UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA - UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA - DCET II
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO II

GABRIEL VINÍCIUS DA SILVA PITTA

FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU: EXPLORANDO APLICAÇÃO DO CONCEITO DO CÁLCULO DA DERIVADA

ALAGOINHAS (BA), 2025

GABRIEL VINÍCIUS DA SILVA PITTA

FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU: EXPLORANDO APLICAÇÃO DO CONCEITO DO CÁLCULO DA DERIVADA

Monografia apresentada à banca examinadora do Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade do Estado da Bahia – Campus II, Alagoinhas, em cumprimento das exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Me Gustavo Pereira Nascimento.

ALAGOINHAS (BA), 2025

GABRIEL VINÍCIUS DA SILVA PITTA

FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU: EXPLORANDO APLICAÇÃO DO CONCEITO DO CÁLCULO DA DERIVADA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade do Estado da Bahia – UNEB para a obtenção do título parcial de Licenciado em Matemática.

Alagoinhas, 16 de dezembro de 2025

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
GUSTAVO PEREIRA NASCIMENTO
Data: 30/01/2026 12:06:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me Gustavo Pereira Nascimento – Orientador
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

Documento assinado digitalmente
MARIA ELIANA SANTANA DA CRUZ SILVA
Data: 30/01/2026 17:35:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Drª Maria Eliana Silva
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

Documento assinado digitalmente
GRACE DOREA SANTOS BAQUEIRO
Data: 30/01/2026 15:00:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Drª Grace Dorea Baqueiro
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois sem ele nada seria possível, pelo dom da vida, por iluminar meus caminhos e por me conceder a força, a saúde e a sabedoria necessárias para concluir esta jornada.

Aos meus pais, que sempre me instruíram para seguir o melhor caminho, pelo esforço dedicado em garantir as melhores oportunidades de formação, e sempre me incentivaram para poder estudar.

Aos meus familiares e amigos, agradeço a compreensão e o afeto dedicados, especialmente durante os períodos de maior dedicação a este estudo. O apoio moral e a crença no meu potencial foram incentivos valiosos para a concretização.

Aos colegas e amigos de jornada da UNEB, agradeço pelo companheirismo, pela troca de conhecimentos, pelo apoio e pelos momentos de descontração que aliviaram a pressão da vida acadêmica. Em especial, dedico esta conquista à turma de 2022.1, por terem partilhado comigo esta experiência de forma tão significativa.

A minha namorada e parceira Eduarda Correia, dedico este agradecimento pela compreensão e afeto dispensados. A sua motivação contínua e o suporte oferecido, especialmente nos períodos de maior dedicação e pressão acadêmica, foram fundamentais para a conclusão bem-sucedida deste trabalho.

Ao meu melhor amigo e irmão, Antonio Lucas, por ter me orientado a dar o pontapé inicial que fez que eu pudesse iniciar o curso de Licenciatura em Matemática e sempre me incentivou a continuar.

A todos os docentes que participaram da minha formação, sou grato por transmitirem não apenas os vastos conhecimentos da área e a excelência da docência, mas também por oferecerem valiosas lições de vida. Agradeço pelo apoio, carinho e confiança depositados em minha trajetória e, especialmente, pelos momentos de leveza e descontração que tornaram esta jornada mais agradável e humana.

Em especial, agradeço às professoras doutoras Maria de Fátima Costa Leal, Maridete Brito Cunha Ferreira, Grace Dórea Santos Baqueiro e Maria Eliana Cruz Silva, que eu carinhosamente chamo de “quarteto fantástico”. Para mim, elas são a base do curso de Lic. em Matemática na UNEB Campus II.

Ao Prof. Me Gustavo Pereira Nascimento, meu orientador, agradeço pela generosa aceitação do desafio de me orientar, pela sua paciência, pela orientação

imprescindível ao longo de todo o processo e, sobretudo, pela confiança e crença depositadas em meu potencial e na relevância deste trabalho. Sua contribuição foi determinante para a concretização desta pesquisa.

"A matemática é a linguagem com a qual Deus escreveu o universo"

Galileu Galilei

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

RESUMO

Este trabalho discute a aplicação do cálculo da derivada no estudo da função polinomial do segundo grau no Ensino Médio, ao defender a viabilidade pedagógica de introduzir noções intuitivas de Cálculo Diferencial ainda na educação básica. A partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destaca-se que conceitos como variação, regularidade, modelagem e análise de fenômenos podem ser aprofundados quando se exploram ideias fundamentais de derivada, especialmente no estudo da taxa de variação e na identificação de máximos e mínimos. O trabalho revisita elementos históricos da presença do cálculo no currículo brasileiro e apresenta fundamentação teórica sobre funções quadráticas, derivadas e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, que orienta a metodologia adotada. Utilizando pressupostos da Engenharia Didática, o estudo proposto elaborou e analisou uma sequência à luz da engenharia didática, quando propôs questões contextualizadas do Ensino Médio nas quais o cálculo diferencial é empregado como ferramenta para interpretar problemas, otimizar resultados e justificar propriedades conhecidas da função quadrática, como o vértice e o comportamento gráfico. Os estudos teóricos propostos apontam que, a derivada pode atuar como ponte conceitual entre a álgebra escolar e a análise matemática, favorecendo interpretações mais profundas sobre concavidade, crescimento, decrescimento e pontos extremos. Conclui-se que a abordagem intuitiva da derivada, quando apoiada em situações significativas, tem potencial para enriquecer a compreensão matemática dos estudantes, aproximando teoria e prática e auxiliando a superar lacunas observadas na transição para o ensino superior.

Palavras-chave: Função polinomial do segundo grau; Derivada; Cálculo diferencial; Ensino Médio; Engenharia Didática.

ABSTRACT

This work discusses the application of derivative calculus in the study of the second-degree polynomial function in High School, advocating for the pedagogical viability of introducing intuitive notions of Differential Calculus early in basic education. Drawing upon the Common National Curricular Base (BNCC), it is highlighted that concepts such as variation, regularity, modeling, and the analysis of phenomena can be deepened when fundamental ideas of the derivative are explored, especially in the study of the rate of change and the identification of maximums and minimums. The work revisits historical elements concerning the presence of calculus in the Brazilian curriculum and presents a theoretical foundation on quadratic functions, derivatives, and Brousseau's Theory of Didactic Situations, which guides the adopted methodology. Utilizing the assumptions of Didactic Engineering, the proposed study designed and analyzed a sequence in light of didactic engineering, proposing contextualized High School problems where differential calculus is employed as a tool to interpret problems, optimize results, and justify known properties of the quadratic function, such as the vertex and graphical behavior. The proposed theoretical studies indicate that the derivative can act as a conceptual bridge between school algebra and mathematical analysis, favoring deeper interpretations of concavity, growth, decrease, and extreme points. It is concluded that the intuitive approach to the derivative, when supported by meaningful situations, has the potential to enrich students' mathematical understanding, bridging theory and practice and helping to overcome gaps observed in the transition to higher education.

Keywords: Quadratic function; Derivative; Differential calculus; High school mathematics; Didactical Engineering.

1. INTRODUÇÃO

A Matemática, em seus diversos eixos temáticos, pode contribuir para a compreensão do mundo. No cenário brasileiro, essa relevância assume um caráter estratégico para a promoção da cidadania e a redução de desigualdades educacionais, sendo a disciplina um pilar central na formação básica. Para nortear esse processo em nível nacional, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece competências fundamentais que visam garantir uma formação matemática integral, definindo o que todos os alunos devem aprender independentemente da região em que se encontram.

Organizada nos fundamentos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), revela-se como uma linguagem essencial para compreender e interagir com o espaço. O eixo **Números** busca desenvolver o pensamento numérico, fundamental para interpretar fenômenos do cotidiano. Nele, os estudantes podem aprender a lidar com diferentes conjuntos numéricos e operações, construindo noções de proporcionalidade, equivalência e ordem. Esse processo pode ampliar a capacidade de argumentação e análise em situações práticas. Além disso, tem potencial de favorecer a educação financeira por meio do estudo de porcentagem, juros e inflação.

A **Álgebra**, visa desenvolver o pensamento algébrico, essencial para analisar relações quantitativas e construir modelos que descrevem fenômenos do cotidiano. Ao identificar padrões, generalizar propriedades e transitar entre representações numéricas, gráficas e simbólicas, o aluno é capaz de compreender interdependência e variação de grandezas. Essa habilidade permite interpretar situações como crescimento populacional, variação de preços ou movimento de corpos. Além disso, a álgebra aproxima a matemática do pensamento computacional, com algoritmos e fluxogramas, oferecendo ferramentas para interpretar a realidade e propor soluções práticas.

A **Geometria** estuda formas, posições e relações no espaço, desenvolvendo o pensamento geométrico essencial para compreender o mundo físico e fenômenos cotidianos. Ao explorar figuras planas e espaciais, simetrias, congruência e semelhança, os alunos são capazes de aprenderem a argumentar, construir e analisar relações entre elementos geométricos. Essa compreensão permite interpretar e representar situações do cotidiano, como medições, construções e trajetórias. Assim, a geometria oferece ferramentas para resolver problemas concretos e interpretar o espaço e suas relações.

Já o eixo de **Grandezas e Medidas** permite compreender o mundo ao estudar relações métricas e quantificar grandezas do cotidiano e da natureza. Ao medir comprimento, massa, tempo, área e volume, os alunos são passíveis de aprender a interpretar fenômenos físicos, econômicos e sociais. Esse eixo favorece a aplicação de álgebra e geometria, o desenvolvimento do pensamento crítico e a resolução de problemas concretos, como consumo responsável, escalas cartográficas e análise de densidade, ampliando a compreensão do espaço e das interações ao redor.

Por fim, a **Probabilidade e Estatística** permite compreender o mundo ao analisar dados e lidar com incertezas presentes em fenômenos cotidianos, científicos e tecnológicos. Estudando coleta, organização e representação de informações, os alunos são aptos a desenvolverem habilidades para interpretar e comunicar resultados, avaliar riscos e tomar decisões fundamentadas. A compreensão de eventos aleatórios e probabilidade possibilita prever resultados e reconhecer padrões. Esse eixo conecta matemática a contextos reais, como pesquisas sociais, econômicas e ambientais, ampliando a capacidade crítica, a tomada de decisão consciente e a compreensão da realidade.

A BNCC destaca, entre seus princípios, a importância de criar condições para que os estudantes sejam capazes de desenvolver a capacidade de analisar, modelar e interpretar fenômenos por meio da matemática, valorizando noções como variação, constância, regularidade e relação entre grandezas.

Nesse contexto, a introdução de ideias fundamentais do cálculo diferencial no ensino médio pode potencializar essas competências, promovendo uma compreensão mais profunda sobre as mudanças e os comportamentos das funções. Ao explorar noções como taxa de variação e crescimento de grandezas, o aluno amplia sua habilidade de observar padrões, fazer previsões e compreender processos naturais e sociais, aproximando o aprendizado matemático de situações reais e interdisciplinares. Assim, a riqueza conceitual proposta pela BNCC encontra no cálculo um campo fértil para a formação de um pensamento crítico, investigativo e aplicado à realidade.

Nessa perspectiva o cálculo diferencial, frequentemente associado ao ensino superior, tem grande potencial para ser explorado na educação básica. Para Ávila (1991), esse conteúdo deveria ser inserido ainda na 1ª série do ensino médio com um breve conceito de função, pois é nessa fase da escolaridade que os alunos estudam funções (afim, quadrática, exponencial, logarítmica e modular). Embora temas como limites e derivadas sejam tradicionalmente introduzidos em cursos de nível superior, sua aplicação em questões do ensino médio, especialmente em problemas de otimização e taxas de variação, tem potencial de enriquecer a formação dos estudantes, tornando o aprendizado com mais sentido, relacionado ao contexto social.

Apesar de seu potencial, a proposta de inserção do cálculo no ensino médio ainda encontra diversos desafios. Segundo Reis (2001), muitos alunos ainda não possuem a base conceitual necessária, como o domínio de funções e álgebra, para entender esses conceitos de maneira eficaz. Além disso, muitas vezes esses conteúdos são apresentados de forma prática, mas sem a devida base teórica, o que compromete a compreensão dos alunos. Com isso levantamos a seguinte questão que norteará o nosso trabalho: De que maneira a implementação de uma sequência didática, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas, pode favorecer a compreensão conceitual e prática da derivada aplicada ao estudo da função quadrática no Ensino Médio?

Ultimamente, diversos pesquisadores têm debatido a inserção de conteúdos introdutórios de cálculo diferencial no ensino médio. Essas discussões buscam refletir sobre a viabilidade e a importância de apresentar noções iniciais desse conteúdo já nessa etapa da educação. A intenção não é trabalhar as definições formais utilizadas no ensino superior, mas sim apresentar conceitos básicos e essenciais que possam contribuir para o desenvolvimento acadêmico e escolar dos estudantes ao final do ensino médio. Nesse âmbito, Junior (2014), enfatiza:

> Não propomos inserir Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio em sua completude e sim ambientar os estudantes a interagirem de modo dinâmico com ideias que têm o intuito de desenvolver aptidões para uma melhor compreensão dos conceitos abordados no estudo dos limites, derivadas e integral. Propomos um estudo livre de formalizações e muito mais prático, algo que fuja das técnicas e priorize a reflexão dos conceitos por parte dos alunos, familiarizando-os com novas simbologias e que desperte a curiosidade nas inúmeras aplicações dessa disciplina (Junior, 2014, p. 2).

Segundo o autor, a proposta de abordagem do cálculo diferencial e integral no ensino médio não exige que os estudantes trabalhem com a definição formal e precisa de derivada, como aquela construída rigorosamente a partir do conceito de limite ou da equação da reta tangente a um ponto de uma curva.

O objetivo, é proporcionar uma experiência de aprendizagem mais intuitiva e dinâmica, na qual os alunos possam explorar os conceitos de variação, crescimento e taxas de mudança de maneira prática e contextualizada, desenvolvendo compreensão profunda sobre o comportamento das funções e sua aplicabilidade em situações reais, sem se prender a formalismos matemáticos complexos. Dessa forma, a disciplina pode se tornar mais acessível e estimulante, despertando a curiosidade natural dos estudantes e aproximando-os do pensamento matemático avançado de forma significativa e envolvente.

Em entrevista ao Blog (2019), o professor Nilson José Machado, da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, apontou diversas falhas no ensino de Cálculo no nível superior. Segundo ele, a melhor forma de enfrentar esse problema seria iniciar o contato com os conceitos fundamentais ainda no ensino médio, utilizando funções simples principalmente as polinomiais para apresentar as ideias centrais do cálculo. Embora a BNCC não estabeleça o ensino de cálculo como obrigatório no ensino médio, ela destaca a importância de trabalhar conceitos, como variação e constância, certeza e incerteza, movimento e posição, além de relações e inter-relações.

Corroboramos com os autores Ronaldo da Silva Busse, UERJ/USS e Flávia dos Santos Soares, IST(FAETEC)/USS que citam que, no campo da matemática, dados de avaliações institucionais como o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), ambos organizados pelo Governo Federal, indicam que muitos estudantes concluem o ensino médio com dificuldades em compreender e aplicar conceitos e procedimentos essenciais, como o uso de números reais, a interpretação de gráficos e tabelas, entre outros.

Essa crise é explicitada nos resultados do SAEB de 2023, que, conforme reportado pela Tribuna de Minas, apontam que apenas 5% dos estudantes que concluíram o ensino médio alcançaram um nível de aprendizado adequado em matemática, um índice crítico mantido em relação ao ano de 2021. O quadro se agrava ao demonstrar que 59% desses estudantes estão classificados no nível "insuficiente" da escala de proficiência na disciplina.

Ao ingressarem no ensino superior, esses estudantes se deparam com a disciplina obrigatória de cálculo diferencial em diversos cursos de múltiplas áreas, que, conforme pesquisas do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), apresenta elevados índices de reprovação.

Desse modo, a escolha do objeto para a investigação emergiu a partir de experiências e vivências desenvolvidas no componente curricular da área de cálculo no curso de Licenciatura em Matemática da UNEB, campus II de Alagoinhas. Durante o curso, despertou o interesse e apreço pelo conteúdo, obtendo bom desempenho acadêmico, onde atuei como monitor voluntário de Cálculo II, componente que possui a proposta de estudar integrais de funções de uma variável. Esse processo despertou a curiosidade sobre maneiras de aproximar os conceitos de cálculo para o ensino básico, considerando que tais conteúdos já foram abordados no contexto da educação básica, em particular no terceiro ano do ensino médio.

Desse modo, a possibilidade de integrar conceitos de cálculo ao ensino da função polinomial do segundo grau pode ser capaz de oferecer uma riqueza de experiências matemáticas que vai além da mera resolução de exercícios. Mesmo que a derivada seja formalmente estudada no ensino superior, o professor pode utilizá-la como ferramenta visual e intuitiva para explorar comportamentos de funções, como crescimento, decrescimento, concavidade e pontos de inflexão, proporcionando aos alunos a percepção de padrões e regularidades.

Essa abordagem tem condições de permitir que conceitos abstratos sejam compreendidos por meio de representações gráficas, simulações e experimentações, podendo tornar a matemática mais concreta e próxima da realidade do estudante. Além disso, essa prática pode estimular a curiosidade, promover o pensamento crítico e a capacidade de argumentação.

Ao explorar visualmente as relações entre coeficientes, raízes e vértice de uma parábola, os alunos podem passar a enxergar a função como um objeto que modela fenômenos e situações do cotidiano, conectando o estudo acadêmico a experiências práticas e estimulando a reflexão sobre a aplicabilidade do conhecimento matemático em diferentes contextos.

Este trabalho tem como objetivo geral, analisar as contribuições de uma sequência didática voltada ao estudo da derivada na função polinomial do segundo grau, avaliando seu potencial para a resolução de problemas de otimização no Ensino Médio. Especificamente, discutir o conceito do cálculo da derivada. Mostrar a aplicação de métodos e técnicas em resolução de questões. Mostrar a aplicação de métodos e técnicas em situações problemas.

No segundo capítulo, apresenta a fundamentação teórica que sustenta esta pesquisa. A literatura confirma a eficácia de uma abordagem contextualizada e interdisciplinar, especialmente com a física. A fundamentação teórica é estruturada em três pilares, a revisão detalhada da função quadrática, a introdução do conceito de derivada, e o referencial pedagógico da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de

Brousseau. A TSD guiará a metodologia, focando na construção de situações adidáticas para que os alunos produzam e, posteriormente, formalizem o conhecimento da derivada como uma necessidade lógica de otimização.

No terceiro capítulo, apresentamos a aplicação da derivada no estudo da função polinomial do segundo grau, destacando como o cálculo diferencial pode enriquecer a compreensão de problemas típicos do ensino médio. A partir de questões contextualizadas, mostra-se que máximos, mínimos e taxas de variação podem ser determinados por meio da análise da reta tangente, cujo coeficiente angular é dado pela derivada. A justificativa para derivar e igualar a zero é desenvolvida de forma conceitual, relacionando a inclinação nula ao vértice da parábola. Assim, o capítulo evidencia a relevância pedagógica e prática do cálculo na resolução de situações reais.

Nas considerações finais, trazemos elementos que justificam a reinserção da derivada no ensino médio como uma possibilidade na resolução de problemas, de modo a enriquecer a compreensão da função quadrática. O estudo, pautado em pressupostos da Engenharia Didática (Análise *A Priori*), demonstrou que a derivada pode atuar como um recurso intuitivo para interpretar a taxa de variação, o comportamento gráfico e a otimização em problemas reais (máximos e mínimos), alinhando-se à BNCC. Essa abordagem não visa antecipar o formalismo universitário, mas sim promover um salto qualitativo na leitura crítica de fenômenos e na modelagem matemática. A derivada atua como uma ponte conceitual entre álgebra e análise, preparando o estudante e mitigando lacunas na transição para o ensino superior.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apontamos caminhos para a viabilidade e pertinência da introdução da derivada no ensino médio, visando superar a lacuna para o ensino superior, como evidenciado pelo histórico curricular e altos índices de reprovação em cálculo. O arcabouço teórico se estrutura em três pilares, a função quadrática, a derivada, apresentada de forma intuitiva como a ferramenta de taxa de variação instantânea, o estudo para extremos e a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau.

A presente pesquisa aborda a viabilidade e pertinência da inserção do cálculo diferencial no ensino médio, visando superar a lacuna formativa que dificulta a transição dos alunos para o ensino superior (Silva, 2024). Historicamente presente no currículo (Carvalho, 1996), o Cálculo hoje é defendido pela literatura como uma ferramenta essencial para a fundamentação conceitual, a aplicação prática e a interdisciplinaridade com a física (Ávila, 1991; Busse e Soares, 2007). Experiências demonstram que a abordagem intuitiva e contextualizada é eficaz (Pereira *et al.*, 2018).

Este capítulo estabelece a teoria necessária para a proposta metodológica, função quadrática, revisão de sua estrutura e propriedades (Iezzi e Murakami, 2013). Derivada, apresentação como ferramenta de fundamentação para o rigor dos conceitos de máximo e mínimo (Flemming e Gonçalves, 2006). Teoria das Situações Didáticas, referencial de Brousseau (2008) que guiará a construção das atividades, focando na institucionalização do conhecimento da derivada como necessidade lógica para a otimização.

A discussão sobre a inserção do cálculo diferencial no ensino médio tem ganhado espaço nos últimos anos, especialmente em função das lacunas observadas na transição dos estudantes para o ensino superior. Silva (2024) aponta que a falta de contato prévio com temas como limites e derivadas durante o ensino médio está entre os fatores que mais contribuem para as dificuldades enfrentadas por estudantes nos cursos universitários da área de exatas. Consoante a Faria e Godoy (2012)

> Estreitar as relações entre as disciplinas do ciclo básico e profissionalizante, pode ser uma forma de motivar a apreensão dos conhecimentos, que muitas vezes podem parecer supérfluos e sem aplicações para o seu desenvolvimento do curso e na carreira profissional (Faria; Godoy, 2012, p. 125).

Diversas experiências descritas na literatura mostram que a introdução do Cálculo de forma contextualizada, mesmo que sem o rigor formal exigido no ensino superior, pode ser bastante eficaz. Pereira et al. (2018), por exemplo, desenvolveram uma proposta didática aplicada em Institutos Federais que demonstrou resultados positivos na compreensão de conceitos matemáticos e físicos por parte dos alunos. Através de atividades exploratórias, esses estudantes conseguiram aplicar noções de derivadas e integrais a problemas do cotidiano, o que favoreceu o desempenho acadêmico e o engajamento em sala de aula.

Essa perspectiva é reforçada por Molon e Figueiredo (2015), que argumentam que o uso de softwares como o GeoGebra é uma alternativa viável para tornar conceitos abstratos mais acessíveis. Eles demonstram que a visualização gráfica de funções e taxas de variação pode facilitar a compreensão de temas como máximos, mínimos e áreas sob curvas aspectos fundamentais do cálculo aproximando a matemática da experiência concreta dos alunos.

Do ponto de vista histórico, o cálculo já esteve presente no currículo do ensino médio brasileiro, como nas reformas de 1891 e 1942, conforme apontam Hauenstein e Porto (2022). A exclusão posterior desses conteúdos não foi acompanhada por uma reformulação adequada que atendesse às demandas contemporâneas do mundo acadêmico e do mercado de trabalho, que cada vez mais exigem conhecimentos de modelagem matemática.

Nesse sentido, Freitas (2020) defende que a aprendizagem do cálculo no ensino médio deve priorizar a compreensão conceitual e a aplicação prática, o que exige uma abordagem didática flexível e significativa. Rocha (2018), por sua vez, reforça a importância do uso de gráficos e simulações para trabalhar conteúdos como o estudo de funções e interpretação de fenômenos, o que pode servir como ponte para o desenvolvimento da intuição matemática dos estudantes.

Portanto, a literatura aponta para um consenso, a introdução do cálculo no ensino médio tem potencial para ocorrer de forma gradual, contextualizada e exploratória, visando a construção de significados e a superação das dificuldades históricas que os alunos enfrentam ao ingressar no ensino superior. Busse e Soares (2007) concordam que o ensino da derivada na educação básica é transitável, confirmando que:

> A introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Na Física, por exemplo, ela tem inúmeras utilidades na introdução de conceitos como pressão, densidade da massa, densidade de carga elétrica etc. Sendo assim, o Cálculo Diferencial e Integral é ferramenta necessária para a compreensão da Física e a falta desse tópico no Ensino Médio torna para o aluno a Física mais difícil do que realmente parece ser. Exemplo disso é o ensino da mecânica newtoniana, ensinado no Ensino Médio que nasceu junto com o Cálculo e fica incoerente sem ele. (Busse; Soares, p. 2)

No Brasil, conforme aponta Carvalho (1996), a introdução ao cálculo diferencial e integral já esteve presente no currículo do ensino médio em dois momentos históricos, o primeiro em 1891, com a reforma educacional conduzida por Benjamim Constant no início da República, e o segundo em 1942, durante o governo de Getúlio Vargas, com a Reforma Capanema, permanecendo oficialmente no currículo até 1961.

A reforma conduzida por Benjamin Constant, inspirada nos princípios de Augusto Comte, promoveu uma reorganização da educação brasileira ao substituir o modelo clássico, baseado na formação literária, por uma proposta voltada à formação científica. Essa mudança alterou de maneira significativa as prioridades e os objetivos centrais da educação no país (Silva, 2016).

Apesar de ter estado em vigor por alguns anos, a reforma de Benjamin Constant não trouxe transformações significativas para o ensino de matemática no Brasil, uma vez que o número de instituições de ensino secundário ainda era bastante limitado no país. No Colégio Pedro II, por exemplo, os conteúdos de cálculo permaneceram no currículo entre 1889 e 1899, sendo eliminados em 1900 e posteriormente reinseridos apenas em 1929 (Carvalho, 1996).

A Reforma Francisco Campos, realizada em 1931, é reconhecida como a primeira tentativa de organizar e padronizar o ensino secundário em âmbito nacional. Nessa proposta, os conteúdos ligados à matemática foram reunidos sob a disciplina de matemática, que passou a ter um programa próprio. O ensino foi estruturado em áreas de conhecimento compostas por diferentes conteúdos inter-relacionados, incluindo uma dedicada à introdução do conceito de função e às noções de Cálculo Infinitesimal. Entretanto, as mudanças propostas geraram resistência entre os professores, que não possuíam formação adequada para lidar com a nova estrutura de ensino. Somado a isso, muitas escolas não estavam preparadas para acompanhar tais transformações, já que não dispunham de materiais didáticos apropriados para apoiar os estudos (Soares, 2004).

Atualmente, embora alguns livros didáticos do ensino médio incluam tópicos relacionados ao cálculo diferencial como limite e derivada, esses conteúdos raramente são abordados em sala de aula. Costumam ser deixados de lado sob o argumento de que são complexos demais para esse nível de ensino, sendo considerados apropriados apenas para o ensino superior. Dessa forma, o cálculo aparece nos materiais didáticos, mas não é efetivamente contemplado no currículo do ensino médio. Ávila (1991) resume a história do ensino de cálculo no Brasil:

> [...]fazia parte do programa da 3ª série do chamado curso científico o ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como polinômio de Taylor. Isso desde 1943, quando foi instituída uma reforma do ensino secundário que ficou conhecida pelo nome do ministro na época, o sr. Gustavo Capanema. Mas mesmo antes da reforma Capanema, quando o que hoje chamamos de 5ª à 8ªsérie mais o segundo grau era o curso ginasial de 5 anos, seguidos por dois anos de pré-universitários, já o Cálculo fazia parte do programa no pré das escolas de engenharia. (Ávila, 1991, p.1)

Para Geraldo Ávila, muitos professores ainda seguem programas extensos, com conteúdos apresentados de forma fragmentada e sem significado real para os alunos. No caso do ensino de funções, por exemplo, ele observa que se investe muito tempo na introdução de uma nomenclatura ampla, mas com pouca aplicabilidade prática. Para ele, seria mais eficaz utilizar esse tempo na abordagem de noções fundamentais do cálculo e suas aplicações. Assim, o estudo das funções poderia ser realizado de maneira mais contextualizada e integrada, alinhando-se aos princípios propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN 's).

No artigo “Cálculo Diferencial e Integral: Uma introdução ao Ensino Médio”, foi realizada uma pesquisa em um Instituto Federal com a finalidade de analisar um estudo de caso voltado a um projeto de complementação do ensino. O estudo teve como perspectiva a introdução do cálculo diferencial e integral no ensino médio, de maneira intuitiva, com o propósito de favorecer a compreensão de equacionamentos matemáticos, a análise do comportamento de funções, bem como a interpretação de fenômenos físicos e de conteúdos vinculados às disciplinas técnicas do curso profissionalizante.

Constatou-se, ao longo da experiência, que os estudantes do ensino médio possuem condições de assimilar os fundamentos do cálculo, desde que este seja apresentado de forma clara e objetiva, com a devida seleção dos conceitos mais pertinentes ao nível em questão. Grande parte dos estudantes que participaram da pesquisa acredita que o ensino de cálculo pode ser inserido na educação básica, desde que, seja ofertado de forma facultativa.

Dessa maneira, é possível inserir os conceitos de cálculo de forma integrada aos conteúdos já presentes no currículo, promovendo um ensino contextualizado e interdisciplinar. Ávila (1991) afirma que para podermos mostrar ao aluno a importância do conceito de função, temos de ensinar-lhe os conceitos de derivada e integral e para que servem esses conceitos. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, também é mencionado que a proposta defendida por Ávila é viável:

> Se julgar mais apropriado, uma escola poderá iniciar algum trabalho de taxas de variação em Matemática na primeira série, juntamente com as funções; outra escola, por sua vez, pode atribuir a física ou a química o desenvolvimento de taxas no tempo, nas velocidades espaciais e de reação de que fazem uso, adiantando um trabalho que pode ser desenvolvido mais tarde em Matemática de forma mais geral. (PCN+, 2002, p.135)

Duclos (1992) e Ávila (2006) argumentam que integrar os conteúdos tradicionais do ensino médio com tópicos de cálculo pode facilitar o trabalho dos professores, permitindo abordagens mais relevantes e significativas. As aplicações práticas do cálculo têm o potencial de despertar o interesse dos estudantes e incentivar o aprendizado. Por exemplo, o conceito de derivada pode ser conectado ao estudo da cinemática na disciplina de física, evidenciando sua utilidade em um contexto interdisciplinar.

A introdução desses conceitos pode ser acompanhada por aplicações na física, o que pode facilitar a compreensão dessa disciplina, como afirma Duclos (1992, p.28): “A Física é a base da técnica e a Matemática a linguagem da Física”. Para Ávila (2006, p.37), essa afirmação se justifica uma vez que: “o ensino da derivada é da maior importância, pelo tanto que ajuda no tratamento de inúmeras propriedades das funções. E tem de ser feito logo na primeira série, quando pode integrar-se harmoniosamente com a Física no estudo do movimento”. Ávila relata:

> É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea. (Ávila. 1991, p.4)

A fala de Ávila (1991) evidencia a relevância de aproximar o ensino da matemática e da física por meio da introdução da derivada ainda no ensino médio. Quando a noção de derivada é interpretada como velocidade instantânea, o estudo da cinemática torna-se mais natural e intuitivo, evitando explicações artificiais e fragmentadas. Essa abordagem favorece não apenas a compreensão dos fenômenos físicos, mas também fortalece o entendimento do próprio conceito matemático, mostrando sua aplicabilidade concreta e revelando ao estudante a beleza da interdisciplinaridade entre as ciências.

Rafael e Escher (2015) conduziram um estudo de caso em que analisaram, por meio de levantamento estatístico, os índices de aprovação e reprovação na disciplina de cálculo em uma universidade privada do estado do Rio de Janeiro, nos anos de 2013, 2014 e 2015. Os dados revelaram que, em cada semestre analisado, entre 30%

e 50% dos alunos não foram aprovados, o que indica um índice de reprovação mais elevado em comparação com outras disciplinas.

É importante ressaltar que essa dificuldade no ensino e aprendizagem do cálculo não é uma questão recente, mas sim um problema persistente ao longo das últimas décadas. Já em 1995, a Sociedade Brasileira de Matemática demonstrava preocupação com o cenário do ensino de Cálculo nas universidades do país, publicando uma nota em seu boletim informativo alertando para os altos índices de repetência.

Barufi (1999), realizou uma pesquisa analisando o desempenho de turmas de Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de São Paulo (USP), no período de 1990 a 1995. O estudo apontou taxas de reprovação variando entre 20% e 75%. De forma semelhante, Rezende (2003) desenvolveu uma pesquisa mais recente com base em dados da Universidade Federal Fluminense (UFF), entre 1996 e 2000, constatando índices ainda mais preocupantes, com taxas de reprovação situadas entre 45% e 95%.

Nas décadas de 1960 e 1970, o movimento da Matemática Moderna influenciou profundamente o ensino da disciplina no Brasil e em outros países, o que resultou na exclusão de diversos conteúdos tradicionais, incluindo o cálculo, dos programas escolares.

Recorrendo a dados discutidos por Fiorentini (1993) e Cury (2009), organizado em uma síntese que demonstra a temática cada vez mais atual nas pesquisas e eventos acadêmicos:

> Em 1991: apenas 10 produções acadêmicas nacionais de educação matemática abordavam o ensino de cálculo. Entre 1992-2001: 42% dos artigos presentes nos anais do Congresso Nacional de Engenharia (COBENGE) eram dedicados ao tema. Entre 2001-2004: 36% das pesquisas realizadas no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) falam sobre o ensino da disciplina. Entre 2002 - 2005: 19% dos artigos do Congresso Nacional de Matemática Aplicada (CNMAC) tratam sobre o estudo do cálculo. Entre 2002 - 2006: 49% dos trabalhos do Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática (SIPEM) são dedicados à temática. (Fiorentini.1993, Cury. 2009)

Destarte a isso é possível perceber que o estudo do cálculo vem sendo continuadamente problematizado e investigado para o seu avanço. Os dados evidenciam que, a partir da década de 1990, houve um crescimento significativo no interesse da comunidade acadêmica em discutir o ensino desse componente curricular, revelando não apenas sua centralidade na formação em áreas de exatas, mas também os desafios persistentes no processo de ensino-aprendizagem. Esse movimento demonstra que o cálculo permanece como um campo de debates e reflexões, exigindo constantes revisões metodológicas e curriculares.

Nesse contexto de revisões metodológicas e busca por uma aprendizagem mais significativa, torna-se imperativo retomar o estudo das funções de base, que servem como sustentáculo para a compreensão do conceito de derivadas. Dentre essas, a função polinomial do segundo grau destaca-se como um objeto de estudo primordial, sua análise não apenas consolida o raciocínio algébrico e geométrico do estudante, mas também oferece o suporte necessário para a modelagem de fenômenos complexos que serão explorados no Cálculo. Assim, para compreender o avanço do ensino superior nessa área, é necessário revisitar as estruturas fundamentais que compõem o currículo da matemática básica.

2.1. FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU

A função polinomial do segundo grau, também chamada de função quadrática, é uma das mais importantes no campo da matemática, tanto em nível básico quanto no ensino superior. Sua relevância se justifica pela ampla aplicabilidade em contextos práticos, como fenômenos físicos, situações econômicas e problemas de otimização, além de servir como ponte para o estudo de conceitos mais avançados, como derivadas e integrais.

Para trabalhar com o conceito de função, é importante trazer a sua definição e a dos elementos que a acompanham. Conforme autores do livro didático Fundamentos de Matemática Elementar (2013), como Gelson Iezzi e Carlos Murakami, e também a abordagem de Luiz Roberto Dante (2013), a base para entender funções mais complexas, como a quadrática, reside na compreensão de seus elementos estruturais.

Iezzi (2013) formalmente, define a função polinomial do segundo grau como toda função real f: R → R expressa pela lei:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. O coeficiente “a” é chamado coeficiente quadrático, “b” é o coeficiente linear e "c” é o termo independente. O requisito de que a seja diferente de zero é essencial, pois garante que o termo de maior grau seja de segunda ordem, caracterizando a função como quadrática. Caso $a = 0$, a função se reduz a uma função polinomial de primeiro grau, ou seja, uma função afim.

2.1.1. ESTRUTURA E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

No volume 1 de Fundamentos da Matemática Elementar, Iezzi e Murakami (2013) abordam inicialmente os conjuntos numéricos estabelecendo o conjunto dos números Reais. Posteriormente, no Capítulo V, os autores introduzem as funções e definem formalmente o Domínio e a Imagem.

- Domínio e Contradomínio**:** O domínio da função quadrática é D(f) = R, pois a função está definida para todos os números reais. O contradomínio da função é CD(f) = R.

O estudo dos coeficientes é vital para a análise da função quadrática:

- Coeficientes: A função quadrática é determinada pelos seus coeficientes reais a, b e c.
- a (coeficiente quadrático): Sendo a $\neq 0$, este coeficiente é fundamental, pois ele controla a concavidade e a abertura da parábola. A análise do sinal de a permite determinar se o vértice será um ponto de máximo ou mínimo.
- b (coeficiente linear): Influencia o deslocamento lateral do gráfico e, em conjunto com a, define a posição do eixo de simetria.
- c (termo independente): Indica o ponto de interseção da parábola com o eixo y, pois f(0) = c. Este é o valor inicial da função quando x = 0.

O domínio completo destes elementos estruturais é a base para avançar no estudo das Propriedades mais complexas da função quadrática, como a determinação dos zeros e do vértice da parábola

De acordo com Iezzi e Murakami (2013), o estudo da função quadrática se aprofunda na análise de sua representação geométrica. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola, cuja forma e posição são inteiramente determinadas pelos coeficientes a, b e c. A parábola é uma curva simétrica em relação a uma reta vertical, denominada eixo de simetria. O ponto mais importante deste gráfico é o vértice (V), que se encontra sobre o eixo de simetria e representa o valor máximo ou mínimo da função.

Concavidade e Vértice:

- Se a > 0, a concavidade é voltada para cima e o vértice (V) é o ponto de mínimo da função.
- Se a < 0, a concavidade é voltada para baixo e o vértice (V) é o ponto de máximo da função.

Cálculo do Vértice: As coordenadas do vértice (x_v, y_v) são obtidas pelas fórmulas, conforme Iezzi e Murakami:

- $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$; onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação quadrática associada.

2.1.2. DO DISCRIMINANTE

O conceito de zeros da função, está diretamente ligado à representação gráfica, pois representa os pontos onde a parábola intercepta o eixo x (onde f(x) = 0). O discriminante (Δ) é fundamental, pois determina o número de zeros reais e, consequentemente, a relação da parábola com o eixo das abscissas:

- $\Delta > 0$: duas raízes reais distintas, a parábola intercepta o eixo x em dois pontos.
- $\Delta = 0$: duas raízes reais iguais, a parábola tangencia o eixo x exatamente no vértice.
- $\Delta < 0$: nenhuma raiz real, parábola não intercepta o eixo x.

2.1.3. EXEMPLOS GRÁFICOS

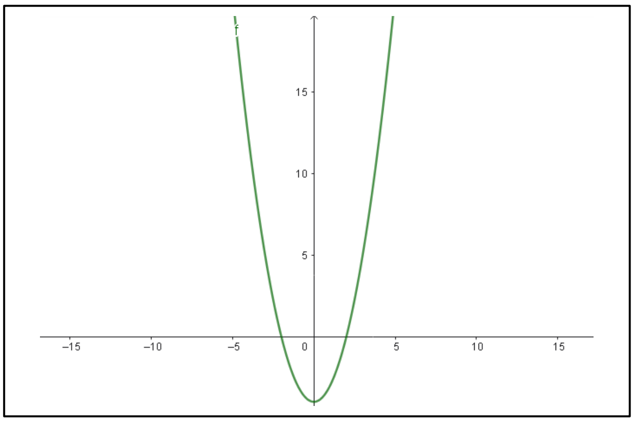
A representação dos gráficos da função quadrática, conforme o estudo de Iezzi e Murakami (2013), é a consolidação visual da análise dos coeficientes a, b, c e do discriminante. Os exemplos a seguir ilustram como as propriedades fundamentais se manifestam no plano cartesiano:

Exemplo 1: Função com duas raízes e ponto mínimo.

1. $f(x) = x^2 - 4$

- a = 1 > 0, concavidade para cima.
- Vértice: (0, -4).
- Raízes: x = -2 e x = 2.
- Interseção com eixo y em (0, -4).
- Ponto de mínimo no valor y = -4.

Figura 1 - Gráfico da função f(x) = x² - 4



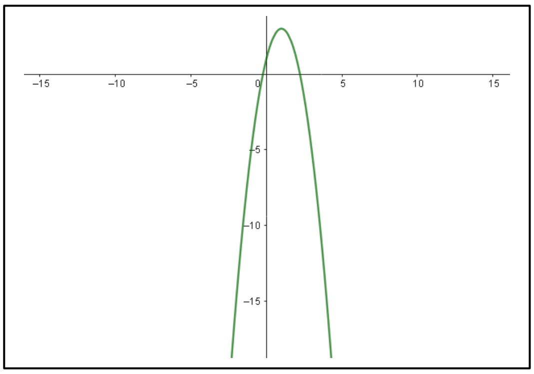
Fonte: Dados da pesquisa

Exemplo 2: Função com ponto máximo.

2. $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

- $a = -2 < 0$, concavidade para baixo.
- Vértice: (1, 3).
- Ponto de máximo no valor $y = 3$.

Figura 2 - Gráfico da função f(x) = -2x² + 4x + 1



Fonte: Dados da pesquisa

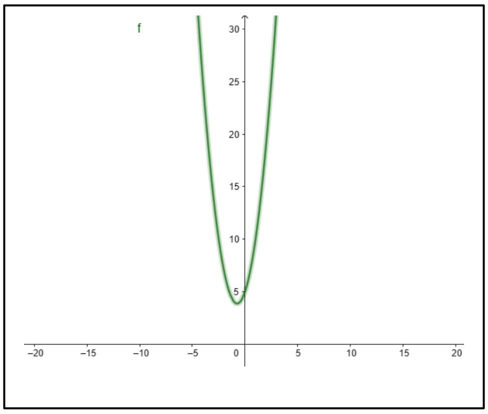
Exemplo 3: Função sem raízes reais

3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

- $\Delta = -31 < 0$.
- Não possui raízes reais.
- Parábola voltada para cima sem interseção com eixo x.

- Ponto de mínimo no valor y = $\frac{31}{8}$.

Figura 3 - Gráfico da função f(x) = 2x² + 3x + 5



Fonte: Dados da pesquisa

2.2 DERIVADA

A noção de derivada ocupa posição central no cálculo diferencial, sendo o instrumento matemático que formaliza a ideia de taxa de variação instantânea de uma função. Historicamente, seu desenvolvimento esteve ligado tanto à geometria (problema da reta tangente) quanto à física (problema da velocidade e aceleração instantânea). Segundo Flemming e Gonçalves (2006), o conceito de derivada é inicialmente motivado pela necessidade de encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto específico e de determinar a velocidade ou aceleração de um objeto em movimento em um instante exato.

Hoje, a derivada é compreendida tanto em termos técnicos, como limite de um quociente, quanto conceituais, como inclinação de uma reta tangente e medida de variação.

Considere uma função real f, definida em um intervalo aberto I ⊂ R, e seja x_0 ∈ I. Segundo a definição fundamental de Flemming e Gonçalves (2006). Dizemos que f é derivável em x_0 se existir o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x0}$$

ou, equivalentemente,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x0 + \Delta x) - f(x0)}{\Delta 0}$$

Esse limite, se existir e for finito, define a derivada da função em x_0. Geometricamente, $f'(x_0)$ corresponde à inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$. Em termos práticos, enquanto o quociente incremental expressa a taxa de variação média de f entre dois pontos, a derivada reflete a taxa de variação instantânea.

No contexto da notação, diversos símbolos são usados: f'(x), $\frac{dy}{dx}$, Df(x) ou até y', dependendo da tradição adotada. A notação de Leibniz, $\frac{dy}{dx}$, é especialmente útil por enfatizar a razão entre pequenos incrementos, além de se adaptar bem às regras de diferenciação.

Se f é derivável em todos os pontos de um intervalo I, pode-se definir a função,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Essa nova função, chamada função derivada, associa a cada ponto $x \in I$ o valor da taxa de variação instantânea da função original. A existência de f'(x) garante que o gráfico de f é localmente bem aproximado por uma reta tangente, que fornece informações sobre crescimento, decrescimento e concavidade.

2.2.1. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Embora a definição de derivada seja conceitualmente fundamental, sua aplicação direta em cálculos, utilizando o limite, pode apresentar um grau diferenciado de complexidade. Buscando superar esse grau de complexidade, Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves apresentaram as Regras de Derivação, que permitem determinar derivadas por meio de procedimentos operatórios, conforme descrito abaixo:

1. Derivada da Soma e Diferença

Se u(x) e v(x) são funções deriváveis, então:

$$(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

2. Derivada de Função Constante

Se f(x) = c, com $c \in R$, então:

f'(x) = 0.

3. Regra da Potência

Se $f(x) = x^n$, com $n \in R$, então:

$f'(x) = n.\ x^{(n-1)}$.

4. Regra do Produto

Se f(x) = u(x). v(x), então:

f'(x) = u'(x) . v(x) + u(x) . v'(x).

5. Regra do Quociente

Se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, com $v(x) \neq 0$, então:

$$f'(x) = \frac{u'(x)\ .v(x) - u(x)\ .v'(x)}{v(x)2}$$

6. Regra da Cadeia

Se y = f(u) e u = g(x), então:

dy/dx = (dy/du) . (du/dx).

7. Derivadas de Funções Trigonométricas

(sen x)' = cos x

(cos x)' = -sen x

$(tg\ x)' = sec^2\ x$

8. Derivadas de Funções Exponenciais e Logarítmicas

Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$.

Se $f(x) = a^x$, a > 0, então $f'(x) = a^x . \ln(a)$.

Se f(x) = ln(x), x > 0, então f'(x) = 1/x.

2.3. A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida pelo matemático e pesquisador francês Guy Brousseau, representa um dos quadros teóricos mais influentes na didática da matemática. Seu objetivo central é analisar e descrever as condições sob as quais o conhecimento matemático é produzido, transmitido e adquirido em um contexto escolar, distinguindo-se das teorias de aprendizagem gerais ao focar na relação tríplice entre aluno, professor e saber.

A teoria de Brousseau se baseia na premissa de que a aquisição do conhecimento matemático ocorre quando o aluno interage com um meio (ou milieu) que oferece resistência e feedback, forçando-o a adaptar, modificar ou criar novos saberes para superar o desafio proposto. O saber não é apenas transmitido ele é produzido pelo aluno como resultado de sua adaptação a uma situação-problema concebida para esse fim. Para o autor:

> um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reproduzíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos (Brousseau, 1975, p.6).

A teoria das situações didáticas, trabalha com a ideia de que a aprendizagem, para ser genuína e significativa, deve assemelhar-se ao processo de produção do conhecimento que ocorreu na história da Matemática. Para tal, Brousseau estabelece a distinção crucial entre:

1. Situação Didática: É a situação de ensino e aprendizagem preparada e conduzida pelo professor com a intenção explícita de levar o aluno a adquirir um saber determinado. Nela, o professor intervém diretamente, fornecendo informações, correções ou gerenciando o tempo e as regras.
2. Situação Adidática: É a fase da Situação Didática em que o professor, temporariamente, se retira da cena didática, permitindo que o aluno se confronte unicamente com o problema e com o meio (milieu). O aluno tem a tarefa de resolver o problema por conta própria, usando os conhecimentos disponíveis para tomar decisões e validar suas hipóteses, sem a intervenção direta do professor sobre a validade das respostas. A aprendizagem genuína ocorre durante a interação do aluno com essa situação adidática.

3. Milieu (Meio): O milieu é o sistema interativo e complexo que o aluno manipula e contra o qual ele age, sendo a fonte de contradições, feedbacks, e resistências que forçam o aluno a evoluir seu conhecimento. O milieu não é apenas o material didático; ele é estruturado pelo professor para evocar o saber a ser ensinado. A estruturação do milieu adidático é, portanto, a tarefa principal do professor na preparação da situação.

A Devolução é o ato fundamental que marca a passagem da situação didática para a situação adidática. É o momento em que o professor consegue transferir para o aluno a responsabilidade pela resolução do problema e pela produção de um novo conhecimento, garantindo que o aluno não perceba a intervenção como uma mera adivinhação do que o professor espera.

Apesar dos esforços do professor em criar uma situação adidática, a relação de ensino-aprendizagem está sempre permeada pelo que Brousseau chamou de Contrato Didático que é um sistema de hábitos específicos que o professor e o aluno estabelecem, em grande parte, implicitamente, em relação ao saber a ser ensinado. Por exemplo, o aluno espera que o professor forneça todas as informações necessárias para resolver o problema, e o professor espera que o aluno utilize apenas os conhecimentos recentemente ensinados.

O contrato didático é um elemento central para a análise e construção de situações. Ele define o papel de cada ator, mas quando suas regras são rompidas, pode gerar "efeitos" negativos sobre a aprendizagem:

- Efeito Topaze: O professor, para evitar o fracasso do aluno, simplifica tanto a tarefa que o aluno pode dar a resposta correta sem mobilizar o saber visado.
- Efeito Jourdain: O professor, ao reconhecer um saber do aluno em um comportamento que este não tinha a intenção de manifestar (como um erro ou estratégia incorreta), evita que o aluno tome consciência do verdadeiro conhecimento.

A última e decisiva fase da TSD é a Institucionalização, que complementa a devolução. É o ato pelo qual o professor, ou a instituição, formaliza e reconhece explicitamente os novos conhecimentos construídos e validados pelos alunos durante a situação adidática. Ocorre a transformação do conhecimento pessoal e prático em um saber culturalmente reconhecido.

É neste momento que o professor introduz o vocabulário, os símbolos e as definições formais (o conhecimento ostensivo), ligando a experiência do aluno ao corpo de conhecimento matemático. A institucionalização é vital para que os conhecimentos ensinados e comunicados permitam que o aluno entre em práticas sociais não didáticas como sujeito maior, e não apenas na qualidade de aluno.

A teoria das situações didáticas, ao distinguir claramente a ação didática (intencionalidade do professor) da ação adidática (produção do conhecimento pelo aluno), oferece um poderoso modelo para a Engenharia Didática. A teoria de Brousseau (2008) permite que o professor não apenas gerencie a transmissão de conteúdos, mas que se concentre em conceber e estruturar situações que contenham a lógica do saber, de modo que o aluno, por meio de uma interação rica com o milieu, seja forçado a adaptar-se e, assim, a aprender. O objetivo final é criar condições que promovam a aprendizagem por adaptação, em vez de apenas por imitação.

3. ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA

O presente trabalho adota como referencial metodológico pressupostos da Engenharia Didática, uma metodologia de pesquisa largamente utilizada no campo da Didática da Matemática.

Segundo Almouloud (2007, p. 171),

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. A engenharia didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que o suporte seja o ensino de um certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer). (Almouloud, 2007. p. 171)

Segundo Almouloud (2007), a Engenharia Didática é estruturada em quatro fases principais:

1. **Análises Preliminares**;

Esta é a fase inicial do trabalho e abrange a revisão bibliográfica e a fundamentação teórica. O pesquisador realiza um estudo aprofundado sobre investigação da natureza e da história do conceito matemático em estudo, identificando as transformações que ele sofreu ao longo do tempo (obstáculos epistemológicos). Estudo das diferentes formas como o conceito é ensinado e as metodologias já aplicadas, incluindo a identificação de possíveis obstáculos didáticos. Investigação das concepções dos alunos sobre o conteúdo e dos erros mais frequentes

2. **Concepção e Análise *A Priori*;**

Nesta fase, o pesquisador elabora a sequência didática (ou engenharia) propriamente dita. O principal momento da fase é a Análise *A Priori*, que consiste na formulação de hipóteses teóricas e prognósticos sobre o que irá ocorrer durante a aplicação. Definição das situações-problema, das tarefas a serem propostas e do milieu didático (meio de interação do aluno com o conhecimento). O pesquisador deve prever o comportamento e as estratégias dos alunos frente às situações, as ajudas didáticas a serem fornecidas e as condições de sucesso e fracasso.

Todas as escolhas pedagógicas e didáticas são justificadas (por exemplo, a Teoria das Situações Didáticas), visando garantir que a situação proposta conduza o aluno ao saber desejado, superando os obstáculos identificados

3. **Experimentação**;

Esta fase corresponde à aplicação da sequência didática concebida em um ambiente real de ensino (sala de aula). É o momento da coleta de dados, que geralmente envolve a gravação das aulas, a observação do trabalho dos alunos e a coleta de produções escritas e protocolos.

4. **Análise A Posteriori e Validação**.

É a etapa final, onde os dados coletados na fase de Experimentação são analisados. O pesquisador compara as observações reais com as previsões e hipóteses estabelecidas na Análise *A Priori*. A validação da Engenharia Didática é feita pela confrontação entre o previsto (análise *a priori*) e o realizado (análise a posteriori), permitindo refinar o conhecimento teórico sobre os processos de ensino e aprendizagem do conteúdo.

Em função do tempo limitado para a elaboração desta monografia e da estrutura complexa e extensa que a metodologia de Engenharia Didática exige, o presente estudo utilizará apenas a primeira e segunda fase proposta pela metodologia adotada: análises preliminares e a concepção e análise a priori.

O interesse em realizar a aplicação completa, com a observação e comparação dos resultados em sala de aula, é reconhecido e será reservado para um projeto de pesquisa futuro, como uma possível monografia de especialização, onde haverá o tempo adequado para a implementação integral da Engenharia Didática.

A Concepção e Análise *A Priori* foi constituída na montagem da sequência didática, composta por sete questões de otimização selecionadas de contextos reais que exigem a determinação de máximos e mínimos. A escolha das questões visou transformar o conteúdo de função quadrática em um estudo inicial de cálculo.

Cada questão foi resolvida de duas formas, primeiramente pela "via normal" (fórmula do vértice) para estabelecer a conexão com o conhecimento prévio do aluno. Em seguida, pela resolução utilizando o conceito de derivada, demonstrando que o ponto máximo e mínimo é atingido quando a taxa de variação instantânea é zero. Para cada item, foi elaborada uma Análise *A Priori*, prevendo o comportamento e os possíveis obstáculos dos alunos, e orientações para o professor, que possui a derivada como o fundamento teórico que justifica a fórmula do vértice, conferindo rigor acadêmico ao tópico.

A fase de análises preliminares foi crucial para a delimitação do problema de pesquisa e a fundamentação da sequência didática. Esta etapa envolveu, o estudo histórico da presença do cálculo no currículo brasileiro (Carvalho, 1996), a análise documental da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para identificar competências e habilidades que comportam as noções de variação e modelagem e a revisão de literatura sobre a lacuna formativa entre o ensino médio e o superior (Silva, 2024, Rafael e Escher, 2015).

A partir desse levantamento, a pesquisa identificou que o tema otimização de funções quadráticas é um ponto de convergência de alto potencial, pois é central em provas de larga escala e possui uma limitação didática no ensino médio ao apresentar o vértice apenas por fórmula. Assim, as questões que compõem a sequência didática foram selecionadas a partir de contextos reais (geometria, economia e cinemática) que exigem a determinação de máximos e mínimos, de modo a torná-las significativas

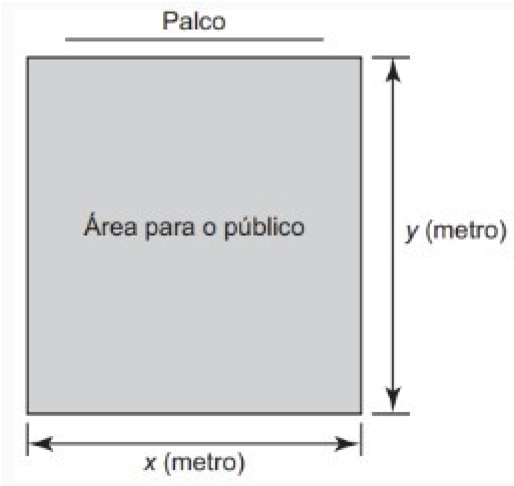
As questões foram escolhidas por apresentarem uma riqueza que permite explorar o conceito de derivada, transformando o conteúdo de álgebra (função quadrática) em um estudo aprofundado de Análise Matemática (cálculo). Realizamos uma curadoria de questões sobre função polinomial do segundo grau na internet e escolhidas pelo autor, além de existirem algumas dessas questões na dissertação utilizada como referência, O Ensino de Cálculo no Ensino Médio (Rocha, 2017).

3.1. APLICAÇÕES QUE PODEM SER UTILIZADAS COM DERIVADA

Neste ítem, será apresentada uma seleção de questões envolvendo a função polinomial do segundo grau, cuidadosamente escolhidas para ilustrar diferentes contextos de aplicação. Cada uma delas será analisada e resolvida de forma detalhada, utilizando o conceito de derivada como ferramenta principal para a compreensão do comportamento das funções.

O objetivo é demonstrar, de maneira clara e acessível, como os princípios do Cálculo Diferencial podem ser aplicados na resolução de problemas do ensino médio, enriquecendo a interpretação gráfica e conceitual dessas funções e promovendo uma aprendizagem mais significativa.

QUESTÃO 01) (ENEM - 2016 - 2ª aplicação) Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.



A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R$ 20,00.
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R$ 5,00.

A empresa dispõe de R$ 5.000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público. A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

a) 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B.
b) 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B.
c) 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B.
d) 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B.
e) 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.

RESOLUÇÃO PELAS VIAS NORMAIS

O objetivo é maximizar a área retangular do público, sujeita à restrição de custo de R$ 5.000,00. Seja x o comprimento dos lados paralelos ao palco (Tela tipo A). Seja y o comprimento dos outros dois lados (Tela tipo B). Dois lados de x metros, a R$ 20,00/m:

$$2 \cdot 20 = 40$$

Dois lados de y metros, a R$ 5,00/m:

$$2 \cdot 5 = 10$$

Portanto $40x + 10y = 5000$ (I). A área (A) é dada por:

$$A = x.y \text{ (II)}$$

Isolar y na equação do custo (I):

$$10y = 5000 - 40x$$
$$y = 500 - 4x \text{ (III)}$$

Substituir y na equação da área (II) para obter a função área A(x):

$$A(x) = x \cdot (500 - 4x)$$
$$A(x) = 500x - 4x^2$$

A função A(x) é uma parábola com concavidade para baixo (a = - 4), então o ponto máximo é dado pela coordenada x do vértice (x_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Calcular x_v (quantidade da tela tipo A em metros):

$$x_v = \frac{-500}{2\,.(-4)}$$

$$x_v = 62{,}5 \text{ m}$$

Substituir x_v em (III) para encontrar y:

$$y = 500 - 4\,(62{,}5)$$
$$y = 500 - 250$$
$$y = 250$$

A pergunta pede a quantidade total de cada tipo de tela que a empresa deve comprar.
Tela Tipo A: Comprimento total = 2x

$$2x = 2.\ 62{,}5 = 125$$

Tela Tipo B: Comprimento total = 2y

$$2y = 2\ .\ 250 = 500$$

Portanto, a empresa deve comprar 125 m da tela tipo A e 500 m da tela tipo B. Alternativa (d).

RESOLUÇÃO UTILIZANDO O CONCEITO DE DERIVADA

Para resolver essa questão, vamos analisar matematicamente a situação descrita, relacionando os custos das cercas e a área máxima possível do espaço a ser construído. Seja **x** o comprimento dos lados paralelos ao palco (onde será usada a tela tipo A) e **y** o comprimento dos outros dois lados (onde será usada a tela tipo B). O custo total será a soma do valor gasto com os dois tipos de tela. Como a empresa dispõe de R$ 5.000,00, podemos expressar essa restrição da seguinte forma:

$$40x + 10y = 5000$$

Dividindo toda a equação por 10, temos:

$$4x + y = 500$$
$$y = 500 - 4x$$

Sabemos que a área A do retângulo é dada pelo produto dos lados:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot (500 - 4x) = 500x - 4x^2$$

Essa é uma função quadrática, cuja concavidade é voltada para baixo. Logo, ela possui um ponto máximo. Para determinar esse ponto, aplicamos o conceito de derivada, que indica a taxa de variação da função. No ponto máximo, a variação é nula, isto é, $A'(x) = 0$. Calculando a derivada da função área:

$$A'(x) = 500 - 8x$$

Igualando a zero:

$$500 - 8x = 0 \Rightarrow x = 62{,}5$$

Substituindo esse valor na expressão de y:

$$y = 500 - 4(62{,}5) = 250$$

A pergunta pede a quantidade total de cada tipo de tela que a empresa deve comprar.
Tela Tipo A: Comprimento total = 2x

$$2x = 2 \,.\, 62{,}5 = 125$$

Tela Tipo B: Comprimento total = 2y

$$2y = 2 \cdot 250 = 500$$

Portanto, a empresa deve comprar 125 m da tela tipo A e 500 m da tela tipo B. Alternativa (d).

ANÁLISE *A PRIORI*

Com a resolução do item, espera-se que os alunos identifiquem a relação entre as variáveis x e y (lados do retângulo) e percebam que a área depende de uma única variável, que resulta em uma função quadrática $A(x) = 500x - 4x^2$. O ponto máximo, obtido quando a derivada é nula, representa geometricamente o vértice da parábola, ou seja, o ponto em que a taxa de variação da área em relação ao lado a se anula.

Assim, o aluno poderá compreender que, quando a derivada é zero, a área deixa de crescer e atinge seu valor máximo. Alguns alunos podem: confundir o máximo da função com o maior valor de uma das variáveis (por exemplo, escolher o maior lado em vez da maior área); interpretar o ponto em que a derivada é zero apenas como um cálculo mecânico, sem perceber o significado de mudança no sentido da variação; não compreender a ideia de restrição orçamentária, tratando as variáveis de forma independente, o que inviabiliza a modelagem correta da função área.

Esta questão favorece a compreensão intuitiva da derivada por meio da interpretação geométrica e contextual do ponto de máximo. Permite ainda identificar possíveis obstáculos de natureza representacional, além de fortalecer a relação entre funções quadráticas e fenômenos reais, promovendo uma aprendizagem significativa e conceitualmente estruturada.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

O primeiro passo é guiar os alunos para traduzir a restrição de custo na equação $40x + 10y = 5000$, onde x e y são os lados do retângulo. Ao isolar y e substituí-lo na fórmula da área ($A = x \cdot y$), chega-se à função área $A(x) = 500x - 4x^2$. Esta é uma função quadrática de concavidade voltada para baixo, confirmando a existência de um ponto máximo.

Em seguida, o professor deve introduzir a derivada como ferramenta. O princípio, conforme sustentado por autores do Cálculo como Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves, é que o máximo é atingido quando a taxa de variação instantânea da área é zero. Ou seja, a derivada da função área, A'(x), deve ser igual a zero.

O professor aplica as regras de derivação à função $A(x) = 500x - 4x^2$. A Regra da Potência é aplicada para derivar 500x, resultando em 500. Novamente, a Regra da Potência é aplicada a $4x^2$, resultando em - 8x. O professor demonstra que o resultado obtido pelo cálculo é idêntico ao obtido pela fórmula do vértice. Essa identidade é a prova de que a derivada é o conceito mais fundamental que explica por que a fórmula do vértice funciona, permitindo ao aluno generalizar o método de otimização para qualquer função que ele encontre no futuro. O professor, neste cenário, usa a derivada para conferir um rigor acadêmico aos tópicos do Ensino Médio.

QUESTÃO 02) (FGV – 2020) O número de turistas x que comparecem diariamente para um passeio de barco, relaciona-se com o preço P em reais cobrado por pessoa através da relação P = 300 - 2x. Se o barco tiver 100 lugares, qual a receita máxima que pode ser obtida por dia?

A) R$ 10000,00
B) R$ 11500,00
C) R$ 10750,00
D) R$ 11000,00
E) R$ 11250,00

RESOLUÇÃO PELAS VIAS NORMAIS

Este é um problema de otimização que envolve encontrar o valor máximo de uma função quadrática, considerando uma restrição de capacidade. A Receita (R) é o produto do número de turistas (x) pelo preço cobrado por pessoa (P).

$$R = x \cdot P$$

A relação entre o preço e o número de turistas é dada por:

$$P = 300 - 2x$$

Substituindo P na fórmula da Receita:

$$R(x) = x \cdot (300 - 2x)$$

$$R(x) = 300x - 2x^2$$

A função R(x) é uma função quadrática (uma parábola) com coeficiente a negativo (a = -2). Isso significa que a parábola se abre para baixo, e seu ponto máximo é o vértice. O número de turistas (x_v) que maximiza a receita é dado pela coordenada x do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-300}{2\,.(-2)}$$

$$x_v = 75$$

O número de turistas que maximiza a receita é 75 pessoas. O barco tem uma capacidade de 100 lugares. Como x_v = 75 é menor que 100, a capacidade máxima não é um fator limitante, e 75 turistas é o valor ideal. Substituímos x = 75 na função Receita R(x):

$$R = 300(75) - 2(75)^2$$

$$R = 22500 - 2(5625)$$

$$R = 22500 - 11250$$

$$R = 11250$$

A receita máxima é de R$ 11.250,00. Alternativa (e).

RESOLUÇÃO UTILIZANDO O CONCEITO DE DERIVADA

Neste problema, queremos determinar qual é o preço ideal do ingresso que permite à empresa obter a maior receita possível com o passeio de barco. Esse tipo de situação é um exemplo clássico de otimização, e a derivada é a ferramenta matemática que nos auxilia a encontrar esse ponto máximo. Sabemos que o preço cobrado por pessoa está relacionado ao número de turistas x por meio da equação:

$$P = 300 - 2x$$

A receita total é o produto entre o preço cobrado e o número de turistas:

$$R(x) = P \cdot x = (300 - 2x)x = 300x - 2x^2$$

Essa expressão representa uma função quadrática de concavidade voltada para baixo, o que indica a existência de um ponto máximo exatamente onde a taxa de variação da receita se anula. Para determinar esse ponto, calculamos a derivada de R(x), que nos indica como a receita varia conforme o número de turistas muda:

$$R'(x) = 300 - 4x$$

No ponto de máximo, essa variação é zero, isto é:

$$R'(x) = 0 \Rightarrow 300 - 4x = 0 \Rightarrow x = 75$$

Isso significa que o lucro máximo ocorre quando 75 turistas participam do passeio.
Agora, substituímos esse valor na função da receita para encontrar o valor máximo:

$$R(75) = 300(75) - 2(75)^2 = 22.500 - 11.250 = 11.250$$

Portanto, a receita máxima obtida é de R$ 11.250,00.
Resposta: alternativa (e).

ANÁLISE *A PRIORI*

O item proposto aborda uma situação prática envolvendo a relação entre o preço de um passeio de barco e a quantidade de turistas, estabelecendo um contexto real e acessível que permite aplicar conceitos matemáticos para a resolução de um problema de otimização econômica. O enunciado desafia o estudante a determinar a receita máxima obtida com a venda de ingressos, considerando que o preço por pessoa depende diretamente da quantidade de turistas, o que caracteriza o problema como uma aplicação funcional com foco em análise de variação e maximização de resultados.

Para resolver a questão corretamente, o estudante precisa mobilizar alguns conhecimentos prévios fundamentais. É necessário compreender o conceito de função do 1º e do 2º grau, saber que a receita total é dada pelo produto entre o preço e a quantidade vendida ($R = P \cdot x$), dominar o cálculo de derivadas de funções polinomiais e entender o significado geométrico da derivada como taxa de variação. Além disso, o aluno deve reconhecer que os pontos de máximo e mínimo de uma função podem ser encontrados anulando-se a derivada, e ser capaz de interpretar o resultado numérico considerando as condições reais do problema.

A estratégia esperada é que o aluno perceba que se trata de um problema de maximização de receita e escreva a função que a representa, $R(x) = x(300 - 2x)$. A partir daí, deve identificar que se trata de uma função quadrática de concavidade voltada para baixo e, portanto, que apresenta um ponto de máximo. O passo seguinte é calcular a derivada $R'(x) = 300 - 4x$, igualá-la a zero e encontrar o ponto crítico $x = 75$.

Substituindo esse valor na expressão da receita, obtém-se $R(75) = 11.250$, o que indica que a receita máxima é de R$ 11.250,00 quando 75 turistas participam do passeio. É importante ainda que o aluno verifique se esse resultado é compatível com a limitação física do problema, o barco comporta até 100 pessoas, logo o valor obtido é coerente.

Entre as dificuldades mais comuns que podem surgir estão a confusão entre as variáveis, ao não perceber que o preço depende diretamente do número de turistas; a montagem incorreta da função receita; a falta de compreensão sobre o papel da derivada como ferramenta para identificar o ponto máximo. Alguns estudantes também podem ignorar a restrição do problema ou cometer erros operacionais no cálculo numérico final.

A pertinência didática da questão é clara, pois ela conecta um conceito matemático abstrato, derivada, a uma situação concreta do cotidiano, permitindo que o aluno perceba a aplicabilidade do cálculo em contextos econômicos e de tomada de decisão. Além disso, a questão estimula o raciocínio, exigindo que o estudante traduza uma situação verbal em uma expressão algébrica, e oferece uma oportunidade para discutir a importância de interpretar os resultados matemáticos dentro de suas limitações reais.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

O primeiro passo para o professor é conduzir os alunos a construírem a função receita ($R(x)$). Sabendo que o preço (P) está ligado ao número de turistas (x) por $P = 300 - 2x$, a receita total é o produto $R(x) = P \cdot x$. Essa multiplicação resulta na função quadrática $R(x) = -2x^2 + 300x$. É importante ressaltar que a concavidade é voltada para baixo (devido ao coeficiente $a = -2$), o que confirma a existência de um ponto máximo, que é o objetivo do problema.

Em seguida, o professor deve introduzir a derivada como ferramenta. O princípio central a ser institucionalizado é que o ponto máximo da receita ocorre exatamente onde a taxa de variação instantânea da receita é zero, ou seja, quando R'(x) = 0. Este conceito, conforme estabelecido na teoria de Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves (2006), é o alicerce do cálculo.

A aplicação da derivada e suas regras ocorre na transformação da função R(x) em R'(x), o professor aplica a regra da potência ao termo $-2x^2$, obtendo - 4x, e ao termo 300x, obtendo 300. O professor deve demonstrar que o x = 75 encontrado via derivada é o mesmo resultado que se obteria pela fórmula tradicional do vértice ($x_v = \frac{-b}{2a}$). Esta equivalência não é coincidência, o professor deve finalizar mostrando que a derivada é o fundamento teórico que prova a validade da fórmula do vértice, generalizando a busca por máximos e mínimos para qualquer função diferenciável.

QUESTÃO 03) (Enem cancelado 2009) A empresa WQTU Cosmético vende um determinado produto x, cujo custo de fabricação de cada unidade é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função 180x − 116. A empresa vendeu 10 unidades do produto x, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo. A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é

a) 10

b) 30

c) 58

d) 116

e) 232

RESOLUÇÃO PELAS VIAS NORMAIS

Este problema envolve encontrar a quantidade de unidades que maximizam a função Lucro (L). O lucro é a diferença entre a Receita de Vendas (R) e o Custo de Fabricação (C). Seja x a quantidade de unidades do produto vendidas. O custo total de x unidades é dado por:

$$C(x) = 3x^2 + 232$$

O valor de venda total de x unidades é dado por:

$$R(x) = 180x - 116$$

O Lucro (L) é a Receita menos o Custo:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

$$L(x) = (180x - 116) - (3x^2 + 232)$$

$$L(x) = 180x - 116 - 3x^2 - 232$$

$$L(x) = - 3x^2 + 180x - 348$$

A função L(x) é uma função quadrática (parábola) com coeficiente a negativo (a = - 3). Portanto, seu valor máximo é alcançado no vértice.
A quantidade x que maximiza o lucro é dada pela coordenada x do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Na função $L(x) = - 3x^2 + 180x - 348$

$$x_v = \frac{-180}{2\,.(-3)}$$

$$x_v = 30$$

A quantidade máxima de unidades a serem vendidas para obter o maior lucro é de 30 unidades. Alternativa (b).

RESOLUÇÃO UTILIZANDO O CONCEITO DE DERIVADA

Neste problema, a empresa deseja saber quantas unidades vender para obter o lucro máximo. Para isso, modelamos o lucro como diferença entre receita e custo, e usamos a derivada para encontrar o ponto em que a variação do lucro é nula.
Dados: Custo por unidade: $C(x) = 3x^2 + 232$, Receita: $R(x) = 180x - 116$.
A função lucro L(x) é dada por:

$$L(x) = R(x) - C(x) = 180x - 116 - (3x^2 + 232) = -3x^2 + 180x - 348$$

Observe que L(x) é uma função quadrática de concavidade voltada para baixo, o que indica a presença de um máximo.

A derivada L′(x) representa a variação do lucro:

$$L'(x) = -3x^2 + 180x - 348 = -6x + 180$$

No ponto em que a taxa de variação é zero, a função atinge um extremo:

$$-6x + 180 = 0 \Rightarrow -6x = -180 \Rightarrow x = 30$$

Resposta: alternativa (b). Portanto, a produção e venda de 30 unidades maximizam o lucro da empresa, conforme o modelo dado.

ANÁLISE A PRIORI

Apresenta uma situação contextualizada sobre o lucro de uma empresa que fabrica e vende um produto, estabelecendo uma conexão direta entre a matemática e a realidade econômica. O problema propõe determinar a quantidade de unidades que deve ser produzida e vendida para que o lucro seja máximo.

Para resolver adequadamente essa questão, o estudante deve ter alguns conhecimentos prévios essenciais, como: o entendimento das noções de função custo, função receita e função lucro, sendo o lucro definido como $L(x) = R(x) - C(x)$; o reconhecimento da estrutura de uma função quadrática e sua concavidade; e a compreensão de que a derivada de uma função fornece informações sobre o comportamento de crescimento ou decrescimento, permitindo localizar seus pontos de máximo ou mínimo. Além disso, é necessário domínio das operações algébricas básicas e capacidade de interpretar o resultado obtido em termos de quantidade de produção. O raciocínio esperado é que o aluno reconheça o problema como um caso de máximo de lucro, modele corretamente as funções envolvidas e calcule o ponto. Partindo das informações fornecidas, o aluno define o custo como $C(x) = 3x^2 + 232$ e a receita como $R(x) = 180x - 116$, construindo então a função lucro.

Em seguida, identifica que se trata de uma parábola voltada para baixo, indicando que há um ponto máximo, e calcula a derivada $L'(x) = -6x + 180$. Ao igualar a derivada a zero, encontra $x = 30$, concluindo que o lucro é máximo quando a empresa produz e vende 30 unidades do produto.

Durante a resolução, é comum que os alunos cometam erros em algumas etapas. Entre as dificuldades: confundir o custo total com o custo unitário, esquecendo-se de que a função C(x) já representa o total gasto para x unidades; não perceber a concavidade negativa da parábola e, portanto, não reconhecer que o ponto encontrado corresponde a um máximo; ou ainda, não compreender o significado da derivada e seu papel na identificação de extremos. Também pode ocorrer erro operacional ao derivar ou ao resolver a equação resultante.

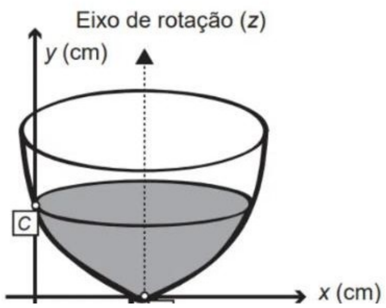
ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

O professor deve começar a aula guiando os alunos na modelagem da função lucro (L(x)). O lucro é a diferença entre a Receita (R(x)) e o Custo (C(x)). Após a substituição dos dados a função lucro é formulada como $L(x) = -3x^2 + 180x - 348$. O professor deve observar com os alunos que L(x) é uma função quadrática com coeficiente $a = -3$ (negativo), garantindo que a concavidade é voltada para baixo e, portanto, existe um ponto de lucro máximo.

A partir desse ponto, o professor introduz a derivada como a ferramenta que localiza esse máximo. O princípio a ser ensinado é que o lucro máximo ocorre onde a taxa de variação instantânea do lucro é zero, ou seja, onde a derivada L'(x) se anula. Este conceito de extremidade nula é o cerne do Cálculo, conforme referenciado por autores como Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves (2006).

A aplicação da derivada e suas regras ocorre ao se calcular a derivada da função lucro. O professor aplica as regras de derivação termo a termo ao derivar $-3x^2$, aplica-se a regra da potência, resultando em $-6x$. Ao derivar 180x, aplica-se a regra da potência, resultando em 180. A derivada da constante - 348 é zero. O professor deve demonstrar que as regras de derivação aplicadas para encontrar $L'(x)=0$ são o fundamento teórico que justifica a fórmula tradicional do vértice ($x_v = \frac{-b}{2a}$). Ao fazer isso, o professor confere um rigor acadêmico ao problema, mostrando que o cálculo não é um assunto isolado, mas a base para a otimização de funções.

QUESTÃO 04) (Enem - 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

RESOLUÇÃO PELAS VIAS NORMAIS

A função que expressa a parábola é:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$$

O ponto V (vértice da parábola) está localizado sobre o eixo x. Isso significa que a coordenada y do vértice, y_v, é igual a zero.

$$y_v = f(x_v) = 0$$

Na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, o valor da coordenada y do vértice é dado pela fórmula:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Onde Δ (delta) é o discriminante da função, $\Delta = b^2 - 4ac$. Logo $\Delta = 36 - 6C$. Como o vértice está sobre o eixo x, temos $y_v = 0$. Igualando o discriminante a zero:

$$36 - 6C = 0$$
$$36 = 6C$$
$$C = \frac{36}{6}$$
$$C = 6$$

A altura do líquido contido na taça, que é o valor de C, é de 6 centímetros. Alternativa (e).

RESOLUÇÃO UTILIZANDO O CONCEITO DE DERIVADA

A questão apresenta uma parábola que gera o formato de uma taça, definida por:

$$f(x)= \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$$

onde C representa a altura do líquido contido na taça, ou seja, a ordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y.

A derivada da função, $f'(x)$, nos dá o ponto onde a inclinação da parábola é nula exatamente o vértice, pois é onde a curva muda de decrescente para crescente.

$$f'(x) = 3x - 6$$

Para determinar o ponto em que ocorre o vértice, igualamos a derivada a zero:

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Logo, a abscissa do vértice é $x = 2$.
Como o vértice está sobre o eixo x, temos $f(x) = 0$. Substituindo $x = 2$ em $f(x)$:

$$0 = f(2) = \frac{3}{2}(2)^2 - 6(2) + C$$
$$0 = \frac{3}{2}(4) - 12 + C$$

$$0 = 6 - 12 + C$$
$$C=6$$

Resposta: alternativa (e). O resultado C = 6 indica que a altura do líquido na taça, ou seja, a distância do vértice até a borda é de 6 centímetros. O uso da derivada foi fundamental para localizar o ponto de mínima altura da parábola (vértice).

ANÁLISE *A PRIORI*

Para uma resolução eficiente, o estudante deve ter um conhecimento sólido da função quadrática $f(x)= \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$. O primeiro passo do raciocínio é a interpretação geométrica da condição dada, o vértice da parábola está sobre o eixo x. Isso se traduz na condição matemática de que a ordenada do vértice é zero, ou seja, $x_v = 0$. Esta é a chave para determinar o valor da constante C, que representa a altura do líquido.

O próximo passo fundamental, é localizar a abscissa do vértice utilizando a derivada. Ao reconhecer que o vértice é o ponto de mínimo da parábola (já que o coeficiente a é positivo), deve saber que a taxa de variação instantânea da função é nula nesse ponto. Esta taxa é a derivada. O aluno calcula f'(x) aplicando a regra da potência. Os erros potenciais incluem a confusão na tradução da condição geométrica e erros operacionais ao derivar ou simplificar a expressão com frações e números inteiros.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

O professor inicia a análise com a função dada, $f(x)= \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, explicando que o vértice é o ponto onde a parábola muda de decrescente para crescente. O princípio fundamental do Cálculo, conforme referenciado por autores como Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves (2006), é que a inclinação dessa curva, medida pela derivada, deve ser zero no vértice. Assim, a busca pelo vértice começa com o cálculo de f'(x) e sua igualdade a zero.

A aplicação da derivada e suas regras é o passo central, para derivar $\frac{3}{2}x^2$, o professor aplica a regra da potência, resultando em 3x. A derivada de - 6x é - 6, e a derivada da constante C (a altura do líquido) é zero. O professor deve demonstrar que o x=2 encontrado via derivada é o mesmo valor que seria obtido pela fórmula do vértice.

QUESTÃO 05) Seja $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ a função que determina a trajetória de um projétil lançado para o alto. Qual é a altura máxima, em metros, que este projétil pode alcançar?

RESOLUÇÃO PELAS VIAS NORMAIS

A trajetória do projétil é dada pela função quadrática:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

Como o coeficiente a é negativo (a = -1), a parábola é para baixo, e a altura máxima corresponde ao valor máximo da função, ou seja, a coordenada y do vértice. A altura máxima (y_v) é calculada pela fórmula:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Onde Δ é o discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = (2)^2 - 4(-1)(1)$$
$$\Delta = 4 - (-4)$$
$$\Delta = 4 + 4$$
$$\Delta = 8$$

Calcular y_v:

$$y_v = \frac{-8}{4.(-1)}$$
$$y_v = 2$$

Portanto, a altura máxima alcançada pelo projétil é 2 metros.

RESOLUÇÃO UTILIZANDO O CONCEITO DE DERIVADA

Note que a função é negativa, isso significa que o gráfico dessa parábola tem sua concavidade voltada para baixo, logo, faz sentido, falar em ponto máximo.

Sabemos que a derivada de uma função nos fornece a taxa de variação em um determinado instante, por outro lado, o instante que nos fornece o ponto máximo dessa função é exatamente o instante em que essa taxa de variação é igual a zero. Portanto, para encontrar o valor nesse instante basta derivar a função e igualar a zero:

$$f'(x) = -2x + 2$$
$$-2x + 2 = 0$$
$$-2x = -2$$
$$x = 1$$

Agora, substituindo o valor na função, encontraremos o seu valor máximo:

$$f(x) = -1^2 + 2.1 + 1$$
$$f(x) = 2$$

Portanto, a altura máxima que o projétil pode alcançar é de 2 metros.

ANÁLISE *A PRIORI*

A questão apresenta uma função quadrática que descreve a trajetória de um projétil, e o objetivo é determinar a altura máxima alcançada, o que corresponde ao ponto máximo da parábola. O propósito didático é levar o aluno a compreender a relação entre a forma algébrica da função quadrática e o movimento de um corpo em trajetória parabólica, aplicando o conceito de derivada como ferramenta para identificar o ponto em que a taxa de variação da altura é nula, isto é, o instante em que o projétil atinge sua altura máxima.

Para resolver a questão corretamente, o estudante precisa dominar alguns conhecimentos prévios essenciais: reconhecer o formato gráfico de uma função quadrática, identificar a concavidade da parábola a partir do sinal do coeficiente de x^2, compreender o papel da derivada como indicadora da variação da função e saber que o ponto de máximo ocorre quando $f'(x) = 0$. Além disso, é importante que o aluno saiba substituir corretamente o valor encontrado na função original para obter a altura correspondente e interpretar o resultado dentro do contexto físico do problema.

O raciocínio esperado é que o estudante perceba que, como o coeficiente de x^2 é negativo, a parábola tem concavidade voltada para baixo, logo a função possui um ponto de máximo. Em seguida, calcula-se a derivada da função $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, obtendo $f'(x) = -2x + 2$. Igualando a derivada a zero, encontra-se o ponto crítico $x = 1$ na função original. Portanto, o projétil atinge sua altura máxima de 2 metros no instante correspondente a $x = 1$.

Durante a resolução, os alunos podem apresentar dificuldades comuns, como esquecer que o sinal negativo do coeficiente principal indica concavidade voltada para baixo (portanto, ponto máximo), cometer erros ao derivar (por exemplo, esquecer o fator 2 no termo $-x^2$), ou ainda confundir o valor de x encontrado (que representa o instante do ponto máximo) com a altura propriamente dita. Também é possível que alguns alunos tentem resolver o problema apenas pela fórmula do vértice sem compreender o papel da derivada, perdendo a oportunidade de interpretar o processo de otimização.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

O professor deve apresentar a função $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ como um modelo que descreve a altura do projétil em relação ao tempo ou distância horizontal (x). É importante notar que, como o coeficiente a é negativo ($a = -1$), a concavidade é voltada para baixo, confirmando que a função possui, de fato, um ponto máximo (a altura máxima).

A aplicação da derivada reside na ideia de que, no ponto mais alto de sua trajetória, o projétil para momentaneamente de subir antes de começar a descer. Matematicamente, isso significa que a sua taxa de variação instantânea de altura em relação a x é zero. O professor deve, portanto, utilizar a derivada, $f'(x)$, como o instrumento para localizar o x onde essa taxa é nula. O professor aplica a regra da potência, a derivação de $-x^2$ é $-2x$, a derivação de $2x$ é 2, a derivada da constante 1 é zero. Ao mostrar que a derivada é o conceito que localiza o ponto de inclinação zero, o professor eleva o rigor da matemática do ensino médio.

QUESTÃO 06) A turma do 3º ano irá fabricar picolés para arrecadar dinheiro para viagem do final de ano. O custo da produção de x unidades de picolés ´e dado por $C(x) = x^2 - 2x + 30$. Qual a quantidade de picolés produzida para que o custo seja mínimo? Qual custo mínimo?

RESOLUÇÃO PELAS VIAS NORMAIS

A função que determina o custo de produção (C) de x unidades de picolés é uma função quadrática:

$$C(x) = x^2 - 2x + 30$$

Como o coeficiente a é positivo (a = 1), a parábola é para cima, e o custo mínimo é o valor mínimo da função, que corresponde ao vértice da parábola. A quantidade de picolés (x) que resulta no custo mínimo é dada pela coordenada x do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Na função $C(x) = x^2 - 2x + 30$:

$$x_v = \frac{-(-2)}{2 \, .1}$$

$$x_v = 1$$

A quantidade de picolés produzida para que o custo seja mínimo é de 1 unidade.

O custo mínimo é o valor da função no ponto $x_v = 1$, ou seja, C(1):

$$C = C(1) = (1)^2 - 2(1) + 30$$

$$C = 1 - 2 + 30$$

$$C = 29$$

O custo mínimo de produção é de R$ 29,00.

RESOLUÇÃO UTILIZANDO O CONCEITO DE DERIVADA

A turma do 3º ano tem custo de produção dado por

$$C(x) = x^2 - 2x + 30$$

onde x representa o número de picolés produzidos.
Queremos determinar a quantidade x que minimiza o custo total C(x) e calcular esse custo mínimo. A função C(x) é uma parábola positiva, o que indica que ela é côncava para cima e possui um único ponto de mínimo.
A derivada C′(x) fornece a taxa de variação do custo em relação à quantidade produzida:

$$C'(x) = 2x - 2$$

No ponto de extremo, a inclinação da reta tangente é zero, portanto igualamos a derivada a zero para encontrar o candidato a mínimo:

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Substituindo x = 1 C(x):
$C(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 30 = 1 - 2 + 30 = 29$

Conclusão: produzir 1 picolé minimiza o custo; o custo mínimo é R$ 29,00.

ANÁLISE *A PRIORI*

A questão apresenta um problema de minimização de custo na produção de picolés por uma turma do 3º ano, com o objetivo de determinar a quantidade de unidades que resulta no custo total mínimo. O propósito didático é mostrar como o conceito de derivada pode ser utilizado para identificar pontos mínimos de uma função, neste caso aplicada a uma situação econômica concreta de produção. O exercício também promove a conexão entre função quadrática, derivada e interpretação prática dos resultados, reforçando a modelagem matemática no contexto do cotidiano dos alunos.

Para resolver o problema corretamente, o estudante precisa dominar alguns conhecimentos prévios essenciais: saber reconhecer a função custo é uma parábola com concavidade voltada para cima, o que indica a presença de um único ponto mínimo; compreender que a derivada fornece a taxa de variação do custo em relação à quantidade produzida e que o ponto onde a derivada se anula corresponde ao mínimo ou máximo da função; além de ter habilidade para substituir corretamente o valor encontrado na função original e interpretar o resultado dentro do contexto da produção.

Durante a resolução, podem surgir dificuldades comuns: confusão sobre o que significa concavidade da parábola, erros na derivação, não perceber que o ponto crítico é um mínimo devido ao sinal do coeficiente principal, ou erros de cálculo ao substituir o valor na função. Outro possível equívoco é interpretar $x = 1$ como número de picolés não viável (pois em contextos reais talvez se produza mais de uma unidade), mas neste exercício o foco é entender o conceito de mínimo da função e a aplicação da derivada.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

O professor deve começar a aula estabelecendo o objetivo da turma, encontrar a quantidade que torna o custo o menor possível. A função dada é $C(x) = x^2 - 2x + 30$. O professor deve reforçar que, como o coeficiente a é 1 (positivo), a parábola tem concavidade para cima, e o vértice é um ponto mínimo. Em seguida, o professor introduz o conceito do cálculo, o custo mínimo ocorre onde a taxa de variação instantânea do custo em relação à quantidade produzida é zero.

Essa taxa de variação é medida pela derivada, C'(x). O professor aplica as regras de derivação para obter C'(x), a derivação de x^2 usa a regra da potência, resultando em 2x, a derivação de - 2x resulta em - 2, a derivada da constante 30 é 0. Derivada é o fundamento teórico que justifica o uso da fórmula do vértice, aplicando a regra da potência para derivar a função quadrática genérica.

QUESTÃO 07) Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de 64 m/s. Se o sentido da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será S(t) = -16t2 + 64t.

a) Ache a velocidade instantânea da bola ao fim de 1s.

RESOLUÇÃO UTILIZANDO O CONCEITO DE DERIVADA

A velocidade instantânea é dada pela derivada da função s quando t = 1.

Logo,

$S'(t) = -32t + 64$

$S'(1) = -32 . 1 + 64 = 32m/s$

Portanto, a velocidade instantânea da bola ao fim de 1s é igual a 32m/s.

b) Quantos segundos a bola leva para atingir seu ponto mais alto?

RESOLUÇÃO UTILIZANDO O CONCEITO DE DERIVADA

Analisando o gráfico, percebemos que o ponto mais alto é o vértice da parábola. Vimos que a abscissa do vértice correspondente ao valor de t para o qual a derivada de S é igual a zero.

Logo,

$S'(t) = -32t + 64 = 0$

$t = 2s$

Portanto, a bola leva 2s para atingir seu ponto mais alto.

ANÁLISE *A PRIORI*

A questão apresenta um movimento vertical uniformemente acelerado e tem como objetivo principal aplicar o conceito de derivada para determinar a velocidade instantânea e o tempo para atingir a altura máxima. Didaticamente, o exercício integra conceitos de função quadrática, derivada e física (cinemática), mostrando como a matemática permite analisar de forma precisa o comportamento de um corpo em movimento.

O estudante deve compreender que a velocidade instantânea é dada pela derivada da função posição em relação ao tempo. Dada a função $S(t) = -16t^2 + 64t$, a derivada é $S'(t) = -32t + 64$. Substituindo t = 1 segundo, obtém-se $S'(1) = -32 \cdot 1 + 64 = 32$ m/s. Portanto, a velocidade instantânea da bola ao fim de 1 segundo é 32 m/s, no sentido para cima.

O problema busca o tempo em que a bola atinge o ponto mais alto, ou seja, quando sua velocidade instantânea é zero. Como o ponto máximo da parábola corresponde ao vértice, iguala-se a derivada a zero: $-32t + 64 = 0$, resultando em $t = 2s$. Isso indica que a bola leva 2 segundos para alcançar a altura máxima.

As dificuldades comuns incluem: confundir posição e velocidade, esquecer que a derivada da posição fornece a velocidade instantânea, errar sinais ao derivar ou substituir os valores, ou interpretar incorretamente o ponto de máximo da parábola. Além disso, alguns alunos podem não relacionar o vértice da função quadrática com o ponto mais alto do movimento físico.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

A questão deve ser estruturada sobre a função de posição $S(t) = -16t^2 + 64t$. O professor deve enfatizar que, no cálculo, a velocidade instantânea é definida como a taxa de variação da posição ao longo do tempo, que é precisamente a derivada da função posição, $S'(t)$. Para responder ao item (a) (velocidade instantânea ao fim de 1s), o professor deve calcular $S'(t)$. O processo de derivação utiliza as regras básicas, a derivação de $-16t^2$ usa a regra da potência, resultando em $-32t$, a derivação de $64t$ usa a regra da potência, resultando em 64. O professor, então, calcula a velocidade no instante $t = 1$, $S'(1) = -32(1) + 64 = 32$ m/s. Esta etapa valida a derivada como uma ferramenta física precisa.

Para responder ao item (b) (tempo para atingir o ponto mais alto), o professor deve relacionar o conceito físico de altura máxima com o princípio matemático de ponto máximo. No ponto mais alto da trajetória, a velocidade da bola é momentaneamente nula. Como a velocidade é a derivada, o professor iguala a derivada a zero. A solução é $t = 2$ segundos. Este resultado mostra o tempo que a bola leva para atingir a altura máxima.

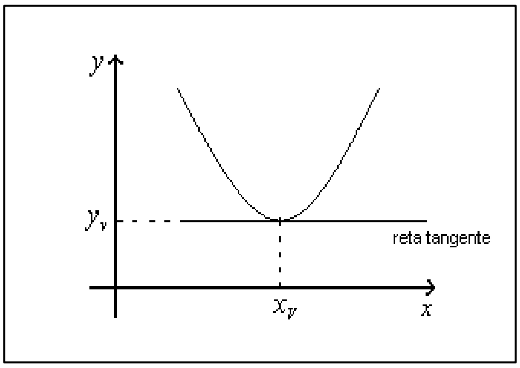
3.2. MAS POR QUAL MOTIVO DERIVAR E IGUALAR A ZERO?

Foi possível constatar de acordo com os estudos de Busse e Soares (2006), a definição do vértice de uma parábola, muitas vezes apresentada de forma desvinculada da função que lhe dá origem, pode ser mais bem compreendida quando contextualizada como o ponto que representa o extremo (máximo ou mínimo) de uma função quadrática. Nesse sentido, a abscissa do vértice corresponde ao valor de x onde esse extremo é atingido, enquanto a ordenada representa o valor máximo ou mínimo assumido pela função.

Assim, ao se interpretar a função quadrática como um modelo matemático de situações reais, torna-se evidente a relevância do vértice, pois ele expressa o ponto de maior ou menor valor do fenômeno estudado, permitindo uma leitura mais significativa e aplicada da parábola.

Entretanto, ao recorrer à interpretação geométrica da derivada, cuja ideia fundamental está associada ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em cada ponto, é possível determinar as coordenadas do vértice da parábola sem a necessidade de conhecer previamente suas raízes. Observa-se que, no vértice, a reta tangente é horizontal, o que implica que seu coeficiente angular, e consequentemente o valor da derivada nesse ponto, é igual a zero.

Figura 4: Gráfico da reta tangente



Fonte: Busse; Soares, 2006.

Logo, dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem-se que a derivada da função no ponto x_V é igual a zero, ou seja,

$$f'(x_V) = 0$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desta pesquisa permitiu reconhecer, de maneira fundamentada e crítica, que a reinserção de elementos do cálculo diferencial, especialmente o conceito de derivada, no ensino médio é não apenas possível, mas extremamente coerente com as demandas da educação matemática. A constatação de que a introdução do cálculo diferencial é possível, embora não seja uma prática comum no Ensino Médio brasileiro, exige uma análise profunda das barreiras estruturais que sustentam esse distanciamento. Historicamente, a ausência desses conteúdos no currículo básico não decorre de uma limitação intelectual ou cognitiva dos estudantes, mas de uma organização curricular engessada por sucessivas reformas que priorizaram a fragmentação de tópicos e a memorização procedimental em detrimento da construção de conceitos fundamentais (Carvalho, 1996).

Ao longo do trabalho, discutiu-se como a derivada, tradicionalmente reservada ao ensino superior, pode assumir uma forma intuitiva e acessível, capaz de enriquecer a compreensão dos estudantes sobre funções e variáveis, sem exigir o formalismo rigoroso de limites ou demonstrações que caracterizam o cálculo no nível superior.

O estudo mostrou que, ao aproximar o ensino da função quadrática de ideias fundamentais do cálculo, como taxa de variação, comportamento gráfico e otimização, pode ocorrer uma ampliação significativa da compreensão conceitual dos alunos. Nesse sentido, a derivada passa a ser entendida não como um operador abstrato, mas como um recurso matemático que permite interpretar situações reais de modo mais profundo, como problemas de maximização, análise de trajetórias, investigação de movimentos e decisões econômicas. Tal abordagem dialoga diretamente com as competências e habilidades previstas na BNCC, que valorizam o pensamento, a modelagem, o raciocínio lógico e a leitura crítica de situações envolvendo dependência entre grandezas.

O uso das noções de cálculo no ensino médio, mostrou-se uma estratégia que não busca antecipar conteúdos acadêmicos, mas sim promover um salto qualitativo na compreensão matemática, preparando o estudante para lidar com ideias mais avançadas futuramente. A pesquisa evidenciou que muitos equívocos e dificuldades enfrentados por alunos do ensino superior, especialmente na transição para o cálculo, poderiam ser minimizados se conceitos intuitivos fossem explorados de maneira adequada na educação básica. Assim, a aproximação funciona como um elo importante para a construção de significados, promovendo uma aprendizagem mais sólida e conectada.

A partir da Engenharia Didática, utilizada aqui em suas fases iniciais como metodologia de concepção, análise e antecipação de aprendizagens, foi possível prever como os estudantes poderiam lidar com noções como taxa de variação, comportamento crescente e decrescente, interpretação geométrica do vértice e extremação de funções. As análises *a priori* realizadas mostraram que o uso da derivada como ferramenta conceitual pode, de fato, favorecer o entendimento do vértice da parábola, evitando que esse elemento seja apresentado como simples aplicação de fórmulas prontas. Ao contrário, o vértice passa a ser percebido como um ponto de mudança no comportamento da função, onde a reta tangente é horizontal e, portanto, a variação instantânea é nula.

A resolução das questões apresentadas no capítulo 3 evidenciou, na prática, que situações comuns do ensino médio, como problemas de geometria, economia, cinemática e produção, podem ser reestruturadas de modo a incorporar o conceito de derivada de maneira natural e significativa. Isso demonstra que há espaço, no currículo da educação básica, para uma reconstrução do ensino de funções que vá além de métodos algébricos tradicionais, permitindo que o estudante compreenda o “porquê” das técnicas e desenvolvam modos de pensar mais próximos do que se espera no campo da matemática.

Também se constatou que essa reinserção tem potencial para fortalecer a autonomia intelectual dos alunos, uma vez que a derivada permite interpretar mudanças, prever comportamentos e analisar fenômenos, capacidades essenciais para a leitura crítica da realidade contemporânea.

Embora a pesquisa não tenha alcançado a etapa de experimentação, devido às limitações temporais próprias deste trabalho, ela oferece bases promissoras para aplicações futuras em sala de aula, especialmente em projetos de iniciação científica, monitoria, oficinas ou até mesmo em componentes curriculares suplementares. A implementação completa da Engenharia Didática, aqui proposta para estudos posteriores, poderá validar as previsões e confirmar, com maior precisão, os impactos dessa abordagem no processo de aprendizagem.

Conclui-se, portanto, que o estudo realizado reafirma a pertinência e a potencialidade pedagógica de se trabalhar o cálculo diferencial no ensino médio, de forma introdutória, conceitual e contextualizada. Essa reinserção não pretende substituir conteúdos formais, mas ampliar as possibilidades de compreensão dos estudantes, favorecer a modelagem de situações reais e construir pontes entre a matemática escolar e a matemática universitária. Espera-se que este trabalho inspire futuras pesquisas, reforçando a importância de um ensino de matemática que seja ao mesmo tempo moderno e significativo.

5. REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. Acesso em 28 out. 2025.

ÁVILA, Geraldo. **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n.18, p.1-9, 1991. Disponível em RPM 18 - O ensino de Cálculo no 2.ºgrau Acesso em 17 set. 2025.

ÁVILA, Geraldo. **Limites e Derivadas no Ensino Médio**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro n. 60, p. 30-38, 2006. Disponível em RPM 60 - Limites e derivadas no ensino médio?. Acesso em 17 set. 2025.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Educação é a Base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 22 jul. 2025.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008. Acesso em 28 out. 2025.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos: Função Afim e Função Quadrática**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020. (Manual do Professor – PNLD 2021). Disponível em: https://storage.googleapis.com/edocente-content-production/PNLD/PNLD_2021_OBJETIVO_2/Obra-2e27fb8f-372b-4000-b524-9c378cdee42f/2e27fb8f-372b-4000-b524-9c378cdee42f.pdf. Acesso em 17 set. 2025.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A.** 6. ed. Santa Maria: Editora UFSM, 2011. Disponível em: https://tsxvpsbr.dyndns.org/arquivos/UFFS/Calculo%20A%20-%20Diva%20Mar%C3%ADlia%20Flemming%20%26%20Mirian%20Buss%20Gon%C3%A7alves%20-%206%C2%AA%20Edi%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em 17 set. 2025.

FREITAS, Lesley Carla Leite de. **Introduzindo limites e derivadas no ensino médio: uma experiência possível**. 2021. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, Monteiro, 2021. Disponível em: https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/23720/4/PDF%20-%20Lesley%20Carla%20Leite%20de%20Freitas.pdf. Acesso em 25 nov. 2024.

HAUENSTEIN, Débora Marília; PORTO, Guilherme. **Cálculo no ensino médio: histórico e perspectivas**. Brazilian Journal of Development, Curitiba, v. 8, n. 4, p. 26658-26667, abr. 2022. DOI: https://doi.org/10.34117/bjdv8n4-260. Acesso em 19 jul. 2025.

HENRIQUE, Y. **Estudo mostra que 5% dos alunos do ensino médio possuem bons resultados**. Tribuna de Minas: Mais Tendências, 1 maio 2025. Disponível em: https://tribunademinas.com.br/colunas/maistendencias/estudo-mostra-que-5-dos-alunos-do-ensino-medio-possuem-bons-resultados/. Acesso em 12 nov. 2025.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 1: Conjuntos, Funções**. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. Disponível em: https://barbosadejesu.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/09/fundamentos-da-matematica-elementar-1-.pdf. Acesso em 17 set. 2025.

LIMA, Gabriel Loureiro de. **O ensino do cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/960_96_ID.pdf. Acesso em 19 jul. 2025.

NEVES, Paulo de Tarso Smith. **Introdução ao ensino do cálculo e aplicações da derivada no ensino médio**. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016. Disponível em: https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/INTRODU%C3%87%C3%83O-AO-ENSINO-DO-C%C3%81LCULO-E-APLICA%C3%87%C3%95ES-DA-DERIVADA-NO-ENSINO-M%C3%89DIO.pdf. Acesso em 25 nov. 2024.

PEREIRA, Luan Diego de Lima; RODRIGUES, Aline Menezes; PEREIRA, Wilquer de Lima; BASONI, Fabiany Corrêa; BASONI, Renan Corrêa. **Cálculo Diferencial e Integral: Uma Introdução ao Ensino Médio**. In: Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEMat), 2018. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID8850_06092018221413.pdf. Acesso em 19 jul. 2025.

RIOS, Claudene Ferreira Mendes. **Possíveis contribuições dos conceitos do cálculo não-standard para o ensino médio**. 2005. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia; Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2005. Disponível em: https://ppgefhc.ufba.br/sites/ppgefhc.ufba.br/files/claudene_ferreira_mendes_rios_2005.pdf. Acesso em 25 nov. 2024.

ROCHA, Joice Stella de Melo. **O ensino de cálculo no ensino médio**. 2017. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, 2017. Disponível em: https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC/2017/JOICE_STELLA_DE_MELO_ROCHA.pd. Acesso em 19 jul. 2025.

SILVA, E. P. **Cálculo em matemática: um assunto para o ensino em geral ou específico de educação técnica**. Heuristicus em Educação (HeDuc), v. 2, n. 2, p. 65-? , 2016. Disponível em: https://www.scielo.br/j/heduc/a/5xD5hHpMCdqQHy5MjSHtRvh/?lang=pt. Acesso em 19 jul. 2025.