



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA - UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS - CAMPUS VI
COLEGIADO DE MATEMÁTICA

ANA CRISTINA DOS SANTOS SILVA

EXTENSÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM TRÊS DIMENSÕES:
UMA ABORDAGEM DIDÁTICA COM PRODUTO EDUCACIONAL

CAETITÉ - BA

2025

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA - UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS – CAMPUS VI
COLEGIADO DE MATEMÁTICA

ANA CRISTINA DOS SANTOS SILVA

EXTENSÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM TRÊS DIMENSÕES:
UMA ABORDAGEM DIDÁTICA COM PRODUTO EDUCACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de graduação em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, como requisito parcial para obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel de Jesus Silva

CAETITÉ-BA

2025

ANA CRISTINA DOS SANTOS SILVA

**EXTENSÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM TRÊS DIMENSÕES:
UMA ABORDAGEM DIDÁTICA COM PRODUTO EDUCACIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao curso de graduação em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, como requisito parcial para obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel de Jesus Silva

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel de Jesus Silva. (Orientador)
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Prof. Dr. Francisco Flávio Alves Felipe
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Prof. Prof. Dr. Gildelson Felício de Jesus
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Caetité – BA
2025

DEDICATÓRIA

Dedico este presente trabalho de conclusão de curso a todos que, de alguma forma, fizeram parte da minha jornada acadêmica. À minha família, pelo apoio incondicional. À minha avó Celcina Maria dos Santos (*in Memoriam*) que, embora não esteja mais fisicamente comigo, segue viva em minhas lembranças e no meu coração. Aos meus amigos e colegas, pela paciência e incontáveis conversas que trouxeram leveza ao caminho. Aos professores, por todo conhecimento compartilhado. E por fim, a mim mesma, pela dedicação e determinação de nunca desistir. Cada página deste trabalho carrega um pouco de cada um de vocês.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por me dar força, sabedoria e paciência para chegar até aqui. Sem a sua presença constante em minha vida, eu certamente não teria conseguido enfrentar os desafios dessa jornada acadêmica. A ele, minha eterna gratidão.

À minha família, que sempre foi meu alicerce, oferecendo amor, apoio e compreensão. Agradeço especialmente a minha mãe, por todo o sacrifício e dedicação, que me proporcionaram as condições para seguir meus sonhos e conquistar meus objetivos. Às minhas irmãs, pelo carinho, pela paciência e por estarem sempre ao meu lado, me incentivando a seguir em frente. Sou grata por cada gesto de amor de vocês

Ao meu orientador(a), Daniel, pela paciência, orientação e por acreditar no meu potencial, mesmo nos momentos de maior dificuldade. Suas orientações foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos, colegas de curso e todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para o meu crescimento. As palavras de apoio, incentivo e até as críticas construtivas foram essenciais para o meu aprendizado.

E, por fim, a todos que de alguma forma participaram desta caminhada, direta ou indiretamente. Agradeço de coração por cada gesto de apoio e por cada momento compartilhado.

“A matemática é a rainha das ciências”

Carl Friedrich Gauss

RESUMO

Este trabalho intitulado Extensão do teorema de Pitágoras em três dimensões: uma abordagem didática com produto educacional, evidencia possibilidades de ensino que possam romper os paradigmas do ensino da matemática. O trabalho apresenta uma abordagem por meio de um experimento para o ensino do teorema de Pitágoras e suas extensões. Inicialmente, foi necessária uma revisão bibliográfica sobre Pitágoras, o teorema e suas extensões, bem como sobre materiais concretos e manipuláveis para auxiliar no ensino. Logo após foi produzido o produto educacional. Posteriormente, analisamos as impressões de professores e graduandos de matemática da educação básica sobre o produto educacional para o ensino do teorema de Pitágoras e suas extensões e por fim, evidenciamos nas conclusões a criatividade docente e potencialidade do produto apresentado.

Palavras-chave: Produto educacional; Teorema de Pitágoras e suas extensões; Ensino.

ABSTRACT

This work, entitled Extension of the Pythagorean theorem in three dimensions: a didactic approach with educational product, highlights teaching possibilities that can break the paradigms of mathematics education. The work presents an approach through an experiment for teaching the Pythagorean theorem and its extensions. Initially, a literature review on Pythagoras, the theorem, and its extensions was necessary, as well as on concrete and manipulable materials to aid in teaching. Soon after, the educational product was produced. Subsequently, we analyzed the impressions of teachers and undergraduate mathematics students in basic education on the educational product for teaching the Pythagorean theorem and its extensions and, finally, we highlighted in the conclusions the teaching creativity and potential of the product presented.

Key-words: Educational product; Pythagorean theorem and its extensions; Teaching.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: BUSTO DE PITÁGORAS	17
FIGURA 2: PITÁGORAS ENSINANDO UMA CLASSE DE MULHERES.....	18
FIGURA 3: TABLETE BABILÔNICO CONTENDO FIGURAS GEOMÉTRICAS.	19
FIGURA 4: REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS.	21
FIGURA 5: TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	21
FIGURA 6: AS RELAÇÕES DOS TRIÂNGULOS - A MAIS BELA PROVA.....	22
FIGURA 7: TRAPÉZIO RETÂNGULO FEITO POR JAMES A. GARFIELD.	23
FIGURA 8: TRIÂNGULO ESCALENO USADO NA DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA.....	23
FIGURA 9: TRIÂNGULO RETÂNGULO COM CONSTRUÇÕES DE QUADRADOS SOBRE SEUS LADOS.....	24
FIGURA 10: TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS SOBRE OS LADOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO.	25
FIGURA 11: TRIÂNGULOS SEMELHANTES CONSTRUÍDOS SOBRE OS LADOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO.	26
FIGURA 12: POLÍGONOS REGULARES DE N LADOS SOBRE OS LADOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO.	27
FIGURA 13: POLÍGONOS SEMELHANTES CONSTRUÍDOS SOBRE OS LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO.	28
FIGURA 14: COMPLEMENTARES DOS TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS NO INTERIOR DO QUADRADO.	29
FIGURA 15: QUADRADOS INSCRITOS NOS PONTOS MÉDIOS.....	29
FIGURA 16: TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS INSCRITOS NOS PONTOS MÉDIOS.	29
FIGURA 17: CÍRCULOS INSCRITOS NOS QUADRADOS.....	30
FIGURA 18: SEMICÍRCULOS COM DIÂMETRO SOBRE OS LADOS DO TRIÂNGULO.....	30
FIGURA 19: EXTERIORES AOS SEMICÍRCULOS E INTERIORES AOS QUADRADOS.....	30
FIGURA 20: FIGURAS SEMELHANTES.	31

FIGURA 21: FIGURAS SEMELHANTES QUAISQUER CONSTRUÍDAS SOBRE OS LADOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	31
FIGURA 22: FIGURAS SEMELHANTES SOBRE OS LADOS DE UM TRIÂNGULO QUALQUER.....	32
FIGURA 23: PARALELOGRAMOS SOBRE OS CATETOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO.	32
FIGURA 24: ESBOÇO DO PRODUTO EDUCACIONAL.....	37
FIGURA 25: EXTENSÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS PARA VOLUME.	38

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
1.1. OBJETIVOS.....	14
1.1.1 OBJETIVO GERAL	14
1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
1.2. ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	16
2.1. PITÁGORAS.....	16
2.2. ESCOLA PITAGÓRICA	18
2.3. O TEOREMA DE PITÁGORAS	19
2.4. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS.....	20
2.5. ALGUMAS EXTENSÕES E GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS.....	23
2.5.1. TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS.....	24
2.5.2. TRIÂNGULOS SEMELHANTES	25
2.5.3. POLÍGONOS REGULARES.....	26
2.5.4. POLÍGONOS SEMELHANTES	27
2.5.5. EXTENSÕES RETILÍNEAS E NÃO RETILÍNEAS.....	28
2.5.6. A GENERALIZAÇÃO DE POLYA.....	31
2.5.7. A GENERALIZAÇÃO DE PAPPUS	32
2.6. O USO DE MATERIAIS CONCRETOS E MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	33
3. METODOLOGIA.....	35
3.2. CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	35
3.2 A CONSTRUÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	36
3.3. PRODUÇÃO DE DADOS	38

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....	40
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	43
REFERÊNCIAS	44
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO.....	46

1. INTRODUÇÃO

A matemática é uma disciplina de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio crítico, lógico e analítico de cada indivíduo. É através dela que o ser humano é capaz de compreender e resolver muitas das situações existentes em seu cotidiano. No entanto, apesar da sua relevância, um dos maiores desafios enfrentados pelos professores de matemática é tornar o ensino da matemática mais acessível, interessante e significativo para os alunos. Na minha percepção, os conceitos matemáticos são complexos e abstratos tornando a disciplina difícil de ser compreendida e valorizada, o que causa o distanciamento dos alunos do aprendizado matemático eficaz.

Observando esse cenário, penso ser necessário incrementar a novas metodologias de ensino de matemática com o uso de produtos educacionais para auxiliar os professores na prática de ensinar tópicos específicos de conteúdos matemáticos.

A literatura de pesquisa Camacho (2012), Lorenzato (2006), Gomes (2016), Passos (2006) destacam que utilizar aplicativos, jogos educativos, vídeos, livros didáticos interativos, entre outros materiais, tem o potencial de envolver os alunos de maneira mais dinâmica e lúdica, estimulando o interesse pela matemática e tornando o aprendizado enriquecedor, uma vez que novas abordagens podem ser criadas para explicar determinado assunto/conceito.

Nesse sentido, encontra-se o Teorema de Pitágoras. Cujas fórmula relaciona as medidas dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. A expressão $a^2 + b^2 = c^2$ é uma das, quiçá, mais famosa fórmula da matemática. O Teorema de Pitágoras está presente em várias situações do cotidiano, já que possui aplicações na construção civil, no cálculo de distância, na aviação e navegação, na tecnologia, na física, entre outras. Por conta disso, ele é bastante trabalhado pelos professores de matemática no ensino fundamental para abordar, principal e exclusivamente, o cálculo de área e de perímetro de triângulos, trapézios, quadrados e quaisquer outros polígonos que possam ser “divididos” em triângulos retângulos. Além disso, também existem as extensões e generalizações do teorema de Pitágoras que são pouco trabalhadas no ensino, possivelmente, por não ter a disposição produtos educacionais que favoreça uma abordagem palpável que facilite o ensino.

Partindo dessa problemática, o presente trabalho busca responder a seguinte pergunta diretriz: **Como mostrar uma extensão do Teorema de Pitágoras numa aplicação em cálculo de volume?**

Com base nos estudos realizados, foi criado um experimento para ser utilizado por professores de matemática como recurso pedagógico no ensino do conteúdo da extensão do Teorema de Pitágoras, a fim de promover uma aprendizagem significativa para os alunos. Esse produto educacional, portanto, se configura como uma ferramenta útil, tanto para a construção do conhecimento pelos estudantes quanto para o aperfeiçoamento das estratégias de ensino dos professores de matemática.

Para chegar à solução da pergunta diretriz deste trabalho, foram estabelecidos os objetivos a seguir.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GERAL

Construir um produto educacional que mostre uma extensão do Teorema de Pitágoras em três dimensões.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Mostrar como o Teorema de Pitágoras pode ser explorado de forma prática através de um produto educacional.
- Construir um produto educacional que ilustre visualmente a extensão da fórmula do Teorema de Pitágoras para o cálculo de volume.
- Avaliar como a aplicação prática do produto educacional auxilia os professores a ensinarem o Teorema de Pitágoras de forma eficiente e significativa.

1.2. ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho é organizado em cinco capítulos, no intuito de evidenciar como um experimento (como produto educacional) pode favorecer e potencializar o ensino e a aprendizagem do Teorema de Pitágoras e suas extensões.

O primeiro capítulo se refere a introdução, apresentando a importância e os desafios no ensino da matemática, mostrando como a utilização de materiais didáticos

podem tornar a aprendizagem mais significativa, além de destacar o ensino do teorema de Pitágoras apenas para o cálculo de áreas, em que suas extensões e generalizações são pouco trabalhadas. Apresenta também os objetivos para solucionar a pergunta diretriz deste trabalho.

O segundo capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre Pitágoras, a escola Pitagórica, o Teorema de Pitágoras e suas demonstrações, além de apresentar algumas extensões e generalizações do teorema. Foi também realizada uma breve correção sobre o uso de material concreto manipulável no ensino de matemática de forma a fundamentar o produto educacional no contexto de ensino.

O terceiro capítulo se refere a metodologia, utilizada para o desenvolvimento deste trabalho. Neste capítulo, descrevemos os passos para a construção do produto educacional, que foi utilizado para produzir dados com profissionais que ensinam matemática.

No quarto capítulo apresentamos a análise dos dados obtidos por meio de um questionário aplicado a professores da educação básica e graduandos em matemática, trazendo as impressões dos participantes após o contato com o produto educacional.

O quinto e último capítulo apresentamos nossas reflexões sobre a construção do trabalho, mostrando a importância do produto educacional construído para o ensino das extensões do Teorema de Pitágoras de forma prática nas aulas de matemática, a partir dos dados analisados.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Inicialmente, realizamos um breve resgate histórico sobre Pitágoras, o surgimento do teorema e suas aplicações. A seguir são apresentadas várias extensões do teorema, para polígonos regulares, polígonos semelhantes e figuras não retilíneas. A generalização de Polya também é enunciada e demonstrada, situação em que o padrão pitagórico (relação entre as áreas) é válido para quaisquer tipos de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, sendo o Teorema de Pitágoras um caso particular, bem como a generalização de Pappus.

2.1. PITÁGORAS

Pitágoras nasceu na ilha de Samos, entre 570 a 571 a.C. e morreu entre 496 a 497 a.C., em Metaponto. Ele foi um importante matemático, profeta e místico que, de acordo com Boyer (2010), está envolvido em lendas e endeusamento.

Devido a confinidade onde viviam, muitos autores acreditam que Pitágoras foi um discípulo de Tales, porém isto é incerto devido a diferença de idade entre ambos. Segundo Eves (2004), Tales era cinquenta anos mais velho que Pitágoras e morava perto de Mileto, onde vivia Pitágoras. Sabe-se que foi a partir das contribuições desses dois grandes pensadores que a Matemática começou a se consolidar como ciência, possibilitando um grande desenvolvimento nos séculos seguintes.

Araújo (2016) salienta que Pitágoras viajou para o Egito, Babilônia e talvez para a Índia, absorvendo não só conhecimentos matemáticos e astronômicos, mas também ideias religiosas. Pitágoras foi praticamente um contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-Tse. Ele viveu no Egito por mais de vinte anos e estudou em instituições rigorosas, onde o ensino

[...] era passado de forma convincente e contundente, estabelecendo os deveres dos jovens colocados pelos anciãos da cidade, ocupando-lhes o tempo, para que não ficassem sem orientação e conselhos, voltando a atenção para o cumprimento das leis e da pureza das tradições das famílias, focando na fé com suas orações voltadas para as mães de família, bem como para as crianças, para que crescessem fortes e saudáveis (Araújo, 2016, p.4).

Durante esse período, Pitágoras sondou e absorveu conhecimentos egípcios, agregando experiências aos comerciantes indianos, chineses e entre outros. Com a contribuição de práticas matemáticas de outros povos e de colaboradores parceiros, ele se impressionou com as pirâmides e desenvolveu o teorema de Pitágoras, provando que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa (Santos, 2000, n/p).

Porém, não se sabe ao certo se foi realmente Pitágoras o criador desse teorema, acredita-se ele seja resultado da matemática desenvolvida pelos estudiosos gregos, mais precisamente pela escola pitagórica, fundada por Pitágoras.

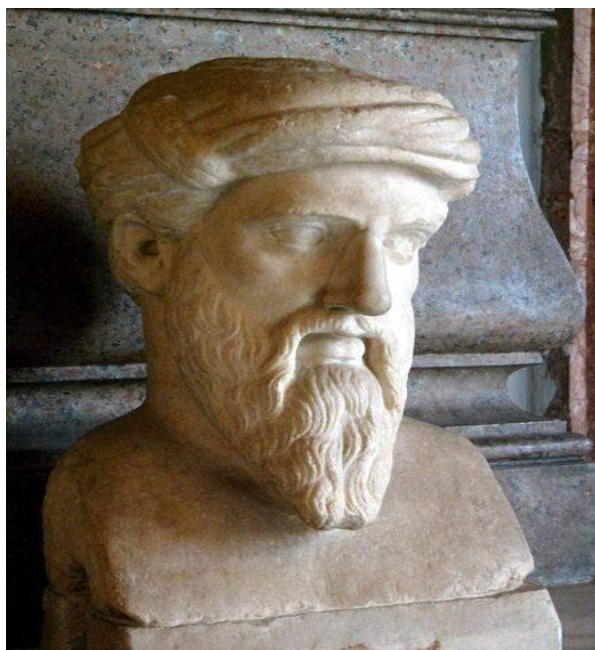
Pitágoras retornou para Samos, depois de um longo período, porém a cidade estava sob poder do tirano Polícrates e a Jônia sob domínio persa, então ele emigrou para Kroton, sendo recebido positivamente pela população. Ao trazer discussões e palestras do seu interesse, ele conquistou a admiração dos seus ouvintes.

Foi exatamente em Kroton que Pitágoras fundou a escola pitagórica, que era, além de um polo dedicado ao estudo da filosofia, matemática e ciências naturais, uma irmandade unida por rituais secretos e cerimônias.

Segundo Silva, Fanti e Pedroso (2016), não se sabe ao certo sobre a morte de Pitágoras, apesar de alguns autores dizerem que o filósofo teria fugido para Metaponto, permanecendo até o fim da sua vida.

Pitágoras é considerado o pai da matemática, apesar de muitos questionamentos. Sua trajetória contribuiu para história, principalmente pelos seus teoremas que despertaram um grande interesse em matemáticos e estudiosos. Abaixo está uma escultura de Pitágoras.

Figura 1: Busto de Pitágoras



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras#/media/Ficheiro:Kapitolinischer_Pythagoras

2.2. ESCOLA PITAGÓRICA

Os relatos indicam que, à medida que aumentava o número de discípulos atraídos pelos ensinamentos de Pitágoras, tornou-se necessário organizar grupos de alunos para que ele pudesse orientá-los de forma mais eficaz. De acordo com Barbosa (1993), Pitágoras fundou uma escola voltada não apenas para o estudo da matemática, mas também envolvia aspectos religiosos, filosóficos e políticos, denominada como pitagórica. Segundo Boyer (2010), essa comunidade era politicamente conservadora com um código rígido de conduta.

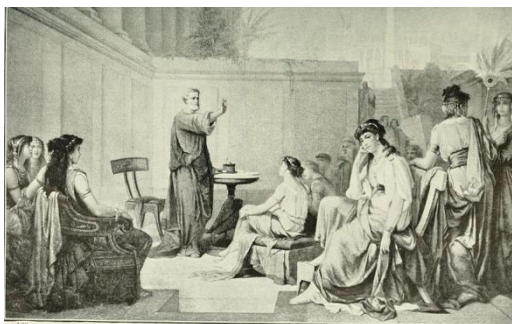
Macena (2022) salienta que a filosofia pitagórica era baseada na adoração aos números, visto que os pitagóricos acreditavam que as características do homem e da matéria se compreendia como números. Sendo assim, essa Irmandade Pitagórica reunia discípulos para o estudo da aritmética (ou Teoria dos Números), da Geometria, da Astronomia e da Música, que eram a base do programa de estudos pitagóricos.

De acordo com Silva, Fanti e Pedroso (2016), devido a uma das crenças dos pitagóricos ser a transmigração das almas, eles eram vegetarianos, com a preocupação da perca da moradia do amigo morto ao matar um animal; ser leal aos membros; fidelidade ao estudo de Geometria, Aritmética, Música e Astronomia.

De acordo com Pereira (2002), Pitágoras defendia a inclusão de todos, oferecendo, assim, às mulheres a oportunidade de ingressar na escola pitagórica, veja na Figura 2. Porém, elas precisavam ser suficientemente inteligentes e superar os testes impostos:

[...] somente os que se mostravam capazes de se impor severas privações físicas e de alimentar seu pensamento eram considerados verdadeiros membros da confraria pitagórica. Ter descendência nobre ou exercer funções influentes não fazia com que alguém fosse admirado para as conferências de Pitágoras, pois os candidatos que não apresentassem um mínimo de inteligência, ou condições éticas mínimas, eram excluídos inapelavelmente. Quanto às mulheres, eram admitidas nas mesmas condições que o homem [...] (Pereira, 2002, p. 50-51).

Figura 2: Pitágoras ensinando uma classe de mulheres.



Fonte: <https://www.flickr.com/photos/internetarchivebookimages/14783288925/>

Portanto, para ingressar na irmandade, os candidatos precisavam suportar desafios que avaliavam sua moral, coragem, capacidade de lidar com a solidão, amor-próprio e raciocínio em relação a questões de matemática e filosofia.

Com o tempo, devido aos princípios defendidos pela Escola Pitagórica, Pitágoras ganhou uma série de inimigos. Muitos desses adversários eram pessoas rejeitadas pela irmandade, que se revoltavam contra ela. Até mesmo as autoridades viam a escola como uma ameaça ao regime vigente. Eventualmente, surgiu um sentimento de hostilidade popular em relação aos pitagóricos, o que levou à destruição do edifício da escola, forçando os membros da irmandade a fugirem (Araújo, 2016).

2.3. O TEOREMA DE PITÁGORAS

Apesar da demonstração do Teorema de Pitágoras levar o seu nome, o teorema já era conhecido pela civilização babilônica, pois tabletes de barros datados de 1800 a 1600 a.C foram encontrados e decifrados. Um deles, conhecido como Plimpton 322, foi estudado por pesquisadores, os quais descobriram que esse tablete continha lados de um triângulo retângulo.

Outro tablete importante está localizado na Universidade de Yale, que, de acordo com Lima et al (2006), é o único que contém um quadrado e suas diagonais. Usando o sistema sexagesimal (base 60), a tábua apresenta o valor com seis dígitos, uma precisão impressionante para a época. No trecho do tablete mostrado na figura 3, o lado do quadrado é considerado como 30, enquanto o comprimento da diagonal é apresentado como 42, 25, 35.

Figura 3: Tablete babilônico contendo figuras geométricas.



Fonte: <https://profes.com.br/marcosrendak/blog/teorema-de-pitagoras>

Sendo assim, não se sabe se foi o próprio Pitágoras que descobriu o teorema, pois sua escola era comunitária e era natural dar credibilidade a ele por muitas descobertas.

O Teorema de Pitágoras, o qual diz "que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos" (Eves, 2011, p. 103), é, de acordo com Wagner (2015), considerado um dos mais importantes e belos da Matemática, tendo uma história que vai do século V a.C. até o século XX, com mais de 400 demonstrações diferentes ao longo do tempo. Entre os matemáticos que contribuíram para essas provas estão figuras como Bhaskara e Leonardo da Vinci. Em 1876, James Garfield, presidente dos Estados Unidos, também apresentou sua própria demonstração enquanto estava na Câmara dos Representantes, a qual foi publicada no *New England Journal of Education* (Wagner, 2015; Silva; Fanti; Pedroso, 2016).

Segundo Fainguelernt (1999), os estudantes têm uma grande dificuldade em compreender o teorema de imediato. Sendo assim, para facilitar o aprendizado dos alunos, é necessário abordar sobre o tema, discutindo sua aplicação de maneira menos complexas, fazendo com que o Teorema de Pitágoras seja trabalhado e desenvolvido buscando o interesse dos estudantes. Fainguelernt (1999) ainda afirma que o teorema é visto como difícil devido à falta de conhecimento e a forma sucinta como era trabalhada na sala de aula.

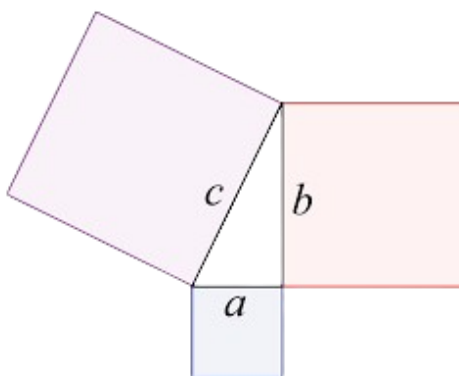
2.4. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema de Pitágoras descreve uma relação entre os lados de um triângulo retângulo, afirmando que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados. Seu enunciado é escrito de diversas maneiras diferentes pelos livros de matemática

Para Barbosa (1993) a forma de enunciar o Teorema de Pitágoras seria: *A área do quadrado construído com a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos com os catetos*, que provavelmente, o enunciado foi modificado pelo leitor para: *O quadrado da hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos com os catetos*.

A figura 4 apresenta o enunciado do Teorema de Pitágoras de maneira geométrica.

Figura 4: Representação geométrica do Teorema de Pitágoras.



Fonte: <https://greciantiga.org/arquivo.asp?num=1127>

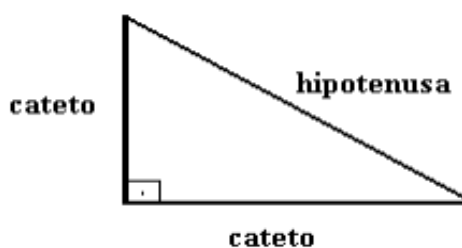
Se c é a medida da hipotenusa e se a e b são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema afirma que: $c^2 = a^2 + b^2$.

É necessário a compreensão dos termos utilizados para entender esta relação. Sendo assim, Novodovoski e Stascovian (2015, p.268) ao discutirem a origem dos termos hipotenusa e cateto, ressaltam que

Um dos lados foi dito hipotenusa, do grego hypotenousa, onde hypo que significa “debaixo” e teinein que é tido como “esticar”, que é o lado maior do triângulo retângulo e contrário ao ângulo reto. Os dois lados menores são descritos como catetos que também deriva do grego káthetos ou kathíenai, que seria “descido de maneira perpendicular”, de onde vem kata, “para baixo” com híenai, “mandar”.

A hipotenusa é o lado mais extenso, localizado em frente ao ângulo de 90 graus, enquanto os catetos são os dois lados que delimitam esse ângulo, como mostrado na Figura 5 a seguir.

Figura 5: Triângulo retângulo.



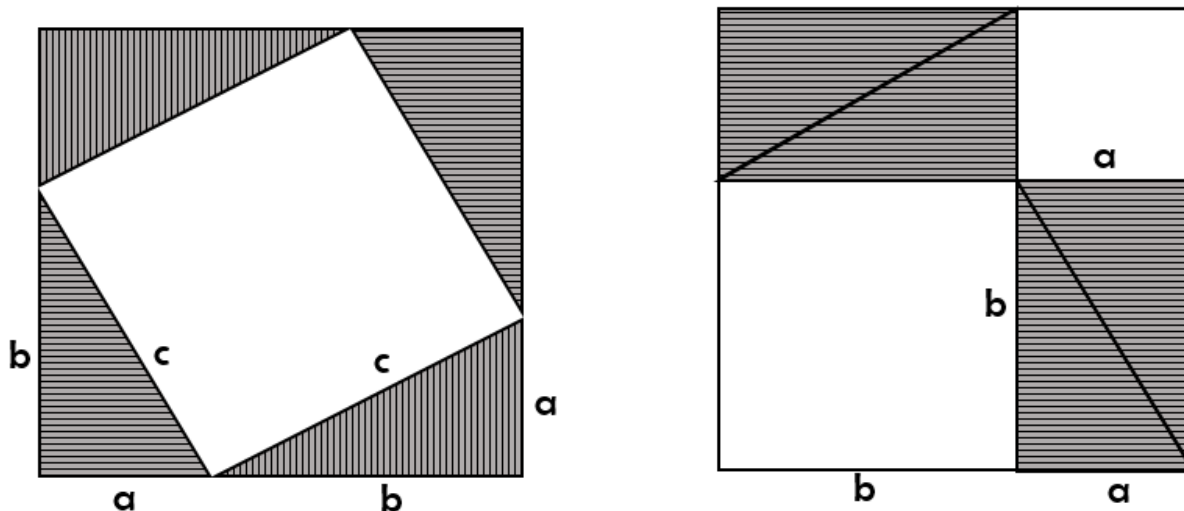
Fonte: Kramers (2008, p.16).

O livro *The Pythagorean Proposition*, (Loomis, 1968) de Elisha Scott Loomis (1852 – 1940) contém 367 maneiras de demonstrar o Teorema de Pitágoras. A seguir,

temos três demonstrações de autoria do professor Loomis, porém apresentadas por Lima (2014).

Ao observar a figura 6, temos o quadrado grande, com lados medindo $a + b$. Agora, dentro desse quadrado, colocamos 4 triângulos exatamente iguais, do jeito que está mostrado na figura. Se organizarmos esses 4 triângulos de uma forma (como na figura da esquerda), o espaço que sobra no meio vai formar um quadrado menor, com lado c . Porém se organizarmos os mesmos 4 triângulos de outra maneira (como na figura da direita), o espaço que sobra no meio vai formar dois quadrados menores: um com lado de medida a e outro com lado de medida b . Então, como o espaço vazio (sem os triângulos) é o mesmo nos dois casos, podemos concluir que a área do quadrado com lado de medida c é igual à soma das áreas dos quadrados com lados de medida a e medida b (Lima, 2004, p. 53).

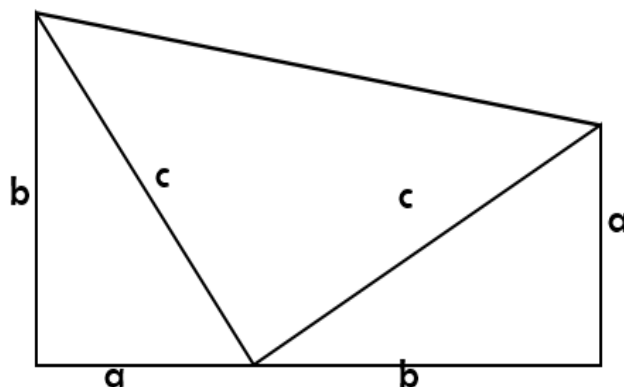
Figura 6: As relações dos triângulos - A mais bela prova.



Fonte: Lima (2004, p. 53).

Em 1876, enquanto estava na câmara de representantes, James Abram Garfield (1831-1881), 20º presidente da história dos Estados Unidos, rabiscou a seguinte demonstração do teorema: Ao construir um trapézio retângulo, como mostrado na figura 7, ele fica composto por três triângulos, no qual, a soma das suas áreas resulta na área do trapézio. Por outro lado, sua área com bases a , b e altura $a + b$ é igual a média das bases multiplicado pela altura, pois é como se o trapézio estivesse espelhado para formar uma figura mais fácil de calcular (paralelogramo), e depois dividido por 2 para voltar à área original. Logo, tem-se $c^2 = a^2 + b^2$ (Lima, 2004, p. 54). Essa demonstração ficou conhecida como “A demonstração do presidente”.

Figura 7: Trapézio retângulo feito por James A. Garfield.

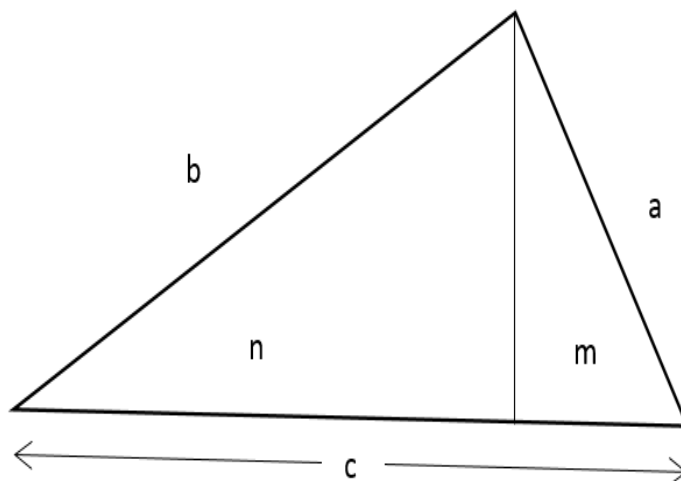


Fonte: Lima (2004, p. 54).

Por fim, temos a demonstração algébrica, que é baseada na semelhança de triângulos retângulos, ver a figura 8. De acordo com Lima (2004),

no triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção sobre ela. Assim, se m e n são respectivamente as projeções dos catetos a e b sobre a hipotenusa c , temos $a^2 = mc$, $b^2 = nc$, enquanto $m + n = c$. Somando, vem $a^2 + b^2 = c^2$ (Lima, 2004, p. 54).

Figura 8: Triângulo escaleno usado na demonstração algébrica.



Fonte: Lima (2004, p. 54).

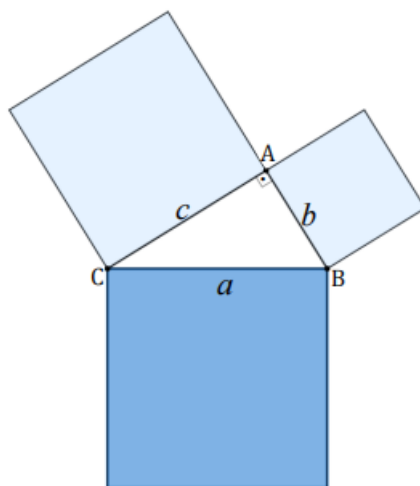
2.5. ALGUMAS EXTENSÕES E GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras é um dos resultados mais conhecidos e utilizados da Matemática, sendo tradicionalmente apresentado por meio da relação entre os quadrados

construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. No entanto, por trás dessa representação clássica, existe um padrão mais geral: a relação entre áreas associadas aos lados do triângulo. Sendo assim, Silva, Fanti e Pedroso (2016) demonstram as extensões do Teorema de Pitágoras através dos conceitos de demonstrações e formas, além de falar sobre a generalização de Polya e a generalização de Pappus.

Com base na definição do teorema, a soma das áreas construídas sobre os catetos é igual à área construída sobre a hipotenusa (Figura 9). E, segundo Silva, Fanti e Pedroso (2016) essa relação pitagórica pode ser mantida para outras figuras geométricas semelhantes e ainda sim preservar o teorema.

Figura 9: Triângulo retângulo com construções de quadrados sobre seus lados.



Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Podemos perceber a extensão desse teorema em triângulos equiláteros e semelhantes e polígonos regulares e semelhantes, em que áreas equivalentes são obtidas, independentemente da quantidade de lados da figura.

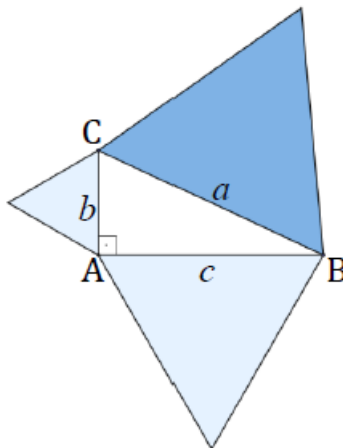
Utilizaremos como referência para a demonstração das proposições das extensões do Teorema de Pitágoras e a definição de algumas generalizações integralmente, o trabalho de Silva, Fanti e Pedroso (2016).

2.5.1. TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

PROPOSIÇÃO 1: A área do triângulo equilátero, construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos deste triângulo (Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

DEMONSTRAÇÃO: Seja ABC um triângulo reto em A , com hipotenusa a e catetos b e c , conforme a Figura 10.

Figura 10: Triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Sejam S_a , S_b e S_c as áreas dos triângulos equiláteros construídos, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos deste triângulo.

Dessa forma, $S_a = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $S_b = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ e $S_c = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Somando as áreas S_b e S_c , e usando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$S_b + S_c = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = (b^2 + c^2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = S_a.$$

Portanto, $S_a = S_b + S_c$.

2.5.2. TRIÂNGULOS SEMELHANTES

LEMA 1: Se dois triângulos são semelhantes, então a razão entre as suas áreas é igual ao quadrado da razão entre os comprimentos de dois lados correspondentes quaisquer (Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

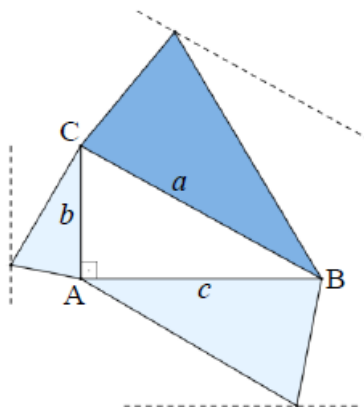
Uma demonstração do LEMA 1 pode ser encontrada em Lourenço e Silva (1992).

PROPOSIÇÃO 2: Se construirmos triângulos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados (segmentos) do triângulo retângulo são lados homólogos (correspondentes) aos lados dos triângulos semelhantes que os contém, então a área do

triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos (Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

DEMONSTRAÇÃO: Sejam T_a , T_b e T_c , respectivamente, as áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre a hipotenusa a e catetos b e c , como na Figura 11.

Figura 11: Triângulos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Pelo Lema 1, temos que $\frac{T_b}{T_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ e $\frac{T_c}{T_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$, de onde obtemos $T_b = \frac{b^2}{a^2} \cdot T_a$ e $T_c = \frac{c^2}{a^2} \cdot T_a$.

Somando as duas expressões e usando a relação de Pitágoras, obtemos

$$T_b + T_c = \frac{(b^2 + c^2)}{a^2} \cdot T_a = \frac{a^2}{a^2} \cdot T_a = T_a.$$

Portanto, $T_b + T_c = T_a$.

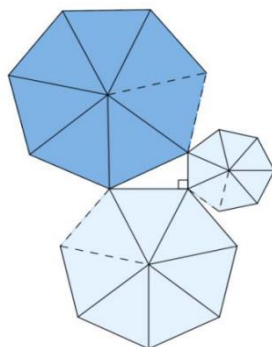
2.5.3. POLÍGONOS REGULARES

PROPOSIÇÃO 3: A área do polígono regular de n lados construídos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos polígonos regulares de n lados construídos sobre seus catetos (Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos um triângulo retângulo em que em cada um de seus lados foram construídos polígonos regulares de n lados, conforme a Figura 12. Podemos

decompor cada polígono regular em triângulos cujos vértices são: dois vértices consecutivos do polígono regular e o seu centro.

Figura 12: Polígonos regulares de n lados sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Silva, Fanti e Pedrosa (2016).

Sejam S_a, S_b e S_c as áreas dos polígonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo, temos $S_a = n \cdot T_a$, $S_b = n \cdot T_b$ e $S_c = n \cdot T_c$, onde T_a , T_b e T_c , são, respectivamente, as áreas de cada triângulo em que foi decomposto o polígono regular, construído sobre a hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c .

Então,

$$S_b + S_c = n \cdot (T_b + T_c) = n \cdot T_a = S_a,$$

uma vez que, pela Proposição 3 temos $T_b + T_c = T_a$ (já que os triângulos isósceles apoiados sobre os lados do triângulo retângulo são semelhantes).

2.5.4. POLÍGONOS SEMELHANTES

LEMA 2: Se dois polígonos são semelhantes, então eles possuem áreas proporcionais aos quadrados da razão das medidas entre dois lados homólogos quaisquer (razão de semelhança), ou seja, A_1 sendo a área do polígono $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$ e A_2 a área de $B_1B_2B_3B_4\dots B_n$, temos que $\frac{A_1}{A_2} = k^2$, com k a razão de semelhança (Silva, Fanti e Pedrosa, 2016).

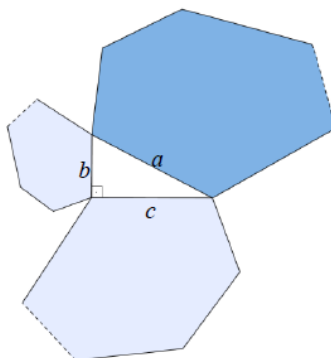
Uma demonstração do LEMA 2 pode ser encontrada em Lourenço e Silva (1992).

PROPOSIÇÃO 4: Se construirmos polígonos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados (segmentos) do triângulo retângulo são lados homólogos aos lados dos polígonos semelhantes que os contém, então a área do polígono construído

sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos (Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

DEMONSTRAÇÃO: Considerando que os polígonos construídos sobre a hipotenusa e os catetos são semelhantes (ver Figura 13) e S_a, S_b e S_c são suas respectivas áreas, mostraremos que $S_a = S_b + S_c$.

Figura 13: Polígonos semelhantes construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.



Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

De fato, como os polígonos são semelhantes e os lados do triângulo são lados correspondentes dos polígonos, temos de acordo com o Lema 2, que

$$\frac{S_b}{S_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ e } \frac{S_c}{S_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

Somando membro a membro as duas igualdades, obtemos

$$\frac{S_b}{S_a} + \frac{S_c}{S_a} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

De onde segue, usando o Teorema de Pitágoras que

$$\frac{S_b + S_c}{S_a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

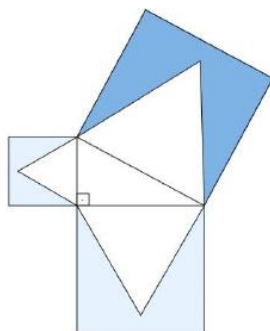
Portanto, $S_a = S_b + S_c$.

2.5.5. EXTENSÕES RETILÍNEAS E NÃO RETILÍNEAS

A seguir, mostraremos algumas das extensões existentes para figuras retilíneas e não retilíneas, em que não é difícil verificar que o padrão pitagórico é preservado, ou seja, a área da região construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das regiões construídas sobre os catetos.

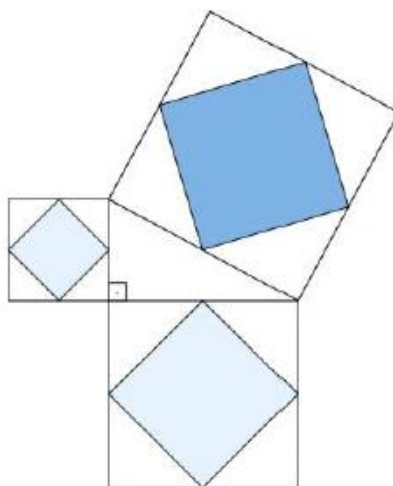
Extensões retilíneas:

Figura 14: Complementares dos triângulos equiláteros no interior do quadrado.



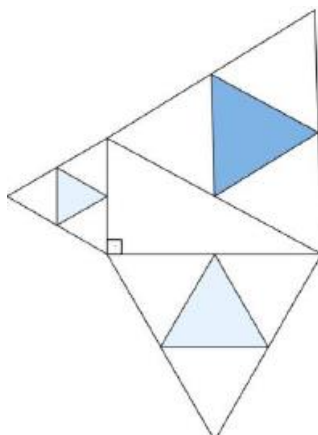
Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Figura 15: Quadrados inscritos nos pontos médios.

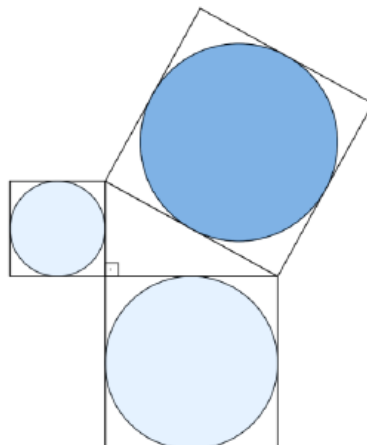


Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

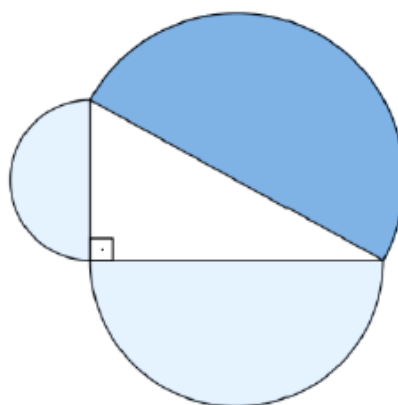
Figura 16: Triângulos equiláteros inscritos nos pontos médios.



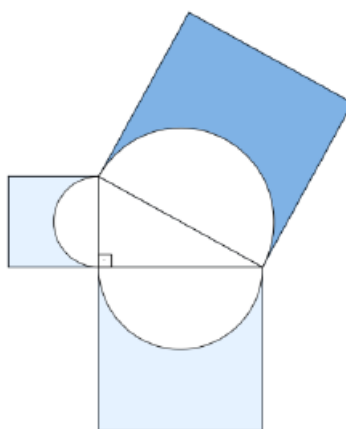
Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Extensões não retilíneas:**Figura 17:** Círculos inscritos nos quadrados.

Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Figura 18: Semicírculos com diâmetro sobre os lados do triângulo.

Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

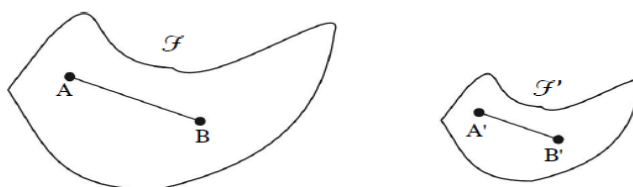
Figura 19: Exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrados.

Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

12.5.6. A GENERALIZAÇÃO DE POLYA

DEFINIÇÃO: Duas figuras geométricas \mathcal{F} e \mathcal{F}' são semelhantes se a cada ponto A de \mathcal{F} é possível fazer uma correspondência a um e só um ponto A' de \mathcal{F}' , chamado *homólogo* do ponto A , de tal forma que se A e B são pontos quaisquer de \mathcal{F} e A' e B' são seus pontos homólogos em \mathcal{F}' , então a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ é constante, e é denominada razão ou coeficiente de semelhança da figura \mathcal{F} para a figura \mathcal{F}' . De modo similar ao caso de polígonos semelhantes, dizemos que AB e $A'B'$ são segmentos (ou lados, se for o caso) homólogos (Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

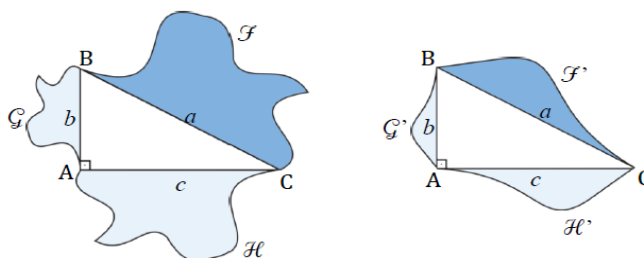
Figura 20: Figuras semelhantes.



Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

PROPOSIÇÃO 5 (Polya): Sejam \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} três figuras semelhantes, construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo, conforme a Figura 21. Se os lados (segmentos) do triângulo retângulo são lados homólogos aos lados das figuras semelhantes que os contém, então as áreas $A_{(\mathcal{F})}$, $A_{(\mathcal{G})}$ e $A_{(\mathcal{H})}$ satisfazem a relação $A_{(\mathcal{F})} = A_{(\mathcal{G})} + A_{(\mathcal{H})}$ (padrão pitagórico) (Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

Figura 21: Figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados do triângulo retângulo.



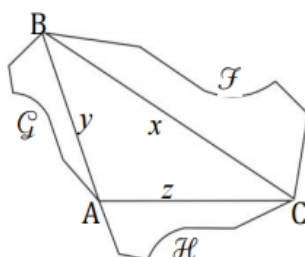
Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Sua demonstração pode ser encontrada em Silva, Fanti e Pedroso (2016).

¹ George Polya (1887–1985) foi um matemático húngaro com importantes contribuições à Análise, Combinatória e Probabilidade. Em 1945, publicou *How to Solve It (A Arte de Resolver Problemas)*, obra dedicada ao estudo dos processos de descoberta e invenção em Matemática.

PROPOSIÇÃO 6: Se num triângulo ABC, com lados de medidas x , y e z , são construídos sobre os seus lados, respectivamente, figuras semelhantes, \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} , tal que as suas áreas satisfaçam a relação $A(\mathcal{F}) = A(\mathcal{G}) + A(\mathcal{H})$ e os vértices do triângulo são pontos homólogos das figuras que os contém, então o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa x (Figura 22) (Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

Figura 22: Figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo qualquer.



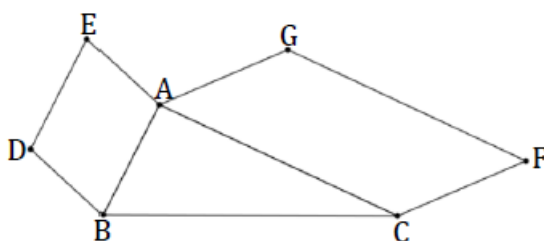
Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Sua demonstração pode ser encontrada em Silva, Fanti e Pedroso (2016).

2.5.7. A GENERALIZAÇÃO DE PAPPUS

PROPOSIÇÃO 7 (Pappus): Seja ABC um triângulo (não necessariamente retângulo) e sobre dois de seus lados construímos dois paralelogramos quaisquer, ABDE e ACFG, como na Figura 23. Então é possível construir sobre o outro lado desse triângulo, um terceiro paralelogramo, BCHI, cuja área seja igual à soma das áreas dos outros dois já construídos (Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

Figura 23: Paralelogramos sobre os catetos do triângulo retângulo.



Fonte: Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Sua demonstração pode ser encontrada em Silva, Fanti e Pedroso (2016).

² Pappus de Alexandria (c. 290–350) foi um importante matemático da Antiguidade, autor da *Coleção Matemática*, obra que reúne e amplia resultados de Euclides e Arquimedes. Seus estudos influenciaram no surgimento da Geometria Analítica e incluem contribuições sobre seções cônicas e centros de gravidade.

2.6. O USO DE MATERIAIS CONCRETOS E MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O ensino da matemática sempre representou um grande desafio para os educadores, especialmente diante da constante busca por métodos e práticas pedagógicas que promovam maior interesse e melhor desempenho dos alunos na disciplina.

Nesse sentido, o uso de materiais concretos manipuláveis destaca-se como uma estratégia eficaz no processo de ensino e de aprendizagem. De acordo com Nacarato (2004-2005), essa abordagem teve início com Pestalozzi, no século XIX, motivada pela necessidade de incorporar objetos concretos que favorecessem a compreensão dos conteúdos matemáticos, tornando-os mais acessíveis e significativos aos estudantes.

Existem diversas definições de materiais manipuláveis. Segundo Matos e Serrazina (1996) são objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Para Lorenzato (2006), são instrumentos utilizados no processo de ensino e de aprendizagem. Camacho (2012), por sua vez, define como exemplos de materiais, que com o passar dos anos, são utilizados na construção de conceitos.

Já Passos (2006), define materiais manipuláveis como

Objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia. [...] Os materiais manipuláveis são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa (Passos, 2006, p.5).

Os materiais manipuláveis, também conhecidos como materiais estruturados, são objetos concretos que, ao serem manuseados pelos alunos, permitem estabelecer relações entre suas características e os conceitos matemáticos. Essa interação favorece uma prática matemática mais significativa e compreensível.

De acordo com Gomes (2016), a utilização de materiais manipuláveis pode ter a ação motivadora, auxiliadora e fixadora

[...] ação motivadora – pois podem despertar o desejo no aluno de gostar de matemática através do manuseio dos objetos; ii) ação auxiliadora – na busca de facilitar o entendimento sobre os conteúdos abordado, o uso pode fazer com que as explicações se tornem mais fáceis; iii) ação fixadora – no momento em que os alunos estão em constante contato com os Objetos, podem através da prática, fixar o estudo de conteúdos já trabalhados ou que estão sendo propostos no momento (jogos de reflexão) (Gomes, 2016, p. 6).

Lorenzato (2010) salienta que para “se alcançar a abstração é preciso começar pelo concreto” e, que “[...] este é o caminho para a formação de conceitos” (Lorenzato, 2010, p. 20). Nesse sentido, a utilização desses materiais pelos professores nas aulas de

matemática contribui na aprendizagem dos alunos, trazendo uma expectativa de superação no ensino de certos conteúdos, auxiliando e motivando nas tarefas escolares.

Contudo, é necessário que os professores selecionem os materiais manipuláveis de acordo com os conhecimentos dos alunos para que os próprios relacionem essa experiência com a disciplina. Caso contrário, não é garantido uma aprendizagem significativa dos conteúdos. Ou seja,

Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre os objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma que possam ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às suas ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam (Passos, 2006, p.81).

De acordo com Passos (2012), é importante se preocupar com a visualização durante a abordagem do processo ensino e de aprendizagem na matemática, utilizando modelos manipuláveis, representações gráficas ou linguagem e gestos, que expressam conhecimentos dos indivíduos.

Além disso, é importante que os educandos participem da manipulação desses materiais, interpretando suas características, resolvendo e formulando problemas. É através desse contato com o objeto, que o aluno, de forma natural, começa a explorar, aprendendo aos poucos a entender, organizar e absorver os conceitos (Copello, Laurino, Luz, Novello, Silveira, 2009).

Segundo Camacho (2012), é de extrema importância o uso de materiais concretos manipuláveis na educação, pois são através deles que "os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos" (Camacho, 2012, p.5).

Portanto, os materiais manipuláveis contribuem significativamente no desenvolvimento cognitivo do aluno, tornando o ensino da matemática, uma prática dinâmica e intuitiva.

Diante do exposto na revisão de literatura, descreveremos uma metodologia desse trabalho, em que evidenciaremos a fusão das ideias revisadas sobre a extensão do Teorema de Pitágoras por um produto educacional na discussão de soma de volumes.

3. METODOLOGIA

A metodologia representa a etapa da pesquisa dedicada à identificação e escolha dos métodos mais apropriados para alcançar os objetivos propostos. Neste capítulo, são apresentados os procedimentos para o desenvolvimento da escrita desse trabalho bem como para a construção do produto educacional. Explicam-se, de forma detalhada, os procedimentos utilizados na construção e análise de dados a partir da apresentação do produto Educacional para professores já experientes e professores em formação inicial.

3.2. CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Sabendo que o presente estudo tem como objetivo apresentar um produto educacional prático para o ensino de uma extensão do teorema de Pitágoras, o planejamento da pesquisa pode combinar diferentes técnicas, sem se preocupar com a ideia de que eles precisam ser opostos. Diante disso, Brandão (2008) ressalta que

Não cabe, nesta intervenção, aprofundar o equívoco das adjetivações de qualitativa ou quantitativa às pesquisas, de livre curso na área de educação. Muito menos retomar o velho e desgastado debate sobre a prioridade ao sujeito ou às estruturas na suposta superioridade ética e/ou política de uma ou outra abordagem. Aqueles que levam a sério as exigências do conhecimento do mundo social há muito passam ao largo desses debates. (Brandão, 2008, p. 609).

Alinhando-se a Brandão (2008) nossa maior preocupação não é classificar numa categoria esse trabalho, ademais ressaltamos que, a pesquisa caracterizada “não pode ser tomada como absolutamente rígida, visto que algumas pesquisas, em função de suas características, não se enquadram facilmente num ou noutro modelo” (Gil, 2009, p. 44). Destarte, se para alguns é importante escolher referências teórico-metodológicas para investigação que se encaixem na pesquisa, concordamos que este trabalho se caracteriza pelo método qualitativo, embora nossa maior preocupação seja descrever seus procedimentos metodológicos.

Logo, o presente estudo é realizado com base em uma pesquisa bibliográfica e uma investigação prática. Primeiramente, foi feito um levantamento de livros, artigos e outros materiais disponíveis no acervo da Biblioteca professora Ms. Maria Delma Gumes Fernandes da Universidade Estadual da Bahia – *Campus VI* para aprofundar o conhecimento teórico sobre o Teorema de Pitágoras. Também incluímos um panorama histórico, mostrando o contexto em que o teorema foi criado e desenvolvido ao longo do tempo. Além disso, falamos sobre as extensões e generalizações do Teorema de Pitágoras.

O próximo passo realizado foi a construção do produto educacional, no qual sua produção foi planejada com o objetivo de analisar como o uso de um recurso prático pode ajudar no processo de ensino e aprendizagem, facilitando a compreensão do Teorema de Pitágoras com extensão ao estudo de volume.

3.2 A CONSTRUÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

A construção do produto educacional para ser utilizado no processo formal e não formal do ensino sobre o teorema de Pitágoras e sua extensão com a discussão sobre volume, se deu de forma simples. Para tal, contamos com a prestação de serviço de uma mão de obra especializada, um vidraceiro. Os materiais empregados foram vidro, MDF (*Painel de Fibra de Média Densidade*), água, tinta e cola.

O teorema de Pitágoras afirma que em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos (a e b) é igual ao quadrado da hipotenusa (c), logo:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ao fazer uma extensão do plano para o espaço, podemos construir sólidos tridimensionais tendo por base as áreas descritas no teorema. O volume é adquirido a partir da área do quadrado dos catetos do triângulo retângulo, dado por sua aresta multiplicada por uma altura constante h, da mesma forma é dado o volume pela parte correspondente a hipotenusa, logo:

$$h(a^2 + b^2) = hc^2$$

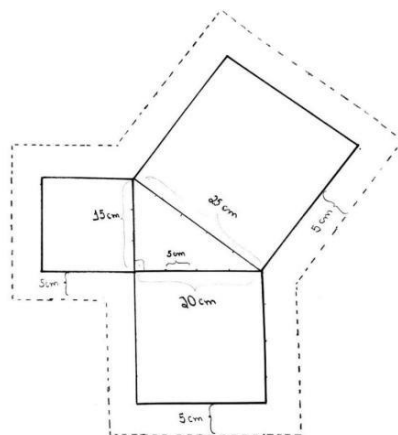
$$ha^2 + hb^2 = hc^2$$

Nesse sentido o produto educacional foi construído fazendo alusão a quadrados, alicerçado na relação das ternas pitagóricas mais comuns; a partir do desenho de um triângulo retângulo de catetos e hipotenusa, medido respectivamente, 3,4 e 5 unidades de comprimento.

A construção iniciou-se em casa a partir de um esboço rascunhado a caneta em quatro folhas de papel A3, indicando as medidas (ver Figura 24). Tomamos como base um triângulo retângulo cujos catetos medem, respectivamente, 15 cm e 20 cm, resultando, conseqüentemente, em uma hipotenusa de 25 cm. Para fins de proporcionalidade e padronização, foi estabelecido que cada unidade de comprimento no modelo

corresponderia a 5 cm. Essa mesma medida foi adotada para a largura (ou profundidade) de cada peça do produto, assegurando estabilidade estrutural.

Figura 24: Esboço do produto educacional.



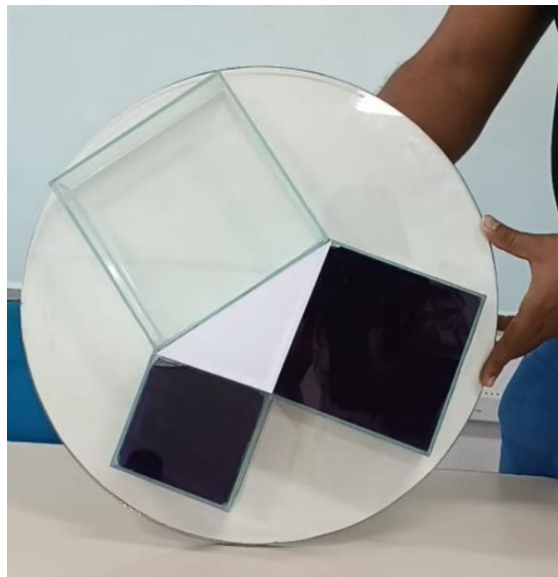
Fonte: Autora (2025).

A fase seguinte ocorreu na vidraçaria. Nesta etapa, juntamente com os profissionais da vidraçaria decidimos alterar as medidas para as ternas pitagóricas, 12 cm, 16 cm e 20 cm, para que o produto não ficasse tão pesado. Neste caso, a altura (h) foi 5 cm. Primeiro, utilizando placas de vidro transparente, foram cortadas as peças com as medidas definidas para representar um triângulo retângulo, bem como uma peça circular. Para garantir a precisão dos cortes, foi utilizado um esquadro durante a marcação das medidas, assegurando que todas as peças apresentassem cortes retos e ângulos corretos. Após o corte, foi realizado o acabamento das bordas com uma lixa própria para o material, removendo possíveis rebarbas e deixando o toque mais suave para facilitar o manuseio.

Em seguida, foi utilizada uma base de MDF de 6 mm de espessura, de tamanho idêntico a peça circular de vidro. Este foi afixado de forma paralela à peça de vidro, na qual foi montado um sólido tendo por base as áreas discutidas no teorema de Pitágoras, respeitamos as medidas estabelecidas, com catetos de 12 cm e 16 cm, e hipotenusa de 20 cm. As peças de vidro foram posicionadas sobre o triângulo desenhado, de forma que cada uma representasse um dos lados do triângulo. Em seguida, foi realizada a fixação das peças utilizando cola de silicone transparente, garantindo firmeza e estabilidade na estrutura. Após a colagem, respeitamos o tempo de secagem recomendado, garantindo que todas as peças estivessem bem aderidas à base.

Nas etapas finais de produção, foi realizada a vedação das bordas internas das peças, reservando uma peça como entrada do líquido. Na sequência, foi inserido água colorida em azul e por fim fechou o produto possibilitando realizar a demonstração de transferência do líquido entre os compartimentos (ver Figura 25).

Figura 25: Extensão do Teorema de Pitágoras para volume.



Fonte: Autora (2025).

Com o produto educacional pronto, o próximo passo da metodologia foi investigar as impressões de professores efetivos da rede municipal de ensino de Caetité e de professores em formação inicial sobre o produto educacional.

3.3. PRODUÇÃO DE DADOS

Os produtos educacionais são essenciais no ensino da matemática visto que tornam o conteúdo mais acessível e atraente. Além disso, esses recursos favorecem a construção do conhecimento de maneira ativa, permitindo que os alunos visualizem e experimentem o conteúdo de forma concreta. Sendo assim, a visualização e manipulação no ensino do teorema de Pitágoras e suas extensões auxilia no desenvolvimento do raciocínio e de resolução de problemas, de forma mais significativa.

Para analisarmos os possíveis efeitos da inserção do produto educacional construído no contexto de ensino de matemática, produzimos dados a partir da interação com três professores de matemática que atuam nos anos finais do Ensino Fundamental da rede municipal de Caetité e 2 graduandos de matemática em formação inicial pelo curso de Licenciatura em Matemática da UNEB, *Campus VI*.

O momento contou com duas etapas. Primeiro, ocorreu um encontro com todos. Numa sala de aula da UNEB, explicamos que a abordagem se tratava de uma produção de dados para o desenvolvimento de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e fizemos a exposição do produto Educacional, acompanhado da sua justificativa algébrica na lousa. Todos visualizaram o recurso sendo utilizado para na segunda etapa expressar suas percepções e análise por meio de um questionário contendo questões discursivas (no anexo). De acordo Marconi e Lakatos (2011)

Questionário é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador. [...] Junto com o questionário deve-se enviar uma nota ou carta explicando a natureza da pesquisa, sua importância e a necessidade de obter respostas, tentando despertar o interesse do recebedor, no sentido de que ele preencha e devolva o questionário dentro de um prazo razoável (Marconi; Lakatos, 2011).

O questionário foi pensado com o intuito de entender se os professores têm acesso a materiais que realmente ajudem no ensino do teorema de Pitágoras e, também, para conhecer melhor as formas que eles usam para trabalhar esse conteúdo com seus alunos. A partir disso, foi possível comparar as práticas que já acontecem nas escolas com as propostas do nosso produto educacional, mostrando como ele pode ser mais uma opção prática e eficiente para ser usada no ensino.

Escolhemos o questionário como forma de produzir os dados pois acreditamos que esse formato deixaria os professores à vontade para responder, permitindo que compartilhassem suas experiências de maneira tranquila e sincera.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A discussão e análise que serão apresentadas neste capítulo trata de dados construídos a partir dos parâmetros: os participantes serem professores efetivos de matemática da educação básica e graduandos em matemática, de maneira que possam expor suas opiniões sobre o produto educacional apresentado.

Sendo assim, os resultados obtidos serão expostos através de um questionário realizado com três professores e 2 graduandos de matemática. Para manter a discrição, identificaremos os participantes por G1, G2, P1, P2 e P3. Através dos resultados analisados e discutidos, deseja-se que contribuam no direcionamento de decisões na busca por abordagens práticas de ensino, construindo um aprendizado mais significativo.

O questionário visa investigar o ponto de vista dos professores e graduandos de matemática a respeito da utilização de materiais manipuláveis no ensino das extensões do Teorema de Pitágoras, além de analisar as metodologias de ensino, vantagens e desvantagens do produto educacional apresentado.

Segundo a fundamentação teórica (por exemplo, Passos, 2006; Gomes, 2016; Lorenzato, 2010; Camacho, 2012; dentre outros), o uso de materiais manipuláveis para o ensino de conteúdos matemáticos é produtivo e enriquecedor, possibilitando uma aprendizagem significativa e compreensível. Nessa perspectiva, perguntamos se nas escolas onde os participantes trabalham há algum material concreto e manipulável que os professores consideravam eficaz para o ensino do teorema de Pitágoras e suas extensões. Incluímos a pergunta, solicitando uma descrição do material, caso existisse.

Os cinco participantes responderam que não há material didático concreto e manipulável direcionado para o ensino do teorema de Pitágoras e suas extensões. Porém, o participante P3, deixou perceptível a sua criatividade docente, após responder a segunda pergunta, que diz sobre que metodologia (recursos, estratégias) utiliza para ensinar o Teorema de Pitágoras para a relação da soma de volume:

Até então não relacionava o teorema com volume e sim só com área. Mas uma estratégia é trabalhar em grupo para demonstração prática do teorema, o que de certa forma trabalha volume também; os recursos são: papelão, cola, tesoura, régua, grãos de feijão e arroz, areia, etc (Participante P3).

O participante P3 demonstrou uma abordagem estratégica muito similar àquela proposta pelo produto educacional, diferenciando apenas nos materiais empregados. Essa distinção impacta positivamente o custo-benefício da construção, democratizando o uso dessa estratégia e tornando-a acessível a qualquer aluno. Diante do relato do participante

P3, pode-se demonstrar o teorema, através da construção de um material de papelão. Nele, coloca-se grãos de feijão, arroz ou areia. Neste contexto, Santos, Oliveira e Oliveira (2013) consideram que ao incluir o uso desses materiais concretos e manipuláveis, o ensino pode se tornar inovador, proporcionando aos alunos a oportunidade de serem agentes ativos na construção da matemática.

Diante da mesma pergunta, sobre que metodologia (recursos, estratégias) utiliza para ensinar o teorema de Pitágoras para a relação da soma de volume, o participante G1 relatou que:

Utilizamos dinâmicas e revisões sobre o assunto para ensinar esse assunto de forma prática (Participante G1).

O participante G1, não especificou as dinâmicas utilizadas, o que segue a mesma linha de raciocínio do participante G2, que relatou sobre a mesma pergunta que:

Para ensinar extensões do teorema de Pitágoras, utilizo formas lúdicas. Mas nunca pensei em fazer um material que ajudasse os alunos enxergar melhor o assunto do teorema (Participante G2).

Os participantes G1 e G2 relataram que utilizam dinâmicas e formas lúdicas no ensino do teorema de Pitágoras para a relação da soma de volume. Os demais participantes (P1 e P2) relataram que não utilizam o método de extensão do Teorema de Pitágoras.

Diante dos expostos, há participantes que tentam desenvolver metodologias criativas, mesmo sem material construído com finalidades didáticas, outros que mantêm metodologias mais convencionais. Quais as impressões desses profissionais sobre o produto educacional apresentado? Após apresentar o produto educacional e inquirir sobre vantagens e/ou desvantagens para o ensino do teorema de Pitágoras para a relação da soma de volume., analisaremos os relatos dos participantes.

O participante G1 relatou:

Vantagens: uma forma bem mais prática, que provavelmente chamará a atenção do aluno e com isso será uma forma interessante de se trabalhar esse assunto na sala de aula.

Desvantagens: Não percebi nenhuma para poder relatar (Participante G1).

O participante G1 aponta que o produto educacional chamará a atenção do aluno, sendo uma forma interessante de trabalhar na sala de aula, ao tempo que aponta não haver desvantagem alguma. Convergindo ao participante G1 o participante G2 expressou:

Não vejo desvantagens, pois a ideia de “mostrar” fortalece a explicação. Trazer essa ideia enriquece o conhecimento do aluno apesar que trabalhar mais a ideia das áreas poderia trazer também a questão de volume (Participante G2).

O participante G2 destaca a importância dos alunos visualizarem e manusearem o produto educacional, fortalecendo a explicação do conteúdo. Evidencia que essa estratégia, enriquece o conhecimento dos alunos. E também aponta que não há desvantagem.

Mantém-se a convergência das impressões também pelo participante P1, que relatou:

O produto educacional apresentado é muito interessante porque une a teoria com a prática. O teorema pode ser aplicado também para relação da soma de volume (Participante P1).

O participante P1 evidencia que é interessante a aplicação do produto educacional, pois une a teoria a prática. Além disso, reforça que o teorema também é aplicado para a relação da soma de volume. No tocante as desvantagens, nenhuma foi enunciada. O relato do participante P1 coincide com o do participante P2, que expressou:

Interessante (Participante P2).

Para o participante P3,

As vantagens são de que torna o conteúdo/aula mais atrativo e interessante a aula, causa curiosidade ao aluno e conseqüentemente faz com que os alunos tenham uma aprendizagem significativa. É importante contextualizar com temas do cotidiano (escadas, construção civil, etc). Não vejo desvantagens (Participante P3).

O participante P3 também evidencia que o produto educacional é interessante para aula, pois atrai os alunos tornando a aprendizagem significativa. Pontua a importância da contextualização de temas do cotidiano. Essa abordagem do participante P3 se fundamenta em Santos (2019) que destaca que para além da compreensão matemática, o Teorema de Pitágoras está presente na vida prática do homem e sendo utilizado para cálculos no cotidiano, como construções de casa. No tocante as desvantagens, nenhuma foi enunciada.

Pelo exposto, todos participantes convergem nas impressões das vantagens apresentadas pelo produto analisado. É um produto educacional que visa potencializar o ensino e aprendizagem do teorema de Pitágoras e suas extensões. Sendo assim, é notável que a utilização desse produto traz benefícios para o ensino, ajudando na compreensão dos alunos, ao demonstrar o conteúdo no material concreto.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal desse trabalho foi construir e apresentar um produto educacional que proporcionasse uma abordagem prática do Teorema de Pitágoras e suas extensões, analisando opiniões sobre a sua utilização no ensino por professores e graduandos. E durante o desenvolvimento de todo esse processo ficou evidente a importância da busca de novas estratégias de ensino.

Diante das impressões dos professores e graduandos, percebemos que ao inserir um material manipulável e concreto, as dificuldades de aprendizagem dos alunos podem ser diminuídas, tornando o ensino significativo. Através da análise dos dados obtidos pelo questionário realizado, detectamos que o uso do produto educacional apresentado potencializa o ensino e a aprendizagem do Teorema de Pitágoras e suas extensões.

Buscando superar as aulas mecanizadas, acreditamos que o uso desse produto juntamente com estratégias desenvolvidas pelos professores, favorecem uma abordagem em que o Teorema de Pitágoras e suas extensões possa ser aplicado em sala de aula, tornando o ensino mais dinâmico e ajudando os alunos a criarem sentido sobre o conteúdo. Esse trabalho visa justamente na ideia de facilitar a aprendizagem do aluno, através do produto educacional apresentado.

Diante do exposto, podemos perceber que a visualização e manipulação, possibilitam uma melhor compreensão por parte do aluno, favorecendo uma abordagem prática construtiva e significativa do Teorema de Pitágoras e suas extensões. Além disso, o uso desse produto educacional pode favorecer significativamente na aplicação do conteúdo, pois a teoria aliada a prática aproxima aluno e conteúdo, reciprocamente.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, Anésio Amâncio de. **Teorema de Pitágoras: histórias, demonstrações e aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, 2016.
- BARBOSA, R. M. **Descobrendo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos**. São Paulo: Atual, 1993. 93p.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 496p.
- CAMACHO, Mariana Sofia Fernandes Pereira. **Materiais manipuláveis no processo ensino/aprendizagem da matemática: aprender explorando e construindo**. Relatório de Estágio de Mestrado – Universidade da Madeira. Funchal: Portugal, 2012.
Disponível em: <https://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/373/1/MestradoMarianaCamacho.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2025.
- COPELLO, G *et al.* Material concreto – uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos. In: **NOVELLO** (Org.). IX Congresso Nacional de Educação – EDUDERE. Brasil, São Paulo: Autêntica, 2009. p. 1-10.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. 843p.
- EVES, Howard. **Uma introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação matemática: representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
- GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- GOMES, Cássia Priscila Vicente de Lima. **O lúdico e o material manipulável: reflexões para o ensino de matemática nas séries iniciais**. Natal, 2016.
- KRAMERS, F. **Pitágoras de Samos e o Teorema de Pitágoras**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.
- LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Coleção do Professor de Matemática – SBM, 2004.
- LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition**. Classics in Mathematics Education Series. National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1968. 310p.

LORENZATO, Sérgio Aparecido. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LOURENÇO, M. L.; SILVA, E. A. **Generalizações e extensões do Teorema de Pitágoras**. São José do Rio Preto: Unesp, 1992.

MACENA, C. M. **Pitágoras: uma abordagem histórica para o ensino de matemática na escola**. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, 2022.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. de L. **Didática da matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no concreto**. Revista de Educação Matemática. SBEM. Ano 9, n. 9-10 (2004-2005), p. 1-6.

NOVODOVOSKI, A.; STASCOVIAN, J. **Além do teorema: uma visão da vida e obra de Pitágoras de Samos**. 2015. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4406341/mod_resource/content/1/vida_pitagoras.pdf. Acesso em: 4 abr. 2025.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recurso didático na formação de professores. In: LORENZATO, S. (Ed.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. 348f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2000.

RIBEIRO, V. V. S. M. **Revisitando o Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, 2013.

SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, C. R.; OLIVEIRA, G. S. de. Material concreto: uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos nas séries iniciais do ensino fundamental. **Itinerarius Reflectionis**, Goiânia, v. 9, n. 1, 2013.


SANTOS, Mario I. dos. **Pitágoras e o teorema do mundo**. Ibrasa, 2000.

SANTOS, R. P. **Teorema de Pitágoras, demonstrações e aplicações no cotidiano**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Abaetetuba-PA, 2019.

SILVA, J. E. B.; FANTI, E. L. C.; PEDROSO, H. A. Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, p. 21-47, jul. 2016. DOI: 10.21167/cqdvol6201623169664jebseicfhap2147. Disponível em: <http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp>.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e áreas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

	Universidade do Estado da Bahia - UNEB Departamento de Ciências Humanas - DCH, Campus VI Trabalho de Conclusão de Curso Curso: Licenciatura Plena em Matemática Discente: Ana Cristina dos Santos Silva
---	---

Este questionário faz parte de TCC III (Trabalho de Conclusão de Curso) da Graduação em Matemática, da Universidade do Estado da Bahia-UNEB-Campus VI-Caetité-Ba. Os dados produzidos serão utilizados para o desenvolvimento da monografia.

Agradeço a sua contribuição.

1) Na escola que você trabalha há algum material concreto e manipulável que você considera eficaz para o ensino do teorema de Pitágoras e suas extensões? Se sim, faça uma descrição do material.

2) Que metodologia (recursos, estratégias) você utiliza para ensinar o Teorema de Pitágoras para a relação da soma de volume?

3) Quais as vantagens e desvantagens que você vê no produto educacional apresentado para o ensino e aprendizagem do conteúdo Teorema de Pitágoras para a relação da soma de volume?