



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA-UNEB**  
**DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS - CAMPUS VI**  
**COLEGIADO DE MATEMÁTICA**

**APARECIDO OLIVEIRA ARAUJO**

**JOÃO VICTOR SILVA OLIVEIRA**

**ERRE SE POSSÍVEL! O DESAFIO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA**

**CAETITÉ-BA**

**2018**

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA-UNEB  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS – CAMPUS VI  
COLEGIADO DE MATEMÁTICA**

**APARECIDO OLIVEIRA ARAUJO**

**JOÃO VICTOR SILVA OLIVEIRA**

**ERRE SE POSSÍVEL! O DESAFIO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao curso de graduação em Matemática, Universidade do Estado da Bahia – UNEB, como requisito parcial para obtenção do grau de licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Msc. Daniel de Jesus Silva

**CARTITÉ-BA**

**2018**

**APARECIDO OLIVEIRA ARAUJO**

**JOÃO VICTOR SILVA OLIVEIRA**

**ERRE SE POSSÍVEL! O DESAFIO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao curso de graduação em Matemática, Universidade do Estado da Bahia – UNEB, como requisito parcial para obtenção do grau de licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Msc. Daniel de Jesus Silva

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Msc. Daniel de Jesus Silva (Orientador e presidente da banca)

Universidade do Estado da Bahia - UNEB

---

Prof. Msc. Francisco Flávio Alves Felipe

Universidade do Estado da Bahia - UNEB

---

Prof. Esp. Júlio Max Xavier da Rocha

Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Caetité, 05 de março de 2018.

Dedico este trabalho a todos meus alunos, desde quando atuei como estagiário até os que porventura virem a ser aluno ao logo da minha atuação docente. Estes foram a principal motivação para esta realização. Também a todos professores de matemática que fazem de sua carreira uma contínua formação em prol de uma educação de qualidade.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças durante as adversidades enfrentadas neste percurso, também não posso deixar de agradecer a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu chegasse até aqui, como familiares e amigos, em especial minha mãe, Nadir Saraiva de Oliveira Araújo, que foi quem mais me ajudou neste período ao lado de meu pai Juraci Alves de Araújo Sobrinho. A todos os meus professores também quero expressar meus sinceros agradecimentos por terem compartilhado comigo o seu conhecimento, em especial agradeço ao professor Daniel tanto pelos ensinamentos em Geometria analítica I, e Cálculos I, II, III e IV quanto pelas orientações feitas neste trabalho. Por último, mas não menos importantes agradeço aos meus colegas que dividiram comigo não só os momentos de descontração, mas também as dificuldades, frustrações e claro o conhecimento.

A todos deixo um muito obrigado e a certeza de que estarão sempre em minhas melhores lembranças...

Aparecido Oliveira Araújo

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus por ter me concedido a oportunidade de entrar e permanecer até o final, sempre me dando forças para prosseguir sem medo nessa minha trajetória.

Aos meus pais, José e Dilma, que forneceram a base necessária para hoje eu me tornar que sou, entregando-me parte de seu tempo em forma de proteção, encorajamento, paciência

Aos meus irmãos que acompanharam de perto toda a minha caminhada e que sei que sempre estarão ao meu lado.

Aos meus colegas, que ultrapassaram todas as barreiras ao meu lado, vencendo suas batalhas e de algum modo me ajudando a vencer as minhas.

Aos amigos que já tinha e aos que encontrei ao longo dessa estrada, que a todo o momento se fizeram presentes quando mais precisei.

Ao corpo docente da UNEB e demais funcionários que fizeram e fazem parte desta minha história, em especial o professor Daniel de Jesus que me norteou durante a conclusão de importantes ciclos vividos nesta minha jornada.

A descoberta é fundamental no ensino da matemática, pois, como sabemos, essa disciplina inspira medo aos alunos e foge dela quem pode. No entanto, quando o aluno consegue fazer descobertas, as quais, na verdade, são redescobertas, então surge o gosto pela aprendizagem... e nenhuma área tem precisado mais que a matemática fazer com que seus alunos gostem dela.

Sérgio Lorenzato

## RESUMO

Este trabalho é fruto de uma pesquisa qualitativa, do tipo exploratória, onde apresentaremos o produto educacional por nós intitulado como “Erre se possível!”, o qual tem funcionamento intimamente ligado às propriedades da parábola. No seu decorrer analisamos a relevância deste tipo de produto através de respaldos teóricos encontrados durante um estudo bibliográfico em que se buscou autores que defendem este tipo de método de ensino, como Lara (2005), Lorenzato (2006), Mendes (2011), além de materiais de instrução como os PCNs (1997) organizados por órgãos competentes. De modo geral pode se notar o respaldo da teoria construtivista no uso desta proposta, que vem em produção crescente nos trabalhos de mestrado e em eventos de educação matemática. Com a aplicação do produto objetiva-se construir o conhecimento de alunos do 1º ano do ensino médio no que se refere a funções de segundo grau e seu gráfico, pois sua metodologia de aplicação é fundamentada principalmente na capacidade reflexiva da parábola, sendo possível a partir daí, trabalhar vários outros conceitos pertinentes ao conteúdo. Nos capítulos aqui presentes, são apresentados a visão de estudiosos sobre a importância da utilização de jogos em sala de aula as quais nos possibilitou perceber que estes, quando bem planejados, enriquecem o ensino, muitas vezes dando significação e aplicabilidade ao conteúdo. Consta também uma revisão sobre as funções quadráticas, parábolas e suas propriedades deixando claro a presença destas implicações matemáticas no jogo, há ainda a apresentação do aparato em si, analisando em quais aspectos sua utilização seria relevante para criar um ambiente que favoreça a aprendizagem. Este estudo levou em consideração os posicionamentos dos pesquisadores estudados e as metas educacionais que circundam o exercício da docência. Acreditamos estar dando além de uma contribuição teórica sobre a aplicação deste recurso à comunidade acadêmica, uma pesquisa que pode ser estendida a campo efetuando a aplicação e análise de resultados haja visto que já se tem este estudo no campo teórico.

**Palavras-chave:** Produto educacional; função do segundo grau; aprendizagem significativa; jogos; aplicabilidade.

## ABSTRACT

This work is the result of a qualitative research, of the exploratory type, where we'll present the educational product titled "Erre if possible!", which has a functioning closely linked to the properties of the parable. In the course of this study, we analyze the relevance of this type of product through theoretical support found during a bibliographic study in which authors who defend this type of teaching method were searched, as Lara (2005), Lorenzato (2006), Mendes (2011) and instructional materials such as PCNs (1997) organized by competent bodies. In general, we can note the support of the constructivist theory in the use of this proposal, which comes in increasing production in the master's and mathematical education events. The application of the product aims to build the knowledge of students of the 1st year of high school in relation to second grade functions and his graph, because its methodology of application is based mainly on the reflective capacity of the parable, being possible from hence, to work on various other concepts relevant to the content. In the chapters presented here, students are presented with a view of the importance of the use of games in the classroom which enabled us to perceive that these, when well planned, enrich the teaching, often giving meaning and applicability to the content. There is also a review on the quadratic functions, parables and their properties making clear the presence of these mathematical implications in the game, there is also the presentation of the apparatus itself, analyzing in what aspects its use would be relevant to create an environment that favors learning. This study took into account the positions of the researchers studied and the educational goals that surround the exercise of teaching. We believe that we are giving a theoretical contribution on the application of this resource to the academic community, a research that can be extended to the field by applying and analyzing results, since we already have this study in the theoretical field.

**Key-words:** Educational product; second degree function; meaningful learning; games; applicability.

## LISTAS DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Representação geométrica dos elementos de uma parábola .....	20
<b>Figura 2</b> – Reta secante a uma parábola .....	22
<b>Figura 3</b> – Produto educacional: “Erre se possível!” .....	30
<b>Figura 4</b> – Parábola: representação geométrica da função quadrática .....	32
<b>Figura 5</b> – Produto educacional com traços acentuados .....	33
<b>Figura 6</b> – Figura 6 - Representação das quatro possíveis posições da parábola ...	34
<b>Figura 7</b> – Sinais paralelos ao eixo do parabolóide refletem-se na superfície e se concentram no foco .....	35
<b>Figura 8</b> – Representação geométrica dos ângulos de incidência e de reflexão .....	36

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1 Objetivos .....	13
1.2 Estrutura do trabalho .....	14
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>15</b>
2.1 Ponderações preliminares: Produto Cartesiano .....	15
2.2 Função quadrática: definições e representações .....	17
2.3 A parábola: o gráfico da função quadrática e suas propriedades.....	20
2.4 Jogos pedagógicos: produto educacional com potencial .....	23
<b>3 METODOLOGIA .....</b>	<b>27</b>
3.1 Abordagem da pesquisa.....	27
3.2 Cenário da pesquisa .....	28
3.3 A construção do Produto Educacional: Erre se possível! .....	29
<b>4. ANÁLISE E REFLEXÃO DO JOGO ERRE SE POSSIVEL! O DESAFIO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA .....</b>	<b>32</b>
4.1 Princípios matemáticos no “Erre se possível”: Propriedades da função quadrática .....	32
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>37</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>39</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Durante a graduação em Licenciatura em Matemática, cursamos o componente curricular Tendências em Educação Matemática, na qual foi de grande relevância a exploração de situações que enfatizavam a compreensão significativa de conceitos, integrando teoria e prática, oferecendo conhecimentos que instrumentalizam os professores para o ato docente. Este curso tornou possível o aprofundamento numa temática específica, Jogos na Educação Matemática, de modo que contribuiu para uma melhor compreensão e desenvolvimento do conhecimento científico associado aos aspectos didáticos-metodológicos do contexto escolar.

Permeando as discussões sobre tal temática nos sentimos instigados a vivenciar na prática a atual situação da educação formal, isso foi presenciado durante os estágios, períodos em que observamos algumas turmas de ensino fundamental e que foi perceptível o pouco apreço dos estudantes para com a disciplina e seus conteúdos, ainda foi possível notar que os próprios alunos que aparentavam ter compreendido o conteúdo não se saíam bem em problemas que enfatizavam situações de aplicabilidade dos conteúdos, assim aparentemente eles estavam apenas treinando para resolver as questões. Outro momento relevante para a escolha do jogo como tema desse trabalho foi a oportunidade de trabalhar como professor substituto, nesta ocasião ficou claro que realmente muitas vezes os aprendizes apenas memorizam as técnicas de resolução das situações expostas pelo professor e que geralmente não visualizam aplicabilidade dos conteúdos. Após a constatação de tais fatos colocamos em prática uma oficina lúdica de Origami durante o estágio supervisionado II, esta trouxe muita interação do público alvo sem deixar de lado o aprendizado do conteúdo proposto pela instituição que nos recebeu.

Apesar desta oficina não se tratar propriamente de um jogo, notamos que eles ficaram maravilhados com a possibilidade de trabalhar assuntos da escola com atividades do seu cotidiano. Diante do sucesso alcançado foi desenvolvido o apreço que já tínhamos pelos jogos pedagógicos e com isso nos sentimos desafiados a construir algo mais diferenciado dentro deste recurso e buscamos na literatura subsídios que nos auxiliassem futuramente em um trabalho pautado nessa tendência.

São encontrados diversos trabalhos, em eventos de discussões sobre educação matemática, que abordam os benefícios do jogo no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Todas essas discussões ocorrem devido à

matemática ainda ser uma disciplina com auto índice de repetência e evasão escolar no nosso sistema educacional. Além disso, a matéria é considerada, por inúmeros alunos como uma matéria “difícil” e conseqüentemente “chata”, devido aos seus excessivos cálculos e fórmulas, que os docentes expõem aos seus alunos para serem memorizadas.

As experiências vividas em oficinas com jogos e as discussões teóricas durante a graduação, juntamente com o quadro já exposto, levou à discussão acerca de possíveis situações com jogo, na busca de contribuir para desmistificar esse panorama concernente à disciplina matemática.

A partir daí, surgiu a ideia de reproduzir o jogo “Erre se possível!” para estudar o conteúdo função quadrática, que quase sempre é abordado pelos docentes de uma forma mecanizada. Convém ressaltar que, esse produto educacional não se limita a um jogo com regras que podem contribuir para ajudar o aluno a desenvolver o raciocínio lógico, mas sim, um aparato com implicações matemáticas a respeito da parábola que direciona o aprendizado baseado na aplicabilidade do conteúdo no nosso cotidiano.

Para isto buscamos responder aqui a inquietação: Como o jogo “Erre se possível” pode contribuir para uma aprendizagem significativa do conteúdo função quadrática bem como propriedades da parábola?

## **1.1 Objetivos**

### **Objetivo geral**

Analisar a potencialidade do jogo “Erre se possível!” na construção do conhecimento discente sobre funções do segundo grau.

### **Objetivos específicos**

- Trabalhar o conteúdo parábola e equação do segundo grau com o auxílio do produto educacional;
- Visualizar a propriedade reflexiva da parábola através do jogo “Erre se possível”;
- Apresentar os conceitos matemáticos da parábola de forma lúdica;

- Perceber a aplicabilidade da matemática no cotidiano; desconstruir preconceitos relacionados à matemática.

## 1.2 Estrutura do trabalho

O seguinte trabalho será dividido em cinco capítulos, nos quais explanaremos a respeito do produto educacional, sua aplicação e seus fundamentos, de modo que seja possível deixar registrado com clareza todos os nossos objetivos e os caminhos utilizados para alcançá-los.

No segundo capítulo, fazemos uma revisão bibliográfica para relatar a importância da utilização de jogos como forma de auxiliar na metodologia de ensino, assim como também fazemos um comentário sobre o que são funções quadráticas, seu gráfico e algumas de suas propriedades.

O terceiro capítulo é dedicado a caracterizar o tipo de investigação utilizada, além da apresentação do produto educacional, como ele foi construído e qual a metodologia de aplicação que pretendemos utilizar.

No quarto capítulo discutimos o princípio matemático por trás do funcionamento do produto educacional afim de encontrar meios para a utilização em sala de aula, além de trabalhar com a parábola pela visão da geometria analítica com maior profundidade.

Por fim, no quinto capítulo fazemos uma pequena síntese de todo o apresentado durante esse trabalho monográfico.

## 2.FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Há tempos, os métodos tradicionais de ensino nas instituições escolares estão recebendo críticas de pesquisadores da educação. Pode-se mencionar vários movimentos que buscaram revolucionar o ensino e as maneiras de se transmitir os conteúdos escolares, como é o caso do “movimento da matemática moderna”, ocorrido por volta da segunda metade do século XX, o qual contribuiu drasticamente para o ensino da matemática.

A matemática moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente por se considerar que, juntamente com a área de ciências naturais, ela se constituía via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico.

Desse modo, a matemática a ser ensinada era aquela concebida como lógica, compreendida a partir das estruturas, conferida um papel fundamental à linguagem matemática. Os formuladores dos currículos dessa época insistiam na necessidade de uma reforma pedagógica, incluindo a pesquisa de materiais novos e métodos de ensino renovados – fato que desencadeou a preocupação com a Didática da matemática, intensificando a pesquisa nessa área. (PCNs, 1997, p.20).

Esses materiais novos acompanhados de métodos de ensino inovadores têm aparecido na atualidade como resultado de pesquisas acadêmicas de mestrados profissionais e de graduação na forma de produtos educacionais, que fazem uso de materiais concretos manipuláveis e/ou jogos pedagógicos para estudar determinados conteúdos matemáticos.

Nesse sentido, o foco dessa revisão bibliográfica está direcionado em dois aspectos que pretendemos conectar: para as funções reais de uma variável real, isto é, funções  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  que têm como domínio um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  e cujos valores  $f(x)$ , para todo  $x \in X$ , são números reais. Abordaremos um tipo particular de função: a função quadrática com interesse em explorar as propriedades do seu gráfico; e revisaremos em paralelo algumas discussões sobre jogos pedagógicos, no intuito de fundamentar teoricamente um produto educacional no formato de um jogo, elaborado tomando como base os princípios da parábola.

### 2.1 Ponderações preliminares: Produto Cartesiano

A discussão preliminar para abordar o tema inicia-se com o produto cartesiano, onde existe uma estrutura organizada de dois eixos ortogonais (um dos  $X$ , o outro dos  $Y$ ) possibilitando uma relação entre valores desses eixos formando pares ordenados. Um par ordenado  $p = (x, y)$  é formado por um objeto  $x$ , chamado a primeira coordenada de  $p$  e um objeto  $y$  chamado a segunda coordenada de  $p$ .

O produto cartesiano  $X \times Y$  de dois conjuntos  $X$  e  $Y$  é o conjunto  $X \times Y$  formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$  cuja primeira coordenada  $x$  pertence a  $X$  e cuja segunda coordenada  $y$  pertence a  $Y$ , e podemos escrever:

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

Nesse contexto ocorre o que matematicamente é denominado de relação entre  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}$ . Um exemplo particularmente importante de relação é a relação funcional. Ela ocorre quando se tem uma função  $f: X \rightarrow Y$ . Diz-se então que o elemento  $x \in X$  está relacionado com o elemento  $y \in Y$  quando  $y = f(x)$ . De acordo com Leithold (1994):

Uma função é um conjunto de pares ordenados de números  $(x, y)$ , sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. O conjunto de todos os valores admissíveis de  $x$  é chamado **domínio** da função e o conjunto de todos os valores resultantes de  $y$  é chamado a **imagem** da função. (LEITHOLD, 1994, p.32).

O gráfico de uma relação  $R$  entre os conjuntos  $X$  e  $Y$  é o subconjunto  $G(R)$  do produto cartesiano  $X \times Y$  formado pelos pares  $(x, y)$ . A fim de que um subconjunto  $G \subset X \times Y$  seja o gráfico de alguma função  $f: X \rightarrow Y$  é necessário que  $G$  cumpra as seguintes condições:

G1. Para todo  $x \in X$  existe um par ordenado  $(x, y) \in G$  cuja primeira coordenada é  $x$ .

G2. Se  $p = (x, y)$  e  $p' = (x, y')$  são pares pertencentes a  $G$  com a mesma primeira coordenada  $x$  então  $y = y'$  (isto é,  $p = p'$ ).

Estas condições podem ser resumidas numa só, dizendo-se que para  $x \in X$  existe um, e somente um,  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in G$ . Ainda segundo Menem e Foulis (1982), “o gráfico de uma função  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  no plano  $xy$  tal que  $x$  pertence ao domínio de  $f$  e  $y$  a imagem de  $f$ , e  $y = f(x)$ ” (MUNEM e FOULIS, 1982, p.21)

Praticamente todos os livros didáticos adotados nas escolas do Brasil definem uma função  $f: X \rightarrow Y$  como um subconjunto do produto cartesiano  $X \times Y$  com as propriedades G1 e G2 acima enunciadas. Entretanto Lima (2013) comenta que:

[...] Essa definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza função de outra) ou resultado de um movimento. Quem pensaria numa rotação como um conjunto de pares ordenados? Os matemáticos e (principalmente) os usuários da Matemática olham para uma função como uma correspondência, não como um conjunto de pares ordenados. Poder-se-ia talvez abrir uma exceção para os lógicos, quando querem mostrar que todas as noções matemáticas se reduzem, em última análise, à ideia pura de conjunto. Mas certamente este não é o caso aqui. Se definirmos uma função  $f: X \rightarrow Y$  como um subconjunto particular do produto cartesiano  $X \times Y$ , qual seria a definição matemática do gráfico de uma função? (LIMA, 2013, p.85).

Em suma, a terminologia que consideramos adequada é a seguinte: um subconjunto qualquer de  $X \times Y$  é o gráfico de uma relação de  $X$  para  $Y$ . Se esse conjunto cumpre as condições G1 e G2 acima estipulados, ele é o gráfico de uma função.

## 2.2 Funções quadrática: definições e representações

Diz-se que  $p = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função polinomial quando são dados números reais  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Se  $a_n \neq 0$ , dizemos que  $p$  tem grau  $n$ . Nesse sentido, quando  $n = 2$ , essa função é dita de grau 2 ou função do 2º grau, ou ainda função quadrática. De acordo Lima (2013):

O estudo de funções quadráticas tem sua origem na resolução de equações do segundo grau. Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo sua soma  $s$  e seu produto  $p$ .

[...] os números procurados são as raízes da equação do segundo grau  $x^2 - sx + p = 0$ . Com efeito, se um dos números é  $x$ , o outro é  $s - x$  e seu produto é  $p = x(s - x) = sx - x^2$ , logo  $x^2 - sx + p = 0$ . (LIMA, 2013, p.122-123)

Com seu espaço particular nos estudos sobre funções, Temos que “uma aplicação de  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  recebe o nome de *função quadrática* ou do 2º grau quando associa a cada  $x \in \mathbb{R}$  o elemento  $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$ , em que  $a, b, c$  são números reais dados e  $a \neq 0$ .” (IEZZI, 2004, p.138)

Quando afirmamos que duas funções quadráticas são iguais, isso significa dizer que seus coeficientes  $a, b$  e  $c$  também são iguais. Sejam as funções  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e  $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ , com  $a \neq 0, a' \neq 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , dizer que  $f(x) = g(x)$  implica que  $a = a', b = b'$  e  $c = c'$ .

Essa discussão pode ser provada da seguinte maneira. Sendo  $f(x) = g(x)$ , temos que por consequência  $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ .

[...] Tomando  $x = 0$ , obtemos  $c = c'$ . Então, cortando  $c$  e  $c'$ , tem-se  $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular, esta igualdade vale para todo  $x \neq 0$ . Neste caso, cancelando o  $x$ , obtemos  $ax + b = a'x + b'$  para todo  $x \neq 0$ . Fazendo primeiro  $x = 1$  e depois  $x = -1$ , vem que  $a + b = a' + b'$  e  $-a + b = -a' + b'$ , donde concluímos  $a = a'$  e  $b = b'$ . (LIMA, 2013, pag. 118)

Ainda sobre a igualdade  $f(x) = g(x)$ . Essas duas funções quadráticas também serão iguais caso assumam os mesmos valores em três pontos distintos  $x_1, x_2, x_3$ . Caso isso aconteça, elas assumirão valores iguais para qualquer outro valor de  $x$ .

Considerando que elas assumam o mesmo valor nesses três pontos, temos que  $f(x_1) = g(x_1), f(x_2) = g(x_2)$  e  $f(x_3) = g(x_3)$ , isolando o segundo membro dessas igualdades, teremos

$$\begin{cases} (a - a')x_1^2 + (b - b')x_1 + c - c' = 0 \\ (a - a')x_2^2 + (b - b')x_2 + c - c' = 0 \\ (a - a')x_3^2 + (b - b')x_3 + c - c' = 0 \end{cases}$$

Ou ainda escrevendo  $(a - a') = \alpha, (b - b') = \beta$  e  $(c - c') = \gamma$ ,

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

Por meio da resolução desse sistema é possível encontrar  $\alpha = 0, \beta = 0$  e  $\gamma = 0$  como uma solução, sendo assim temos provada a propriedade de que quando duas funções quadráticas possuem três pontos distintos em comum, elas são iguais.

Importante salientar que os três pontos em questão não devem possuir mesma inclinação, caso isso aconteça, o fato de serem colineares faria com que definissem uma reta ao invés de uma parábola. Seria o mesmo que dizer que a função  $f(x) =$

$ax^2 + bx + c$ , assume  $a = 0$ , e como já foi dito, para que uma função seja quadrática, isso não pode acontecer.

Ao se trabalhar com funções quadráticas, é importante falar sobre sua *forma canônica*, devido as suas aplicações, sendo a mais conhecida delas a própria resolução de equações de segundo grau.

Considerando o trinômio  $ax^2 + bx + c$ . Colocando-se  $a$  em evidencia, se obtém

$$a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$$

Utilizando-se do método de completar quadrados, escrevemos:

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

Ou ainda:

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

Sendo esta forma a chamada forma canônica de se escrever um trinômio do segundo grau. Como dito, a partir dela é possível encontrar a formula que determina as raízes de uma equação de grau dois. Sendo  $ax^2 + bx + c = 0$  uma representação genérica dessa equação de segundo grau, para  $a \neq 0$ , dizemos então que:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0$$

Isolando o  $x$ , obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chamamos a expressão  $b^2 - 4ac$  de *discriminante*, sendo representado por  $\Delta$ . É ele o responsável por determinar se a equação possui duas raízes distintas, uma única raiz (raiz dupla) ou nenhuma raiz, quando assume respectivamente valores maiores, menores ou iguais a zero.

Por meio da utilização da forma canônica de uma função do segundo grau é ainda possível determinar o ponto máximo ou mínimo que ela pode alcançar, sendo esse o chamado vértice da parábola. Suponhamos que  $a > 0$ , a função assumiria seu ponto mínimo quando a parcela  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  fosse igual a zero, já que sempre assume valores positivos somados a constante  $\left( \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$ , para tanto dizemos que  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Para determinar então o valor onde  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , quando  $a > 0$ , assume seu ponto mínimo, fazemos:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

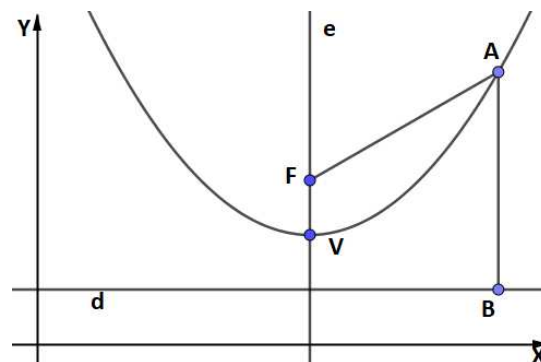
Da mesma maneira, quando  $a < 0$  a função vai obter seu ponto máximo, sendo assim, é possível afirmar que o vértice de uma parábola é definido pelas coordenadas:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

### 2.3 A Parábola: o gráfico da função quadrática e suas propriedades

Considere uma parábola qualquer cujo vértice se localiza no ponto  $V = (m, k)$ , utilizando da forma canônica de uma função quadrática, podemos representar essa parábola por  $f(x) = a(x - m)^2 + k$ , onde  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , seu foco será localizado no ponto  $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$  e sua reta diretriz será  $y = k - \frac{1}{4a}$ .

**Figura 1** – Representação geométrica dos elementos de uma parábola



**Fonte:** Elaborada pelos autores

Por se tratar de uma parábola, a semirreta  $AF$  deve possuir o mesmo comprimento da semirreta  $AB$ . Para provar essa afirmação, basta verificar a igualdade, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , entre a distância do foco ao ponto  $A = (x, a(x - m)^2 + k)$  e a distância desse mesmo ponto a reta diretriz  $d$ , e para tanto faremos:

$$\sqrt{(x - m)^2 + \left[a(x - m)^2 + k - \left(k + \frac{1}{4a}\right)\right]^2} = a(x - m)^2 + k - \left(k - \frac{1}{4a}\right) \Leftrightarrow$$

$$(x - m)^2 + \left[a(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$$

Em relação ao eixo das abcissas, um gráfico de uma função de segundo grau pode ter dois pontos em comum, apenas um ponto, ou nenhum ponto, o que é relativo

a quantidade de raízes que essa função possui quando  $y = 0$ . Considerando que o discriminante  $\Delta > 0$ , existem duas possibilidades de raízes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Encontrando o ponto médio entre esses valores, teremos  $x = -\frac{b}{2a}$  que representa a abcissa do vértice, ou ainda o eixo dessa parábola. Caso a parábola tangencie o eixo  $OX$ , a função possui apenas uma raiz (raiz dupla) para  $y = 0$ , sendo esse ponto o próprio vértice; e caso a parábola esteja totalmente acima do eixo  $OX$ , ela não possui nenhuma raiz, isso considerando que a parábola tem concavidade voltada para cima, caso a concavidade seja voltada para baixo as discussões são similares.

Como já dito anteriormente, uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , só pode assumir seu valor mínimo quando  $a > 0$ , sendo assim é possível concluir que ela é ilimitada superiormente, ou seja, sua concavidade é voltada para cima. Analogicamente, quando  $a < 0$ , ela será ilimitada inferiormente, sendo então sua concavidade voltada para baixo.

Por meio de uma translação vertical e horizontal de uma parábola num plano cartesiano, é possível determinar em que situações duas funções quadráticas possuem gráficos congruentes. Considerando o gráfico da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , cujo vértice se encontra no ponto

$$V = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

Submetendo essa função a uma translação horizontal  $(x, y) \mapsto (x - m, y)$ , onde  $m$  representa a abcissa do vértice, obtemos uma nova parábola cuja abcissa do vértice é igual a zero, sendo representada por

$$g(x) = f(x - m) = ax^2 + k$$

Onde  $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , ou seja, a ordenada do vértice dessa parábola.

Fazemos em seguida uma translação horizontal  $(x, y) \mapsto (x, y - k)$ , sendo assim obtida uma nova parábola cuja ordenada do vértice será igual a zero, logo ela estará localizada na origem do plano cartesiano. Essa nova parábola pode ser representada por

$$h(x) = g(x) - k = ax^2$$

O que significa que os gráficos das funções  $f(x)$  e  $h(x)$  são congruentes, já que um se transforma no outro apenas pelo fato de ter ocorrido uma translação horizontal seguida de uma translação vertical.

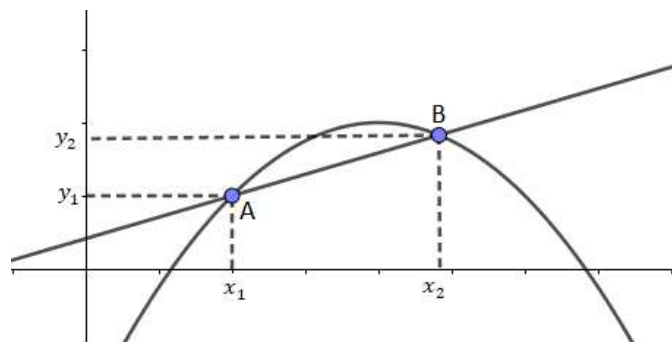
Da mesma forma, podemos concluir também que o gráfico da função  $\varphi = -ax^2 + bx + c$  é congruente a  $\psi = -ax^2$ , que por sua vez é congruente a  $h(x) = ax^2$  por meio da transformação  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ , que se trata de uma reflexão em relação ao eixo  $OX$ . Podemos então enunciar que se  $a' = \pm a$ , então os gráficos das funções  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e  $\varphi = a'x^2 + b'x + c'$  são congruentes.

É possível ver então que os coeficientes  $b, b', c, c'$  são irrelevantes para uma discussão sobre congruência, sendo eles os responsáveis por apenas determinar a posição da parábola no plano cartesiano.

O valor de  $c$  determina a ordenada do ponto em que a parábola toca o eixo  $OY$ , para provar isso basta considerar que numa função do tipo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , tenhamos  $x = 0$ , dessa forma seu par ordenado será  $f(x) = c$ . Já o coeficiente  $b$  determina a inclinação da reta tangente nesse mesmo ponto.

Considere inicialmente uma reta secante a uma parábola, cujos pontos de intersecção seriam definidos por  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ , como representado na figura 2:

**Figura 2 – Reta secante a uma parábola**



**Fonte:** Elaborada pelos autores

Tendo-se por base a geometria analítica, dizemos que a inclinação da reta  $AB$  pode ser definida por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Mas como queremos encontrar a inclinação de uma reta tangente a uma curva num ponto específico, suponhamos que o ponto  $A$  torna-se infinitamente mais próximo de  $B$ , de forma que ambos continuem pertencendo a parábola, isso altera também a inclinação da reta que passa por eles. Podemos utilizar o conceito de limite para denotar a inclinação dessa reta resultante:

$$m = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por pertencer a uma parábola, os pontos  $A$  e  $B$  também podem ser escritos como  $A(x_1, ax_1^2 + bx_1 + c)$  e  $B(x_2, ax_2^2 + bx_2 + c)$ , substituindo no limite acima citado, temos:

$$m = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{[(ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c)]}{x_2 - x_1}$$

Considerando que esse limite existe podemos desenvolvê-lo e encontraremos que ela resulta em:

$$m = 2ax_1 + b$$

Como queremos provar que o coeficiente  $b$  numa função quadrática determina a inclinação da reta tangente a sua parábola no ponto em que ela toca o eixo das ordenadas, basta substituir o valor de  $x_1$  na equação  $m = 2ax_1 + b$  por zero, o que resulta em  $m = b$ , confirmando assim a afirmação.

## 2.4 Jogos pedagógicos: produto educacional com potencial

Considerando que a aprendizagem é constituída pelo processo interativo, para proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos estudados em sala de aula e que a ludicidade é inerente ao aluno da educação básica, dentre as múltiplas possibilidades para dar dinamismo e prazer ao ato de estudar, o jogo apresenta-se com grande potencialidade. Essa discussão tem respaldo garantido em inúmeros teóricos educacionais como Lara (2005), Lorenzato (2006), Mendes (2011), dentre outros, considerando seus avanços nas investigações sobre a utilização de materiais concretos manipuláveis e jogos em sala de aula.

Um produto educacional, como jogos para fins pedagógicos não pode ser aplicado simplesmente baseado na característica de divertimento. Para que se alcance resultados significativos é necessário um planejamento adequado, prevendo todos os principais tópicos de um plano de aula, como: objetivos pretendidos com a utilização do recurso; Qual a amplitude do conteúdo englobado pelo produto; os procedimentos que serão necessários para conduzir e contribuir para o desenvolvimento do raciocínio durante o jogo de forma que ocorra à assimilação do conteúdo; e também não se pode deixar de avaliar o resultado ao fim do processo,

pois esta avaliação oferecerá caminhos para o prosseguimento com o assunto trabalhado, ou retomados em tópicos específicos para tentar garantir o aprendizado.

Este planejamento é fundamental para assegurar que o produto educacional tenha subsídios para a internalização do novo conteúdo.

O planejamento escolar é uma tarefa docente que inclui tanto a previsão das atividades didáticas em termos de sua organização e coordenação em face dos objetivos propostos, quanto a sua revisão e adequação no processo de ensino. O planejamento é um meio para se programar as ações docentes, mas é também um momento de pesquisa e reflexão intimamente ligado à avaliação. (LIBÂNEO, 2013, p.245)

Tendo o suporte de um bom planejamento pode-se assegurar o fator pedagógico da aplicação do jogo fugindo do perigo de que sua aplicação exerça apenas a função recreativa, com isso pode se aplicar em diferentes etapas do conteúdo, seja na introdução, no aprofundamento ou em qualquer que seja o objetivo que se busque na aula.

O ideal é que o uso de um produto educacional nas propostas didáticas da matemática seja comum, em qualquer nível de ensino. No entanto existe certa confusão entre princípios teóricos (psicologia sensorial-empirista, psicologia genética, recursos didáticos, etc) e a prática no uso do material concreto que auxiliam o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Floriani (2000, p. 65):

Um professor cujo ensino está ancorado nos princípios da Psicologia Sensorial-Empirista, utilizará os materiais concretos para formar imagens na mente dos alunos. Outro, cujo ensino se apoia nos postulados da Psicologia Genética, utilizará os mesmos materiais para ajudar seus alunos na construção dos conceitos. (FLORIANI, 2000, p. 65).

Para esse autor, professores tradicionais poderão não gostar de metodologia apoiada no uso de materiais concretos, pois exige clima de liberdade na sala de aula, construção dos conceitos matemáticos e valorização da autonomia moral, intelectual e social do educando. Não se trata assim de utilizar materiais concretos com simples finalidade à aquisição de conteúdos. (FLORIANI, 2000).

Quando se trata de um jogo, são muitas as preocupações, até mesmo por parte de pais de alunos, e críticas por alguns céticos, por pensarem que tais recursos são

uma forma de recreação que sobrepõe à seriedade do processo de ensino e aprendizagem, nesse sentido, Lara (2005) esclarece:

Muitas vezes ele é concebido apenas como um passa-tempo ou uma brincadeira e não como uma atividade que pretende auxiliar o/a aluno/a a pensar com clareza, desenvolvendo sua criatividade e seu raciocínio lógico. E muito menos, como sendo um instrumento para a construção do conhecimento matemático.

Assim, devemos refletir sobre o que queremos alcançar com o jogo, pois, quando bem elaborados, eles podem ser vistos como estratégia de ensino que poderá atingir diferentes objetivos que variam desde o simples treinamento, até a construção de um determinado conhecimento. (LARA, 2005, p.21)

Seguindo essas instruções o jogo se estabelece como excelente recurso para o ensino e aprendizado. Nesses sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais tentam nortear a prática docente na educação básica alegando que “é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo aos professores analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver.” (PCNs, 1997, p.49). Esses dirigentes da educação no Brasil se respaldaram, dentre outros, nas pesquisas realizadas sobre o desenvolvimento humano de Jean Piaget e Vygotsky, com suas teorias que fundamentaram a concepção construtivista.

A tendência construtivista, assegura ao estudante a possibilidade de interagir com o conteúdo estudado, gerando pela utilização de recursos manipuláveis, um nível de desenvolvimento potencial na interação com os colegas e professor. Dentre esses recursos podemos destacar os jogos, que possibilitam ao estudante construir seu próprio conhecimento, seguindo assim a principal essência do construtivismo dialético.

Um terceiro grupo de teóricos, ao qual pertence Jean Piaget, considera que o conhecimento resulta da interação de sujeito com o ambiente; por isso, são eles chamados interacionistas. A este grupo pertencem, também, os russos L.S. Vygotsky, A.N. Leontiev e A.R. Luria e o francês Henri Wallon.

O sistema piagetiano é denominado, também, construtivista dialético. A partir de suas inúmeras pesquisas, Piaget concluiu que cada criança constrói seu próprio modelo de mundo. [...] (GOULART, 2008, p. 17)

Ao trabalhar o conceito e as propriedades da parábola com o uso de um produto educacional, constituem-se muitas contribuições com o processo de aprendizado.

Podemos dizer que tal abordagem vai no cerne da tendência construtivista ao permitir que o aprendiz interaja com o produto educacional e assim construa o conhecimento sobre o tema explorado.

Nesse processo o indivíduo tende a construir seu próprio conhecimento com a vantagem de absorvê-lo com significação. Permite ao aluno a interação com o conteúdo trabalhado, levando assim à construção do verdadeiro aprendizado, valorizando os conhecimentos de mundo adquiridos continuamente por todos, durante a exploração do ambiente e das atividades diversas como é o caso dos jogos.

Os jogos se configuram como uma prática corriqueira na vida de grande parte dos alunos da educação básica, haja visto que a maioria dos estudantes são crianças e adolescentes, passando por período em que os jogos e brincadeiras são constantes, mais do que em qualquer outra fase da vida humana, com isso os alunos poderão visualizar uma matemática explícita e implicitamente presente em situações do cotidiano.

Isto posto, podemos vislumbrar grandes resultados para o ensino de matemática ao lançar mão de técnicas voltadas para a interação dos alunos nos diversos conteúdos, possibilitando a sua participação no processo de construção do conhecimento, além de buscar atenuar as tensões vividas no ambiente escolar.

Propiciar um ambiente lúdico, com a inserção de jogos pedagógicos, pode amenizar as situações que prejudicam a concentração e buscar o apreço dos educandos pelo ambiente escolar onde eles passam grande parte de seu dia.

São muitos os fatores que podem distrair os alunos durante o momento de aulas meramente expositivas, um dos é a falta de real sentido ou aplicabilidade do que é ensinado na concepção do estudante, isso gera desapeço pelo processo instaurado em sala de aula, que pode resultar no fracasso escolar. E nesse sentido, produtos educacionais como jogos podem ajudar o aluno a desenvolver interesse pela matemática, mas principalmente quando este expõe e atribui verdadeiro sentido a matemática existente por toda a parte, em nossa volta.

### **3. METODOLOGIA**

Neste capítulo, estão apresentados os caminhos norteadores deste trabalho, destacando-se a caracterização da investigação, os procedimentos metodológicos e as reflexões dos resultados obtidos na produção do produto educacional “Erre se possível!” aplicado como um desafio natural frente as propriedades da função quadrática.

A compreensão das abordagens é de significativa importância visto que possibilita ao pesquisador um melhor planejamento dos caminhos traçados durante o percurso do desenvolvimento da pesquisa partindo-se da investigação de abordagem e metodologia qualitativa.

#### **3.1 Abordagem da pesquisa**

O desenvolvimento desse trabalho monográfico, abordando a temática referente a funções quadráticas, intencionou contribuir para uma prática pedagógica inovadora. Assim, essa pesquisa é de caráter qualitativo, do tipo exploratório, direcionada para a situação de ensino e de aprendizagem

Desse modo, a pesquisa qualitativa foi coerente aos investigadores cujo interesse transpassou obter rigorosas informações acerca de algo, mas, acima de tudo, procurar melhorar as práticas pedagógicas no contexto do fenômeno pesquisado. A abordagem de pesquisa qualitativa tem como principal característica dar sentido ou interpretar os fenômenos de acordo com os significados que as pessoas trazem com eles.

D’Ambrósio (2004, p. 21) aponta que “a pesquisa qualitativa é o caminho para escapar da mesmice. Dá atenção às pessoas e às ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos”.

Uma característica comum à pesquisa qualitativa é que o pesquisador é considerado instrumento de pesquisa. Sendo estes, discentes da graduação em fase de conclusão do curso de formação inicial de professores de matemática, recorrem às suas experiências de estágios supervisionados, ao seu conhecimento tácito e aos seus pressupostos existenciais como recursos usados para buscar na literatura consolidada na área da Educação Matemática, pressuposto para criar aparatos inovadores para a prática de lecionar conteúdos matemáticos.

Sendo assim, este trabalho se tornou de grande importância para os pesquisadores que desejavam desconstruir preconceitos relacionados à matemática, bem como modificar a forma como esta é normalmente ensinada, em particular, sem fazer uso de materiais concretos manipuláveis, como jogos pedagógicos, ou seja, muitas das vezes desvinculada de aspectos lúdicos, o que a torna abstrata e distante da realidade, sem conexões com as possíveis aplicabilidades no cotidiano.

Assim, a pesquisa realizada foi de natureza qualitativa, uma vez que “há duas justificativas para a pesquisa: 1) satisfação da curiosidade do pesquisador, o que é legítimo; 2) guia para as próximas ações, essencialmente a pesquisa-ação, o que é auxiliado por 1”. (D’AMBRÓSIO, 2004, p. 21).

Diante do que foi mencionado, a pesquisa foi realizada tendo por base uma revisão bibliográfica sobre as funções reais de uma variável real, isto é, funções  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  que têm como domínio um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  e cujos valores  $f(x)$ , para todo  $x \in X$ , são números reais. Abordando um tipo particular de função: a função quadrática com interesse em explorar as propriedades do seu gráfico; e revisaremos em paralelo algumas discussões sobre jogos pedagógicos, no intuito de fundamentar teoricamente um produto educacional no formato de um jogo, elaborado tomando como base os princípios da parábola.

### **3.2 Cenário da pesquisa**

O desenvolvimento das investigações ocorreu em dois ambientes distintos: a parte teórica ocorreu na Universidade do Estado da Bahia (UNEB), *Campus VI – Caetité*; a parte prática, de construção do produto educacional ocorreu em residências próprias e em uma marcenaria. A produção do “Erre se Possível!” foi planejada no intuito de perceber como a metodologia de aprendizagem por meio de um jogo, numa prática pedagógica inovadora, pode contribuir para a construção do conhecimento de funções quadráticas. Esse produto teve suporte de um material concreto facilmente adquirido nas casas comerciais de Caetité, como tabuas MDF, parafusos, cantoneira, silicone e bolinhas de gude.

Atuar no contexto, como investigadores no cenário da pesquisa, foi de grande importância para a trabalho desenvolvido, pois convergiu à ideia de Silveira e Miola (2008) que afirmam: ao pesquisarem sobre a prática, os professores também constroem um corpo de conhecimento local, ou seja, relacionam a uma unidade - uma

escola, um currículo, uma classe, um aluno, entre outros, que devem ser compartilhados para que todos tirem proveito.

Em relação à pesquisa dentro do próprio campo de atuação, Ponte (2002) ressalta:

São várias as razões pelas quais esta pesquisa pode ser importante. Ela contribui, antes de mais, para o esclarecimento e resolução dos problemas. Além disso, proporciona o desenvolvimento profissional dos respectivos autores e ajuda a melhorar as organizações em que eles se inserem. Em certos casos, esta pesquisa pode ainda contribuir para o desenvolvimento da cultura profissional no respectivo campo da prática e até para o conhecimento da sociedade em geral. (Ponte, 2002, p.02)

Podemos perceber que nosso ambiente de trabalho constitui um local adequado para a pesquisa qualitativa, pois existe proximidade com o sujeito conhecendo de perto as inquietações que investigaremos para reflexões e soluções.

Desse modo, a realização da pesquisa se apresentou como uma rica possibilidade de não apenas identificar e entender um problema didático, mas também de criar conhecimento e reflexões pessoais (profissionais) partindo das necessidades reais presentes no cenário de investigação.

### **3.3 A construção do Produto Educacional: Erre se possível!**

A construção do produto educacional para ser utilizado em sala de aula na Educação Básica, bem como com discentes na formação inicial e/ou continuada de professores de matemática se deu de forma simples. Para tal, contamos com a prestação de serviço de uma mão de obra especializada, um marceneiro.

Os materiais empregados foram tabuas MDF, 24 cantoneiras de 1,0 cm de largura por 40 cm de comprimento, cola silicone e parafusos.

A atividade consistia em conceituar a curva denominada de parábola e construir um modelo algébrico para tal curva, direcionando para a definição de função quadrática. Nesse sentido o produto educacional foi construído alicerçado nas propriedades de uma função de grau dois, com destaque para uma propriedade notável da parábola: sinais paralelos ao eixo da parábola refletem-se na superfície e se concentram no foco. Nesse sentido, para efetuar o jogo, são necessárias duas esferas, ou bolinhas de gude. Em sala de aula, esses objetivos seriam alcançados pelas discussões e manipulações do recurso utilizado.

A construção iniciou-se a partir de um esboço rascunhado a lápis numa folha de papel medindo 42cm x 60cm. Nesta, traçamos um sistema de eixos ortogonais, pelo ponto  $(0, -5)$  passamos a reta diretriz paralela ao eixo dos  $x$ , definimos o ponto  $V(0, 5)$  como o vértice e o ponto  $F(0, 15)$  como o foco da parábola. A partir desses dados, usamos o modelo genérico de uma função quadrática e escrevemos a equação  $y = \frac{x^2}{40} + 5$ . Por fim desenhamos no esboço a representação geométrica dessa curva, uma parábola cuja abertura é voltada para cima e seu eixo é o próprio eixo dos  $y$ .

A fase seguinte ocorreu na marcenaria. Pegamos duas tábuas de MDF medindo 42cm x 60cm, sendo uma delas usada como a base do artifício. Na outra tábua, reproduzimos a parábola do esboço e utilizando uma máquina de serra recortamos exatamente sobre a curva. Esta peça foi parafusada em uma das extremidades da base do produto em construção. Para a outra extremidade da base fizemos outra peça, que consiste em uma rampa com laterais triangulares, tendo 35 cm na base, 18 cm de altura e hipotenusa medindo aproximadamente 39,4 cm.

Na superfície superior da rampa, usando silicone, colamos as 24 cantoneiras, formando caminhos pelos quais as bolinhas deslizariam. Essa peça é necessária para garantir que as bolinhas lançadas percorram uma trajetória paralela ao eixo da parábola. Para concluir, colamos fitas de bordas nos MDF, dando acabamento e deixando o produto Educacional bem bonito e apresentável conforme podemos ver na figura 3.

**Figura 3** – Produto educacional: “Erre se possível!”



**Fonte:** Elaborado pelos autores

Algumas regras e formas de pontuação podem ser adaptados ao produto, a critério dos envolvidos, porém para jogar o “*Erre se possível!*”, devemos colocar uma bolinha de gude no ponto  $F$  e proceder essencialmente da seguinte forma:

1º- Um jogador (representando uma equipe) escolhe acertar a bolinha do ponto  $F$ , e para isso ele dá ao adversário a chance de escolher o caminho na rampa. Após a escolha do caminho, o jogador solta a bolinha e todos devem observar se ele vai lograr êxito, o que, matematicamente vai acontecer.

2º- O jogador da outra equipe deve então escolher errar a bolinha do ponto  $F$ , para tal ou invés do adversário escolher o caminho na rampa, o próprio jogador faz a escolha e ao soltar a bolinha todos devem observar, e verão que ele, mesmo não querendo, acertará a bolinha.

Esse procedimento continua alternando os jogadores bem como as opções do acertar ou não, entre os participantes (ou equipes). Logo os alunos perceberão a impossibilidade de errar a bolinha no ponto  $F$  e a partir desse momento cabe ao professor com maestria conduzir discussões e investigações pelos alunos para criar e testar conjecturas e hipóteses e dessa forma construir o conhecimento do conteúdo abordado.

## 4. ANÁLISE E REFLEXÕES DO JOGO ERRE SE POSSÍVEL! O DESAFIO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

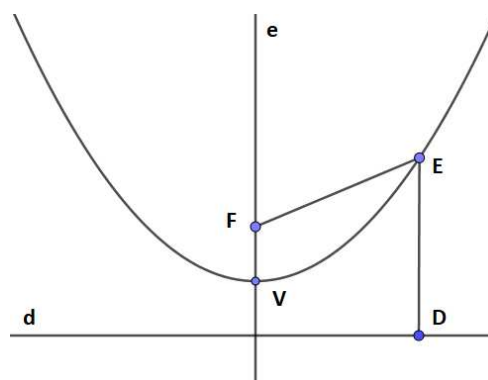
Esse capítulo apresenta discussões sobre o produto educacional apontando a abordagem pertinente ao estudar funções quadráticas com os alunos na educação básica, bem como na formação de professores de matemática.

### 4.1 Princípios matemáticos no “Erre se possível”: Propriedades da função quadrática

Este trabalho apresenta uma possibilidade de ministrar uma abordagem criativa e interessante fazendo uso de um produto educacional no estudo de função quadrática, explorando o recurso com o objetivo de perceber as propriedades da representação gráfica de uma função de 2º grau, ou seja, da parábola.

De acordo com Lehmann (1998), numa visão analítica, uma parábola é concebida como “o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de maneira que sua distância a uma reta fixa no plano é sempre igual à sua distância a um ponto fixo no plano e não situado sobre a reta.” (LEHMANN, 1998, p.127). Veja figura 4.

**Figura 4** - Parábola: representação geométrica da função quadrática



**Fonte:** Elaborado pelos autores

O ponto fixo, representado na figura 4 pelo ponto  $F$ , é denominado foco, a reta fixa  $d$ , representa a diretriz, e o ponto  $V$  é o vértice da parábola. O vértice é o ponto médio entre a distância do foco à diretriz, sendo a distância do vértice a cada um

deles, chamado de *parâmetro*. A reta *e* que contém o foco e é perpendicular a diretriz é chamado de *eixo*, sendo a parábola simétrica em relação a ele.

**Figura 5** – Produto educacional com traços acentuados



**Fonte:** Elaborado pelos autores

Na figura 5 podemos observar estes pontos relentes da parábola, esta visualização tem grande importância no estudo exploratório do material para a assimilação do conteúdo, pois a partir deles é que devem surgir as discussões norteadoras para se chegar na aquisição de conhecimento que se espera, para isto representa-se o produto com esses pontos em relevância, já que estes podem não estar facilmente visíveis a qualquer observador, isto poderia dificultar a compreensão da proposta deste trabalho.

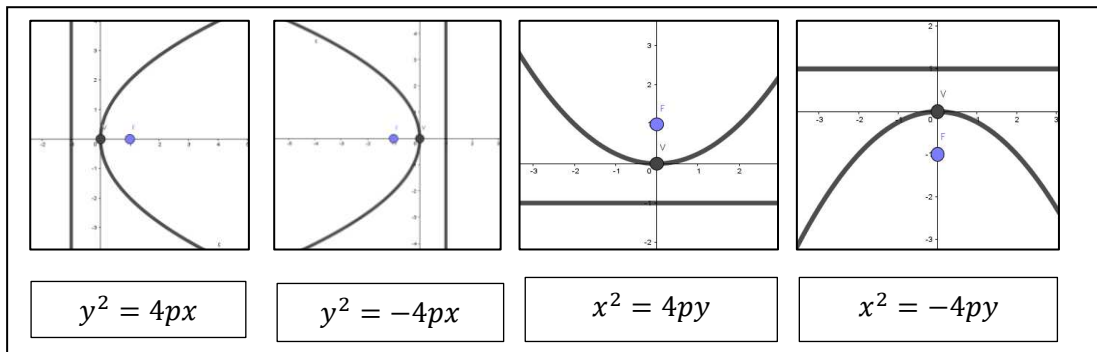
Pela própria definição da parábola, o comprimento do segmento de reta, perpendicular a diretriz,  $ED$ , será igual ao comprimento do segmento que liga esse ponto  $E$  ao foco. Tal propriedade se aplica a todos os outros pontos pertencentes a parábola.

Uma parábola pode ser representada algebricamente de diferentes maneiras. Quando, por exemplo, seu vértice está localizado na origem de um plano cartesiano, e seu foco pertence ao semieixo positivo das abcissas, essa parábola pode ser representada pela equação reduzida,  $y^2 = 4px$ , onde  $p$  é o parâmetro,

analogicamente, quando o foco pertence ao semieixo negativo das abcissas, ao semieixo positivo das ordenadas ou ao semieixo negativo das ordenadas, teremos como equações reduzidas, respectivamente,  $y^2 = -4px$ ,  $x^2 = 4py$  e  $x^2 = -4py$ .

Para todas essas ultimas situações, o vértice também está localizado na origem do plano cartesiano.

**Figura 6** – Representação das quatro possíveis posições da parábola



**Fonte:** Elaborado pelos autores

Acontece que em muitas situações, o vértice pode não pertencer a origem; e considerando-se o eixo da parábola como sendo paralelo a um dos eixos coordenados; o foco, conseqüentemente, não pertencerá a nenhum dos dois eixos, logo, a equação da parábola se diferenciará um pouco da forma que foi previamente apresentada.

Tendo o vértice localizado no ponto  $V(m, k)$ , e o eixo da parábola como sendo paralelo ao eixo das abcissas, a equação que representaria essa parábola pode ser escrita como  $(y - k)^2 = 4p(x - m)$ . Quando  $p$  assume valores maiores que zero, a parábola abre à direita, caso assumira valores menores que zero, abre à esquerda.

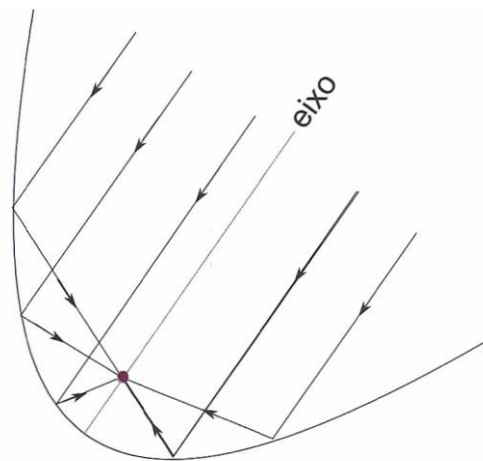
Ainda podemos escrever a equação  $(x - m)^2 = 4p(y - k)$ , quando o eixo da parábola é paralelo ao eixo das ordenadas. Quando  $p$  assume valores maiores que zero, a parábola abre para cima, caso assumira valores menores que zero, abre para baixo.

Em uma visão pela análise matemática, uma parábola, tem um modelo algébrico assim definido: “Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de *quadrática* quando são dados números reais  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .” (LIMA, 2013, p.118). Quando  $a$  assume valores maiores que zero, a concavidade da parábola é voltada para cima, caso assumira valores menores que zero, sua

concauidade será voltada para baixo. O vértice dessa parábola pode representar o ponto máximo ou mínimo que essa função pode assumir, o que depende de sua orientação.

Uma propriedade interessante das parábolas é a sua capacidade reflexiva, sendo esta, o princípio fundamental na construção desse produto educacional. Quando algo (projétil, ondas sonoras, débeis sinais de satélites, etc.) é lançado em direção a uma parábola, paralelamente ao seu eixo, ele será refletido assim que tocar um de seus pontos, sendo redirecionado para o foco da parábola.

**Figura 07** – Sinais paralelos ao eixo do paraboloide refletem-se na superfície e se concentram no foco

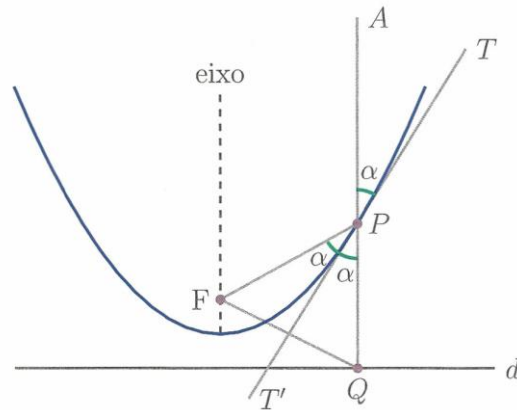


**Fonte:** LIMA, 2013, p. 139

Para otimizar a captação, basta rotacionar a parábola em relação a seu próprio eixo gerando um sólido denominado paraboloide. Tal propriedade tendo aplicabilidade prática, por exemplo, nas antenas parabólicas e nas lanternas ou faróis de carro.

Por que é matematicamente impossível errar a bolinha situada no ponto  $F$  do jogo “Erre se Possível”? Começaremos explicando esse princípio com a afirmação de que, quando um projétil atinge uma superfície refletora, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Quando esse projétil atinge uma parábola, tais ângulos serão medidos em relação a reta tangente ao ponto que tal projétil atingiu a curva. A tangente a uma parábola, pode ser determinada, segundo Lima (2013), pelo teorema: “Se a parábola é o gráfico da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , sua tangente no ponto  $P = (x_0, y_0)$ , onde  $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ , é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a  $2ax_0 + b$ .” (LIMA, 2013, p.140).

**Figura 8** – Representação geométrica dos ângulos de incidência e de reflexão



**Fonte:** LIMA, 2013, p. 139

A inclinação da semirreta  $FQ$  pode ser encontrada mediante a divisão da diferença entre as ordenadas dos pontos  $Q$  e  $F$  pela diferença das abcissas desses mesmos pontos. Sabe-se que o foco de uma parábola  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  pode ser definido pelo ponto  $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ , e o ponto qualquer  $Q$  pertencente a sua diretriz corresponde a  $Q = (x, k - \frac{1}{4a})$ , sendo  $m = -b/2a$  (abscissa do vértice) e  $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$  (ordenada do vértice). Logo a inclinação de  $FQ$  é igual a:

$$\frac{\left(k - \frac{1}{4a}\right) - \left(k + \frac{1}{4a}\right)}{x - m} = -\frac{1}{2a(x - m)} = -\frac{1}{2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)} = -\frac{1}{2ax + b}$$

O que faz com que essa reta seja perpendicular à reta tangente no ponto  $P$ . Segundo a definição de uma parábola, as semirretas  $FP$  e  $PQ$  terão mesmo comprimento, sendo assim, o triângulo  $FPQ$  é isósceles e a reta tangente à parábola no ponto  $P$ , será a bissetriz do ângulo  $F\hat{P}Q$ , sendo assim, fica provado que o ângulo de incidência, é igual ao ângulo de reflexão, o que faz com que a bolinha lançada seja direcionado para o foco da parábola em todos os casos em que ele é lançado paralelamente ao seu eixo.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nossa inquietação inicial, em ensinar o conteúdo função quadrática com o jogo “erre se possível”, que se trata de um aparato que une as vantagens de um jogo educativo no que se refere a despertar apreço nos jovens, ao potencial de um produto educacional, de modo geral quando se fala de implicações pertinentes ao conteúdo referido, nos direcionou a um estudo bibliográfico acerca deste tema.

Estas leituras foram de fácil localização dando uma ideia do quanto este tema é relevante. Grandes pesquisadores da educação convergiam com nossas opiniões quanto a capacidade deste tipo de material em uma intervenção na educação formal, mais do que isto, nos mostrou uma grandiosidade maior que o imaginado no período que precedeu esta revisão bibliográfica. Parte destas ideias que vão na mesma linha de raciocínio, que possibilitou o surgimento deste jogo bem como deste trabalho, estão presentes nos capítulos que o compõe, assim o leitor terá um pouco da estruturação de um trabalho neste sentido na visão de quem realmente conhece a fundo a temática.

As discussões aqui apresentadas possibilitam um embasamento na defesa do uso deste tipo de material em contexto escolar e ainda dá subsídios para a aplicação do produto em questão, desta forma apesar deste trabalho focar no ensino voltado para turmas de nível médio, sua relevância é voltada para pessoas com grau de licenciatura em matemática, pois oferece uma ajuda para se trabalhar em sala de aula.

Não menos importante que as visões de autores renomados acerca da utilização deste tipo material bem como dos materiais concretos em geral, são os conhecimentos relacionados, às funções do segundo grau e do jogo em si, desde sua construção até sua aplicação. A união destas informações é que resulta neste trabalho.

Temos consciência que uma pesquisa de campo com aplicação prática do aparato em realidade escolar seguido de uma análise dos dados, com uma possível comparação com resultados obtidos em um contexto de aula tradicional, pode-se configurar numa fonte riquíssima de dados capazes de confirmar seu potencial, porém, nosso intuito maior foi trabalhar o potencial do jogo em concordância com o que já foi dito por autores de renome, sem que fugisse do rigor esperado em sala de aula, assim consideramos verdadeira nossa análise das implicações do aparato.

Portanto chegamos a uma conclusão que o jogo se configura como material riquíssimo neste processo de ensino, pois traz consigo um caráter exploratório e respeita a autonomia do aluno no processo de assimilação do conteúdo assim converge com as linhas de procedimentos sugeridas nas principais correntes educacionais vigentes atualmente, entretanto acreditamos que sua potencialidade não foi totalmente explorada, pois não houve aplicação deste jogo para análise de resultados, um estudo de campo como este seguido de um estudo comparatório de resultados em outras realidades de ensino podem trazer informações ricas para a comunidade acadêmica, mas isto seria assunto para outros trabalhos.

## REFERÊNCIAS

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. Ed. São Paulo: Ática, 2013.

FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FOULIS, David J.; MUNEM, Mustafa A. **Cálculo**. Volume 1. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 17. Ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GOULART, Iris Barbosa. **Piaget**: Experiência básicas para utilização pelo professor. 24. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**. V. 1. 8. Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogando com a Matemática**: de 5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> série. 5. ed. São Paulo: Rêspel, 2005.

LEHMANN, Chales H. **Geometria analítica**. Tradução de Ruy Pinto de Silva Sieczkowski. 9. ed. São Paulo: Globo, 1998.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. V. 1. 3. Ed. São Paulo: HARBRA Ltda., 1994.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 2. Ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, S. (Orgs.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. São Paulo: Autores Associados, 2006. P. 3-38.

MENDES, Iran Abreu; FILHO, Antonio dos Santos; PIRES, Maria Auxiliadora L. M. **Práticas matemáticas em atividades didáticas para os anos iniciais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

REGO, Teresa Cristina. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. Ed. Digital. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros Curriculares Nacionais. **Matemática**: Ensino de primeira à quarta série. 1. Ed. Brasília: 1997.

SILVEIRA, Everaldo; MIOLA, Rudinei José. **Metodologia do ensino de matemática e física**. V. 3. 20 Ed. Curitiba: Ibpex, 2008.