

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**CLEISIANE MENDES DOS SANTOS
INÊS MARIA BATISTA**

**ANÁLISE COMBINATORIA: ANÁLISE DOS ACERTOS E ERROS
APRESENTADOS POR DISCENTES DO I E VI SEMESTRE DO CURSO DE
MATEMÁTICA DA UNEB – CAMPUS VI**

**CAETITÉ – BA
2011**

**CLEISIANE MENDES DOS SANTOS
INÊS MARIA BATISTA**

**ANÁLISE COMBINTORIA: ANÁLISE DOS ACERTOS E ERROS
APRESENTADOS POR DISCENTES DO I E VI SEMESTRE DO CURSO DE
MATEMÁTICA DA UNEB – CAMPUS VI**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como forma de avaliação final do curso de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia – UNEB – Campus VI, ao professor Wilson Toews Doll Júnior.

Orientadora: Angelita de Souza Leite

**CAETITÉ – BA
2011**

**CLEISIANE MENDES DOS SANTOS
INÊS MARIA BATISTA**

**ANÁLISE COMBINTORIA: ANÁLISE DOS ACERTOS E ERROS
APRESENTADOS POR DISCENTES DO I E VI SEMESTRE DO CURSO DE
MATEMÁTICA DA UNEB – CAMPUS VI**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como forma de avaliação final do curso de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia – UNEB – Campus VI, ao professor Wilson Toews Doll Júnior.

Orientadora: Angelita de Souza Leite

BANCA EXAMINADORA:

**Wilson Toews Doll Júnior
ESPECIALISTA, UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB**

**Angelita de Souza Leite
ESPECIALISTA, UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA - UNEB**

**Eliana Gomes de Oliveira
ESPECIALISTA, UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA - UNEB**

15 DE MARÇO DE 2011

A todos aqueles que de certa forma contribuiu para a realização deste trabalho, incentivando-nos e nos apoiando em todos os momentos.

Agradecemos primeiramente a Deus por nos permitir a conclusão de mais uma etapa da nossa vida, descobrindo nossas capacidades e limitações.

A nossa família que nos apoiou, incentivou e nos compreendeu, demonstrando amor e carinho.

A nossa orientadora Angelita que por meio de sua experiência apresentou valiosa participação no desempenho deste trabalho. A sua compreensão e paciência, junto com críticas e sugestões enriqueceu o nosso trabalho.

Aos nossos colegas, amigos e professores que sempre estiveram do nosso lado somando experiências, enfim fazendo parte do nosso aprendizado.

“[...] um erro corrigido (por ele mesmo) pode ser mais fecundo do que um acerto imediato, porque a comparação de uma hipótese falsa e suas consequências fornece novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas ideias.”

PIAGET

RESUMO

Este trabalho apresenta a análise da questão seis do teste investigativo do projeto Análise dos erros cometidos por discentes de cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas (UNEB, UESB, UEFS, UESC). O objeto de estudo refere-se a uma questão de análise combinatória que exige dos discentes as habilidades e competências constantes nas matrizes de referência da 3ª série do Ensino Médio. Embasado nos estudos de vários autores, foi possível definir o conceito de erro, evidenciado o tratamento dado ao erro matemático. Para análise das respostas utilizou-se o descritor D32 da 3ª série do Ensino Médio das Matrizes de referência do sistema nacional da avaliação da educação básica – SAEB. O teste foi aplicado em duas turmas uma do 1º e outra do 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Campus VI da UNEB – Caetité – BA. Através dos temas selecionados foi possível identificar as habilidades e competências que os alunos não adquiriram no decorrer da Educação Básica ou mesmo ao ingressar na faculdade, fator que contribuiu para a incidência de erros na resolução da questão.

Palavras-chave: Erro, análise combinatória, descritores do SAEB.

ABSTRACT

This work presents an analysis of the sixth question from the investigative text of the project Errors Analysis made by students of the Mathematic course in the Universities Baianas (UNEB, UESB, UEFS,UESC). The object of study refers to a question of errors analysis, where it is necessary that students use their abilities and competences present in the matrix of reference of the 3rd grade of high school. Based on the study of various authors, it was possible to define the concept of errors, highlighting the attention given for the mathematic errors, and also expose the history of combinatory analysis. For the analysis of the answers it was used the matrix of themes and descriptors of the Prova Brasil 4th and 8th grades of the high school and the descriptor D32 of the 3rd grade of high school of SAEB. The text was applied in two groups, the first and sixth semesters of mathematics course at the UNEB of Caetite- BA. Through the selected themes it was possible to identify the abilities and competences that the students did not acquired during the basic education process or even when they started the course in the university, factor that had a great contribution in the incidence of errors in the resolution of questions.

Key- words: Errors, combinatory analysis, descriptors of SAEB.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES, TABELAS E QUADROS

Gráfico 1.....	29
Gráfico 2	30
Gráfico 3.....	31
Gráfico 4.....	31
Imagem 1- Prova C1X.....	34
Imagem 2 – Prova C2X.....	35
Imagem 3 – Prova C4X.....	35
Imagem 4 – Prova C10X.....	37
Imagem 5 – Prova C15X.....	37
Imagem 6 – Prova C17X.....	38
Imagem 7 – Prova C20X.....	39
Imagem 8 – Prova C27X.....	40
Imagem 9 – Prova C32X.....	40
Imagem 10 – Prova C28X.....	41
Imagem 11 – Prova C29X.....	41
Imagem 12 – Prova C34Y.....	43
Imagem 13 – Prova C35Y.....	44
Imagem 14 – Prova C48Y.....	45
Imagem 15 – Prova C37Y.....	46
Imagem 16 – Prova C40Y.....	46
Imagem 17 – Prova C47Y.....	47
Imagem 18 – Prova C43Y.....	48
Imagem 19 - Prova C42Y.....	49
Imagem 20 – Prova C45Y.....	49
Figura 1 – Triângulo Chu Shih-Chieh.....	22
Figura 2 – Triângulo de Pascal.....	22
Quadro 1 - Situação-problema retirada do Teste Investigativo aplicado em agosto/2009 com alunos de matemática da UNEB – Campus V.....	28
Quadro 2 - Diagrama das crenças dos discentes.....	31
Tabela 1 – Ensino Médio – SAEB (Prova X).....	33

Tabela 2 – Ensino Médio – SAEB (Prova Y).....	42
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FAPESB – FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DA BAHIA

MEC – MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PISA – PROGRAMA INTERNACIONAL DE AVALIAÇÃO DE ALUNOS

SAEB – SISTEMA NACIONAL DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

UEFS – UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

UESB – UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

UESC – UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ

UNEB – UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
2	O ERRO COMO CONSTRUTOR DO PROCESSO ENSINO APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA.....	15
3	A ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	20
3.1	UM BREVE RELATO HISTÓRICO.....	20
3.2	A ANÁLISE COMBINATÓRIA E A PRÁTICA PEDAGÓGICA.....	24
3.3	A IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	26
4	ANÁLISE E METODOLOGIA.....	27
4.1	CATEGORIAS DE ANÁLISES DA 6ª QUESTÃO.....	29
4.2	ANÁLISE QUALITATIVA DAS QUESTÕES.....	33
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
6	REFERÊNCIAS.....	53
	ANEXO A – Matriz de Referência de Matemática – Saeb / Prova Brasil – Temas e Descritores.....	56
	ANEXO B – Provas.....	64

1. INTRODUÇÃO

Apesar da intensa contribuição da matemática na maioria das atividades do cotidiano seja ela complexa ou mais simples persiste ainda a crença de ser considerada uma ciência difícil, que causa insegurança e aversão. Segundo pesquisas, é a disciplina que mais reprova e causa a evasão. Grande parte dos alunos que terminam o ensino médio não apresentam as principais competências exigidas para a série. Muitos não conseguem identificar a sua aplicabilidade na vida vendo a matemática como uma disciplina sem significado, o que acarreta sérias dificuldades em seu aprendizado. Segundo Ponte (1994, p.2):

Para os alunos, a principal razão do insucesso na disciplina de Matemática resulta desta ser extremamente difícil de compreender. No seu entender, os professores não a explicam muito bem nem a tornam interessante. Não percebem para que serve nem porque são obrigados a estudá-la. Alguns alunos interiorizam mesmo desde cedo uma autoimagem de incapacidade em relação à disciplina. Dum modo geral, culpam-se a si próprios, aos professores, ou às características específicas da Matemática.

Ao observar os exames do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), da Prova Brasil, do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), nota-se essas dificuldades, influenciando-o de forma negativa ao ingressar no nível superior levando muitos a desistência ou repetência por não dominarem os assuntos das séries anteriores.

Com essa visão de exatidão o erro que o aluno comete em matemática geralmente não é analisado, já é um hábito dos professores fazerem correções das respostas dos alunos atentando apenas para a resposta final, Segundo Diniz (apud Falzetta, 2002, p. 22), “Tem professor que, na correção, só olha as respostas.” se esta não estiver correta todo o processo anterior é desconsiderado.

De acordo Costa (1988, p.16):

A análise do “erro” nos permite valorizar o processo subjacente às respostas, não apenas a resposta com um produto que se encerra em si mesmo. A análise dos processos utilizados pelas crianças nos leva a verificar o que há de positivo nela, a sua construção lógica, não apenas os seus supostos déficits.

Nessa perspectiva o erro faz parte do processo ensino aprendizagem. Para Popper (apud Kuhn, 1979, p.17), “todos podemos aprender, e aprendemos, com nossos erros”. A teoria construtivista também se refere à necessidade de atentar

para as dificuldades dos alunos na busca do conhecimento contrapondo com o behaviorismo que elimina o erro. Segundo Cury (1995, p. 9-10):

Se estamos interessados no processo de aprendizagem da Matemática, o erro pode ser visto como instrumento de identificação. Dos problemas do currículo e da metodologia, e, ao resolvê-los, os erros serão eliminados; se, no entanto, queremos explorar o erro, esse pode constituir-se em instrumento para a compreensão dos processos cognitivos.

Levando-se em conta a importância de se considerar o erro como parte integrante da aprendizagem, o objetivo desse trabalho foi detectar e classificar, os erros desses alunos, mas em especial entender as dificuldades dos discentes do 1º e do 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB – CAMPUS VI, bem como apresentar o erro como metodologia de ensino. Foi escolhida para análise, a questão seis do teste Institucional do Projeto Análise de erros cometidos por discentes dos cursos de Matemática das Universidades Estaduais da Bahia (UNEB, UESB, UEFS, UESC) exigindo do aluno a habilidade em resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples. Foi possível com essa análise identificar as dificuldades dos conceitos adquiridas na escola básica, além de comparar alunos calouros e veteranos identificando se os estudos acadêmicos contribuíram para desenvolver a habilidade exigida para resolver a questão.

A questão escolhida para análise referente ao conteúdo de análise combinatória e trás o seguinte enunciado:

Questão 6 (adaptada do Vestibular UEFS 2007) – *Três estudantes chegaram juntos a uma cidade para participar de um congresso e, não tendo feito reservas com antecedência, constataram que em cada hotel poderiam ficar até dois estudantes. Sabendo que há apenas quatro hotéis na cidade, calcule o número máximo de possibilidades de hospedagem.*

Quadro 1 - Situação-problema retirada do Teste Investigativo aplicado em agosto/2009 com alunos de matemática da UNEB – Campus VI. Fonte: PAE (2009).

Faz-se necessário mudanças no sentido de melhorar a postura com relação à avaliação do aluno. Começar a problematizar o erro é indispensável, uma vez que o raciocínio do aluno para se chegar à resposta errada representa a maneira como foi trabalhado o conteúdo.

[...] de modo geral os erros devem ser vistos como um indicativo de que o aluno sabe alguma coisa, porém não totalmente ou corretamente e que,

portanto, é preciso trabalhar com esses erros e não apenas ignorá-los, lembrando que, dependendo da natureza do erro e que se determina qual conduta pedagógica deve ser adotada na busca de sua superação. Essa é uma das contribuições pessoais que o professor pode fazer na busca de diminuir o fracasso escolar. (AVA 2000, p.55).

Esse novo olhar sobre o erro do aluno pretende minimizar as dificuldades apresentadas por eles contribuindo para modificar a prática vigente de forma que os professores elaborem novas estratégias de ensino.

2. O ERRO COMO RECONSTRUTOR DO PROCESSO ENSINO APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A matemática é uma ciência que se faz presente em várias situações cotidianas e serve como importante ferramenta para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento como a física, engenharia, medicina entre outros fatores que demonstram a necessidade em se adquirir o conhecimento matemático. Por se caracterizar como uma ciência exata e de modelos pré-estabelecidos e, segundo o dicionário Aurélio (2000), entende-se por exato, algo correto, certo, justo, preciso, rigoroso, apurado, perfeito, fiel ou verdadeiro, o ensino aprendizagem da matemática tem sido algo desafiador e enigmático.

A busca incessante pela exatidão nas respostas tem se destacado como prioritário o que acaba por desconsiderar o processo da aprendizagem no momento da construção dos conceitos. E isso trás como consequência uma aprendizagem mecânica e sem aplicabilidade ocasionando desta forma o repúdio pela disciplina. O que pode ser constatado quando se verifica os baixos conceitos em avaliações que visam identificar o nível de conhecimento dos alunos como, por exemplo, o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Prova Brasil e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Pensando nas dificuldades que envolvem o ensino aprendizagem da matemática, alguns estudiosos em ciências humanas (educação, filosofia, pedagogia, psicologia, didática entre outros) buscam compreender quais os processos que facilitam a aprendizagem além das condições necessárias para o seu desenvolvimento. Para isso, alguns pesquisadores em didática da matemática em especial têm como fundamento as hipóteses das pesquisas psicogenéticas e da psicologia social, por acreditar que o conhecimento acontece quando há situações de ação e desequilíbrio. Mas, quando se fala em aprendizagens de conceitos matemáticos vários estudiosos defendem a ideia de que um dos fatores que mais influenciam essa aprendizagem é o tratamento que o professor dá ao erro do aluno.

Segundo o dicionário Aurélio (2000) erro significa “juízo falso, incorreção, desvio do bom caminho, desacerto”... No entanto:

“Ninguém ainda havia dito, com a insistência de Bachelard, que o erro tem uma função positiva no nascimento do saber, que ele não é uma espécie de

lacuna ou ausência, mas que ele tem a estrutura e a vitalidade do instinto (SIERPINSKA, 1989, p.2)".

Nesse sentido Bacherlad (1980) considera que o erro faz parte do processo ensino e aprendizagem.

Por muito tempo o erro foi visto no âmbito escolar como algo ruim, conforme descrito no dicionário. Neste caso o aluno que não demonstrasse ter se libertado desse "desvio do bom caminho" teria que ser banido e punido, pois sob o ponto de vista da pedagogia, erro era considerado como mau desempenho e fracasso.

A partir de muitos estudos, especialistas detectaram o quanto há aprendizagem com os erros cometidos. Segundo Pinto (2000, p. 28) o erro tem sido um vigoroso objeto de estudo para a educação matemática, e começa a ser tratado como uma possibilidade e uma realidade permanente na construção do conhecimento. Brousseau considera que:

"O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu insucesso, mas que agora se revela falso ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos."
(1983, p.17)

Só será válida a investigação de erros na perspectiva de construção da aprendizagem se estes forem observáveis tanto para o professor quanto para o aluno. "Para sua estratégia didática e inovadora, o erro precisa ser um 'observável' para o aluno". Porém o erro não será um 'observável' para o aluno, se antes não for um observável para o professor"(PINTO, 2000, p.147). Desta forma, torna-se necessário que o professor saiba primeiramente a causa do erro, seguido de iniciativas a desenvolver para que este fique observável ao aluno criando assim condições para superá-las. Para La Taille (1997, pp. 36-37) "não basta o aluno ficar sabendo que errou! Ele deve ter acesso à qualidade de seu erro". Mas "tornar o erro um observável nem sempre é fácil e pede muita criatividade pedagógica por parte dos professores".

Em se tratando de erros como subsídios na construção de conhecimentos do processo ensino- aprendizagem, verifica-se uma grande relação com a imensidade tecnológica existente hoje, pois, nenhum desses aparatos surgiu com aparência atual, foi necessário todo um processo em que se experimentou e avaliou os acertos e principalmente os erros, caracterizando-os não como algo ruim, mas como uma

tentativa a menos para se alcançar o acerto. Thomas Alva Edison, um dos grandes inventores de nosso tempo é um exemplo, dentre as suas varias invenções pode-se destacar a lâmpada incandescente, na qual para se obter êxito teve que realizar vários experimentos fracassados.

Albert Sabin, inventor da vacina contra a poliomielite, enfatizou que a invenção e a campanha de erradicação da paralisia infantil tinha sido “um trabalho de muitos, principalmente de todos aqueles que erraram antes para que o caminho do acerto ficasse mais curto depois” (MORAIS, op.cit, p. 22). Dessa forma, em se tratando de educação e especificamente educação matemática até mesmo para desmitificar a ideia de ciências exatas, o erro matemático não pode ser visto e tratado de outra forma, deve ser também experimentado e analisado para em seguida ser utilizado no processo de aprendizagem. Para Macedo:

Quando se considera o processo ignorar o ‘erro’ é supor que se pode acertar sempre na primeira vez; é eliminado como parte, às vezes inevitável, da construção de um conhecimento, seja de crianças, sejam de adultos. Como processo, errar é construtivo. (MACEDO, 1997, p.29)

Olhando-se para a perspectiva docente o erro deve ser analisado enfatizando a formação continuada dos professores.

“No caso da formação de professores nos cursos de licenciatura, em seus moldes tradicionais, a ênfase se dá aos conceitos específicos da área nas disciplinas básicas sem quase nenhum relacionamento com a escola”(CARVALHO, 2001, p.97).

Ou seja, há uma desarticulação entre realidade e prática dos conteúdos acadêmicos do futuro professor havendo assim a separação entre disciplinas específicas e pedagógicas o que irá refletir na construção do seu perfil como professor, levando a ter uma prática em que a realidade esteja desvinculada dos conteúdos e que as atividades são cansativas para o aluno o que lhes parece inútil, causando o desinteresse e induzindo-os ao erro. Segundo Thorndike, “o trabalho monótono tende a levar o aluno ao erro, ainda que ponha o melhor dos seus esforços e de sua vontade na execução da tarefa. Então o raciocínio que aritmeticamente faz certo, dá resultado errado e o aluno fica desanimado”.

É necessário que o professor faça um planejamento de atividades pedagógicas que permitam o acompanhamento do pensamento dos alunos no momento que aprendem. Para Pinto (2000, p.12), o processo deve ser “avalia-se

menos para punir e mais para formar”. Dessa forma, o professor irá considerar a avaliação como processo formativo e não seletivo, entendendo que o erro faz parte do processo ensino aprendizagem.

O entendimento do professor para o fato de que o erro é resultante de vários fatores que envolvem escola, currículo, prática educativa do professor e esforço dos alunos é de extremo significado, uma vez que dessa forma ele conseguirá desmitificar a ideia de que o aluno é o único culpado pelo mau desempenho. Assim é imprescindível que a escola incorpore o erro em vez de desqualificá-lo, considerando como uma oportunidade didática uma vez que o professor irá conhecer as dificuldades dos alunos e se preocupar com a sua aprendizagem e não apenas com o ensino, planejando atividades a partir da análise dos erros, organizando melhor seu ensino para que o aluno se conscientize do erro cometido e reconheça que se trata de um problema a ser superado. Segundo Cury (2007, p.80) o erro se constitui como um saber que o aluno possui, que foi construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre suas respostas.

O erro do aluno no processo de aprendizagem deve ser visto como uma oportunidade de reconstrução pois, segundo Cortella (2006, p. 112), “errar é, sem dúvida, decorrência da busca e, pelo óbvio, só quem não busca não erra”. Neste caso ele deixa de ser uma catástrofe e passa a ser visto como uma possibilidade de buscar e aprimorar o conhecimento.

Acredita-se que uma das maiores dificuldades em promover aprendizagem na escola seja devido à prática pedagógica que é vista como ferramenta para instruir e transmitir como se existisse um conhecimento certo e que o aluno precisa aprender. É sabido que a aprendizagem ocorre quando existe a necessidade de conseguir algo, ou seja, para ter uma aprendizagem significativa é necessária a conexão com a realidade, interesses e necessidades do aluno. Como afirma Gómez (1998, p. 38), ao comentar sobre a aprendizagem significativa de Ausubel, dizendo que “a aprendizagem significativa está na vinculação substancial das novas ideias e conceitos com a bagagem cognitiva do indivíduo”.

Nessa perspectiva de melhoria no ensino e aprendizagem de matemática, atentando para mudanças necessárias no fazer pedagógico em sala de aula, para isso tendo que definir ações e o direcionamento correto de recursos financeiros voltados ao desenvolvimento e qualidade da educação no país que o governo criou

políticas públicas, a exemplos tem a Prova Brasil e do Saeb desenvolvidas pelo INEP/MEC. Essas avaliações externas são vistas como uma referência para o aprendizado feito não com o objetivo de aprovar ou reprovar, mas de detectar a qualidade do ensino brasileiro através de testes padronizados e questionários socioeconômicos e assim diagnosticar o sistema de ensino.

De acordo o SAEB - Guia para Elaboração de Itens de Matemática (2003), as matrizes de referência constituem um conjunto de descritores que representam os conteúdos mais relevantes, as competências construídas e as habilidades desenvolvidas e possíveis de serem avaliadas pelo SAEB. Os temas selecionados – espaço e forma, grandezas e medidas, números e operações e tratamento da informação, apresentam, em cada série, um determinado nível de habilidades apresentadas como descritores, os quais foram estruturados em uma hierarquia de importância pedagógica, levando-se em consideração uma definição de prioridades (competências), tendo como eixo a habilidade de resolver problemas, como estabelecem os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Dessa, forma tendo os descritores como referência e baseado nas investigações de pesquisadores e nos estudos da professora Helena Noronha Cury que afirma o erro como metodologia de ensino quando se faz um planejamento em que este seja utilizado como ferramenta para a aprendizagem, o erro irá contribuir para compreender como o aluno consegue adquirir determinado conhecimento e detectar as dificuldades e deficiências para que haja uma aprendizagem significativa.

3. A ANÁLISE COMBINATÓRIA

3.1 Um breve relato histórico

Desde os primórdios da civilização, o homem vem demonstrando interesse e curiosidade aos problemas relacionados à contagem. Isso se deu devido situações cotidianas como, por exemplo, a necessidade de se controlar a quantidade de animais ou comida que possuíam. A contagem para o homem antigo acontecia uma a uma, e para isso utilizavam pedras, pedaços de madeiras, nós em cordas entre outros. Mas, com a evolução da espécie os problemas diários tomaram maiores proporções e já não se conseguia solucioná-los quando envolviam, por exemplo, grandes quantidades.

Segundo Rosa (1998, p.03) “esse progresso exigiu um novo tipo de contagem que superou a simples enumeração de objetos”. Era necessário um novo método com mais praticidade e eficiência, capaz de desenvolver a noção de agrupamento de objetos de um conjunto.

Entende-se por análise combinatória, a parte da matemática que tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente em escolher e agrupar os elementos de um conjunto. Roxo et al a definem como:

“(...) o estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: arranjos, permutações e combinações, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos. (ROXO et al, 1944, p.81).”

Ela faz parte de um ramo da matemática denominado matemática discreta em que se estuda objetos discretos. Vem do latim *discretus*, que significa *discriminar, separar, distinguir, ver claro*. Segundo o dicionário, discreto é: “distinto de outros; separado; consistindo de partes distintas; descontínuas”. Nesse sentido a matemática discreta refere-se aos problemas de contagem. Para os Standards (1989/1991), a Matemática Discreta diz respeito às propriedades matemáticas de conjuntos e sistemas numeráveis, e o seu estudo é indispensável no mundo do processamento da informação e na resolução de problemas que envolvem métodos computacionais.

Sabe-se que as origens da análise combinatória bem como de outros conteúdos matemáticos, possuem vários autores de civilizações distintas que contribuíram com estudos em épocas diferentes, como um processo de constante

aperfeiçoamento. Dessa forma, para proporcionar uma visão geral dos agentes que fizeram parte da construção deste conhecimento, torna-se necessário evidenciar alguns dos principais colaboradores como Levi Bem Gerson, Nicole Oresme, Boécio, Blaise Pascal e Bhaskara,

Levi Bem Gerson¹ sistematizou as formulas de arranjo, permutação e combinação de n elementos tomados k a k , sem repetição. O francês, Nicole Oresme² apresentou em seu manuscrito "tractatus de Figuratione potentiorum et mensurarum differitatum" a soma de seis elementos tomados 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4 e 5 a 5.

Com relação às contribuições dos matemáticos para o desenvolvimento da análise combinatória destaca-se Boécio o único matemático latino que contribuiu nesses estudos, o qual criou uma regra para determinar combinações de n elementos tomados dois a dois.

Bhaskara deixou contribuições na sua obra "Lilavati", deixando regras para o cálculo de arranjos com ou sem repetição e combinações sem repetição e ainda relacionando permutações com situações cotidianas na poesia, na arquitetura e na medicina.

Na Europa, em vários manuscritos cristãos encontram-se relações entre permutações e combinações influenciados pela época do Renascimento, a pressão das recentes descobertas e necessidades mercantis auxiliaram na sistematização da análise combinatória como as possibilidades de n pessoas se sentarem em torno de uma mesa, as combinações possíveis de fechaduras, os agrupamentos possíveis de objetos e, naturalmente, as chances nos jogos de azar.

Blaise Pascal, importante filosofo e matemático do século XVII, estudou e demonstrou em seu trabalho "Triângulo Aritmético" as diversas aplicações que fez de muitas propriedades do triângulo. O triângulo aritmético é um triângulo numérico infinito formado por binômios de Newton $\binom{n}{k}$ onde n representa o número da linha (posição vertical) e k representa o número da coluna (posição horizontal).

¹Filósofo, astrónomo, comentador bíblico e matemático, nasceu na França em 1288 e faleceu em 1384.

²Economista, matemático, físico, astrónomo, filósofo, psicólogo e musicólogo; foi também um teólogo dedicado e Bispo de Lisieux, tradutor, conselheiro do rei Carlos V da França e um dos principais fundadores e divulgadores das ciências modernas.

Alguns autores afirmam que ele foi descoberto pelo matemático chinês Yang Hui, por volta de 1300 e antes pelos hindus e arabes e só aproximadamente 500 anos depois suas propriedades foram estudadas pelo francês Blaise Pascal, que analisou as relações e aplicações das disposições dos números com as combinações e os utilizou na resolução de problemas de probabilidade, e como consequência desses estudos e de suas importantes contribuições o triângulo ficou conhecido como Triângulo de Pascal.

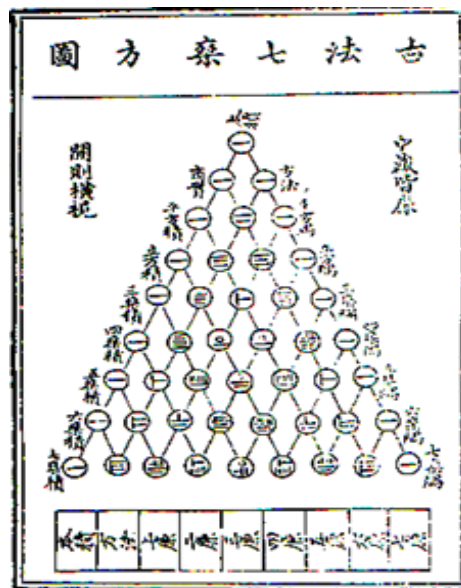


Figura 1 - Triângulo Chu Shih-Chieh. Fonte: Boyer, C. B. *História da Matemática*

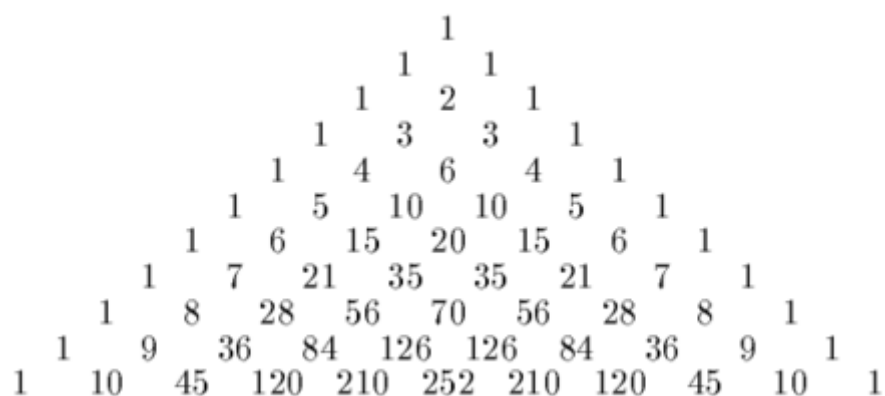


Figura 2 - Triângulo de Pascal. Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/combinat%C3%B3ria>

Batanero (1996 apud Sabo 2010 p. 68) com relação aos trabalhos de Pascal, ressaltam que as contribuições e os estudos de Pascal, provocaram um forte desenvolvimento na formulação dos princípios fundamentais da análise combinatória.

Enfatiza-se também que os jogos exerceram certa influencia no desenvolvimento da análise combinatória, uma vez que o homem sempre demonstrou fascínio pelos jogos de azar, com o intuito de achar maneiras de ganhar. “Deve-se levar em conta, porém que no século XVI o jogo era o passatempo dominante” (DOMINGUES, 1993, p.57).O que proporcionou o desenvolvimento das técnicas de contagem e combinação.

Através desse relato vê-se que a concepção de análise combinatória não é tão simples, percebem-se as diferentes etapas e dificuldades encontradas até o desenvolvimento desses conceitos existentes hoje. Mas, recorrendo a história da matemática encontra-se como surgiu e desenvolveu o interesse por ela.

3.2 A análise combinatória e a prática pedagógica

Devido a sua intensa contribuição para o desenvolvimento cognitivo do aluno levando-o a pensar, discutir, concentrar e raciocinar para resolver um determinado problema, seria necessário que o ensino da análise combinatória começasse nos primeiros anos da escola básica para o aluno chegar no ensino médio já familiarizado com os problemas de contagem.

Apesar da extrema importância nos dias atuais, análise combinatória é considerada um conteúdo difícil de ser abordado em sala de aula e de ser assimilado pelos alunos. Como disse Hariki (1996, p.29) Problemas combinatórios são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente.

Provavelmente a forma como o professor trabalha com esse assunto seja um dos pontos fundamentais para que ocorra ou não aprendizagem conforme afirma Lopes 2000, p. 12

Nas aulas de análise combinatória os alunos ao resolver um problema terá que identificar a fórmula correta para arranjo, permutação ou combinação e fazer a relação entre o problema e a teoria matemática correspondente, que para Hariki (1996, p.29) essa é considerada a principal dificuldade dos alunos, pois é difícil determinar se o problema combinatório dado é uma problema de arranjo, de permutação ou combinação ou então, se é suficiente usar diretamente o princípio multiplicativo.

A respeito do uso de fórmula, Esteves (2001), em sua pesquisa diz que:

[...] a fórmula em si não é negativa nem contraproducente; ao contrario, ela representa uma compreensão algorítmica que assegura uma economia cognitiva importante, desde que colocada no tempo certo. Para o conteúdo análise combinatória, quando não reforçamos a fórmula, acreditamos que estamos valorizando o uso da árvore de possibilidade, do método de tentativa e erro, do desenho e do princípio fundamental da contagem para um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório. Assim, a fórmula no papel deixa de ser apenas uma ferramenta para desenvolver os problemas de maneira mais econômica. (ESTEVES, 2001, p.3)

É necessário que o professor saiba que o aluno já utiliza o pensamento combinatório resolvendo problemas do seu dia-a-dia, quando, por exemplo, elaboram tabelas de jogos de futebol sem ter conhecimento de matemática. Neste sentido é importante selecionar problemas que tenham significado para os alunos

uma vez que trabalhar com algo mais concreto é bem mais prazeroso o que proporciona a ele mais vontade de participar e fazer descobertas, transformando-se em um sujeito ativo de seu próprio conhecimento, sistematizando o conteúdo e buscando a desenvolver o seu potencial cognitivo.

Em relação a postura do educador Freire (1996) afirma que ensinar não é transmitir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou sua construção. Assim, quando um aluno reconhece situações do seu cotidiano em uma questão matemática, eles podem interagir com os outros alunos e expor suas próprias experiências semelhantes àquelas que são apresentadas nas atividades. Dessa forma, as aplicações da análise combinatória se tornam mais prazerosas de serem resolvidas, já que os alunos atacarão com mais entusiasmo os problemas que acham interessantes e atrativos, como ressaltam Barnett et al (1997).

Para evitar essa aprendizagem mecânica é necessário que o professor faça um planejamento de forma que as aulas estejam inseridas no contexto do aluno, além de buscar a participação dele na construção de conceitos, levando-o até uma aprendizagem significativa.

Sobre a importância da contextualização em matemática, Pais (2001, p. 27), ressaltam que: “A contextualização do saber é uma das mais importantes noções pedagógicas que deve ocupar um lugar de maior destaque na análise da didática contemporânea”. Trata-se de um conceito didático fundamental para a expansão do significado da educação escolar. O valor educacional de uma disciplina expande na medida em que o aluno compreende os vínculos do contexto compreensível por ele.

3.3 A Importância da análise combinatória

O estudo da análise combinatória está se tornando cada vez mais necessário, devido a sua aplicabilidade no mundo. Ela é usada para descobrir diferentes possibilidades de uma combinação de variável cuja necessidade surge em diversas situações cotidianas por exemplo, quando se elabora um horário escolar, a quantidade possível de placas de carros existentes no atual sistemas de placas brasileiro, possibilidades de acertos em jogos e loterias, além disso percebe-se o uso fortemente da análise combinatória no desenvolvimento da teoria dos grafos (problemas de pesquisas operacionais, de armazenamento de informações em banco de dados no computadores, surgindo assim com frequência e problemas teóricos e práticos ligados aos computadores).

Segundo Rosa:

A partir de meados do século XVIII, a Análise Combinatória passou a ser utilizada em vários ramos da Matemática como Estatística, Álgebra, probabilidade, Lógica, etc., e em outras áreas do conhecimento humano como Biologia Molecular, Programação de Computadores, Economia, Teoria da Programação para o Bom Funcionamento da Empresa, etc. (1998 p.04)

Percebe-se também a sua importância ao vermos que ela é constantemente cobrada em vestibulares e concursos por envolver um pensamento mais abstrato o que na maioria das vezes dificulta perceber todas as possibilidades.

Além disso, vale ressaltar que o aprendizado desse conteúdo possibilita o desenvolvimento de várias habilidades dentre elas destaca-se a facilidade de resolver problemas reais com mais rapidez e eficácia.

4. ANÁLISE E METODOLOGIA

Este trabalho é caracterizado por uma pesquisa que adota para análise de dados, a metodologia pautada na abordagem primeiramente quantitativa e em seguida qualitativa. Segundo Minayo:

A pesquisa é uma atividade básica das ciências na sua indagação e descoberta da realidade. É uma atitude e uma prática teórica de constante busca que define um processo intrinsecamente inacabado e permanente. É uma atividade de aproximação sucessiva da realidade que nunca se esgota, fazendo uma combinação particular entre teoria e dados (1993, p.23).

Para Silva e Menezes (2001), caracteriza-se como um conjunto de ações, que tem por objetivo encontrar a solução para um problema, tendo por base procedimentos racionais e sistemáticos que deve ser realizada quando se tem um problema e não se tem informações para solucioná-lo.

De acordo D'Ambrósio (2006, p.77) a pesquisa possui um caráter quantitativo, quando é “[...] lida com grande número de indivíduos, recorrendo aos métodos estatísticos para a análise de dados coletados de maneiras diversas[...]” O que pode ser observado neste trabalho uma vez que os dados foram organizados utilizando-se tabelas e/ou gráficos que permitiram analisar e classificar os erros e acertos das questões baseados nos itens da Prova Brasil e SAEB.

A pesquisa será qualitativa segundo D' Ambrósio (2006, p. 78), quando se “tem como foco entender e interpretar dados e discurso, mesmo quando envolve grupos de participantes”, sendo de grande valia, após a tabulação dos dados, pois pode fornecer subsídios levando a uma melhor compreensão dos erros apresentados, e desta forma evidenciar as habilidades e competências que os alunos não atendem durante a resolução da questão.

Segundo Borba e Araújo (2004, apud Silvia 2010, p.20):

[...] uma das principais tendências da Pesquisa Qualitativa, está baseada na ideia de que sempre há um aspecto subjetivo no conhecimento produzido, descartando a possibilidade de neutralidade no que é exposto em forma de conhecimento. Existe uma multiplicidade de procedimentos que devem ser considerados no âmbito da pesquisa qualitativa, pois tais procedimentos podem apontar para os mesmos resultados caminhos diferentes. Nestas condições, adotar o método da pesquisa qualitativa para estudar também as respostas dos alunos é fundamental para compreender as diferentes maneiras de resolução utilizadas por eles ao modelar matematicamente o problema proposto.

Para a realização da análise , foi escolhida a 6ª questão de um teste investigativo elaborado por um grupo de pesquisa que consta de seis questões padronizadas a todas as universidades participantes do projeto (UNEB, UESB, UESF E UESC), que foi aplicado a 32 alunos do 1º semestre e 16 alunos do 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia Campus VI, situada na cidade de Caetité – BA em agosto de 2009 no campus de Caetité. A questão traz o seguinte enunciado:

Questão 6 (adaptada do Vestibular UEFS 2007) – *Três estudantes chegaram juntos a uma cidade para participar de um congresso e, não tendo feito reservas com antecedência, constataram que em cada hotel poderiam ficar até dois estudantes. Sabendo que há apenas quatro hotéis na cidade, calcule o número máximo de possibilidades de hospedagem.*

Quadro 1 - Situação-problema retirada do Teste Investigativo aplicado em agosto/2009 com alunos de matemática da UNEB – Campus VI. Fonte: PAE (2009).

A questão foi escolhida como objeto de pesquisa pelo fator curioso de todas as respostas estarem erradas. Pensando na importância do conteúdo análise combinatória cobrada nessa questão e no grau de dificuldade detectado pela incidência de erros em todos os alunos investigados, busca-se com essa pesquisa compreender as principais causas das dificuldades desses alunos, identificando novos meios de intervenção na busca de uma aprendizagem significativa.

Em relação as respostas dos alunos Cury enfatiza que:

“Na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si que são pontuados em uma prova de avaliação da aprendizagem, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem.” (2007, p. 63)

A análise das provas, tem como objetivo identificar os erros cometidos bem como apontar as principais dificuldades advindas da educação básica dos alunos calouros e veteranos, permitindo desta forma discutir a aprendizagem a fim de minimizar as dificuldades desses estudantes dos cursos de licenciatura em matemática.

Para manter a identidade dos alunos e facilitar a sua identificação foram criados critérios para identificação das provas. Os alunos do 1º semestre foram identificados por símbolos que vão de C1X a C32X e os alunos do 6º semestre identificadas de C33Y a C48Y.

4.1 Categorias de análises da 6ª questão

Para analisar as respostas dos discentes do 1º e do 6º semestre do curso de matemática ao resolver a sexta questão do teste investigativo do projeto Análise dos erros cometidos por discentes de cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas (UNEB, UESB, UEFS, UESC), aplicado em agosto de 2009 na UNEB – Campus VI, utilizou-se as categorias que foram definidas pela equipe do Projeto de Análise de Erros (PAE) com o objetivo de agrupá-las como resoluções corretas, erradas, ou não respondidas. Nas resoluções corretas enquadram aquelas respondidas conforme resolução institucional definida pelo PAE, as resoluções erradas são separadas em grupo um, dois, três, quatro e cinco sendo que no grupo dois as resoluções distintas se subdividem em primeira, segunda e terceira estratégia. Ficando desta forma possível verificar as reais dificuldades e erros apresentados nas 4 universidades estaduais baianas

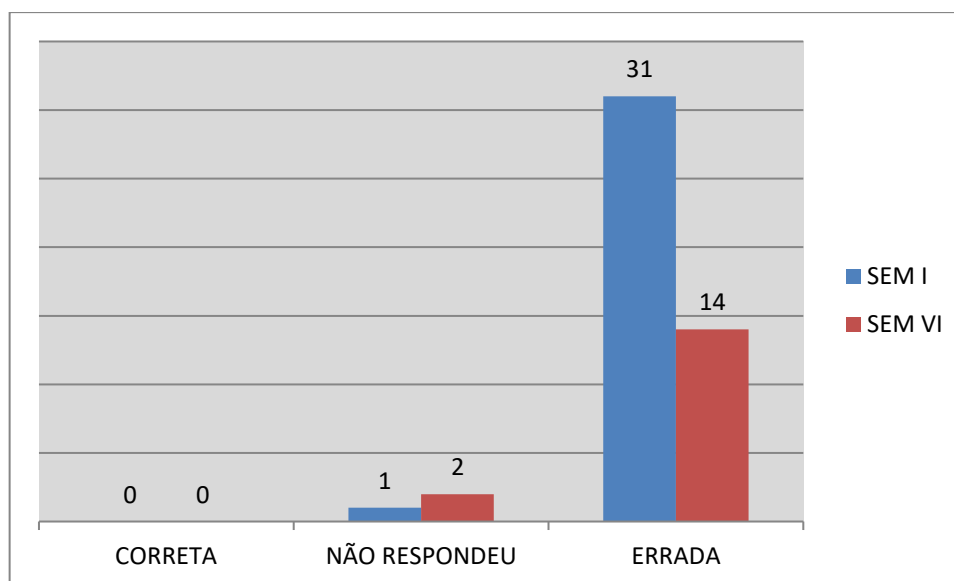


Gráfico 1 - Classificação das provas dos discentes do primeiro e do sexto semestre de acordo com as resoluções. Fonte: do autor (2011)

O gráfico apresenta dados muito preocupantes pois, constata-se que nenhum discente do primeiro ou do sexto semestre acertou a questão, mesmo ela trazendo conforme resolução institucional, três estratégias de resolução. Dos 32 alunos do 1º semestre 31 erraram e apenas 1 não respondeu, dos 16 alunos do 6º semestre 14 erraram e 2 não responderam .

Para a resolução da questão que aborda o conteúdo análise combinatória, exige-se as habilidades e competências em resolver problemas de contagem, utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação ou combinação simples constantes no descritor D32 da matriz de referencia do 3º ano do ensino médio do SAEB. Ressalta-se que como nenhum discente acertou a questão, torna-se desnecessário a construção de gráfico para melhor visualização dos descritores.

O gráfico 2 apresenta a distribuição dos alunos por grupos que correspondem aos diferentes tipos de erros apresentados. No primeiro grupo estão os discentes que tentaram responder, alojando os estudantes um por hotel e dois em outro e o terceiro em outro hotel; no segundo estão os que utilizaram os padrões de contagem ou princípio multiplicativo; no terceiro, os que tiveram como estratégia de resolução a permutação; o quarto grupo trás os alunos que utilizaram fórmulas de maneira errada; e no quinto grupo constam os alunos que não recorreram aos conceitos referentes ao assunto Análise Combinatórias.

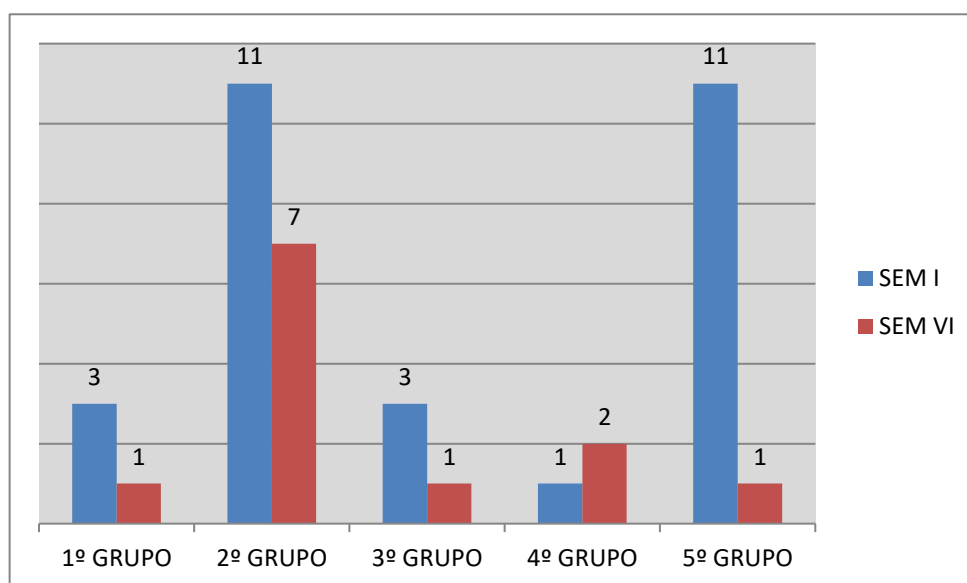


Gráfico 2 - Classificação dos erros apresentados pelos discentes do primeiro e do sexto semestre.
Fonte: do autor (2011)

É importante ressaltar que os discentes C14X e C23X do primeiro semestre e o discentes C38Y e C44Y do sexto semestre não estão contabilizados no gráfico por suas resoluções não enquadrarem em nenhum grupo definido pelo PAE.

Todos os discentes tiveram a oportunidade de fazer uma auto avaliação sobre sua resposta, assinalando nas alternativas do diagrama constante no rodapé de cada questão do teste, conforme o modelo à seguir:

Com relação à solução apresentada por mim à alternativa escolhida é: () Estou seguro(a) que está correto; () Acredito que está correto; () Aposto 50% que está correto; () Acredito que está incorreto; () Estou seguro(a) que está incorreto.

Quadro 2 - Diagrama das crenças dos discentes. Fonte: PAE (2009).

Das respostas dadas a esse diagrama foi possível elaborar os seguintes gráficos:

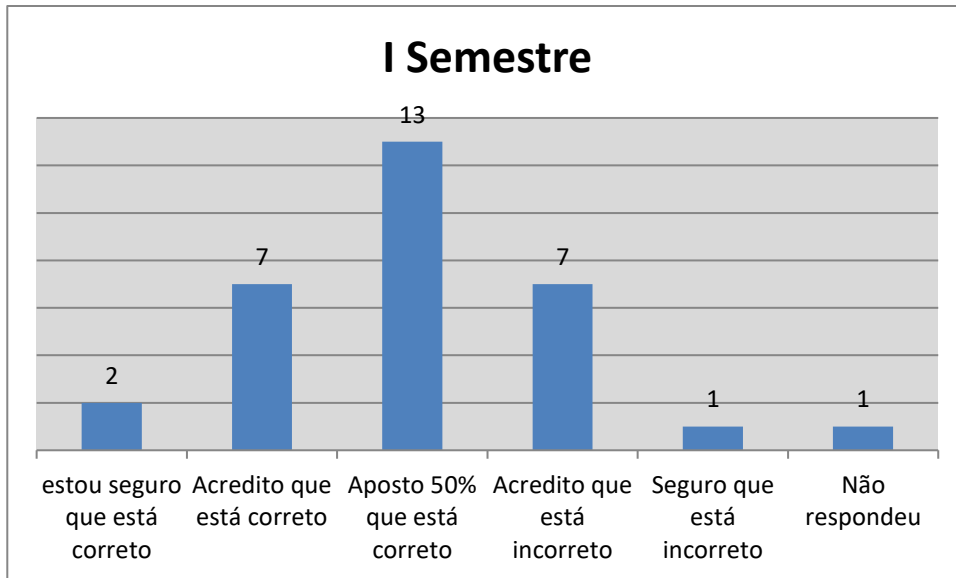


Gráfico 3 - Crenças dos discentes do primeiro semestre. Fonte: do autor (2011)

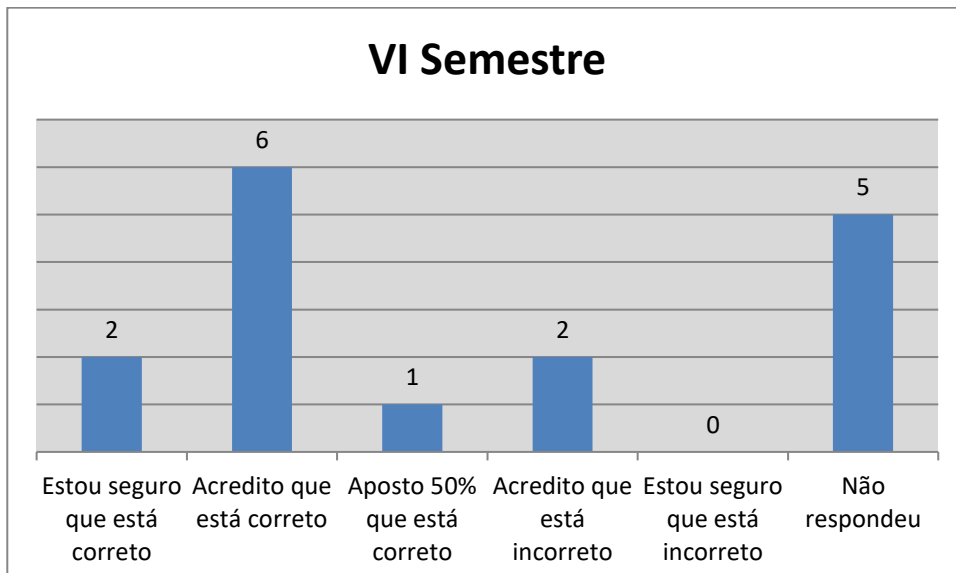


Gráfico 4 - Crenças dos discentes do sexto semestre. Fonte: do autor (2011)

A auto avaliação ou crenças dos alunos traz fatores ainda mais agravantes, como por exemplo o fato de estarem seguros em suas respostas, como fizeram dois

discentes do primeiro semestre, bem como acreditar que a sua resolução estava correta como fizeram sete discentes também do primeiro semestre. É importante ressaltar que de uma turma de trinta e dois alunos em que todos erram a questão, quinze apostou 50% que sua resolução estava correta, sete acreditou que estava incorreta e apenas um estava seguro de estava incorreta.

Para os discentes do sexto semestre a auto avaliação da questão trouxe dados semelhantes. Em relação as suas respostas, dois discentes estavam seguros que estava correta, seis apenas acreditavam que estava correta, um apostou 50% que estava correta, apenas dois acreditou que estava incorreta, nenhum estava seguro de que estava incorreta e cinco não responderam ao diagrama.

Percebe-se que os discentes de ambos semestres em sua maioria possuem algo mais agravante do que o fato de terem errado a questão, que é a incapacidade de reconhecer que não conseguem resolver a situação problema uma vez que alguns têm certeza ou acreditam na exatidão de suas respostas. Diante desta situação, torna-se necessário um estudo das resposta dos alunos, com a finalidade de identificar os seus erros. Para isso têm-se como base os descritores de matemática do SAEB selecionados pelo PAE conforme habilidades exigidas na questão.

4.2 Análise qualitativa das questões

Com o objetivo de detectar e analisar os erros apresentados pelos discentes do 1º e do 6º semestre do curso de matemática, ao resolver a sexta questão do teste investigativo do PAE (Projeto de Análise de Erros) aplicado em agosto de 2009 na UNEB – Campus VI, foi elaborada tabelas baseadas nas pesquisas já realizadas pela equipe do projeto que possibilitam uma melhor visualização das habilidades apresentadas pelos discentes, tendo como base o descritor D32 da 3ª série do ensino médio do SAEB.

TABELA 1

Ensino médio		
Tema e descritor	Nº de alunos que apresentaram as competências na resolução da questão	Alunos que apresentaram parcialmente o descritor indicado
Tema III – Números e operações/Álgebra e funções		
D32 – Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.	0	
Alunos que não apresentaram habilidades e competências	32	C1X, C2X, C3X, C4X, C5X, C6X, C7X, C8X, C9X, C10X, C11X, C12X, C13X, C14X, C15X, C16X, C17X, C18X, C19X, C20X, C21X, C22X, C23X, C24X, C25X, C26X, C27X, C28X, C29X, C30X, C31X, C32X

Habilidades e Competências apresentadas pelos alunos do primeiro semestre – SAEB 3ª série do Ensino Médio – fevereiro de 2011. Fonte: do autor (2011)

Ao fazer a análise da tabela, constata-se que nenhum discente do primeiro semestre, apresentou habilidades e competências em resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo ou combinação simples conforme o descritor D32 do ensino médio.

Tem-se em destaque algumas provas digitalizadas juntamente com os comentários sobre suas resoluções, analisando-se erros e acertos e o que veio a faltar para que o discente conseguisse chegar ao resultado conforme a resolução institucional constante no PAE que traz três estratégias de resolução, sendo a

primeira a distribuição de um estudante por hotel, e dois em um hotel e o desacompanhado em outro, a segunda traz a aplicação das fórmulas de arranjo e combinação e na terceira estratégia apresenta a enumeração dos sessenta eventos que compõem todas as possibilidades.

Na prova C1X, o discente trás como resultado final 40.320 possibilidades. Percebe-se que ele possui certa noção sobre permutação uma vez que utiliza deste recurso para solucionar a questão. Por outro lado pode-se afirmar que ele não sabe em que situação pode utilizar deste conhecimento, uma vez que para tal resolução não se usa permutação, isso demonstra certas dificuldades em interpretar o enunciado do problema. Além disso, o valor encontrado é absurdo se compararmos aos valores citados no problema.

IMAGEM 01

Handwritten student work showing the calculation of $8!$ (8 factorial) as the number of possibilities. The calculation is written as $8! \Rightarrow 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40320$ possibilidades. To the right, a vertical multiplication shows the steps: $8 \cdot 1 = 8$, $8 \cdot 2 = 16$, $8 \cdot 3 = 24$, $8 \cdot 4 = 32$, $8 \cdot 5 = 40$, $8 \cdot 6 = 48$, and $8 \cdot 7 = 56$, leading to the final result of 40320.

PROVA C1X – Fonte: PAE (2009)

Ao analisar a resposta do aluno C2X, percebe-se que ele tentou a resolução por dois métodos. Primeiramente enumera os eventos, e acerta ao encontrar doze possibilidades para o número de maneiras de se escolher os hotéis considerando que dois estudantes ficam juntos e o desacompanhado em um outro. Mas erra ao desconsiderar as diferentes possibilidades de se formar as duplas (três). Em seguida tenta distribuir um aluno em cada hotel, mas só encontra quatro em vez de vinte e quatro possibilidades para esse evento acontecer. Logo após utilizar uma fórmula que não existe desconsiderando todo o primeiro processo e obtém como resposta dezoito possibilidades.

IMAGEM 02

possibilidades de hospedagem.

3 alunos

$\frac{3!}{1!} =$
 $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} =$
 $\frac{6}{1} = 6$

$\frac{72}{4} = 18$ possibilidades dadas.

A	B	C	D	
2	1			1
2	2	1		2
		2	1	3
		1	2	4
1	2			5
2		1		6
2			1	7
	2		1	8
1		2		9
	1		2	10
1			2	11
1	1	1		12
	1	1	1	13
1		1	1	14
1	1		1	15
1	1		1	16

PROVA C2X – Fonte: PAE (2009)

A prova C4X de início já apresenta um erro ao usar uma fórmula inexistente tendo como resultado uma fração, em seguida, o aluno faz a permutação de outra fração a qual não se sabe como foi encontrada, tendo como resultado um valor que não apresenta lógica ao considerar os dados do problema. Supõe-se que o aluno tem conhecimento da fórmula, mas não consegue lembrá-la corretamente.

IMAGEM 03

$$\frac{n!}{n! - p!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1} = \frac{6}{4}$$

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 56 \\ \times 376 \\ \hline 376 \\ \times 376 \\ \hline 7680 \end{array}$$

1680 possibilidades

PROVA C4X – Fonte: PAE (2009)

Em relação a aprendizagem e uso de fórmulas na resolução de situações problemas que envolve análise combinatória, Almeida³ em sua dissertação de mestrado evidencia que:

Para evitar que os alunos apenas memorizem as fórmulas e, depois de algum tempo, as esqueçam ou não sejam capazes de aplicá-las adequadamente por desconhecer seu sentido, é importante construir todo o processo juntamente com eles, de modo que, efetivamente, compreendam cada ação realizada, refletindo a respeito do problema e analisando a melhor estratégia para resolvê-lo. (ALMEIDA 2010, p. 27)

Percebe-se na resolução do aluno C10X que primeiramente ele tenta fazer a proporção entre hotéis e estudantes, mas não dá prosseguimento, em seguida tenta definir uma fórmula que provavelmente seria de permutação com elementos repetidos, mas também abandona a ideia utilizando outra estratégia de resolução em que se multiplica o número de hotéis pela quantidade de estudantes, encontrando doze possibilidades. Posteriormente tenta a distribuição de duplas por hotéis considerando que para os quatro hotéis existem oito possibilidades de duplas. De início ele desconsidera essa possibilidade, mas acaba atribuindo como resposta final.

O aluno neste caso utiliza-se de quatro estratégias de resolução, mas nenhuma delas está interligada. Possui um raciocínio fragmentado e demonstra a todo o momento incertezas nas respostas ao colocar certo ou errado em suas resoluções.

³ Adriana Luziê de Almeida, mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto

IMAGEM 04

$\frac{4 \text{ hotéis}}{3 \text{ estudantes}}$
 $P = \frac{n}{P}$
 $P(A) = \frac{n}{P}$

$\left(\frac{4}{3}\right)$ errado

$P(A) = \frac{n(A)}{n(A)}$

4. 3 = 12 possibilidades (possibilidade)

4. 2 = 8 estudante (certo)

4. 2 = 8 estudante errado

na verdade são 8 possibilidades (certo)

São 8 possibilidades

PROVA C10X – Fonte: PAE (2009)

Esta outra resolução, trás relatos interessantes que demonstram que o aluno possui uma certa facilidade para enumerar os eventos mas, talvez por distração não consegue concluir seu raciocínio.

IMAGEM 5

$4 \cdot 2 = 8$
 $\left(\frac{8}{3}\right)$

1 hotel: 1e2, 2e3, 3e4
 2 hotel: 1e2, 2e3, 3e4
 3 hotel: 1e2, 2e3, 3e4
 4 hotel: 1e2, 2e3, 3e4

hotel 1 e 2: 1e2, 2e3, 3e4
 hotel 1 e 3: 1e3, 2e3, 3e4
 hotel 1 e 4: 1e4, 2e4, 3e4
 hotel 2 e 3: 1e3, 2e3, 3e4
 hotel 2 e 4: 1e4, 2e4, 3e4
 hotel 3 e 4: 1e4, 2e4, 3e4

$6 \cdot 3 = 18$ possibilidades

PROVA C15X – Fonte: PAE (2009)

Percebe-se que o discente compreende que existem três possibilidades de se formar duplas de modo que se tenha dois alunos em um hotel e um desacompanhado em outro. Em um primeiro momento acredita-se que ele se esquece do discente solitário ao fazer a distribuição, mas em seguida faz uma nova enumeração considerando a possibilidade do terceiro discente ocupar um segundo hotel. Mas, ele erra ao desconsiderar algumas possibilidades de distribuição, como por exemplo a possibilidade de inverter os hóspedes do hotel 1 com os hóspedes do hotel 2, totalizando desta três em vez de seis hospedagens a cada dois hotéis. Ao considerar que para cada combinação de hotéis tem-se três possibilidades de hospedagens, ele encontra dezoito em vez de trinta e seis, como resposta para esta etapa da resolução.

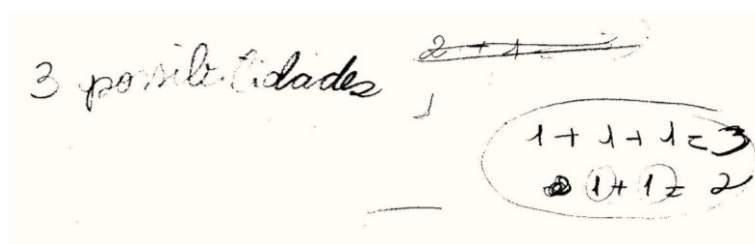
Por levarem em consideração que a enumeração das possibilidades seja um dos processos mais utilizados pelos discentes, (FERNANDES e CORREIA, 2007, apud ALMEIDA 2010, p.26) ressaltam:

“[...] a estratégia de enumeração é amplamente utilizada pelos alunos. No entanto, quando aumenta o número de elementos envolvidos na operação combinatória, esta estratégia é geralmente menos usada e diminuiu a sua eficácia em termos de percentagem de respostas corretas.”

Os alunos C17X, C21X, C22X, C25X, C28X, C30X, desconhece totalmente os conceitos de combinatória não apresentando desta forma nenhuma habilidade ou competência para solucionar a questão.

A exemplo tem-se a imagem 6 referente ao aluno C17X.

IMAGEM 6

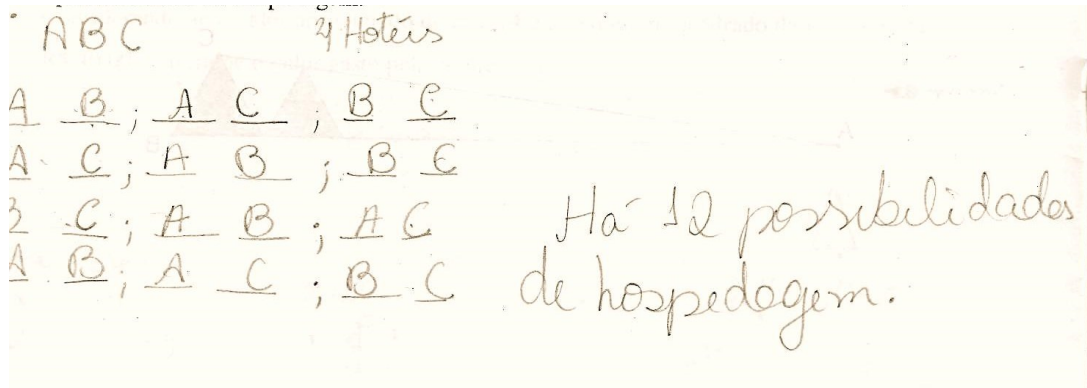


PROVA C17X – Fonte: PAE (2009)

O raciocínio combinatório expressa uma importância significativa na formação do aluno, como pode ser conferido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos

IMAGEM 8

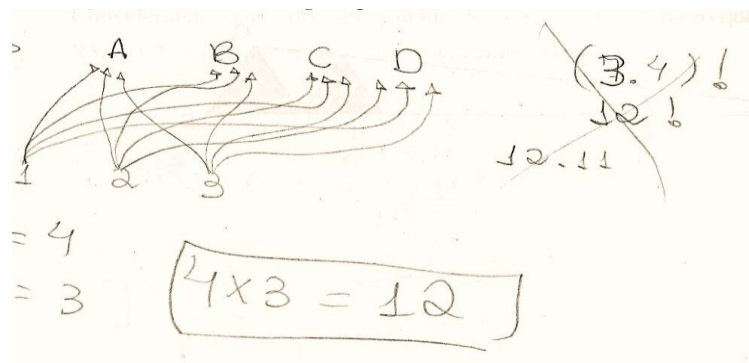


PROVA C27X – Fonte: PAE (2009)

Alguns alunos utilizam a permutação e encontram como resposta, vinte e quatro possibilidades. O uso dessa estratégia, de acordo as categoria definidas pelo PAE, é incorreto para a resolução da questão. Eles permutam os hotéis (4) conforme trazem as provas C5X e C26X, vale ressaltar que trata-se de hotéis que jamais poderão mudar de lugar.

O discente C32X tentou fazer pela distribuição, mas apresenta erro ao colocar quatro possibilidades de hotéis para cada estudante, o qual deveria ser quatro para o primeiro, três para o segundo e dois para o terceiro. Utiliza fatorial e multiplica o número de hotéis pelo número de estudantes, totalizando 12 e considerando como resposta final. Ou seja, ele desconsidera a sua distribuição. É interessante perceber que o aluno reconhece que a suas tentativas não estão corretas e tenta de várias formas chegar a um resultado mais lógico, porém o seu raciocínio é confuso, ele tenta fazer da forma que talvez já viu em outras resoluções mas não consegue identificar o que realmente exige o problema para se chegar ao resultado.

IMAGEM 9



PROVA C32X – Fonte: PAE (2009)

O aluno C28X de acordo as categorias definidas pelo PAE, em suas resoluções, ele não recorre a conceitos referentes ao assunto análise combinatória. Ele multiplicou a quantidade de hotéis por dois, supõe-se que ele esteja referindo a quantidade de vagas por hotel. Em seguida ele utiliza potenciação, tendo como base dois (quantidade de vagas por hotel) e expoente quatro (quantidade de hotéis). Ressaltando que ao tentar resolver a potência ele erra ao fazer a multiplicação encontrando trinta e dois como resposta.

IMAGEM 10

$$4 \times 2 = 8$$

$$2^4: 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

PROVA C28X – Fonte: PAE (2009)

O aluno C29X apresenta uma resposta sucinta, para ele só existem duas possibilidades de hospedagem, sendo um estudante em cada hotel ou dois estudantes em um hotel e um separadamente. Considera-se neste caso que ele não fez a interpretação correta do enunciado da questão, uma vez que existem duas formas de distribuir os estudantes, mas para cada uma delas existem combinações diferentes.

IMAGEM 11

- 1 estudante em cada hotel
- 2 estudantes em um hotel e 1 separadamente

Resposta: 2 formas de hospedagem.

PROVA C29X – Fonte: PAE (2009)

TABELA 2

Ensino médio		
Temas e descritores	Nº de alunos que apresentaram as competências na resolução da questão	Alunos que apresentaram os descritores indicados
Tema III – Números e operações/Álgebra e funções		
D32 – Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.	0	
Alunos que não apresentaram habilidades e competências	16	C33Y, C34Y, C35Y C36Y, C37X, C38Y, C39Y, C40Y C41Y, C42Y, C43Y,C44Y, C45Y,C46Y, C47Y, C48Y,

Habilidades e Competências apresentadas pelos alunos do sexto semestre – SAEB 3ª série do Ensino Médio – março de 2011. Fonte: do autor (2011)

Após as análises de competências e habilidades definidas pelo SAEB/Prova Brasil, destacam-se na sequência as descrições de algumas resoluções bem como as análises específicas acompanhadas das resoluções digitalizadas.

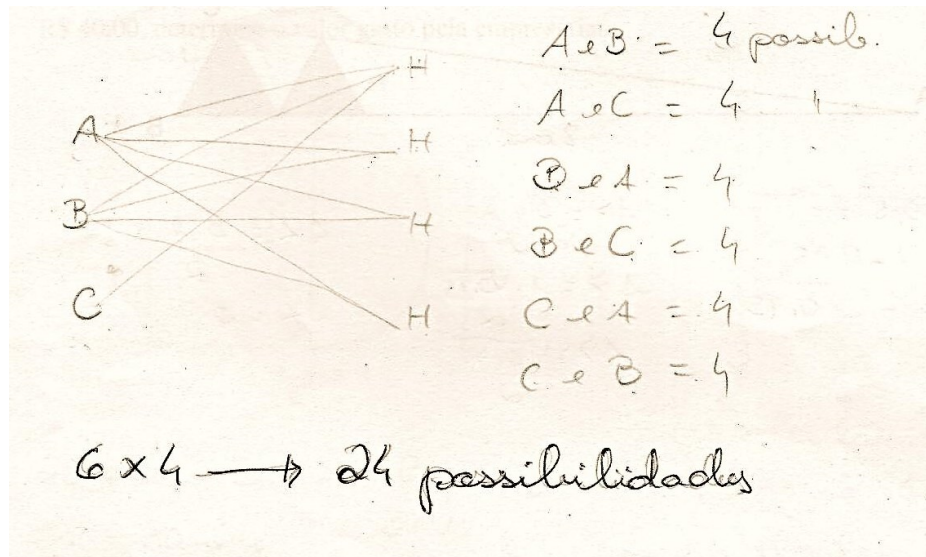
Na prova C34Y, o aluno demonstra ter noção de padrões de contagem ou princípio multiplicativo, mas se perde ao tentar formar as duplas visto que ele entende que a ordem dos alunos alteraria o resultado ao considerar que a combinação do aluno A com B é diferente do aluno B com A, contando desta forma o mesmo agrupamento duas vezes. Ele considera que para cada dupla existem quatro possibilidades, motivo pelo qual encontra a resposta 24 quando seria 12, sendo quatro possibilidades para a dupla e três para o aluno desacompanhado sendo importante ressaltar que essas duplas podem ser feita de três formas diferentes, ficando desta forma 4.3.3 possibilidades de duplas totalizando assim 36 possibilidades. Percebe-se que ele faz a distribuição dos alunos um por hotel utilizando a árvore de possibilidades de forma errada pois para o primeiro aluno seria quatro possibilidades, para o segundo três e para o terceiro seria duas possibilidades de hospedagem, mas nota-se que ele não faz uso deste cálculo em seu resultado final.

Com relação a utilização do diagrama de árvore as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008), ressalta que: “A utilização do diagrama de árvore é

importante para a conexão entre os experimentos compostos, e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento.”

Percebe-se também que o discente desconsidera a existência do terceiro aluno que ficaria só em um dos hotéis.

IMAGEM 12



PROVA C34Y – Fonte: PAE (2009)

Em se tratando de combinação, Roa e Navarro-Pelayo (2001) ressaltam que uma das principais dificuldades dos alunos ao resolver um problema de análise combinatória é interpretar qual tipo de elementos combinar, qual esquema combinatório utilizar e também verificar se a ordem dos fatores importa ou e se há repetição.

Na prova C35Y, o aluno encontra corretamente de maneira agrupada todas as formas de hospedagem sendo um aluno em cada hotel. Ele nomeia os hotéis como 1, 2, 3, e 4 e os discentes como A, B e C. Na primeira assim como nas outras cinco linhas, formam-se colunas por onde estão distribuídos os hotéis de três em três da seguinte forma: 1,2,3; 2,3,4; 1,2,4 e 1,3,4. E, para cada combinação de hotel existe seis combinações corretas de alunos totalizando 24 possibilidades de hospedagem sendo um em cada hotel. Ao continuar a distribuição considerando um estudante só em um hotel e dois em outro, ele faz as combinações mas acaba por errar fazendo da seguinte maneira: 1e2, 1e3, 1e4, 2e3, 3e4, esquecendo desta

forma da combinação do hotel 2 com o 4, e consequentemente dos hóspedes que lá ficariam agrupados das seguintes formas: 2 A e 4 B,C; 2 B,C e 4 A ; 2 B e 4 C,A; 2 C,A e 4 B; 2 C e 4 A,B; 2 A, B e 4 C. Ao se esquecer destas possibilidades o aluno erra encontrando assim 54 como resultado.

O discente C35Y, foi o que mais se aproximou da resposta correta. Diante desta situação em que se tem dados pequenos (três alunos para quatro hotéis) pode-se concluir que ele possui habilidades suficientes para solucionar a questão, utilizando a enumeração dos eventos mas falta-lhe talvez um pouco mais de atenção para obter êxito na resposta. Vale ressaltar que em se tratando de situações problemas com dados mais complexos, essa estratégia não seria a mais adequada pois, segundo Sabo (2010):

Enumerar ou construir a árvore de possibilidades com um número tão elevado de ramos torna-se uma técnica árdua, na qual, possivelmente estorvaria encontrar todas as soluções do problema... Esse tipo de técnica traria dificuldades operatórias, do ponto de vista didático, pois, provavelmente, dispersaria a atenção do aluno e, dessa forma afastá-lo-ia do foco da resolução do problema proposto. (2010, p. 73-74)

IMAGEM 13

Diagram showing three people (A, B, C) and four hotels (1, 2, 3, 4).

Handwritten note: Não sou boa em análise combinatória.

1-A	2-A	1-A	1-A	1-A,B	1-A	2-A	2-B,C
2-B	3-B	2-B	3-B	2-C	2-B,C	3-B,C	3-A
3-C	4-C	4-C	4-C	1-A,C	1-B	2-B	2-A,C
				2-B	2-A,C	3-A,C	3-B
1-B	2-A	1-A	1-A	1-B,C	1-C	2-C	2-A,B
2-C	3-C	2-C	3-C	2-A	2-A,B	3-B,A	3-C
3-A	4-B	4-B	4-B	1-A,B	1-B,C	3-A	3-B,C
				3-C	3-B,C	4-B,C	4-A
1-C	2-B	1-B	1-B	1-A,C	1-B	3-B	3-A,C
2-B	3-A	2-A	3-A	3-B	3-A,C	4-A,C	4-B
3-A	4-C	4-C	4-C	1-B,C	1-C	3-C	3-A,B
				3-A	3-A,B	4-A,B	4-C
1-B	2-C	1-C	1-C	1-B,C	1-A		
2-A	3-A	2-A	3-A	4-A	4-B,C		
3-C	4-B	4-B	4-B	1-A,C	1-B		
				4-B	4-A,C		
1-C	2-B	1-B	1-B	1-B,A	1-C		
2-A	3-C	2-C	3-C	4-C	4-A,B		
3-B	4-A	4-A	4-A				
1-A	2-C	1-C	1-C				
2-C	3-B	2-B	3-B				
3-B	4-A	4-A	4-A				

54 possibilidades

Um outro exemplo das dificuldades em enumerar todas as possibilidades de um evento pode ser observado na resolução do discente (C48Y). Ele consegue chegar ao resultado parcial de forma correta, conforme resolução institucional do PAE. Percebe-se que ele possui habilidades para a resolução, mas talvez por falta de atenção ao interpretar o enunciado da questão não conseguiu entender que os alunos poderiam ficar separados, ou seja, um em cada hotel.

IMAGEM 14

Handwritten student work for a combinatorics problem. The student lists hotel distributions for four students (A, B, C, D) and calculates the total number of possibilities as $3 \times 12 = 36$.

Hotéis \rightarrow A - B - C - D

x, y, z

A B A B A B

2 1 - - $\rightarrow xy z \rightarrow xz y \rightarrow zy x$

2 - 1 -

2 - - 1

1 2 - -

1 - 2 -

1 - - 2

- 2 1 -

- 2 - 1

- 1 2 -

- 1 - 2

- - 2 1

- - 1 2

$3 \times 12 = 36$ possibilidades

PROVA C48Y – Fonte: PAE (2009)

O estudante C37Y, apesar de apresentar noções de contagem ou princípio multiplicativo se confunde na hora de fazer a combinação das duplas, esquecendo-se do aluno solitário quando faz a distribuição entre hotéis, e ao considerar um aluno em cada hotel, ele faz uma interpretação errada da questão buscando quantas opções de alunos por hotel em vez do contrário, onde acharia que para o primeiro aluno seria quatro possibilidades de hospedagem, para o segundo três, e para o terceiro duas possibilidades de hospedagem onde encontraria o total de 24, estando correto parcialmente conforme resolução institucional do PAE.

IMAGEM 15

3 estudantes
 1 hotel 2 estudantes
 4 hotéis

Ana Maria José

1º Ana/Maria ou Ana/José ou Maria/José
 2º 1 1 1 1 } 12
 3º 1 1 1 1 }
 4º 1 1 1 1 }

1º Ana 2º Ana 3º Ana 4º Ana }
 1º Maria 2º Maria 3º Maria 1º Maria } 12
 3º José 2º José 3º José 1º José }

Resposta = 24 possibilidades

PROVA C37Y – Fonte: PAE (2009)

Alguns alunos possuem um certo grau de conhecimento do conteúdo, sabem algumas fórmulas mas, não conseguem solucionar a questão, o que pode ser decorrente de uma má interpretação, como pode ser observado nas provas C40Y e C47Y.

IMAGEM 16

possibilidades de hospedagem, H₄.

H₁ H₂ H₃ H₄

$\frac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow \frac{4!}{2!(4-2)!}$

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!}$

$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

6 \cdot 4 = 24 | Possibilidades.

PROVA C40Y – Fonte: PAE (2009)

IMAGEM 17

$C_{4,2} = \frac{n!}{P!(n-P)!} \Rightarrow \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$

[1] [2] [3] [4]
 x, y x, y x, y, z x, y, z
 y, x y, x
 x

PROVA C47Y – Fonte: PAE (2009)

Estes alunos se lembram da fórmula de combinação, mas não sabem quando usá-la, pois a utilizam para dados que seriam de arranjo, o que exemplifica também um outro grande responsável por erros matemáticos, que é a utilização de fórmulas erradas. Vale ressaltar que eles apresentam a mesma resolução.

Sturm (1999) em sua dissertação de mestrado, ressalta sobre ao uso de fórmulas na resolução de problema de análise combinatória:

[...] o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações-problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação. (STURM, 1999, p.3).

O aluno C43y demonstra conhecimento da fórmula de combinação, encontrando corretamente as possibilidades de combinação das duplas (três). Porém ao descrever a sua resposta ele entende que três é o número de possibilidades de duplas por hotel. Em seguida ele comete outro erro ao multiplicar os quatros hotéis por essas três possibilidades totalizando doze, valor que deveria ser encontrado utilizando à fórmula de arranjo correspondente a quantidade de casos em que se têm dois estudantes em um hotel e um no outro.

Posteriormente ele multiplica esse valor por três, porém não se sabe se esse três corresponde à quantidade de possibilidades por hotel que ele repetiu ou se refere a uma combinação entre os estudantes feita por ele.

As trinta e seis possibilidades encontradas por ele como resultado final, por coincidência corresponde ao valor parcial da resolução institucional. É importante

ressaltar que ele desconsidera a possibilidade de se hospedar um estudante em cada hotel.

IMAGEM 18

possibilidades de hospedagem.

$n=3$
 $P=2$

$$C = \frac{3!}{2!(3-2)! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1!} = \frac{3}{1} = 3 \text{ possibilidades P/ HOTEL}$$

EST
x
y
z

$4 \times 3 = 12 \text{ possibilidades}$
 \uparrow \nwarrow
 $\text{N}^\circ \text{HOTEL} \times \text{COMBINAÇÃO}$

① HOTEL
(x,y), (x,z), (y,z)

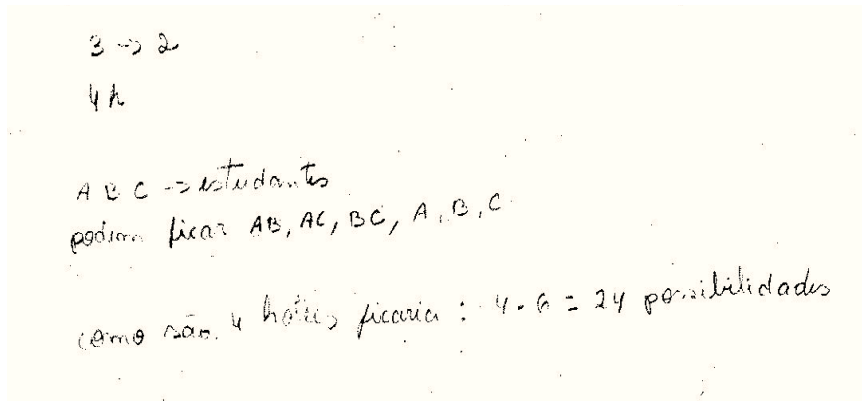
② HOTEL
(x,y), (x,z), (y,z)

$\text{N}^\circ \text{POSSIBILIDADES P/ HOTEL} \times \text{Qtd de HOTEL}$
 $3 \times 4 = 12 \text{ POSSIBILIDADES}$

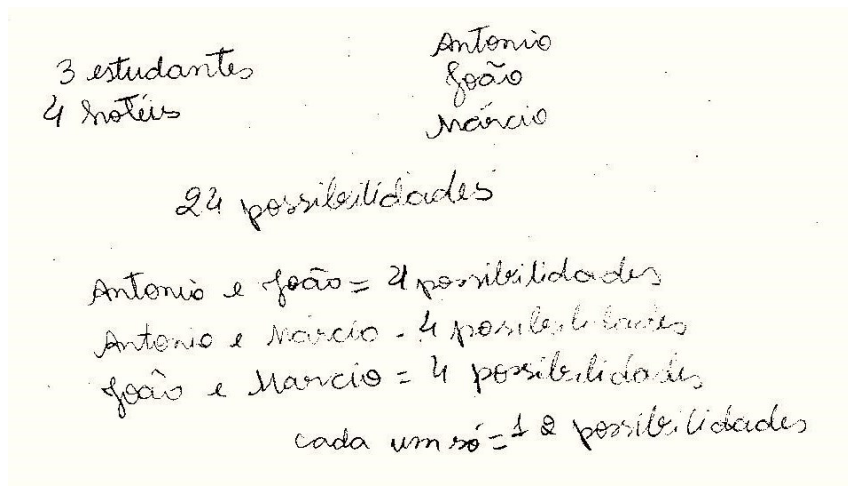
$12 \times 3 = 36$ possibilidades levando em consideração
 que o que sobra tem que ir para um dos
 outros três hotéis.

PROVA C43Y – Fonte: PAE (2009)

Os alunos C42Y e C46Y expressam o mesmo raciocínio, porém um expõe os dados de forma mais detalhada que o outro. Eles consideram que o total de possibilidades de duplas por hotel é doze, mas esquecem de que para cada dupla que se fixa em um hotel existem três possibilidades de hotéis restantes para o estudante desacompanhado ou vice e versa.

IMAGEM 19

PROVA C42Y – Fonte: PAE (2009)

IMAGEM 20

PROVA C46Y – Fonte: PAE (2009)

Diante do que foi verificado na análise das questões, percebe-se que os alunos apresentam uma dificuldade elevada na resolução desses problemas. A expectativa era de que os alunos do sexto semestre apresentasse um bom desempenho obtendo resultados melhores que o primeiro semestre, uma vez que teoricamente teria mais chances de obter o resultado esperado, visto que o conteúdo Análise Combinatória, foi abordado ainda no terceiro semestre. De fato as respostas dos alunos veteranos estão mais elaboradas, mesmo assim eles não alcançam resultados satisfatórios.

De certa forma, idealiza-se que o estudo deste conteúdo pudesse ser iniciado desde o ensino fundamental de uma forma significativa, desenvolvendo ideias de

contagem e raciocínio combinatório, e que no ensino médio pudesse trabalhar com o uso de fórmulas de maneira mais contextualizada, de forma que não seja um estudo mecanizado.

Diante desse grave problema, onde tais alunos irão sair do ensino superior sem apresentar competências e habilidades referentes ao conteúdo mencionado, essas dificuldades irão ser contínuas uma vez que muitos desses alunos seguirão a carreira de professor.

Por fim acredita-se ser de vital importância uma verificação nos componentes curriculares, de forma que a Universidade esteja preparada não apenas para oferecer esse conteúdo, mas que este seja abordado com qualidade, de maneira a superar essas lacunas deixadas desde a educação básica.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, apresentando uma pesquisa sobre erros cometidas por estudantes do curso de licenciatura em matemática da UNEB-CAMPUS VI foi possível perceber que os discentes apresentam grandes dificuldades. Através das resoluções apresentadas identificaram-se habilidades desenvolvidas pelos alunos referindo-se o término da 4ª série/5º ano e 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental. Mas houve grandes deficiências com relação à habilidade alcançada no final da 3ª série do Ensino Médio, sendo indispensável o seu domínio para a resolução da questão.

Um dos grandes problemas de evasão e repetência existente hoje na universidade é proveniente dessas dificuldades que os alunos apresentam. Por não dominarem conteúdos das séries anteriores ocorre que ao chegar a faculdade essas dificuldades não são levadas em conta, dessa forma o aluno muitas vezes não consegue acompanhar. Segundo Cury:

[...] um levantamento detalhado dos erros cometidos em provas e trabalhos realizados em disciplinas matemáticas, bem como uma tentativa de compreensão das causas, pode auxiliar a diminuir o alto nível de evasão e repetência em disciplinas consideradas críticas nos primeiros semestres de cursos universitários. (2003, p.2).

Nessa perspectiva entende-se que a análise de erros cometidos por eles juntamente com novas estratégias para superar essas dificuldades pode ser o ponto de partida para provocar mudanças com relação as dificuldades apresentadas por esses alunos. Proporcionando construção de conhecimento além de estimulá-lo. E ao falar de melhorias no desempenho do aluno lembra-se também do papel do professor neste processo uma vez que suas estratégias irão determinar essas possíveis mudanças. Como afirma Enricone:

São os professores que, em última instância, decidem ou não se querem ou não mudar. Cabe toda uma análise sobre o professor como profissional e, sobretudo, como um profissional reflexivo. Aumentam as responsabilidades dos professores que, pois além dos conhecimentos de suas disciplinas, devem ser facilitadores da aprendizagem de seus alunos e organizadores das atividades na sala de aula. (2001, p. 52).

De acordo os resultados desta pesquisa detecta-se que ao comparar os resultados dos alunos do 1º e do 6º semestre mesmo identificando alguns avanços mas este é considerado pequeno. Vale ressaltar que os avanços encontrados

referem-se mais a parte teórica, mas veem-se as dificuldades desses alunos ao analisar a questão e saber como aplicar conceitos de análise combinatória para resolução. Entende-se neste caso que a matemática exige raciocínio, pensar a respeito das diferentes situações e saber a relação que se tem com os problemas cotidianos facilita o aprendizado.

Ressalta que a análise desses erros permite descobrir e elaborar novas maneiras de melhorias do ensino superior no sentido de suprir as dificuldades desses alunos de forma que esta deixa de ser a principal causa de evasão e repetência e esta construção de instrumentos de intervenção é o objetivo do projeto Análise de Erros.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN - Ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/Pdf/CienciasNatureza.pdf>> Acesso em 30 jul. 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE**: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008 a.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE**: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino médio: Prova Brasil: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008c.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1. ed. 1. reimp. – Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

BORTOLOTI, R. D. M. et al. **Análise dos Erros Cometidos por Discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas**. 2007. 20 f. Projeto de Pesquisa – Departamento de Químicas e Exatas, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, BA, 2007.

ESTEVES, I. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos-8ª série do ensino fundamental. 2001.203f. Tese (Dissertação de Mestrado em educação matemática) PUC-SP 2001

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática**: Estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas, SP: Papirus, 2000. Série Prática Pedagógica

FILHO, Uma experiência de introdução ao raciocínio combinatório com os alunos do primeiro ciclo do Ensino Fundamental (7-8 anos)2008. Tese (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática) PUC-SP 2008.

SILVA, Edna Lúcia da
Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação/Edna Lúcia da Silva, Estera Muszkat Menezes. – 3. ed. rev. atual. – Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001

ESTEVEES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental**. São Paulo, 2000, 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 2001

MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN-EF) – Matemática – Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental** – Brasília, 1998.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda, 1910-1989. Miniaurélio Século XXI Escolar: O minidicionário da língua portuguesa / Aurélio Buarque de Holanda Ferreira; coordenação de edição, Margarida dos Anjos, Marina Baird Ferreira; lexicografia, Margarida dos Anjos... [et al.]. 4. Ed. Ver. Ampliada. – Rio de Janeiro: Nova fronteira, 2001.

CORTELLA, Mario Sergio. A escola e o conhecimento: fundamentos epistemológicos e políticos. 6º Ed. São Paulo: Cortez, 2002.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio In: Borba, M.; Araújo, J.L.(orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**, Belo Horizonte: Autêntica, 2006

ROXO, E.et al. **Matemática 2º ciclo, 2ª série**. 2ªed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

BATANERO; C. **Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria**. Educación Matemática, 8(1), 26-39. 1997.

ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001

SABO, Ricardo Dezso. Saberes Docentes: A análise combinatória no ensino médio. São Paulo 2010.

FREIRE, P. Pedagogia da Autonomia; Saberes Necessários à Prática Educativa. 26. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

PAIS, L. C. Didática da Matemática; Uma Análise da Influência Francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

ALMEIDA, Adriana Luzide. Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática, um estudo com o 2^o ano do ensino médio. Ouro Preto, 2010. Dissertação (mestrado em educação matemática). Instituto de Ciências Exatas e biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto.

ANEXOS A - Matriz de Referência de Matemática – Saeb / Prova Brasil – Temas e Descritores.

4ª Série do Ensino Fundamental

Tema I. Espaço e Forma

D1 – Identificar a localização /movimentação de objeto em mapas, croquis e outras apresentações gráficas.

D2 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações.

D3 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados, pelos tipos de ângulos.

D4 – Identificar quadriláteros observando as posições relativas entre seus lados (paralelos, concorrentes, perpendiculares).

D5 – Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e /ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

Tema II. Grandezas e Medidas

D6 – Estimar a medida de grandezas utilizando unidades de medida convencionais ou não.

D7 – Resolver problemas significativos utilizando unidades de medida padronizadas como km/m/cm/mm, kg/g/mg, l/ml.

D8 – Estabelecer relações entre unidades de medida de tempo.

D9 – Estabelecer relações entre o horário de início e término e /ou o intervalo da duração de um evento ou acontecimento.

D10 – Num problema, estabelecer trocas entre cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro, em função de seus valores.

D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo do perímetro de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.

D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo ou estimativa de áreas de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.

Tema III. Números e Operações /Álgebra e Funções

D13 – Reconhecer e utilizar características do sistema de numeração decimal, tais como agrupamentos e trocas na base 10 e princípio do valor posicional.

D14 – Identificar a localização de números naturais na reta numérica.

D15 – Reconhecer a decomposição de números naturais nas suas diversas ordens.

D16 – Reconhecer a composição e a decomposição de números naturais em sua forma polinomial.

D17 – Calcular o resultado de uma adição ou subtração de números naturais.

D18 – Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais.

D19 - Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou subtração: juntar, alteração de um estado inicial (positiva ou negativa), comparação e mais de uma transformação (positiva ou negativa).

D20 – Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.

D21 – Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.

D22 – Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.

D23 – Resolver problema utilizando a escrita decimal de cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.

D24 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

D25 – Resolver problema com números racionais expressos na forma decimal envolvendo diferentes significados da adição ou subtração.

D26 – Resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%).

Tema IV. Tratamento da Informação

D27 – Ler informações e dados apresentados em tabelas.

D28 – Ler informações e dados apresentados em gráficos (particularmente em gráficos de colunas).

Matriz de Referência de Matemática - Saeb / Prova Brasil - Temas e Descritores

8ª Série do Ensino Fundamental

Tema I. Espaço e Forma

D1 – Identificar a localização/movimentação de objeto, em mapas, croquis e outras representações gráficas.

D2 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com suas planificações.

D3 – Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.

D4 – Identificar relação entre quadriláteros, por meio de suas propriedades.

D5 – Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

D6 – Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não-retos.

D7 – Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram.

D8 – Resolver problema utilizando a propriedade dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares).

D9 – Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.

D10 – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

D11 – Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

Tema II. Grandezas e Medidas

D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D13 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D14 – Resolver problema envolvendo noções de volume.

D15 – Resolver problema envolvendo relações entre diferentes unidades de medida.

Tema III. Números e Operações /Álgebra e Funções

D16 – Identificar a localização de números inteiros na reta numérica.

D17 – Identificar a localização de números racionais na reta numérica.

D18 – Efetuar cálculos com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D19 – Resolver problema com números naturais envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D20 – Resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D21 – Reconhecer as diferentes representações de um número racional.

D22 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

D23 – Identificar frações equivalentes.

D24 – Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal identificando a existência de “ordens” como décimos, centésimos e milésimos.

D25 – Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D26 – Resolver problema com números racionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

D27 – Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

D28 – Resolver problema que envolva porcentagem.

D29 – Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.

D30 – Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.

D31 – Resolver problema que envolva equação de segundo grau.

D32 – Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em seqüências de números ou figuras (padrões).

D33 – Identificar uma equação ou uma inequação de primeiro grau que expressa um problema.

D34 – Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema.

D35 – Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações de primeiro grau.

Tema IV. Tratamento da Informação

D36 – Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

D37 – Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

Matriz de Referência de Matemática – Saeb/Prova Brasil. 8ª Série do Ensino Fundamental. <http://www.inep.gov.br/basica/saeb/matrizes/topicos_4serie_mat.htm>
. Acesso em:

Matriz de Referência de Matemática - Saeb / Prova Brasil - Temas e Descritores

3ª Série do Ensino Médio

Tema I. Espaço e Forma

Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D2 – Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D3 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

D4 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.

D5 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, co-seno, tangente).

D6 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

D7 – Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

D8 – Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

D9 – Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

D10 – Reconhecer entre as equações de 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

Tema II. Grandezas e Medidas

D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Tema III. Números e Operações /Álgebra e Funções

D14 – Identificar a localização de números reais na reta numérica.

D15 – Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.

D16 – Resolver problema que envolva porcentagem.

D17 – Resolver problema que envolva equação de segundo grau.

D18 – Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.

D19 – Resolver problema envolvendo uma função de primeiro grau.

D20 – Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

D21 – Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

D22 – Resolver problema envolvendo PA/PG dada a fórmula do termo geral.

D23 – Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes.

D24 – Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau, dado o seu gráfico.

D25 – Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau.

D26 – Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau.

D27 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

D28 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

D29 – Resolver problema que envolva função exponencial.

D30 – Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

D31 – Determinar a solução de um sistema linear associando-o a uma matriz.

D32 – Resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.

D33 – Calcular a probabilidade de um evento.

Tema IV. Tratamento da Informação

D34 – Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

D35 – Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

ANEXO B - PROVAS**Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB**

Projeto de Pesquisa: Análise dos erros cometidos por
discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das
Universidades Estaduais Baianas



Questão 1 - Um fazendeiro possui vinte metros de cerca e deseja construir um galinheiro de forma retangular, aproveitando um muro já construído como sendo um de seus lados. Determine as dimensões do galinheiro de modo que a sua área seja máxima.

Com relação à solução apresentada por mim à alternativa escolhida é: Estou seguro(a) que está correto; Acredito que está correto; Aposto 50% que está correto; Acredito que está incorreto; Estou seguro(a) que está incorreto.



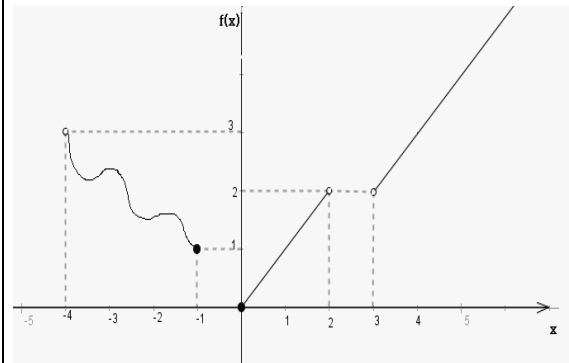
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Projeto de Pesquisa: Análise dos erros cometidos por discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas



Questão 2 - Analise o gráfico ao lado e nas afirmativas abaixo, coloque V para verdadeiro e F para falso. Justifique todas as respostas.

- a) $D(f) =]-4, +\infty[$
- b) $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$
- c) $f(2) = 2$
- d) $f(0) = 0$
- e) Se $x > 3$ então $f(x) < 2$



Com relação à solução apresentada por mim à alternativa escolhida é: Estou seguro(a) que está correto; Acredito que está correto; Aposto 50% que está correto; Acredito que está incorreto; Estou seguro(a) que está incorreto.



Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Projeto de Pesquisa: Análise dos erros cometidos por discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas



Questão 3 (adaptada do Vestibular UESB 2007) - Um professor de Literatura sugeriu a uma de suas classes a leitura da revista A e da revista B. Vinte alunos leram a revista A, quinze leram apenas a revista B, dez leram as duas revistas e quinze não leram nenhuma delas. Considerando-se que x alunos dessa classe leram, pelo menos, uma das revistas, determine o valor de x .

Com relação à solução apresentada por mim à alternativa escolhida é: Estou seguro(a) que está correto; Acredito que está correto; Aposto 50% que está correto; Acredito que está incorreto; Estou seguro(a) que está incorreto.



Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Projeto de Pesquisa: Análise dos erros cometidos por
discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das
Universidades Estaduais Baianas



Questão 4 (adaptada do Vestibular UEFS 2007) - Uma empresária comprou um terreno de forma retangular com trinta metros de perímetro, notando que o triplo da medida do menor lado é igual ao dobro da medida do lado maior. Resolveu plantar grama em todo o terreno, exceto em um semicírculo cujo diâmetro coincide com o lado menor. Considerando-se o valor aproximado de $\pi=3,14$ e que o metro quadrado da grama custa R\$ 40,00, determine o valor gasto pela empresária.

Com relação à solução apresentada por mim à alternativa escolhida é: Estou seguro(a) que está correto; Acredito que está correto; Aposto 50% que está correto; Acredito que está incorreto; Estou seguro(a) que está incorreto.

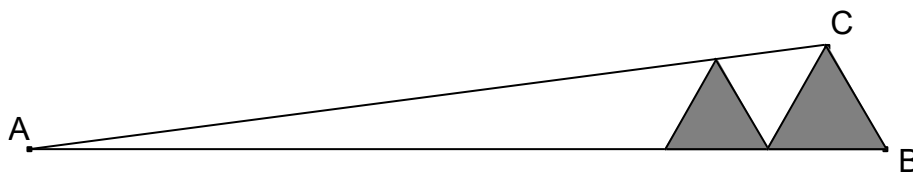


Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Projeto de Pesquisa: Análise dos erros cometidos por discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas



Questão 5 (adaptada do Vestibular UESC 2008) - Na figura abaixo, o segmento de A até B mede oito centímetros, de B até C mede 1 centímetro. Sabendo que os triângulos sombreados são equiláteros, calcule o quociente entre o valor da área do triângulo maior e o valor da área do triângulo menor.



Com relação à solução apresentada por mim à alternativa escolhida é: () Estou seguro(a) que está correto; () Acredito que está correto; () Aposto 50% que está correto; () Acredito que está incorreto; () Estou seguro(a) que está incorreto.



Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Projeto de Pesquisa: Análise dos erros cometidos por discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas



Questão 6 (adaptada do Vestibular UEFS 2007) - Três estudantes chegaram juntos a uma cidade para participar de um congresso e, não tendo feito reservas com antecedência, constataram que em cada hotel poderiam ficar até dois estudantes. Sabendo que há apenas quatro hotéis na cidade, calcule o número máximo de possibilidades de hospedagem.

Com relação à solução apresentada por mim à alternativa escolhida é: Estou seguro(a) que está correto; Acredito que está correto; Aposto 50% que está correto; Acredito que está incorreto; Estou seguro(a) que está incorreto



Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Projeto de Pesquisa: Análise dos erros cometidos por discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas



Somente para os alunos do 6º semestre:

**Com base no fluxograma do curso, que o aplicador do teste lhe entregou, responda:
Você cursou e foi aprovado em todas as disciplinas do curso até o 5º semestre?**

() Não () Sim

Em caso negativo, responda:

a) Qual(is) disciplina(s) você ainda terá que cursar? De que semestre são?

b) Explique o que ocasionou a não regularidade no curso.
