X				X				Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

1	4						X				X			Giovanni Júnior e Castrucci (2018)
	5		X			X				X			X	Teixeira (2022)
	6	X	X			X	X						X	Gay (2022)
	7	X												Autor
	8	X											X	Giovanni Júnior e Castrucci (2018)
	9	X	X	X		X	X			X			X	Dante e Viana (2022)

Fonte: Autoral.

Na segunda sessão, as situações trazidas estão relacionadas às técnicas de resolução das equações do 1º grau do tipo $ax + b = c$ representadas pelo equilíbrio da balança de dois pratos; desenvolvendo a argumentação que associa aos princípios aditivo e multiplicativo (propriedades da igualdade) às operações inversas e as técnicas de resolução. É necessário que o estudante compreenda a equivalência de equações, a correlação entre seus membros e a letra como incógnita, e que a ela é possível atribuir a um valor que torna a igualdade verdadeira.

No Quadro 10, estão presentes os seguintes indicadores no decorrer do desenvolvimento da 2ª sessão da SD.

Quadro 10 – Indicadores presentes na 2ª sessão da SD

		Indicadores												
Sessão	Atividades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Autor/es
2	1					X				X				Autor
	2					X	X			X				Ponte, Branco e Matos (2009)
	3	X	X		X	X	X			X			X	Gay (2022)
	4	X	X			X	X			X			X	Gay (2022)
	5					X	X							Bianchini (2022)
	6	X	X		X	X	X			X			X	Pataro e Balestri (2018)
	7	X	X				X						X	Souza (2018)
	8				X	X	X			X			X	Autor

Fonte: Autoral.

Dos indicadores do Pensamento Algébrico relacionados com as equações do 1º grau, nota-se que há aqueles que não foram evidenciados nas situações presentes das duas sessões de ensino, já que não são os propósitos da SD no momento:

Indicador 7: *Desenvolver algum tipo de processo de generalização;*

Indicador 8: *Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias;*

Indicador 11: *Perceber o uso da variável como relação funcional.*

5 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para dar início a primeira sessão, elaboramos a atividade **1** com o objetivo de diagnosticar como os estudantes reconhecem as propriedades da igualdade e a noção do uso do símbolo “=” como equivalência que é aprofundada no 6º ano.

1. Indique com V (verdadeira) ou F (verdadeira) às sentenças abaixo:

a) ( ) $2 = 7$	g) ( ) $63 - 100 = -2 - 35$
b) ( ) $3.6 = 18$ e $18 = 8 + 10$	h) ( ) $5 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2$
c) ( ) $22 + 12 = 40 - 6$	i) ( ) $6 + 9 = 15$ e $15 = 45{:}\,3$
d) ( ) $100 = 100$	j) ( ) $125 = 100 + 20 + 5$
e) ( ) $12{:}\,(-2) = -6$	k) ( ) $24{:}\,4 = 1.6$
f) ( ) $70 = 85 - 15$ e $50 + 20 = 70$	l) ( ) $2 + 4 + 8 = 2 + 13$

- Quais itens são verdadeiros? ___________________
- Por que os outros itens são falsos? _______________________________

Nessa atividade há um enfoque nas expressões numéricas em que o símbolo de igualdade tem sentido operacional, ou seja, que produz algum resultado. Serão exploradas as propriedades das relações de equivalência e solicitamos que o estudante julgue os itens de **a** até **f** como verdadeiras ou falsas conforme o **indicador 5**: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas.*

Os Itens **a** e **d**, se referem a propriedade reflexiva, que tem o sentido de identidade. Nos itens **c**, **e**, **g**, **h**, **j**, **k** e **l** pretende-se que o estudante identifique a propriedade simétrica, em que a igualdade indica que os resultados obtidos a esquerda e direita são equivalentes (possuem o mesmo valor) de modo que o estudante relacione o item **j** ao seu aprendizado sobre a decomposição de um número natural.

Já nos itens **b**, **f** e **i**, a propriedade transitiva requer um olhar mais amplo para mais de dois valores e a relação entre eles, de modo que dois valores se equivalem a um outro, significa que se equivalem entre si.

Após isso, deseja-se que sejam escritos os seguintes itens considerados verdadeiros: **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g**, **h**, **i**, **j** e **k**. Com a identificação dos itens verdadeiros espera-se que o estudante compreenda as diferentes formas de escrever o mesmo número e confirme que a igualdade nessas expressões funciona como equivalência bidirecional.

Apenas os itens **a** e **l**, são falsos para colaborar com a resposta da próxima pergunta. Se o estudante desconsiderar algum dos itens indicados no parágrafo anterior, pode significar que:

1) Ainda há dúvidas acerca do sentido do uso do sinal “=”, em especial nos itens com a propriedade transitiva;

2) Houve algum erro nos cálculos, principalmente aqueles relacionados às regras para números inteiros.

Com o questionamento: “Por que os outros itens são falsos?”, pretende-se desenvolver a argumentação para que o estudante comece a registrar por escrito suas observações. A resposta dada leva em conta a igualdade presente nessas expressões, de modo que esteja claro que o entendimento que ambos os membros correspondem aos mesmos valores e esse é um dos motivos que poderá ser usado nas respostas das atividades posteriores.

A atividade **2** foi adaptada do livro didático A Conquista da Matemática (Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p. 141) que traz a seguinte situação:

2. Daqui a 5 anos Karina terá 37 anos.

a) Qual a idade que Karina tem hoje? ______

b) Mostre no espaço abaixo como você encontrou esse valor.

Em primeira instância, o estudante deve ler a afirmação do enunciado e reter a informação da idade atual está relacionada a idade que ela terá futuramente, é a partir daqui que queremos dar indícios sobre a necessidade de usar letra como incógnita com a Ideia de ir em busca do valor desconhecido assim como diz o indicador 2.

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema).*

O item **a** pergunta “Qual a idade que Karina tem hoje?”, e para que a resposta esteja correta, é necessário entender qual a grandeza envolvida nessa situação. Nessa atividade pode-se desenvolver a noção da grandeza de tempo na perspectiva de um futuro próximo, trabalhada levando em conta a unidade de anos para representar a idade de uma pessoa (Karina), podendo estimular o raciocínio lógico e levar o estudante a pensar maneiras diferentes de como representar a situação utilizando recursos aritméticos ou algébricos.

Por isso que nessa atividade, especificamente no item **b**, associamos ao **indicador 3**: *Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema.*

Visamos incentivar o/a estudante a registrar suas respostas para que seja possível ter acesso ao pensamento que solucionou o item anterior e acreditamos que esses registros podem apresentar cálculos com as operações de adição e subtração e até mesmo frases explicativas em língua natural.

Quando pedimos que seja mostrado no espaço sugerido como o valor foi encontrado, possibilidades para representar essa situação podem ser usadas. Algumas dessas são:

- Contagem: Regredir 5 anos a partir da idade que Karina terá;
- Subtração: Subtrair 5 anos da idade futura da Karina;
- Adição: Supor valores que ao serem somados a 5 resulte em 37;
- Desenho: Ilustrar em forma de objetos as idades de Karina em cada ano, como linha do tempo ou traços.

O Pensamento Algébrico nessa situação começa a se fazer presente quando há indício de que uma letra poderá ser usada no sentido de incógnita, e o estudante que não entende isso pode demonstrar que ainda há ausência do Pensamento Algébrico (Nível 0), pois usa como argumento os recursos aritméticos como as operações e a representação de quantidades conhecidas.

Por outro lado, aqueles que apresentarem soluções que envolvem contagem e suposição de valores, isso demonstrará que possuem uma linguagem sincopada, mostrando o Pensamento Algébrico Incipiente/Primário (Nível 1). Inclusive, as respostas podem mostrar a combinação de diferentes estratégias.

Nessa atividade, é mais apropriado o uso da linguagem simbólica como os indicadores 9 e 10 sugerem, respectivamente: Perceber o uso da variável como incógnita e perceber o uso da variável como número genérico. Desse modo pode-se evidenciar que o estudante apresenta o Pensamento Algébrico Intermediário (Nível 2) com o repertório mais desenvolvido ao demonstrar que entende a relação entre as grandezas e reconhece a equação que correspondente à situação.

Porém, desejamos atingir estudantes que se apresentam nos níveis 0 e 1 para que seja possível realizar a conceituação da incógnita nas próximas atividades.

As atividades **3** e **4** também foram adaptadas do livro A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018, p. 139) que visam preparar o trabalho com equações e incógnitas:

3. Hoje Fernando tem 10 anos. Qual será a idade de Fernando nesse mesmo mês e dia daqui a:

a) 3 anos? Representação: $10 + 3 = 13$ anos.

b) 11 anos? Representação: $10 + \_\_ = \_\_\_$ anos.

c) 25 anos? Representação: $\_\_ + 25 = \_\_\_$ anos.

d) 37 anos? Representação: $\_\_ + \_\_ = \_\_\_$ anos.

e) i anos? Representação: $\_\_ + \_\_ = 40$ anos.

A representação utilizou a idade atual somada a uma quantidade de tempo para saber quantos anos Fernando fará. Sabendo disso, a letra i significa o que? ________.

Ainda mantendo a grandeza de tempo em anos, essa atividade inicia na perspectiva da idade atual de Fernando, 10 anos de idade. Nesse quesito, acreditamos que o enunciado se mostra esclarecido para o leitor situar-se rapidamente ao que será pedido.

A seguir, a pergunta quer saber qual será a idade de Fernando levando em conta o mesmo mês e dia em alguns anos futuros do ponto de vista do leitor dessa situação, tornando-a atemporal em relação ao momento que o estudante se proponha a resolver a atividade.

O item **a** sugere que se passarão 3 anos, e nele, introduzimos a palavra “representação” com a finalidade de mostrar ao estudante que demonstra Ausência do Pensamento Algébrico (Nível 0) que ele pode usar os seus conhecimentos para completar os espaços faltosos.

Indicamos o primeiro item com resposta na tentativa de conduzir o raciocínio de que o primeiro espaço se refere a idade atual, já o segundo espaço aos anos que se passarão e o terceiro, a idade que Fernando terá. Nessa ordem os espaços dos itens **b** e **c** devem ser preenchidos e ao se deparar com o item **d**, esse preenchimento seja automático.

O item **e** sugere “i” anos, devendo ser preenchido da mesma maneira que as anteriores, no entanto, a compreensão ao formato de uma equação começa a ser desenvolvido a partir de agora. Pois, a letra i está sendo trabalhada no contexto de um valor específico e desconhecido. Faz-se necessário observar que o sinal de igualdade dá ideia de equivalência condicional para ambos os lados da expressão, tornando-a verdadeira se houver um valor específico para a letra i.

Seguido disso, a frase “A representação utilizou a idade atual somada a uma quantidade de tempo para saber quantos anos Fernando fará” utiliza a língua natural para descrever a situação traduzindo o que foi realizado nos itens dessa atividade.

Então, vem a pergunta “Sabendo disso, a letra i significa o que?” que requer atenção. Apesar da idade de Fernando ser 40 em i anos, a pergunta não quer saber o valor de letra representada, o desejado é o significado da letra. Para isso, é preciso que o estudante releia a frase anterior a pergunta e compare ao que já foi realizado nos itens anteriores. A resposta deve remeter a palavra “anos”, mostrando que aquela letra foi entendida corretamente.

O estudante que mostra estar na fase do pensamento pré-algébrico até pode utilizar a letra em suas respostas, mas não consegue associar esse símbolo a um número generalizado; enquanto aquele que está na fase de transição do pensamento pré-algébrico ao algébrico evidencia indicadores da presença do Pensamento Algébrico, como:

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos;*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita.*

Até o momento, encaminhamos ao leitor a compreensão do significado da letra, lidar com diferentes representações (língua natural e algébrica) e o formato de uma equação começou a ser mostrada.

Ressaltamos que essas atividades iniciais estão voltadas aos níveis 0 e 1 do Pensamento Algébrico, o que nos leva ao questionamento: E como o estudante que se apresenta no nível de Pensamento Algébrico Intermediário (Nível 3) lida com esse tipo de atividade?

Imaginamos que o significado da letra para esse nível se mostrará compreendido se vier acompanhada de “anos que se passarão [para obter 40 anos]”, demonstrando que há o estabelecimento das relações entre as quantidades e já reconhece a equação que se enquadra a situação. Então, além de contemplar os indicadores anteriores, também se faz presente o indicador 2.

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema.*

A proposta para a atividade **4**:

4. Quando Carlos subiu na balança, o visor mostrou 46 kg. Quantos quilogramas ele terá se:

a) ganhar 10 kg? Representação matemática: $46 + \_\_\_ = 56$ kg

b) perder 5 kg? Representação matemática: _____________ kg

c) ganhar 13 kg? Representação matemática: _____________ kg

d) ganhar w kg? Representação matemática: $(46 + w)$ kg

e) perder x kg? Representação matemática: _____________ kg

f) ganhar y+1 kg? Representação matemática: _____________ kg

g) ganhar z+8 kg? Representação matemática: ______________kg

Nessa situação, para saber a quantidade de kg que Carlos terá foram usadas as operações de adição e subtração com os possíveis pesos. Assim, para representar que Carlos perderá peso deve ser usada a operação de _______________ e as letras w, x, y e z significam os ________ que Carlos pode ganhar ou perder.

Como o enunciado da situação sugere, Carlos subiu numa balança e o visor mostrou que seu peso era de 46 kg naquele momento. Após isso, cria-se um leque de possibilidades para ganhos ou perdas de pesos que ele poderá atingir.

No item **a**, há a ideia de que falta algum peso e quando o estudante ler “ganhar 10 kg?” espera-se que intuitivamente a operação de adição seja lembrada, pois o propósito é juntar o peso atual de Calos com o possível valor a ser ganho para obter 56 kg. Agora temos o formato de uma equação sugerida sem o estudante perceber o que é esse objeto matemático.

Ainda no item **a** o estudante deverá recorrer à representação aritmética já que valor que falta é indicado e, presumimos que nos itens **b** e **c**, ele esteja familiarizado ao que precisa fazer para completar os espaços e o use o símbolo de “=” com o sentido de obter o resultado em kg.

Já no item **d**, a representação matemática sugerida refere-se a linguagem algébrica, contendo números e letras, objeto de conhecimento do qual supomos que tenha sido trabalhada antes da aplicação dessa sequência. Caso contrário, se isso chamar a atenção do estudante e ele pergunte ao professor, se faz necessário explicá-lo que a falta da "=" diz respeito a não saber o valor específico de w, não podendo obter um resultado numérico ainda.

Desse modo, a letra se apresenta como um número genérico (Indicador 10), podendo representar um número qualquer e ao realizar a operação, resultará no peso desejado, introduzindo o princípio aditivo. O mesmo ocorre no item **e**, o que diferencia esses itens é a operação a ser utilizada, já que a perda de peso estará bem representada pela operação de subtração.

Indicador 10: *Perceber o uso da variável como número genérico.*

Observe que na atividade anterior solicita-se o preenchimento dos espaços com a grandeza trabalhada, pretende-se com isso atingir uma "representação" que permite recorrer a uma linguagem que utilize os elementos apresentados na situação.

Desse modo, a atividade requer uma "representação matemática" que deve levar em conta os elementos apresentados e aos poucos eles possam construir com a linguagem matemática adequada, por isso cabe ao estudante associar a representação solicitada à linguagem algébrica (números e letras) incluindo o significado da operação.

Os itens **f** e **g** seguem o mesmo raciocínio proposto nos itens anteriores, porém espera-se que as respostas sejam obtidas através do cálculo mental entre os termos semelhantes. Na sugestão apresentada, identifica-se a falta da igualdade, e, se ainda assim o estudante utilizar a linguagem algébrica para abreviar suas respostas como no indicador 6, é indicativo que ele consegue entender a necessidade do uso da igualdade para dar uma resposta mais concisa.

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples.*

Destacam-se evidências do indicador 12, de modo que os possíveis passos sejam as respostas que preenchem os espaços dos itens, respectivamente:

Quadro 11 – Possíveis respostas para os itens f e g

Passos	**Item f**	**Item g**
I	$46 + y + 1$	$46 + z + 8$

II	$46 + 1 + y$	$46 + 8 + z$
III	$y + 47$	$54 + z$

Fonte: Autoral.

Ao apresentar essas respostas, pode significar que ele entende a igualdade como uma identidade e respeita a propriedade simétrica.

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

Com o preenchimento dos itens, o estudante deverá ler a frase que sintetiza o contexto da situação buscando completar o sentido da mesma. Queremos conduzir o estudante à compreensão do significado para essas letras, podendo completar o espaço usando uma dessas palavras: peso, quilogramas, quilos, kg.

Dessa maneira, se Carlos perder peso deve ser usada a operação de subtração entre as grandezas das quais as letras w, x, y e z significam os possíveis pesos em kg que Carlos pode obter, através do ganho ou da perda de peso.

A atividade **5** traz uma adaptação da situação do livro didático SuperAÇÃO! (Teixeira, 2022, p. 133), que sugere como desafio responder a pergunta que Marília fez a Rodrigo.

5. Marília e Rodrigo estão brincando de desafios matemáticos. O desafio que Marília propôs está indicado a seguir.

a) Como Marília não disse que número ela pensou, podemos escolher uma letra do alfabeto para representar esse número. A letra escolhida foi ___.
b) “Pensei em um número, adicionei 5 unidades a ele”, como podemos representar matematicamente essa parte da frase? ________.

Após isso, obteve o 12 como resultado. c) Assim, a frase “Pensei em um número, adicionei 5 unidades a ele e obtive 12” ficaria melhor representada da seguinte forma: ________=____ A representação matemática é chamada de sentença e, para que ela seja verdadeira, a letra que você escolheu precisa representar um único valor que é desconhecido, da qual é chamada de **incógnita**. d) Qual é o número que podemos colocar no lugar da incógnita para tornar a sentença verdadeira? ____.

Seguida das atividades anteriores que davam indícios da necessidade do uso das letras e, de certa forma, da igualdade, como menciona o enunciado, Marília e Rodrigo estão se desafiando. Ela faz uma pergunta que deixa ele sem saber o que responder, como mostra o balão “?” do pensamento de Rodrigo.

Nessa situação objetivamos conduzir a resolução com foco na construção do conceito de equação, levando em conta o entendimento dos elementos que constituem uma equação e solução, por isso dividimos em itens.

Iniciamos o item **a** na percepção sugerida pelo indicador 9, no qual argumentamos que Marília não expressou em que número pensou e por esse motivo o número desconhecido será representado por uma letra qualquer do alfabeto escolhida pelo estudante.

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita.*

Para satisfazer o que é pedido no item **b**, o estudante precisa usar a letra escolhida no item anterior e entender que “adicionei” se refere a operação de adição para tornar o fragmento da fala de Marília matematicamente bem representada, será preciso utilizar a linguagem algébrica como sugere o Indicador 2, sendo a resposta: $x + 5$.

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema.*

No item **c**, esperamos que o estudante retorne a leitura do item anterior para conseguir preencher os espaços, e deseja-se que ele entenda que o fragmento da frase que diz “obtive 12” está se referindo ao sinal “=” como resultado da operação realizada, ficaria da seguinte forma: $x + 5 = 12$. Assim estaríamos prezando a escrita matemática por parte do estudante e fornecendo elementos para o desenvolvimento dos indicadores 5 e 12.

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas.*

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

Ao realizar o preenchimento do item **c**, trazemos o conceito do que vem a ser uma sentença, que refere a representação matemática onde a letra escolhida representa a incógnita que torna a sentença verdadeira.

Por sua vez, no item **d**, desejamos que o estudante realize a seguinte leitura do item anterior "qual o número somado a cinco é igual a doze?" e atribua ao valor 7 a incógnita que possa satisfazer/equilibrar a equação. Consequentemente, presumimos que o Pensamento Algébrico Incipiente/Primário (Nível 1), com a presença da linguagem sincopada se desenvolveu ou está se desenvolvendo com a naturalidade planejada.

Trazemos agora a situação adaptada do livro Araribá Conecta Matemática (Gay, 2022, p. 173) sobre Amanda e a compra de algumas caixas de leite no mercado.

6. Amanda foi ao mercado comprar algumas caixas de leite e gastou ao todo, R$ 15,00.

a) Como não foram indicadas quantas caixas de leite Amanda comprou, escolha uma letra do alfabeto (incógnita) que possa representar o número de caixas. Escolhi a letra ___.
b) De acordo com a imagem, cada caixa custa ___ reais.
c) Podemos representar matematicamente o preço de cada caixa de leite multiplicando pelo número de caixas compradas. Como ficaria isso? ______.
d) Segundo enunciado, qual o valor total gasto por ela? ____ reais.
e) Podemos dizer que o preço de cada caixa de leite com a quantidade de caixas compradas é ___________ ao valor total gasto por Amanda.
f) Utilizando as informações que você preencheu nos itens c e d, qual a sentença matemática que representa a situação descrita no item anterior? ________________.

Chama-se **equação** a sentença matemática expressa por uma igualdade e que há pelo menos uma incógnita, que representa um valor desconhecido.

Volte ao item f para responda a seguinte pergunta:

g) Qual é o número que podemos colocar no lugar da incógnita para tornar a equação verdadeira? ____.

O número obtido chama-se **solução** ou **raiz** da equação.

Quando resolvemos uma equação, é necessário saber o **conjunto universo** ***U*** que contém todos os números que a incógnita pode assumir.

h) A incógnita poderá ser outro valor? Por que?

____

Para conduzir à resolução, no item **a** reforçamos que a letra do alfabeto escolhida tem sentido de incógnita, onde representará o número de caixas a ser encontrado. No item **b**, levamos o estudante a observação da imagem para que ele preencha o espaço que cada caixa de leite custa R$ 3,00 ficando melhor representada por 3 reais.

Vale dizer que se o estudante mostrar que tem como conhecimento prévio a representação que um número racional também fica bem representado pelo número inteiro sem a vírgula e os zeros, poderá facilitar o momento de representar a situação em forma de sentença. Nesse caso, o indicador 6 se fará presente como técnica para reduzir e resolver a equação a ser representada no item **f**, mas para isso é necessário que o estudante tenha em seu repertório a técnica DRE.

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples.*

Técnica de desenvolver ou reduzir expressões (DRE): *Consiste na junção de técnicas para reduzir ao máximo e obter o valor da incógnita.*

Já no item **c** pedimos para “representar matematicamente” visto que nas atividades anteriores esse tipo de representação sugere o uso de números e letras, ou seja, utilização de uma linguagem algébrica associada ao indicador 2 considerando o preço de cada caixa de leite multiplicado pelo número de caixas compradas.

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema.*

No item **d** queremos levar o estudante novamente observar o enunciado de que o valor total é 15 reais e no item **e**, ele preencha o espaço com a palavra “igual”. Nesse sentido, pretendemos que a igualdade seja interpretada no sentido de equivalência conforme o indicador 5, no qual o preço da caixa com a quantidade compradas equivale ao valor total de R$ 15,00 pago por Amanda. Essa é a percepção de comparação em língua natural que estimamos desenvolver no estudante, como propõe o indicador 1.

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos.*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas.*

Em síntese, o estudante deve compreender que 3,00 é o preço de cada caixa de leite, x é o número de caixas, 15,00 é o valor total gasto/pago e a igualdade tem sentido de equivalência bidirecional (em ambas as direções) e possui simetria, já que 15 pode ser reescrito como uma multiplicação.

Com os itens anteriores associados aos indicadores 1, 2 e 5, o item **f** solicita que o estudante retorne às informações respondidas e entrelace o termo “sentença matemática” com a conceituação de sentença matemática na intenção de uma representação simbólica, como sugere o indicador 12.

A depender de como o estudante se expresse e da mediação feita pelo professor, esse item oportuniza o estudante demonstrar em que nível do Pensamento Algébrico ele possa estar em relação a situações parecidas como a sugerida.

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

Isso não quer dizer que ele efetivamente esteja em um desses níveis, contudo, na resposta haverá sinais que podem evidenciar o desenvolvimento desse tipo de pensamento, e nessa circunstância, inferimos os níveis 1 e 2, pois:

- No Pensamento Algébrico Incipiente/Primário (Nível 1), o estudante utilizará a linguagem sincopada, na qual mistura a língua natural com a algébrica para argumentar o envolvimento de determinada quantidade (que ainda é desconhecida) associada a técnica de testar a igualdade com valores na tentativa de conseguir satisfazer o equilíbrio da situação;
- O Pensamento Algébrico Intermediário (Nível 2), o estudante perceberá a necessidade de recorrer à linguagem simbólica, nesse caso, reconhecerá

> que a equação representa bem a relação entre as quantidades desejadas na situação e a técnica de testar a igualdade será utilizada com o propósito de obter um único valor que satisfaz a equação.

Em seguida, ajustamos o conceito de *equação* trazido por Gay (2022) como uma sentença matemática – entendimento construído nas atividades anteriores – expressa por uma igualdade e pelo menos uma incógnita (valor desconhecido). Visto que há equações do 1º grau com duas incógnitas e esse não é o foco nessas atividades, e optamos por não colocar o símbolo "=" para que o estudante não se apresse ao pular itens e preencha o item **e** sem saber o porquê da sua utilização.

É possível que o estudante se apresente no nível 1 a partir da verificação dos indicadores presentes nas respostas dos itens **g** e **h**. Enquanto o item **g** leva à técnica de testar a igualdade (TI) para tornar a sentença verdadeira e aproveita para conceituar solução/raiz da equação, o item **h** questiona a possibilidade de outros valores para a incógnita e preza a explicação da estratégia utilizada.

Técnica de testar igualdade (TI): *Atribuir valor a incógnita para que a equação fique equilibrada, onde é pode-se verificar o único da incógnita capaz de satisfazer a equação.*

Ademais, esse tipo de situação tem o potencial de permitir a observação da transição do pensamento pré-algébrico ao algébrico entre os níveis, em vista disso, não podemos deixar de dizer que, diferentemente do Pensamento Algébrico Incipiente/Primário, ao escolher aleatoriamente valores para obter o número desejado, dará indícios de que o estudante está em uma fase que se aproxima da Ausência do Pensamento Algébrico (Nível 0) ao utilizar estratégias aritméticas e suas propriedades, como operar quantidades conhecidas.

A atividade seguinte considera que o estudante conseguiu entender e conceituar o que vem a ser a sentença matemática chamada de equação e os elementos; caso contrário, o estudante ainda apresentará dúvidas e desta maneira trouxemos algumas sentenças dispostas em forma de lista em que é solicitada a atenção para marcar quais são equações.

7. Agora que você entende o que é equação, observe com atenção e marque as sentenças matemáticas que representam equações.

a) $t + 5 = 12$	g) $25 + 4 = 29$
b) $a - 15 \neq 0$	h) $-2 + r = 0$

c) $x = -10$	i) $8 = 6y - 10$
d) $p + 10 > 67$	j) $2x + 5 < 3$
e) $c - 5 = 2$	k) $223 \neq 98$
f) $10.q = 30$	l) $7 - 3 = 2 + 2$

O que os itens não marcados faltam para que sejam equações?

____

Espera-se que o estudante perceba que apenas os itens **a**, **e**, **f**, **h** e **i** são equações, no qual o símbolo de igualdade tem o sentido de equivalência condicional entre ambas as direções e pela presença da incógnita que simboliza valor desconhecido.

Acerca de alguns desses itens se faz necessário salientar que não são equações, dado que o/s:

- Item **b**: Apesar de apresentar incógnita, o símbolo "≠" indica que a equivalência bidirecional não pode ser satisfeita, ou seja, são valores distintos;
- Item **c**: A letra se apresenta como solução para alguma equação e o símbolo de igualdade não representa uma equivalência condicional;
- Item **d** e **j**: Apresentam incógnitas, todavia os símbolos ">" e "<" utilizados para comparar os lados não representam equivalência, se mostram como desigualdades tornando essas sentenças inequações;
- Itens **g** e **l**: Não há incógnita e a presença do símbolo "=" se refere a concepção operacional, com sentido de resposta e transitividade, respectivamente, respeitando a utilização correta na identidade dos valores;
- Item **k**: Além de não apresentar incógnita, o símbolo "≠" indica que os valores não se equivalem.

No decorrer da sequência não conceituamos ou trazemos a definição de inequação, já que não é foco deste objeto matemático nesse momento, e serão estudadas posteriormente em situações que há desigualdade de valores.

É possível que haja comparação das expressões dessa atividade com os itens da primeira, então no espaço cedido para registrar a resposta em língua natural tem a finalidade de verificar a fundamentação do argumento, por isso sugerimos a presença do indicador 1.

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos.*

Então, quando perguntamos “O que os itens não marcados faltam para que sejam equações?”, o esperado é que o estudante perceba que aquelas que não apresentam incógnita, o símbolo de igualdade ou, até mesmo, nenhum dos dois não podem ser consideradas equações. Contudo, representam sentenças matemáticas.

A atividade **8** foi adaptada do livro A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018, p. 141) com o objetivo proporcionar o estudante a possibilidade de escrever em linguagem simbólica matemática correspondente a cada sentença e, para dinamizar o tempo nessa questão, trouxemos duas colunas a serem relacionadas.

8. Relacione a primeira coluna com a segunda coluna.

a) O dobro de um número x é igual a 20.	( ) $100 - x = 36$
b) Um número z aumentado de 82 é igual a 150.	( ) $3t + 40 = 61$
c) Se subtrairmos um número x de 100, obteremos 36.	( ) $2x = 20$
d) A metade de um número x é igual a 25.	( ) $z + 82 = 150$
e) Ao triplo de um número t adicionamos 40 e obtemos 61.	( ) $\frac{x}{2} = 25$

Enquanto na primeira coluna estão listadas sentenças matemáticas em língua natural, na segunda estão as suas representações em linguagem algébrica em ordem aleatória, de contrapondo a primeira ou vice-versa. Para facilitar a compreensão, consideremos que o objeto de conhecimento “Múltiplos e divisores de um número natural” tenha sido esclarecido no 6º ano e as seguintes palavras remetam a aritmética:

Quadro 12 – Termos e símbolos

Termos usados	Símbolos
Igual/obtemos/obteremos	=
Aumentado/adicionarmos	+
Subtrairmos	-
Metade	:

Fonte: Autoral.

Ao se deparar com uma questão como essa, apontamos que os indicadores 1 e 12 se fazem presentes a partir do momento em que o estudante se interesse em ler, refletir, comparar e associar as diferentes linguagens dispostas nas colunas de modo que estabeleça relações entre as diferentes representações.

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos*;

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

Ainda que o estudante no nível 1 evidencie os indicadores da fase de transição do pensamento pré-algébrico ao algébrico permitindo a resolução da questão, acreditamos que aquele que se apresenta em um dos níveis 2 ou 3 do Pensamento Algébrico conseguirá reconhecer o conceito e significado da equação que corresponde a cada frase, identificando seus elementos e unindo-os aos seus conhecimentos prévios.

Desenvolver o domínio de tradução tem como potencial ajuda-lo a converter situações-problema em linguagem algébrica, e nesse caso, por meio de equação, e o permitirá utilizar estratégias que busquem a solução. O professor poderá observar o desempenho do estudante ao lidar com a atividade e verificar se há dificuldades de conversão; além do mais, oportunizar uma plenária pode tornar o momento mais propicio à discussão e rico na construção das sentenças.

A última atividade da primeira sessão desta sequência foi escolhida do livro didático Teláris Essencial (Dante; Viana, 2022, p. 129) que apresenta algumas situações cotidianas que envolvem o uso das equações.

9. Leia com atenção o que dizem as frases, represente-as em forma de sentenças matemáticas e diga qual o valor possível para a incógnita em cada situação.

a) Paulo trabalhou certa quantidade de horas e mais 7 horas extras, totalizando 32 horas. Quantas horas ele trabalhou, sem contar as horas extras?

b) Em um hotel, cada andar tem a mesma quantidade de apartamentos. O total de apartamentos nos 12 andares é de 240 apartamentos. Quantos apartamentos há por andar?

c) Em uma exposição de cães havia 7 *poodles*, 5 labradores e 12 *mastiffs*. Os demais cachorros eram de outras raças. O total de cachorros da exposição era 40. Quantos cachorros havia de outras raças?

d) Os 12 estudantes que usam óculos de uma turma representam a terça parte do número total de estudantes da turma. Quantos estudantes essa turma tem?

Depois do caminho percorrido até chegar nessa atividade, solicitamos atenção na leitura das quatro frases, pois espera-se que o estudante consiga: compreender o contexto, representar em linguagem simbólica matemática a equação para as situações e obter uma solução para cada item.

Ao lidar com atividades como essa, o estudante pode evidenciar sua apropriação da linguagem algébrica, da qual podemos associar ao Pensamento Algébrico de transição e o mais desenvolvido.

O estudante que se apresentar na fase do Pensamento Algébrico de transição do pré-algébrico evidenciará alguns elementos que indicam a presença do Pensamento Algébrico ao utilizar a linguagem natural ou simbólica. E aquele com o Pensamento Algébrico mais desenvolvido, além de demonstrar mais indicadores do Pensamento Algébrico em sua linguagem, expressa a dependência entre as grandezas e consegue obter o resultado.

Quanto aos níveis do Pensamento Algébrico, ansiamos que estudantes dos níveis 1, 2 e 3 consigam evidenciar os seguintes indicadores:

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos;*

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema;*

Indicador 3: *Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema;*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples;*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita;*

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

Presumimos que o estudante do Nível 1 (Pensamento Algébrico Incipiente/Primário) apresentará os Indicadores 1 e 2, do Nível 2 (Pensamento Algébrico Intermediário) os indicadores 1, 2, 5 e 9 e do Nível 3 (Pensamento Algébrico Consolidado) todos os indicadores sugeridos e ainda utilizar técnicas de resolução.

Esperamos nesses itens fortalecer a técnica de testar igualdade (TI, que consiste em atribuir valor à incógnita verificando se satisfaz a equação, o que poderá ajudar o estudante a desenvolver o cálculo mental ao se deparar com situações-problema em linguagem natural ou algébrica.

Na segunda sessão da sequência daremos continuidade aos tópicos da parte anterior, onde será desenvolvida a compreensão dos membros da equação do 1º grau e as técnicas de resolução através do equilíbrio da balança, assim retomamos alguns conceitos da sessão anterior contendo informações adicionais assim como novos conceitos.

1. Com suas palavras, preencha o quadro abaixo:

Perguntas	Respostas
a) O que é incógnita?	
b) O que você entende do símbolo de igualdade (=)?	
c) O que seria equação?	
d) Qual é a operação inversa da adição? Por que?	
e) Qual é a operação inversa da multiplicação?	

Inicialmente, deseja-se saber o que o estudante entende/u de alguns dos conceitos vistos na primeira parte da sequência ao responder os itens **a**, **b** e **c**. Espera-se que seja utilizada a linguagem natural para que haja descrição do objeto e deduzimos que poderão haver respostas que se referem ao formato desse objeto.

Nesse sentido, a resposta para o Item **c** deve levar em conta os elementos presentes no formato de uma equação do 1º grau, quanto ao símbolo de igualdade e ao valor desconhecido.

Aponta-se que haverá vestígios da presença dos seguintes indicadores:

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas.*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita.*

Isso pode acontecer no item **a**, em que a resposta pode vir a ser uma letra qualquer do alfabeto, como a mais utilizada "x" e o item **c** está relacionado aos itens **a** e **b**, em que a resposta poderá estar no formato de uma equação do 1º grau no formato que o estudante se lembra ou deseja referenciar.

Porém, no item **b**, o esperado é que o estudante mencione alguns dos princípios da igualdade já estudados no 6º ano; como a relação de que os valores de ambos os membros da expressão não se alteraram, permanecendo os mesmos ou evidenciar a comparação entre as grandezas, e a interpretação disso pode estar relacionada ao entendimento do que o símbolo da igualdade sugere.

Os itens **d** e **e** também se relacionam com os objetos matemáticos previamente estudados pelo estudante, enquanto no item **d** pergunta "Qual é operação inversa da adição?", a resposta deve estar relacionada a operação de subtração e, além disso, deseja saber o motivo pelo qual essa é a operação inversa. Se o estudante entender o uso das operações, ele irá se referir a adição no sentido de juntar coisas e a subtração àquela que as tira, possivelmente o conceito das operações estão internalizadas.

Essa atividade pretende proporcionar uma prévia do que virá posteriormente quando pedir o uso das operações inversas. Queremos salientar que prevemos respostas diferentes das que são sugeridas nos parágrafos anteriores, por isso se faz necessário o acompanhamento e atenção do professor quando o estudante estiver escrevendo suas respostas porque os dois últimos itens, por exemplo, usam a palavra "inversa" e pode ocorrer de o estudante não saber o seu significado, até mesmo, dele não saber da existência das relações entre as operações e suas inversas.

A atividade **2** é sugerida por Ponte, Branco e Matos (2009, p. 94).

2. No quadro abaixo estão dispostas algumas sentenças matemáticas e desejamos saber: Qual é o valor de cada incógnita para tornar essas equações verdadeiras?

Equação	**Incógnita**
$\frac{30}{x} = 15$	$x = 2$
$x + 2 = 14$	
$e - 2 = 14$	
$2.i = 20$	
$\frac{x}{2} = 20$	
$13 + w = 20$	
$13 - x = 20$	
$x.3 = 18$	
$\frac{18}{x} = 6$	

Equação	**Incógnita**
$13 = x + 3$	$x = 10$
$7 = \frac{d}{5}$	
$15 = x - 6$	
$25 = x.5$	
$40 = \frac{h}{10}$	
$16 = 7 + x$	
$20 = 27 - x$	
$40 = 2.j$	
$9 = \frac{27}{x}$	

Embasados nas orientações de Ponte, Branco e Matos (2009, p. 94), optamos por não utilizar muita variação de letras, atribuímos então algumas das letras do alfabeto que não são tão usuais nos estudos da Álgebra no ensino básico, como d, e, h, i, j e w. Esses pesquisadores afirmam que dominar as regras práticas na resolução de equações do 1º grau é um passo importante na aprendizagem, porém aconselham sugerir a resolução de equações simples, no sentido de serem poucas as operações a serem realizadas.

Além disso, com essa atividade “os alunos podem usar estratégias informais de resolução de equações. Estas abordagens servem de preparação para a abordagem formal, recorrendo às regras de resolução de equações, baseadas nos princípios de equivalência” (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 95).

Assim, deseja-se que técnica a ser utilizada o leve a testar a igualdade (TI) para que ele possa atribuir a letra (incógnita) um valor que satisfaça a equação e reforce o significado do sinal de igualdade como uma equivalência condicional, consoante aos indicadores 5 e 9, no qual o Pensamento Algébrico Incipiente/Primário (Nível 1) deve se fazer presente.

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples.*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita.*

As demais técnicas poderão ser apresentadas ao estudante quando ele tiver a compreensão do que vem a ser equações equivalentes e os princípios aditivo e multiplicativo.

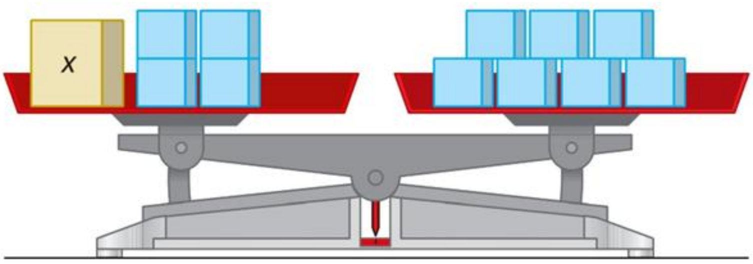
As situações **3** e **4** foram adaptadas do livro didático Araribá Conecta Matemática (Gay, 2018, p. 178-180), em que foram utilizadas balanças para ilustrar e simbolizar equações. Para a construção dos conceitos a serem trabalhados nessas situações, percebe-se a necessidade da noção das propriedades da igualdade já abordadas nos anos anteriores de sua escolarização do estudante.

O domínio das regras de resolução de equações do 1º grau deve ser construído gradualmente, decorrendo da familiarização de equações mais simples (com duas operações) e à medida que os princípios de equivalência são internalizados, o estudante se mostrará capaz de avançar e resolver equações mais complexas.

Ao decorrer dessas situações, pretende-se construir o sentido de igualdades numéricas, promover a visualização de equações equivalentes do 1º grau com uma incógnita e proporcionar a compreensão da aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo.

O enunciado da situação **3** traz uma balança em que foram colocados blocos com massa de 1 kg e um bloco de massa x (em quilograma) desconhecida, tornando-a equilibrada.

3. Em uma balança foram colocados blocos de 1 kg cada e um bloco de massa x desconhecida, em quilograma. Veja que a balança ficou equilibrada, dessa maneira:



a) Quais são os objetos que estão no prato à esquerda da balança?

____

b) E no prato a direita?

____

c) Como poderíamos representar matematicamente os objetos do primeiro prato? _____________

d) E como seria a representação matemática do segundo prato? ____

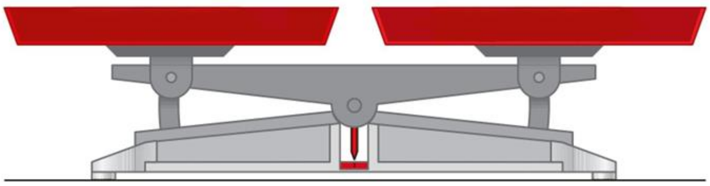
e) Observe que a balança está equilibrada, isso significa que os valores nos pratos são ________________.

Assim, podemos representar essa balança em forma de uma sentença matemática.

f) Como fica a equação que representa essa situação? __________________

g) Vá até a figura, imagine que você retirou quatro blocos do prato esquerdo e também do prato direito da balança. Qual operação matemática que pode representar a retirada desses objetos? ________________.

h) Desenhe na balança abaixo o que restaria em cada prato.



Numa equação os pratos da balança são chamados de **membros**, sendo o prato a esquerda chamado de primeiro membro e o prato a direita de segundo membro.

i) Observe que a balança permaneceu em equilibro. Como se representa matematicamente a balança que você desenhou? __________________

j) Assim, podemos concluir que o bloco no prato da esquerda tem massa $x =$ __ kg.

Quando adicionamos ou subtraímos uma mesma quantidade nos dois membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente à primeira. Esse é o **princípio aditivo** das igualdades.

k) Volte à figura e preencha os espaços utilizando a linguagem matemática.

A massa do bloco x somada a quatro unidades equivalem a sete unidades de blocos.	
Do que foi dito na frase anterior, retiramos 4 unidades dos dois membros da equação.	
O bloco de massa x tem valor 3.	

Os itens **a** e **b** pedem a identificação dos objetos que foram colocados em cada prato da balança; sendo que no prato do lado esquerdo estão um bloco de massa x e quatro blocos de 1 kg, já no prato a direita, foram colocados sete blocos de 1 kg. Espera-se que o estudante, antes de resolver problemas usando técnicas, faça o reconhecimento dos objetos e das grandezas envolvidas ao lidar com diferentes situações.

Os itens **c** e **d** foram estruturados para que o estudante perceba que os objetos podem ser representados através de expressões, como desenvolvida na primeira sessão da sequência, podendo ser concisas ou extensas a depender da visualização dele. Essas são as respostas corretas seguindo a ordem em que os objetos estão dispostos:

Quadro 13 – Expressões que poderão ser utilizadas

Itens	**Expressão concisa**	**Expressão extensa**
c	$x + 4$	$x + 1 + 1 + 1 + 1$
d	7	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Fonte: Autoral.

Sugerimos a presença do indicador 6; uma vez que a expressão é concisa, o estudante simplificou termos semelhantes para dar o resultado. Caso a resposta do estudante seja uma expressão extensa, é provável que ele esteja levando em conta a ordem em que cada objeto está disposto na balança, então ele precisará transformar essa expressão é uma mais concisa para ajudá-lo no processo de resolução.

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples.*

Implicitamente nos itens **a** e **b** pode-se perceber o indicador 5; no entanto, é no item **e** que o indicador se fortalece. Para responder corretamente o item **e**, o estudante precisa perceber que a balança está equilibrada sem pender para um lado ou para o outro, assim as massas dos objetos se equivalem. Respondendo corretamente ao preencher o espaço com uma das seguintes palavras: equivalentes, parecidos, semelhantes ou iguais.

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas.*

A palavra “iguais” tem sentido de que os objetos nos pratos são idênticos, com as mesmas estruturas e formatos, porém, isso não acontece; ainda assim se encaixaria na frase corretamente já que observamos considerar os valores nos pratos. Ao utilizar as palavras “parecidos” ou “semelhantes”, tende a dar ideia de que há características comuns que os aproximam, utilizada para associar termos com a mesma parte literal.

Assim, a palavra que melhor se encaixa a esse contexto é “equivalentes”, ela mostra que o estudante está diante de uma equação com o propósito encontrar o valor numérico da incógnita que deixa a balança equilibrada. E é no item **f** que o estudante deve traduzir para a linguagem algébrica as informações dos itens anteriores e associá-las à balança em questão (indicador 2).

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema.*

O item **g** leva o estudante novamente a observar a balança apresentada e pede que ele imagine que sejam retirados quatro blocos de ambos os pratos, seguida da pergunta: “Qual operação matemática que pode representar a retirada desses objetos?”. Pretende-se que imediatamente o estudante recorde da operação de subtração.

Após isso, segue o comando no item **h**: “Desenhe na balança abaixo o que restaria em cada prato”. Quando o estudante tentar reproduzir o desenho, espera-se que ele imagine a retirada ou elimine a quantidade pedida e represente o que restou, que nesse caso foi: o bloco de massa x kg no prato à esquerda e no prato à direita três blocos de 1 kg cada. Esse item tem o potencial de contribuir na visualização de objetos abstratos tornando-os em concreto e seguido disso, conceitua-se os membros de uma equação no ponto de vista dos pratos da balança.

No item **i**, quando pede para que o estudante observe a balança, indicamos através da ilustração a permanência do equilíbrio. Acredita-se que ele conseguirá representar a sentença matemática da balança que ele desenhou seria $x = 3$ (item **j**), onde o conceito do princípio aditivo foi introduzido para se obter a solução.

Após isso, explica-se o motivo pelo qual foi possível fazer a retirada dos objetos associando as propriedades da igualdade, argumento que fundamenta a técnica de Neutralização de termos (NT), que tem como propósito somar termos simétricos aos termos que se deseja neutralizar em ambos os membros da igualdade e isolando a incógnita.

Técnica de Neutralização de termos (NT): *Somar simétricos aos termos que que se deseja neutralizar em ambos os membros da igualdade para isolá-lo.*

O item **k** totaliza a construção desejada nessa situação, pedindo que o estudante retorne à figura inicial, utilize a linguagem matemática para efetuar a conversão do registro em língua natural para o registro simbólico algébrico nos espaços unindo à sua representação figural.

Quadro 14 – Possíveis registros de linguagem para item k

Representação em linguagem natural	**Representação em linguagem algébrica**	**Passos**
A massa do bloco x somada a quatro unidades equivalem a sete unidades de blocos.	$x + 4 = 7$	I
Do que foi dito na frase anterior, retiramos 4 unidades dos dois membros da equação.	$x + 4 - 4 = 7 - 4$	II
O bloco de massa x tem valor 3.	$x = 3$	III

Fonte: Autoral.

Evidenciamos as potencialidades deste item vinculados aos indicadores:

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos;*

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema;*

Indicador 4: *Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica;*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

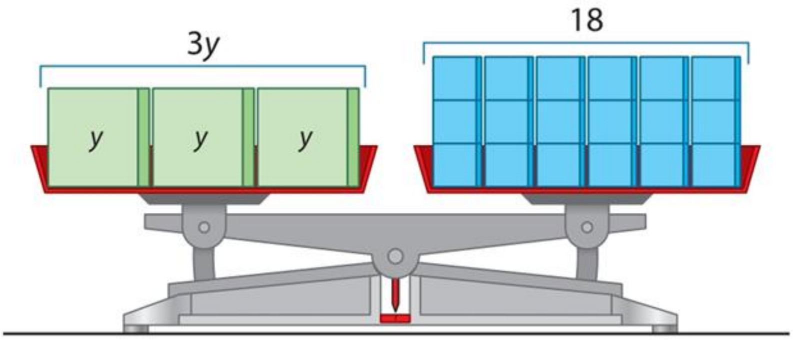
Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples;*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita;*

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

Situação **4**:

4. Observe a balança abaixo em equilíbrio e responda:



a) O que há no prato à esquerda da balança?

____

b) E no prato à direita?

____

c) Podemos representar essa situação por meio da seguinte equação: __________________

d) O símbolo "=" significa que esses valores são _____________________.

e) Ao dividirmos o primeiro membro por 3, o que precisa ser feito no segundo membro? ____

Obteremos no prato da esquerda a terça parte dos blocos que havia, assim como no prato à direita.

f) Volte a figura e preencha os espaços utilizando a linguagem adequada em cada passo.

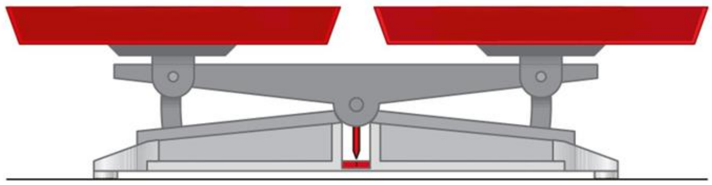
Passo 1:	A massa de três blocos y equivalem a dezoito unidades de blocos.	
Passo 2:		$\frac{3y}{3} = \frac{18}{3}$
Passo 3:	Apenas um bloco de massa y corresponde a seis blocos.	

g) Dos passos 1 e 3, notamos que as equações ____________ e _________ são equivalentes.

h) Podemos concluir que o bloco que tem massa $y =$ __ kg.

i) Para se obter a solução, foi utilizada a operação de divisão porque ela é a operação inversa dela é a ________________. E a operação inversa da multiplicação é a ________________.

j) Desenhe na balança abaixo como ficaria a representação do item anterior.



Quando multiplicamos ou dividimos por um mesmo número não nulo os dois membros da equação, obtemos uma outra equação equivalente à primeira. Esse é o **princípio multiplicativo** das igualdades.

Parecido com a atividade anterior, o enunciado da situação **4** traz uma balança em que foram colocados três blocos de massa y (em quilograma) desconhecida no prato a esquerda e dezoito blocos com massa de 1 kg cada no prato a direita, resultando numa balança equilibrada.

Nos itens **a** e **b** deseja-se a identificação dos objetos colocados em cada prato da balança e espera-se que o estudante reconheça os objetos e as grandezas envolvidas. Como a figura sugere, o prato à esquerda pode ser representado pela expressão $3y$ e o da direita pelo número 18, acredita-se que o estudante compreende o que ele precisará fazer para tornar essas informações uma sentença matemática solicitada no item **c**, de acordo com o **indicador 2:** *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema.*

E mais uma vez, agora no item **d**, o estudante deve refletir sobre a concepção do uso do símbolo de igualdade (indicador 5) e preencher o espaço dedicado a palavra que se adequa a interpretação correta. Assim, se a palavra utilizada pelo estudante for “equivalentes”, mostra que ele conseguiu compreender o conceito e que está diante de uma equação, onde a finalidade é encontrar o valor numérico para a incógnita – implicitamente se faz presente o indicador 9.

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas.*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita.*

No item **e**, o conceito do princípio multiplicativo foi introduzido com o intuito de utilizar a operação inversa da multiplicação na perspectiva da propriedade da igualdade, quando questiona “Ao dividirmos o primeiro membro por 3, o que precisa ser feito no segundo membro?”, o estudante deve responder que é necessário dividi-lo também ou uma frase que remeta a essa ideia.

Assim o conduzimos ao **indicador 6:** *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples.*

O item **f** conduz o estudante a observar a figura novamente e preencher os espaços utilizando a língua natural ou algébrica. Os **passos 1** e **3**, o espaço para a linguagem natural foram preenchidos, sugerindo a utilização da linguagem algébrica e, no **passo 2**, falta preencher o espaço que requer a linguagem natural. Se o estudante observar com atenção o que está sendo mostrado no **passo 2**, associará a frase do item **e**, utilizando-a como referência à sua resposta.

O quadro do item **f** preenchido corretamente seria:

Quadro 15 – Resposta correta para o item f

Passos	Linguagem natural	Linguagem algébrica
1	A massa de três blocos y equivalem a dezoito unidades de blocos.	$3y = 18$
2	Dividirmos ambos os membros da equação por 3 ou a terça parte dos blocos equivale a terça parte de 18.	$\frac{3y}{3} = \frac{18}{3}$
3	Apenas um bloco de massa y corresponde a seis blocos.	$y = 6$

Fonte: Autoral.

Neste item os indicadores presentes são:

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos;*

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema;*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples;*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita;*

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

O item **g** reforça que as equações dos passos 1 e 3 são equivalentes. Porém, não explica o que vem a ser esse conceito. Nos questionamos: Será que o estudante associará a palavra “equivalente” às duas equações possuírem o mesmo valor?

Pensando nisso, a seguinte situação deseja trabalhar esse quesito. Além disso, nos itens **g** e **h**, conduzimos o estudante a trabalhar o aprendizado de demonstração matemática utilizando a técnica de Neutralização de termos (NT) por meio do princípio multiplicativo, obtendo a solução $y = 6$.

O item **i** tem a intenção de relacionar o princípio multiplicativo ao uso da operação inversa, para reforçar que a divisão é a operação inversa da multiplicação, como espera-se que tenha sido respondida na atividade **1**. Agora, ao fazer uso do princípio multiplicativo, o estudante poderá desenvolver um argumento mais formal para uso da técnica de Transposição termos ou coeficientes (TTC) ao inverter as operações.

Técnica de Transposição termos ou coeficientes (TTC): *Inverter as operações para a simplificação dos cálculos.*

As situações **3** e **4** potencializam desenvolvimento dos estudantes que apresentam o Pensamento Algébrico Incipiente/Primário (nível 1) e o Pensamento Algébrico Intermediário (nível 2), de modo que aquele que se encontra no nível 1 em suas respostas começará a dar indicativos de sua evolução; e ao que se apresenta no nível 2, demonstrará a necessidade de consolidar a linguagem simbólica através da generalização, por exemplo.

Isso não quer dizer que o estudante que se apresenta no nível 0 estará estagnado, como algumas de suas dificuldades na resolução de equações estão justamente na transição entre a Aritmética e a Álgebra, isso mostra a necessidade de voltar, reler e novamente testar as situações e atividades desta sequência com a intenção de compreender os conceitos.

O estudante que aparenta apresentar o Pensamento Algébrico Consolidado (nível 3), neste tipo de sequência ele tende a produzir respostas mais formais, reforçar conceitos e demonstrar a necessidade por novos desafios, como a modelagem e generalização de situações.

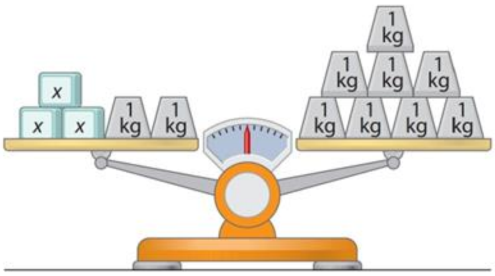
No decorrer desta sequência didática trabalhamos alguns conceitos como sentença matemática, equação, membros, incógnita, operação inversa, solução (raiz), igualdade, equivalência, princípios aditivo e multiplicativo através de situações que visam a construção da noção de equação polinomial do 1º grau.

Mais uma vez, apoiados pela ilustração da balança em equilíbrio, utilizaremos a aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo em uma mesma equação para fundamentar a compreensão das equações equivalentes. Entender esse conceito é fundamental na aprendizagem das técnicas de resolução de equações do 1º grau, desde que estejam vinculadas aos princípios de equivalência.

A situação **5** foi adaptada do livro Matemática Bianchini (Bianchini, 2022, p. 123) e por meio dela retomamos a construção e utilização de conceitos fundamentais na resolução de equações do 1º grau.

5. A balança a seguir está em equilíbrio, com os pratos nivelados.

No prato da esquerda, há 3 pacotes, cada um de x quilogramas, e 2 blocos de 1 quilograma. No prato da direita, há 8 blocos de 1 quilograma.

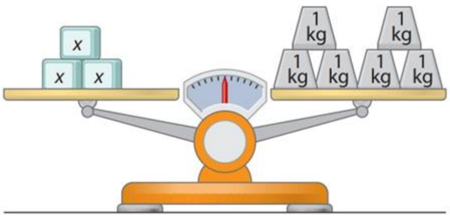


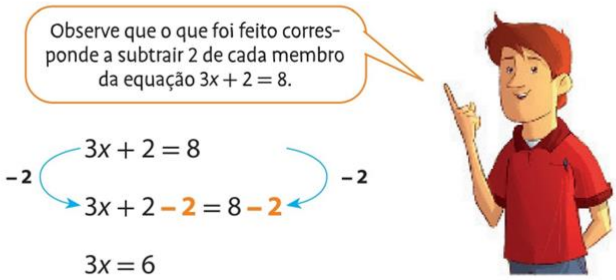
Podemos representar essa situação pela equação: $3x + 2 = 8$

a) Se forem retirados dois blocos de 1 kg de cada prato, o que acontece com a balança?

____

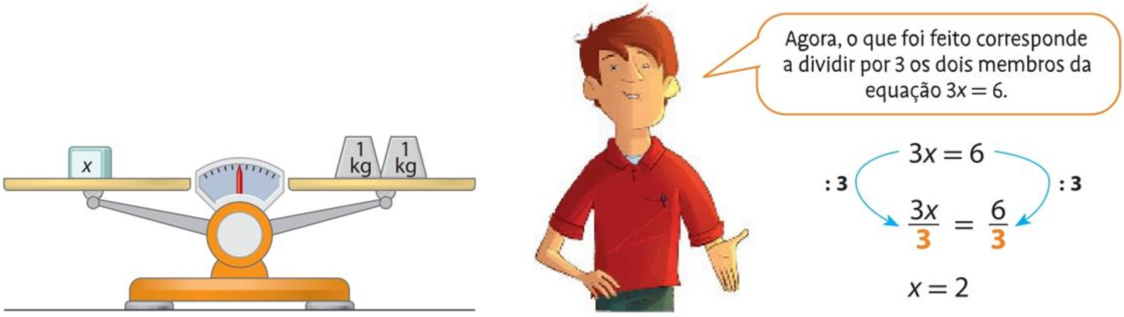
A situação passa a ser representada assim:





Note que a equação $3x + 2 = 8$ representava a balança no início da situação, depois que houve mudanças na balança sem alterar o seu equilíbrio, e a equação passou a ser $3x = 6$. Deixando em cada prato a terça parte do que ele contém, a balança continua com os pratos nivelados.

Passamos a ter a seguinte situação:



b) Ao obtermos $x = 2$, essa é a ____________ da equação. E para isso, no primeiro membro restou apenas a ____________ e o no segundo membro o ____________.

c) Agora substitua, ou seja, coloque no lugar da incógnita x o número 2.

I. $3x + 2 = 8$	II. $3x = 6$	III. $x = 2$

d) Quando a incógnita x foi substituída pelo número 2, a equação I se tornou verdadeira ou falsa? ______________

e) E nas equações II e III, essas sentenças matemáticas são verdadeiras ou falsas? _____________

f) A incógnita x poderia ser outro valor? Por que?

____

____

Dessa maneira, as equações I, II e III tem como solução o número 2. Como 2 é a solução das equações $3x + 2 = 8$, $3x = 6$ e $x = 2$, dizemos que elas são equações equivalentes.

Quando duas ou mais equações do 1º grau têm a mesma solução são chamadas **equações equivalentes**.

No item **a** indicamos que sejam retirados dois blocos de 1 kg de cada prato da balança em equilíbrio, então desejamos saber o que acontece após realizar essa operação. Espera-se que o estudante consiga visualizar isso mentalmente e, caso necessário, é recomendável reconfigurar a figura sugerida eliminando os objetos sugeridos ou até redesenhar a balança pode contribuir na abstração.

Mostramos a técnica de desenvolver ou reduzir expressões (DRE) a partir das explicações passo a passo dos princípios aditivo e multiplicativo que são importantes noções para se obter a solução de uma equação e, consequentemente, compreender as equações equivalentes como nos indicadores 5 e 6.

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas.*

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples.*

Em seguida, o item **b** deseja diagnosticar se o estudante conseguiu compreender os conceitos que foram apresentados ao preencher os espaços vazios que completam o sentido da frase, tornando-a correta da seguinte maneira: Ao obtermos $x = 2$, essa é a solução/raiz da equação. E para isso, no primeiro membro restou apenas a incógnita e o no segundo membro o número.

Com a finalidade de utilizar a técnica que consiste em testar a igualdade (TI), o item **c** pede para o estudante verificar se o número 2 atribuído a incógnita x consegue satisfazer as equações I, II e III.

Quadro 16 – Testando $x = 2$ nas equações I, II e III

I.	II.	III.
$3x + 2 = 8$ $3.2 + 2 = 8$ $6 + 2 = 8$ $8 = 8$	$3x = 6$ $3.2 = 6$ $6 = 6$	$x = 2$ $2 = 2$

Fonte: Autoral.

Depois de realizar as substituições, pode-se observar que 2 é a raiz das três equações, ou seja, essa é a solução que torna as três equações equivalentes e os itens **d** e **e** são verdadeiros.

O indicador 5 se faz presente nesses itens, pois além da capacidade de resolver equações, o estudante também deve verificar se dado valor é ou não solução da equação apresentada, desenvolvendo a capacidade de saber quando duas ou mais equações são equivalentes com o argumento de que devem ter a mesma solução.

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas.*

Dessa forma, ao se deparar com o item **f**, o estudante poderá associar ao conceito de incógnita e, se caso precise, esse item pode levá-lo a testar a igualdade com outros valores para x; contudo, perceberá que não há outro valor capaz de satisfazer as equações equivalentes.

As técnicas de Neutralização de termos (NT) e Reagrupar termos semelhantes (RTS) vem sendo desenvolvidas desde a primeira sessão desta sequência. Com a utilização dos princípios aditivo e multiplicativo, essa situação tem a potencialidade de desenvolver outras técnicas de resolução para além de regras sem fundamento.

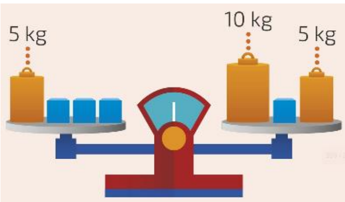
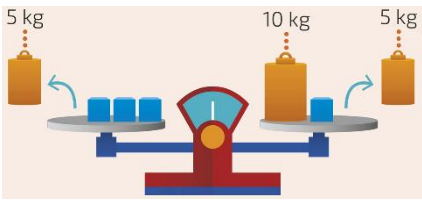
Técnica de Neutralização de termos (NT): *Somar simétricos aos termos que se deseja neutralizar em ambos os membros da igualdade para isolá-lo;*

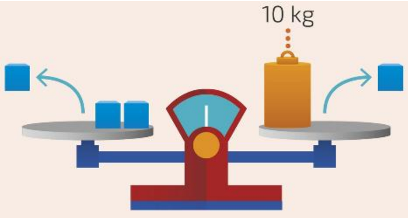
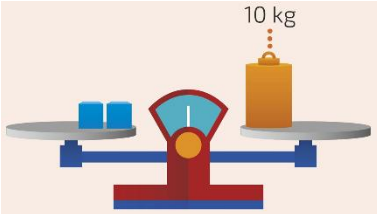
Técnica de Reagrupar termos semelhantes (RTS): *Juntar os termos (literal ou não) semelhantes e utiliza a soma/subtração para resolver a equação.*

Quanto ao Pensamento Algébrico, com a linguagem utilizada é possível que o estudante demonstre estar em transição do pré-algébrico ao algébrico, identificada por apresentar poucos indicadores em sua escrita em língua natural ou simbólica. No entanto, pretende-se contemplar um Pensamento Algébrico mais desenvolvido, com uso de uma linguagem que possa salientar outros indicadores do Pensamento Algébrico advindo dos conhecimentos que foram desenvolvidos.

A situação **6** foi adaptada do livro didático Matemática Essencial (Pataro; Balestri, 2018, p. 143) que consiste em conduzir o estudante a observar as imagens, comparar cada passo à sua linguagem algébrica, representar equação e converter em linguagem natural as expressões algébricas.

6. A balança de dois pratos a seguir está em equilíbrio, ou seja, a medida da massa em cada um dos pratos é igual. Complete os espaços que faltam no quadro abaixo.

Passos	Linguagem natural	Linguagem algébrica
I. 	Chamando de **x** a medida da massa de cada cubo, escrevemos uma equação associada a essa balança.	$5 + x + x + x = 10 + x + 5$ $3x + 5 = x + 15$
II. 	Utilizando a operação inversa da adição, retiramos 5 kg de cada prato da balança e subtraímos 5 unidades de cada membro da equação.	

III. 		$3x - x = x + 10 - x$ $2x = 10$
IV. 	Para obtermos a medida da massa de cada cubo dividimos os dois membros da equação por 2. Assim, a medida da massa de cada cubo é 5 kg.	

Cada passo objetiva reforçar e fortalecer conceitos e representações trabalhados nesta sequência:

No passo **I** é preciso que o estudante observe a balança, leia a frase e associe as informações da figura às diferentes linguagens. Neste passo, preenchemos os espaços com a intenção de conduzir os demais espaços com as representações adequadas e, vale dizer que, nos munimos das propriedades associativa na reorganização dos termos e comutativa na soma dos termos semelhantes.

No passo **II**, o estudante deverá escrever a equação que representa a situação, de modo que associe a frase (em língua natural) e a representação figural a seu registro algébrico. A figura sugere utilizar a operação de subtração com a ideia de retirada dos objetos de mesma massa em ambos os pratos e isso não interferirá no equilíbrio da balança, que é o conceito de princípio aditivo.

Já no passo **III**, o estudante converterá em linguagem natural o que a figura e a linguagem algébrica para este passo sugerem. Sua resposta preencherá corretamente o espaço se estiver vinculada a seguinte frase: Um cubo de cada prato foi retirado, restando dois cubos que juntos têm massa 10 kg.

E no passo **IV**, o estudante deve perceber que a balança representada ainda se refere ao passo anterior. Porém, as representações em língua natural se tratam das seguintes equações $\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$ e $x = 5$. Sendo 5 kg a massa de cada cubo.

Esses passos reforçam e concentram todo o percurso desta sequência com os conceitos trabalhados; desde a utilização das propriedades da igualdade, dos elementos que compõem uma equação, dos princípios aditivo e multiplicativo, das operações inversas, do caminho para resolução e para obtenção da solução. Apontamos a presença dos seguintes indicadores:

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos;*

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema;*

Indicador 4: *Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica;*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples;*

Indicador 9: *Perceber o uso da variável como incógnita;*

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

A utilização dos princípios aditivo e multiplicativo potencializará o uso de outras técnicas de resolução além das visam neutralizar termos (NT), reagrupar os semelhantes (RTS) como a técnica de transpor termos ou coeficientes (TTC) ao inverter as operações "pulando" uma etapa na resolução juntamente com a técnica de desenvolver ou reduzir expressões (DRE), compostas pelas técnicas anteriores para a simplificar os cálculos e obter o valor da incógnita.

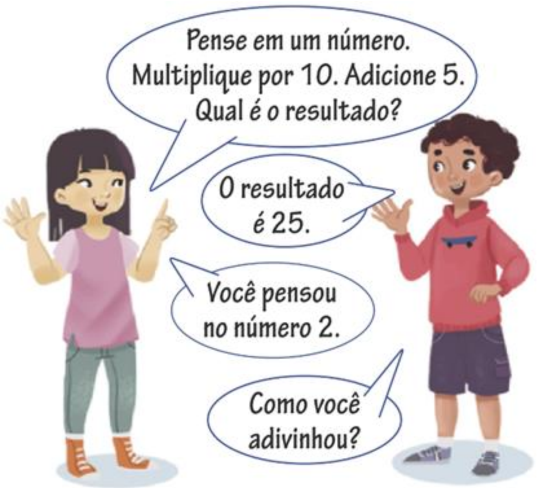
Vale destacar que os estudantes podem produzir expressões como "vai para o outro lado", "trocou de sinal depois do igual" ou "passou adicionando/subtraindo/multiplicando/dividindo" relacionadas as técnicas de resolução, aconselhamos orientar a compreensão de que foram utilizados os princípios aditivo e multiplicativo nesse percurso para que os argumentos estejam matematicamente coerentes.

Ressaltamos que essa situação requer do estudante um Pensamento Algébrico mais desenvolvido; isso poderá ser averiguado através da linguagem utilizada, de modo que ele evidenciará os possíveis indicadores – se não todos, boa parte deles – do Pensamento Algébrico apontados, mostrando sua compreensão ao lidar com diferentes registros de representação, associar conceitos, formar sentenças matemáticas correspondentes a situação e realizar operações que buscam a solução.

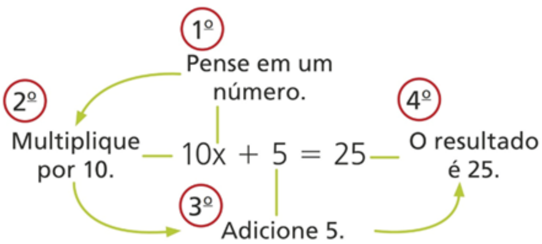
Desse modo, as situações **5** e **6** almejam que o estudante obtenha ferramentas fundamentais para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico Intermediário (Nível 2) e posteriormente o ajude a explorar mais da linguagem algébrica e compreenda os significados a fim de atingir o Pensamento Algébrico Consolidado (Nível 3) com o uso da linguagem algébrica formal (simbólica).

A situação **7** é apresentada no livro didático Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018, p. 155) que traz duas crianças que estão se desafiando. Essa situação foi trazida com intuito de culminar em toda a construção realizada no percurso desta sequência.

7. Raquel e Tadeu estão brincando de adivinhar números.



Nessa brincadeira, Raquel utilizou ideias de equação para obter o número pensado por Tadeu. Observe:



a) Faça os cálculos e verifique se 2 é raiz da equação $10x + 5 = 25$.

b) Agora, observe essas crianças brincando novamente.

- Escreva uma equação para obter o número pensado por Raquel. ____________
- Que número é esse? ____

No item **a**, caso o estudante demonstre dificuldade na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, referenciada pela fala de Raquel, pode ser utilizado o esquema pensado por Tadeu para encontrar a solução (raiz) da equação sugerida por ela.

O esquema proposto instrui o estudante a mentalmente utilizar a técnica de testar igualdade (TI) na resolução de equações sem a necessidade de precisar fazer muitos cálculos ao atribuir valor a incógnita que satisfaça a equação.

Acreditamos que essa técnica pode se mostrar uma boa ferramenta para cálculos envolvendo o conjunto solução contido conjunto universo de números inteiros no intervalo $U = [-10{,}10]$, pois há equações em que a raiz não é um número que possa ser rapidamente calculado. Exemplo disso, a equação $2x + 5 = 14$ apresenta uma raiz de valor racional $x = \frac{9}{2}$ ou $x = 4{,}5$, essa pode não ser uma opção viável para introduzir essa técnica.

No item **b** mais uma vez é necessária a conversão da frase em equação e abre-se a possibilidade do estudante utilizar o esquema que sugere o uso da técnica TI ou, como no percurso construído, dos princípios aditivo e multiplicativo.

Observamos a presença dos seguintes indicadores:

Indicador 1: *Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos;*

Indicador 2: *Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema;*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

Espera-se que o estudante apresente em suas respostas o Pensamento Algébrico mais desenvolvido, salientando indicadores que possam ser inicialmente associados ao Pensamento Algébrico Intermediário (nível 2). E, se o estudante expressar-se utilizando a linguagem algébrica que evidencia os dados apresentados na situação com significados munidos dos conceitos dos objetos matemáticos, fortemente pode-se correlacionar ao Pensamento Algébrico Consolidado (nível 3).

A atividade a seguir propõe trabalhar a resolução de equações do 1º grau de uma incógnita a partir das propriedades da igualdade e das técnicas de resolução.

8. Utilizando os princípios aditivo e multiplicativo, encontre a solução das seguintes equações do 1º grau.

a) $4x - 6 = 22$	b) $9 - x = 2x$	c) $8 + 4x = 6x - 4$
d) $25 - x = 12$	e) $5x = 40$	f) $3x - 21 = 0$
g) $3x + 1 = x + 9$	h) $4x - 11 = 7 - 2x$	i) $3x + 1 = 5 + x$

Sugerimos potencial no **indicador 4**, relacionada a capacidade de interpretar e utilizar uma mesma expressão matemática de diversas maneiras apesar do enunciado da atividade não explicitar isso. Observamos a possibilidade de produzir ilustrações, como a representação da balança de dois pratos, visto que ela tem o potencial de viabilizar as ideias de incógnita, operações inversas, utilização dos conceitos e a visualização de equilíbrio e comparação entre os membros da equação.

Essa atividade também tem como objetivos propiciar a discussão dos princípios aditivo e multiplicativo (propriedades da igualdade) e desenvolver o uso de técnicas.

Cabe ao professor observar o percurso de resolução, diagnosticar erros e incentivar o estudante a comunicar suas estratégias de resolução.

Propomos a iminência dos indicadores:

Indicador 4: *Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica;*

Indicador 5: *Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;*

Indicador 6: *Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples;*

Indicador 9: Perceber o uso da variável como incógnita;

Indicador 12: *Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.*

6 CONSIDERAÇÕES

A presente pesquisa foi desenvolvida com o intuito de responder à seguinte pergunta: De que modo uma sequência didática pode evidenciar indicadores do desenvolvimento do Pensamento Algébrico na aplicação do conceito de equação do 1º grau por estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental?

Para tanto, estabelecemos como objetivo geral investigar se uma Sequência Didática que explora equação do 1º grau com uma incógnita para estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental tem potencial para evidenciar indicadores do desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Para alcançar o objetivo elencado nesta investigação, foi elaborada uma sequência didática a partir dos pressupostos da Engenharia Didática, embasada no Pensamento Algébrico, Teoria das Situações Didáticas e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para ser aplicada com uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental.

Ao se deparar com a unidade temática Álgebra, o estudante da Educação Básica demonstra algumas dificuldades quando lidam com símbolos (letras) na Matemática. Amparados pelo referencial teórico, parte dessas dificuldades estão voltadas à desassociação da álgebra com a aritmética e nos procedimentos sem o devido significado, resultando na grande aversão ao componente.

O recomendado é desenvolver essas conexões desde as séries iniciais, para oportunizar ao estudante o desenvolvimento do seu Pensamento Algébrico. Este se manifesta de várias maneiras, desde que a aprendizagem esteja visando a compreensão dos conceitos e significados, tornando o uso da linguagem simbólica consequência dessas compreensões.

Pensar algebricamente inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, onde as letras apresentam diferentes sentidos no contexto em que são inseridas. É através do acesso ao registro produzido pelo estudante que se pode ter uma noção do momento do Pensamento Algébrico em que ele se encontra e alguns indicadores poderão ser evidenciados.

As estratégias utilizadas podem revelar indicadores de que o Pensamento Algébrico está se fazendo presente, porém conectar aos níveis desse tipo de pensamento não é algo concreto. Isso porque o estudante pode estar pensando algebricamente, mesmo sem conhecer a linguagem simbólica.

Especificamente quando se estuda Equação Polinomial do 1º Grau, trabalhada no 7º ano que o valor da letra “x” se torna o motivo pelo qual muitos estudantes do ensino básico se limitam a usar técnicas de resolução para obter o valor desconhecido (incógnita) e, decorrente da incompreensão, erros são sustentados.

Nesse contexto, com base na TRRS de Duval e na TSD de Brousseau, compreendemos que trabalhar EPG com uma incógnita não deve ser um processo focado numa única conversão, é preciso de pelo menos dois registros de representação semiótica por meio de situações-problema para que o estudante mobilize o conceito desse objeto matemático e tenha incentivo na construção do seu conhecimento.

Para atingir o objetivo definido, construímos uma sequência sobre esse objeto matemático atrelado aos indicadores do Pensamento Algébrico segundo os pressupostos da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática que nos direcionou à concepção e análises das situações propostas.

Para compor a sequência dividida em duas sessões, foram realizadas adaptações de situações de alguns livros didáticos para averiguar e estimular os indicadores do Pensamento Algébrico em cada situação, assim como possibilitar a construção dos conceitos, resolução e representações envolvendo a equação do 1º grau.

Na primeira sessão, a finalidade é a conceituação do objeto matemático e seus elementos utilizando a linguagem algébrica que permita o cálculo mental para o valor da incógnita. Enquanto a segunda sessão tem em vista o uso das técnicas de resolução mediante aos princípios de equivalência pela ilustração da balança em equilíbrio.

Acreditamos que os objetivos específicos foram alcançados, pois conseguimos elaborar e discutir a Sequência Didática proposta que explora equações do 1º grau, refletimos sobre o desenvolvimento do Pensamento Algébrico no ensino de equação do 1º grau no 7º ano do Ensino Fundamental ao decorrer desta monografia e identificamos as possíveis dificuldades conceituais na resolução das situações propostas.

Para além disso, inferimos que a sequência tem potenciais para levar o estudante a exteriorizar seus pensamentos em diferentes registros, estimular o Pensamento Algébrico e conceituar e resolver equações do 1º grau. E poderá situar o professor (mediador) quanto as evidências desse pensamento através da linguagem utilizada, revelando aspectos da compreensão do objeto matemático e a efetividade dos indicadores mobilizados ao decorrer de cada sessão.

Sugerimos que a sequência seja aplicada em duplas ou trios, de modo que envolva a participação e interação entre os componentes; para que discutam, expliquem e troquem ideias entre si com a intencionalidade de promover o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias para sua atuação no mundo.

Desta maneira, queremos dar prosseguimento a pesquisa, dando continuidade aos demais passos sugeridos pela metodologia de pesquisa para que possamos comparar com nossas análises preliminares e verificar se os objetivos traçados realmente podem ser atingidos.

7 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jadilson Ramos de. **Níveis de desenvolvimento do Pensamento Algébrico**: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. 202 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) **-** Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

ALMEIDA, Jadilson Ramos de. **Níveis de desenvolvimento do Pensamento Algébrico**: em busca de um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Anais do XII encontro nacional de educação matemática. Educação matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo, SP, 2016.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. 1. ed. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BAHIA (Estado). Secretaria Da Educação. Superintendência de Políticas para Educação Básica. União Nacional Dos Dirigentes Municipais da Bahia. **Documento Curricular Referencial da Bahia para Educação Infantil e Ensino Fundamental (vol. 1)**. Rio de Janeiro: FGV Editora, 2020.

BAQUEIRO, G. D. S. *et al*. **Caracterizadores do Pensamento Algébrico e generalização de padrões matemáticos**. Brazilian Journal of Development, v. 6, n. 10, p. 77216-77229, 2020.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**: 9º ano. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Ministério da Educação. Braília, 1998.

BROUSSEAU, Guy. Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. VIANA, Fernando. **Teláris Esssencial**: 7º ano. 1. ed. São Paulo: Ática, 2022.

DIAS, Graciana Ferreira; SILVA, Petrônio Fernandes. **Dificuldades encontradas na resolução de equações do 1º grau**: análise dos erros de uma turma do 8º ano. VI CONEDU - Vol 2. Campina Grande: Realize Editora, 2020. p. 864-881. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/65353. Acesso em: 19 Jun. 2023.

DUVAL, R.; MORETTI, TRAD. M. T. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Revemat: revista eletrônica de educação matemática, v. 7, n. 2, p. 266, 13 dez. 2012.

FILHO, Maurício A. Saraiva de Matos. **Engenharia didática**. Revista Eletrônica da Estácio Recife, [S. l.], v. 1, n. 1, 2019.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luís Pereira; CRISTÓVÃO, Eliane Matesco. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do Pensamento Algébrico**. Seminário Luso-brasileiro de investigações matemáticas no currículo e na formação do professor, p. 1-22, 2005.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 78–91, 2016. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384. Acesso em: 19 set. 2024.

GAY, Mara Regina Garcia. **Araribá conecta matemática**: 7º ano. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

HILÁRIO, Constantino *et al*. **Pensamento Algébrico na aprendizagem de equações do 1º grau**. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 16, p. 1-18, 2021.

OLIVEIRA, C. G; REZENDE, V. **Os desafios da escola pública Paraense na perspectiva do professor PDE**: Um estudo da equação do primeiro grau e suas diferentes representações: resultados da intervenção realizada com alunos do 8o ano do ensino fundamental V. 1 – Paraná, 2016.

OLIVEIRA, Gleiciane da Silva Pereira de. **Concepções de estudantes da licenciatura em matemática sobre o significado do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos**. Orientadora: Maria de Fatima Costa Leal. 2022. 59f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Campus II, Universidade do Estado da Bahia, Alagoinhas, 2022.

PATARO, Patricia Moreno. BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial**: 7º ano. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PIRES, Vanessa da Silva; RODRIGUÊS, Jeremias Stein. **Os Registros Semióticos em equações do primeiro grau**: uma análise sobre livros didáticos do Ensino Fundamental. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, Brasil, v. 6, n. 2, p. e2005, 2020. DOI: 10.35819/remat2020v6i2id3919. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3919. Acesso em: 8 dez. 2024.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **O simbolismo e o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos**. Educação e Matemática, n. 100, p. 89-96, 2008.

SANTOS, Tayslane Rafaela Silva dos. **Estratégias e dificuldades de alunos do 9º ano do ensino fundamental na resolução de equações do primeiro grau**. 2019. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019.

SILVA, Alexandre de Azevedo; COSTA, Gabriella Marques Pereira da. **Equações do Primeiro Grau**: Uma proposta de aula baseada na análise de livros. Rio de Janeiro, 2014.

SILVA, Antonia Zulmira da. **Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o Caderno do Professor de Matemática do oitavo ano**. 2012. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

SILVA, Rondinele Nunes da. **Álgebra e Aritmética no ensino fundamental**: um estudo de como ensiná-las de forma integrada e com base em significados. Brasília, DF: UCB, 2007.

SOUZA, Jair Roberto de. **Matemática realidade & tecnologia**: 7º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. **SuperAÇÃO! Matemática**: 7º ano. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

8 APÊNDICES

Apêndice 1: Primeira sessão.

➢ Iniciaremos nossos estudos com algumas situações:

1. Indique com V (verdadeira) ou F (verdadeira) às sentenças abaixo:

a) (   ) $2 = 7$

b) (   ) $3.6 = 18\ e\ 18 = 8 + 10$

c) (   ) $22 + 12 = 40 - 6$

d) (   ) $100 = 100$

e) (   ) $12 : (-2) = -6$

f) (   ) $70 = 85 - 15\ e\ 50 + 20 = 70$

g) (   ) $63 - 100 = -2 - 35$

h) (   ) $5 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2$

i) (   ) $6 + 9 = 15\ e\ 15 = 45 : 3$

j) (   ) $125 = 100 + 20 + 5$

k) (   ) $24 : 4 = 1.6$

l) (   ) $2 + 4 + 8 = 2 + 13$

- Quais itens são verdadeiros? ________________
- Por que os outros itens são falsos? _____________________________

2. Daqui a 5 anos Karina terá 37 anos.

a) Qual a idade que Karina tem hoje? ______

b) Mostre no espaço abaixo como você encontrou esse valor.

3. Hoje Fernando tem 10 anos. Qual será a idade de Fernando nesse mesmo mês e dia daqui a:

a) 3 anos? Representação: $10 + 3 = 13$ anos.

b) 11 anos? Representação: $10 +$ __ $=$ ___ anos.

c) 25 anos? Representação: __ $+ 25 =$ ___ anos.

d) 37 anos? Representação: __ $+$ __ $=$ ___ anos.

e) i anos? Representação: __ $+$ __ $= 40$ anos.

A representação utilizou a idade atual somada a uma quantidade de tempo para saber quantos anos Fernando fará. Sabendo disso, a letra i significa o que? ____________.

4. Quando Carlos subiu na balança, o visor mostrou 46 kg. Quantos quilogramas ele terá se:

a) ganhar 10 kg? Representação matemática: $46 + \_\_\_ = 56$ kg

b) perder 5 kg? Representação matemática: ___________ kg

c) ganhar 13 kg? Representação matemática: ___________ kg

d) ganhar w kg? Representação matemática: $(46 + w)$ kg

e) perder x kg? Representação matemática: ________________ kg

f) ganhar y+1 kg? Representação matemática: ________________ kg

g) ganhar z+8 kg? Representação matemática: ________________ kg

Nessa situação, para saber a quantidade de kg que Carlos terá foram usadas as operações de adição e subtração com os possíveis pesos. Assim, para representar que Carlos perderá peso deve ser usada a operação de _______________ e as letras w, x, y e z significam os ________ que Carlos pode ganhar ou perder.

5. Marília e Rodrigo estão brincando de desafios matemáticos. O desafio que

Marília propôs está indicado a seguir.

a) Como Marília não disse que número ela pensou, podemos escolher uma letra do alfabeto para representar esse número. A letra escolhida foi ___.

b) "Pensei em um número, adicionei 5 unidades a ele", como podemos representar matematicamente essa parte da frase? ________.

Após isso, obteve o 12 como resultado.

c) Assim, a frase "Pensei em um número, adicionei 5 unidades a ele e obtive 12" ficaria melhor representada da seguinte forma: ________=____

A representação matemática é chamada de sentença e, para que ela seja verdadeira, a letra que você escolheu precisa representar um único valor que é desconhecido, da qual é chamada de **incógnita**.

d) Qual é o número que podemos colocar no lugar da incógnita para tornar a sentença verdadeira? ___.

6. Amanda foi ao mercado comprar algumas caixas de leite e gastou ao todo, R$ 15,00.

GEORGE TUTUMI

a) Como não foram indicadas quantas caixas de leite Amanda comprou, escolha uma letra do alfabeto (incógnita) que possa representar o número de caixas. Escolhi a letra ___.
b) De acordo com a imagem, cada caixa custa ___ reais.
c) Podemos representar matematicamente o preço de cada caixa de leite multiplicando pelo número de caixas compradas. Como ficaria isso? ______.
d) Segundo enunciado, qual o valor total gasto por ela? ____ reais.
e) Podemos dizer que o preço de cada caixa de leite com a quantidade de caixas compradas é ___________ ao valor total gasto por Amanda.
f) Utilizando as informações que você preencheu nos itens c e d, qual a sentença matemática que representa a situação descrita no item anterior? ________________.

Chama-se **equação** a sentença matemática expressa por uma igualdade e que há pelo menos uma incógnita, que representa um valor desconhecido.

Volte ao item f para responda a seguinte pergunta:

g) Qual é o número que podemos colocar no lugar da incógnita para tornar a equação verdadeira? ____.

O número obtido chama-se **solução** ou **raiz** da equação.

Quando resolvemos uma equação, é necessário saber o **conjunto universo *U*** que contém todos os números que a incógnita pode assumir.

h) A incógnita poderá ser outro valor? Por que?

____

7. Agora que você entende o que é equação, observe com atenção e marque as sentenças matemáticas que representam equações.

a) $t + 5 = 12$
b) $a - 15 \neq 0$
c) $x = -10$
d) $p + 10 > 67$
e) $c - 5 = 2$
f) $10.q = 30$
g) $25 + 4 = 29$
h) $-2 + r = 0$
i) $8 = 6y - 10$
j) $2x + 5 < 3$
k) $223 \neq 98$
l) $7 - 3 = 2 + 2$

O que itens não marcados faltam para que sejam equações?

____

8. Relacione a primeira coluna com a segunda coluna.

a) O dobro de um número x é igual a 20. ( ) $100 - x = 36$
b) Um número z aumentado de 82 é igual a 150. ( ) $3t + 40 = 61$
c) Se subtrairmos um número x de 100, obteremos 36. ( ) $2x = 20$
d) A metade de um número x é igual a 25. ( ) $z + 82 = 150$
e) Ao triplo de um número t adicionamos 40 e obtemos 61. ( ) $\frac{x}{2} = 25$

9. Leia com atenção o que dizem as frases a seguir, represente-as em forma de sentenças matemáticas e diga qual o valor possível para a incógnita em cada situação.

a) Paulo trabalhou certa quantidade de horas e mais 7 horas extras, totalizando 32 horas. Quantas horas ele trabalhou, sem contar as horas extras?

b) Em um hotel, cada andar tem a mesma quantidade de apartamentos. O total de apartamentos nos 12 andares é de 240 apartamentos. Quantos apartamentos há por andar?

c) Em uma exposição de cães havia 7 *poodles*, 5 labradores e 12 *mastiffs*. Os demais cachorros eram de outras raças. O total de cachorros da exposição era 40. Quantos cachorros havia de outras raças?

d) Os 12 estudantes que usam óculos de uma turma representam a terça parte do número total de estudantes da turma. Quantos estudantes essa turma tem?

Apêndice 2: Segunda sessão 2.

➢ Daremos continuidade aos estudos utilizando o que aprendemos.

1. Com suas palavras, preencha o quadro abaixo:

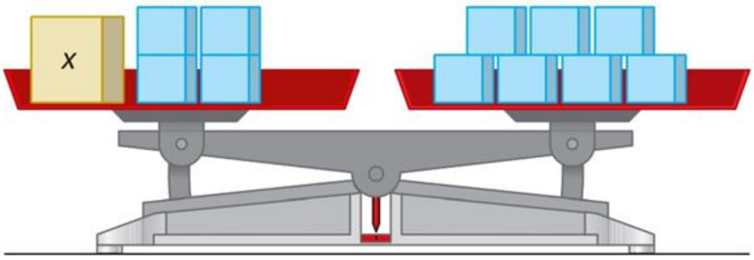
Perguntas	**Respostas**
a) O que é incógnita?	
b) O que você entende do símbolo de igualdade (=)?	
c) O que seria equação?	
d) Qual é a operação inversa da adição? Por que?	
e) Qual é a operação inversa da multiplicação?	

2. No quadro abaixo estão dispostas algumas sentenças matemáticas e desejamos saber: Qual é o valor de cada incógnita para tornar essas equações verdadeiras?

Equação	Incógnita
$\frac{30}{x} = 15$	$x = 2$
$x + 2 = 14$	
$e - 2 = 14$	
$2.i = 20$	
$\frac{x}{2} = 20$	
$13 + w = 20$	
$13 - x = 20$	
$x.3 = 18$	
$\frac{18}{x} = 6$	

Equação	Incógnita
$13 = x + 3$	$x = 10$
$7 = \frac{d}{5}$	
$15 = x - 6$	
$25 = x.5$	
$40 = \frac{h}{10}$	
$16 = 7 + x$	
$20 = 27 - x$	
$40 = 2.j$	
$9 = \frac{27}{x}$	

3. Em uma balança foram colocados blocos de 1 kg cada e um bloco de massa x desconhecida, em quilograma. Veja que a balança ficou equilibrada, dessa maneira:



a) Quais são os objetos que estão no prato à esquerda da balança?

____

b) E no prato a direita?

____

c) Como poderíamos representar matematicamente os objetos do primeiro prato? _______________

d) E como seria a representação matemática do segundo prato? _____

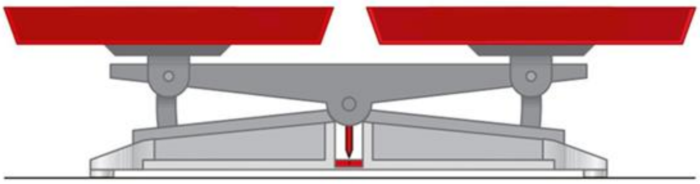
e) Observe que a balança está equilibrada, isso significa que os valores nos pratos são __________________.

Assim, podemos representar essa balança em forma de uma sentença matemática.

f) Como fica a equação que representa essa situação? ____________________

g) Vá até a figura, imagine que você retirou quatro blocos do prato esquerdo e também do prato direito da balança. Qual operação matemática que pode representar a retirada desses objetos? _________________.

h) Desenhe na balança abaixo o que restaria em cada prato.



Numa equação os pratos da balança são chamados de **membros**, sendo o prato a esquerda chamado de primeiro membro e o prato a direita de segundo membro.

i) Observe que a balança permaneceu em equilibro. Como se representa matematicamente a balança que você desenhou? ___________________

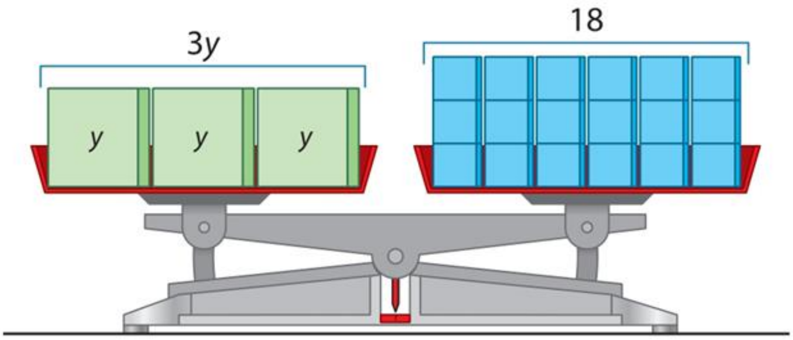
j) Assim, podemos concluir que o bloco no prato da esquerda tem massa $x =$ __ kg.

Quando adicionamos ou subtraímos uma mesma quantidade nos dois membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente à primeira. Esse é o **princípio aditivo** das igualdades.

k) Volte à figura e preencha os espaços utilizando a linguagem matemática.

A massa do bloco x somada a quatro unidades equivalem a sete unidades de blocos.	
Do que foi dito na frase anterior, retiramos 4 unidades dos dois membros da equação.	
O bloco de massa x tem valor 3.	

4. Observe a balança abaixo em equilíbrio e responda:



a) O que há no prato a esquerda da balança?

____

b) E no prato a direita?

____

c) Podemos representar essa situação por meio da seguinte equação: _______________

d) O símbolo "=" significa que esses valores são ____________________.

e) Ao dividirmos o primeiro membro por 3, o que precisa ser feito no segundo membro?

____

Obteremos no prato da esquerda a terça parte dos blocos que havia, assim como no prato a direita.

f) Volte a figura e preencha os espaços utilizando a linguagem adequada em cada passo.

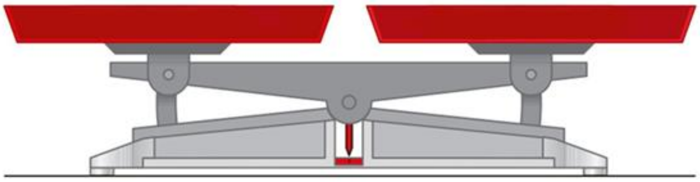
Passo 1:	A massa de três blocos y equivalem a dezoito unidades de blocos.	
Passo 2:		$\frac{3y}{3} = \frac{18}{3}$
Passo 3:	Apenas um bloco de massa y corresponde a seis blocos.	

g) Dos passos 1 e 3, notamos que as equações ___________ e ________ são equivalentes.

h) Podemos concluir que o bloco que tem massa $y =$ __ kg.

i) Para se obter a solução, foi utilizada a operação de divisão porque ela é a operação inversa dela é a _______________. E a operação inversa da multiplicação é a _______________.

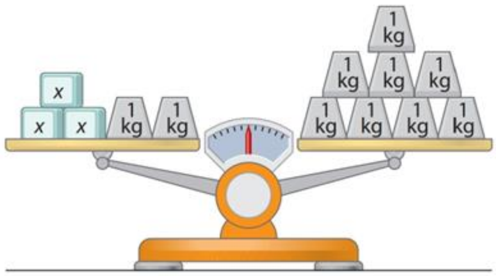
j) Desenhe na balança abaixo como ficaria a representação do item anterior.



Quando multiplicamos ou dividimos por um mesmo número não nulo os dois membros da equação, obtemos uma outra equação equivalente a primeira. Esse é o **princípio multiplicativo** das igualdades.

5. A balança a seguir está em equilíbrio, com os pratos nivelados.

No prato da esquerda, há 3 pacotes, cada um de x quilogramas, e 2 blocos de 1 quilograma. No prato da direita, há 8 blocos de 1 quilograma.

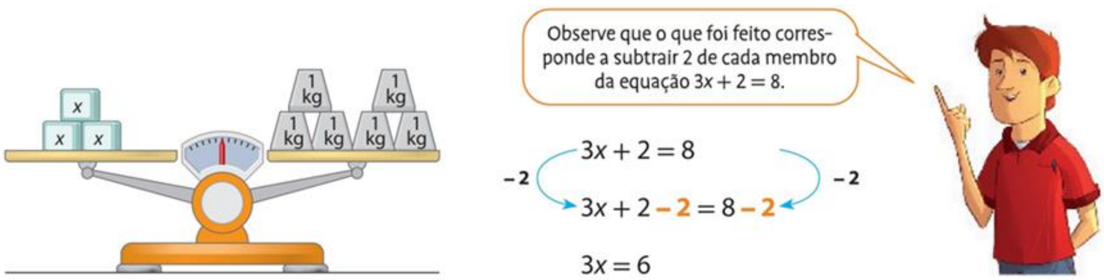


Podemos representar essa situação pela equação: $3x + 2 = 8$

a) Se forem retirados dois blocos de 1 kg de cada prato, o que acontece com a balança?

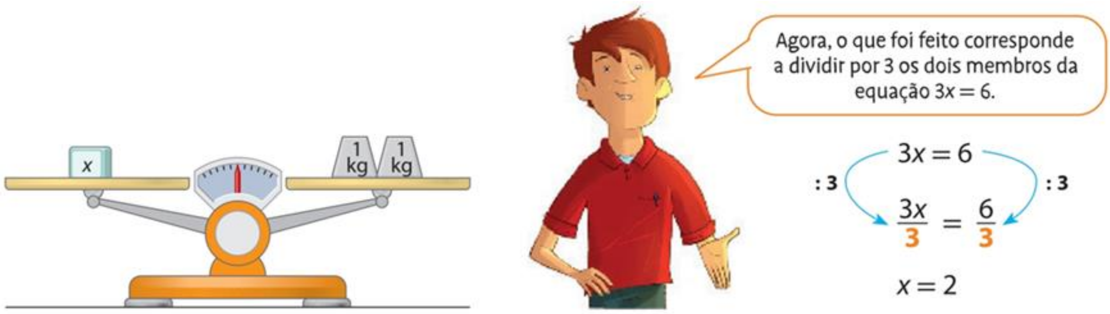
____

A situação passa a ser representada assim:



Note que a equação $3x + 2 = 8$ representava a balança no início da situação, depois que houve mudanças na balança sem alterar o seu equilíbrio, e a equação passou a ser $3x = 6$. Deixando em cada prato a terça parte do que ele contém, a balança continua com os pratos nivelados.

Passamos a ter a seguinte situação:



b) Ao obtermos $x = 2$, essa é a ____________ da equação. E para isso, no primeiro membro restou apenas a ____________ e o no segundo membro o ____________.

c) Agora substitua, ou seja, coloque no lugar da incógnita x o número 2.

I. $3x + 2 = 8$	II. $3x = 6$	III. $x = 2$

d) Quando a incógnita x foi substituída pelo número 2, a equação I é tornou verdadeira ou falsa? ______________

e) E nas equações II e III, essas sentenças matemáticas são verdadeiras ou falsas? _____________

f) A incógnita x poderia ser outro valor? Por que?

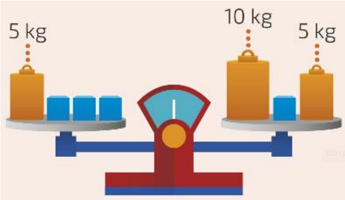
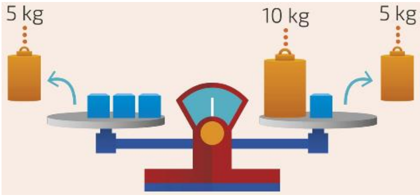
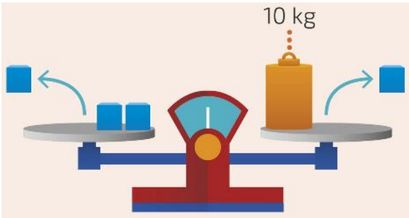
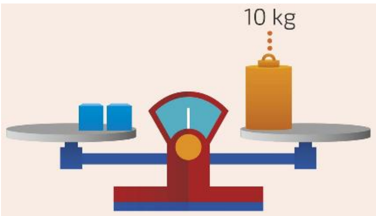
____

____

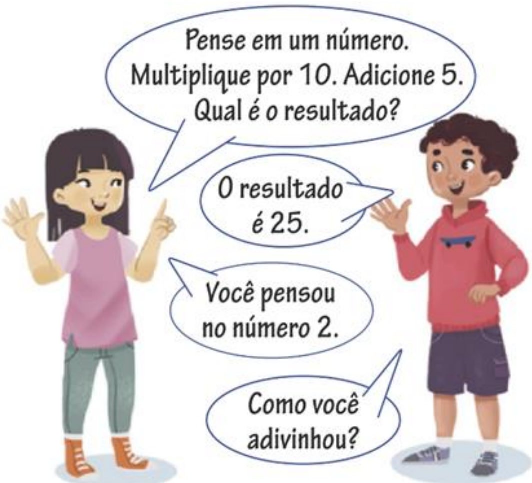
Dessa maneira, as equações I, II e III tem como solução o número 2. Como 2 é a solução das equações $3x + 2 = 8$, $3x = 6$ e $x = 2$, dizemos que elas são equações equivalentes.

Quando duas ou mais equações do 1º grau têm a mesma solução são chamadas **equações equivalentes**.

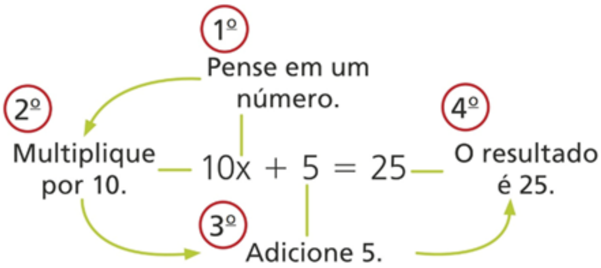
6. A balança de dois pratos a seguir está em equilíbrio, ou seja, a medida da massa em cada um dos pratos é igual. Complete os espaços que faltam no quadro abaixo.

Passos	Linguagem natural	Linguagem algébrica
I. 	Chamando de x a medida da massa de cada cubo, escrevemos uma equação associada a essa balança.	$5 + x + x + x = 10 + x + 5$ $3x + 5 = x + 15$
II. 	Utilizando a operação inversa da adição, retiramos 5 kg de cada prato da balança e subtraímos 5 unidades de cada membro da equação.	
III. 		$3x - x = x + 10 - x$ $2x = 10$
IV. 	Para obtermos a medida da massa de cada cubo dividimos os dois membros da equação por 2. Assim, a medida da massa de cada cubo é 5 kg.	

7. Raquel e Tadeu estão brincando de adivinhar números.



Nessa brincadeira, Raquel utilizou ideias de equação para obter o número pensado por Tadeu. Observe:



a) Faça os cálculos e verifique se 2 é raiz da equação $10x + 5 = 25$.

b) Agora, observe essas crianças brincando novamente.

- Escreva uma equação para obter o número pensado por Raquel. ____________
- Que número é esse? ____

8. Utilizando os princípios aditivo e multiplicativo, encontre a solução das seguintes equações do 1º grau.

a) $4x - 6 = 22$	b) $9 - x = 2x$	c) $8 + 4x = 6x - 4$

d) $25 - x = 12$	e) $5x = 40$	f) $3x - 21 = 0$
g) $3x + 1 = x + 9$	h) $4x - 11 = 7 - 2x$	i) $3x + 1 = 5 + x$