UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA (UNEB)
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
(DCET)CAMPUS II – ALAGOINHAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAPEANDO PESQUISAS NACIONAIS NO PERÍODO DE 2006 A 2021,EM BUSCA DE CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

LUCAS SOUZA CAVALCANTE

ALAGOINHAS – BA
2022

LUCAS SOUZA CAVALCANTE

MAPEANDO PESQUISAS NACIONAIS NO PERÍODO DE 2006 A 2021,EM BUSCA DE CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Monografia apresentada por Lucas Souza Cavalcante, para aconclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, sob a orientação da prof.ª Dra. Grace Dórea Santos Baqueiro.

ALAGOINHAS – BA
2022

Sistema de Bibliotecas da UNEB
Biblioteca Carlos Drummond de Andrade – Campus II
Rosana Cristina de Souza Barretto
Bibliotecária – CRB 5/902

C376m Cavalcante, Lucas Souza.

Mapeando pesquisas nacionais no período de 2006 a 2021, em busca de contribuições para o ensino e aprendizagem do teorema fundamental do cálculo./ Lucas Souza Cavalcante – Alagoinhas, 2022.

53f.il.

Trabalho de Conclusão de Curso – (Graduação) - Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Exatas e da Terra. Colegiado de Matemática. Campus II.

Orientador: Prof.ª Drª. Grace Dórea Santos Baqueiro.

1. Matemática – Estudo e ensino (Pós-Graduação). 2. Pesquisa educacional. 3. Cálculo integral. 4. Cálculo diferencial I. Baqueiro, Grace Dórea Santos. II. Universidade do Estado da Bahia - Departamento de Ciências Exatas e da Terra - Campus II. III. Título.

LUCAS SOUZA CAVALCANTE

MAPEANDO PESQUISAS NACIONAIS NO PERÍODO DE 2006 A 2021,EM BUSCA DE CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade do Estadoda Bahia – UNEB para a obtenção do título parcial de Licenciado em Matemática.

Alagoinhas,__________de_______________2022

Banca Examinadora

Prof.ª Dr.ª Grace Dórea Santos Baqueiro – OrientadoraUniversidade do Estado da Bahia

Prof. Ms. Váber Márcio de Argolo MeloUniversidade do Estado da Bahia

Prof. Ms. José Carlos Santana Queiroz
Universidade do Estado da Bahia

ALAGOINHAS-BA
2022

“E disse-me: A minha graça te basta, porque o meu poder aperfeiçoa na fraqueza. De boa vontade, pois, me gloriarei nas minhas fraquezas, para que em mim habite o poder de Cristo.

Por isso sinto prazer nas fraquezas, nas injúrias, nas necessidades, nas perseguições, nas angústias por amor de Cristo. Porque quando estou fraco então sou forte.”2 Coríntios 12:9-10.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado a vida, e por me dar condições todos os dias de vive-la com amor, alegria, com lutas, com perseverança e esperança. Toda honra e toda glória e todo amor seja dado a Ele.
Aos meus pais Fábio Cavalcante e Marta Cavalcante, por terem sempre me dado o melhor que podiam, o melhor amor, a melhor educação, as melhores oportunidades, a prioridade, o carinho e a vida. Amo muito vocês.
As minhas irmãs, Vitória e Mariana, por serem minha base, meu sangue, minha fortaleza.
Aos meus avós Eremita, Raimundo e Ronady, por tanto amor que me dão.
Aos meus primos e tios, por fazerem dessa família um lugar tão aconchegante e amoroso que posso chamar de meu lugar.
A todos os meus professores que me ensinaram até então, é incrível como lembro de todos vocês com tanto carinho, além de serem exemplos de profissionais são exemplos de seres humanos, vocês são meus heróis dos quais admiro, me espelho e inspiro.
A minha orientadora Grace Dórea Santos Baqueiro, por ter me dado tanto suporte, ter me aconselhado, me motivado, e me orientado nessa etapa tão especial, minha jedi.
A todos os meus professores de graduação; Erivelton Santana, Luís Roque de Jesus, Maria de Fátima Leal, Jóse Carlos Queiroz, Válber Melo, Maridete Ferreira, Daniela Batista, Maria Eliana Silva, Jefferson Conceição, Jaíra Bispo, Viviane Mendoça, Erica Macêdo, Anunçiação Silva, Antônio Teófilo Nascimento, Danton Freitas, Mário Ferreira, Iêda Silva.
A todos os meus colegas que fizeram parte da minha trajetória, vocês a tornaram única, especial, prazerosa, alegre, todos vocês são singulares em minha vida e não esquecerei de vocês, faço questão de citar o nome de todos.
A nossa saudosa turma 2017.2, adotados e achegados, com tanto carinho declaro saudações e felicitações a meus amigos Rafael Florêncio, Caroline Cardim,Márcia Cerqueira, Luís Alcantara “respeita Januário”, Darlan Santos “de Pedrão”, Kelvin, Marcio Batista, Bruna Mareval vulgo “mãe”, Juliane, Milena, beatriz, Poliano Fagundes, Juliana Pereira, Elza Santos “princesa Elza”, Tayele Silva, Josiel Sales, Larissa Ferreira, Mariana Oliveira, Jadiel Reis, Mayara Martuschelli, Tainá, Jaciene, Adriano, Catarina Tônia, Adriel, Mateus, Ana Paula, Adriele, Larissa Ayala, Noel; aosque não foram citados saibam que vocês fazem parte também da minha formação não só acadêmica, como pessoal, vocês sempre estarão em minha memória, nas minhas aulas, nas minhas atitudes, porque aprendi um pouco com cada um de vocês, muito obrigado por tudo.
Ao nosso eterno motorista que Aguinaldo, conhecido como Guigui, obrigado por tudo, por transportar os nossos sonhos, a meu grande amigo Josenildo de Jesus mais conhecido como Binho, a Ianaildes, Natalia, e todos os outros que fizeram parte da minha trajetória.
Por fim, quero agradecer a mulher que conheci nesse curso para toda a minha vida, minha amiga, parceira, minha companheira de vida, namorada, minha inefável, da qual tanto admiro e com fé em Deus minha futura noiva, esposa e mãe dos meus filhos, Jamilly da Silva Santos, te amo meu amor.

RESUMO

Este estudo bibliográfico do tipo "estado da arte" tem por objetivo pesquisar e analisar teses e dissertações de autores nacionais, que abordem sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), no intuito de responder à seguinte questão: quais foram as contribuições dos autores de dissertações e teses sobre o "Teorema Fundamental do Cálculo"? A importância do tema se denota pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral constar na grande curricular de vários cursos da área de Ciências Exatas. As buscas foram realizadas no portal da Capes, do qual selecionamos 8 dissertações e uma tese. Adotamos como abordagem teórico-metodológico a análise de conteúdo, a qual estabelecemos indicadores para as inferências baseadas nos documentos investigados e com isso s organizamos em quatro categorias: (1) o TFC sob a perspectiva do aluno, (2) o TFC sob perspectiva do professor, (3) o TFC sob perspectiva do livro didático e (4) o TFC sob a perspectiva histórico-epistemológico. Concluímos que os estudos nas quatro categorias apresentaram várias contribuições, apontando por exemplo, os benefícios da utilização de recursos tecnológicos como ferramenta auxiliadora no processo de ensino do TFC, possibilitando a investigação entre a inter-relação das operações Integração e Derivação; a experimentação como ponto de partida para a conjectura do teorema; a importância da utilização dos diversos registros de representação no ensino do TFC; a importância do livro didático pautado em seu enfoque e a assimilação do conhecimento a partir processo de desenvolvimento do TFC sob o seu contexto histórico.

Palavras-chave: Estado da arte; Teorema Fundamental do Cálculo; Ensino e aprendizagem´; Calculo Diferencial e Integral.

ABSTRACT

This "state of the art" bibliographic study aims to research and analyze national theses and dissertations, which address the Fundamental Theorem of Calculus authors (TFC), in order to answer the question: were the contributions of the authors of dissertations and theses on the “Fundamental Theorem of Calculus”? The importance of the subject is denoted by the discipline of Differential and Integral Calculus being included in the great curriculum of several courses in the area of Exact Sciences. The searches were published on the Capes portal, from which we selected 8 dissertations and a thesis. We adopted content analysis as a theoretical-methodological approach, in which we established indicators for the inferences of documents investigated and with that we organized into four categories: (1) the TFC from the student's perspective, the TFC from the student teacher, (3) the TFC from the textbook perspective and (4) the TFC from the historical-epistemological perspective. We conclude that the studies in the four categories offer several contributions, guidance for the teaching of technological resources as an auxiliary tool in the investigation process between an interrelation of operations and derivation; experimentation as a starting point for the theorem conjecture; importance of using different representation records in TFC teaching; the importance of the textbook based on its focus and assimilation of knowledge from the TFC development process under its historical context.

Keywords: State of the art; Fundamental Theorem of Calculus; Teaching and learning; Differential and integral calculus.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

Trabalhos que compõem o *corpus* desta pesquisa

Autor	Designação na pesquisa
André Lúcio Grande	Grande (2013)
Desiree Frasson Balilelo Picone	Picone (2007)
Erasto Piedade Alonso	Alonso (2017)
Érika Andersen	Andersen (2011)
Grácia Maria Catelli Anacleto	Anacleto (2007)
Maria Laura de Biaggi de Marco	Marco (2021)
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva	Silva (2006)
Ronaldo Pereira Campos	Campos (2007)
Walkíria Corrêa dos Santos	Santos (2011)

1. INTRODUÇÃO

A presente pesquisa é norteada por inquietações acerca das dificuldades encontradas por alunos na compreensão das principais concepções que compõem o componente curricular Cálculo, em especial, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Assim, realizou-se uma pesquisa do tipo "estado da arte" com o objetivo de *pesquisar e analisar teses e dissertações de autores nacionais no período de 2006 a 2021, que abordem sobre o Teorema Fundamentaldo Cálculo* no intuito de responder à seguinte questão: *quais foram as contribuições dos autores de dissertações e teses sobre o "Teorema Fundamental do Cálculo"?*

Para alcançarmos nossa proposta deferida, nos fundamentamos das ideias teórico-metodológico de Bardin (2011) a respeito da análise de conteúdo, para construir indicadores e poder analisar as pesquisas encontradas.

A busca foi realizada no sítio da CAPES e retornou, inicialmente, trinta (30) trabalhos acadêmicos, os quais, após leituras aprofundadas, foram reduzidos para nove (9) documentos sendo uma (01) tese e oito (08) dissertações. Com a análise do conteúdo dos mesmos, o momento fora para agrupá-las e reagrupá-las em quatro (04) categorias.

Para além da introdução, a pesquisa contou com mais quatro (04) tópicos. No segundo, localizou-se a problemática, trazendo: 1) as motivações pessoais que levaram à escolha do temaTFC, 2) uma breve contextualização histórica da origem e desenvolvimento do tema e 3) apontar as leituras que influenciaram a delimitação do objetivo e questão de pesquisa supracitado.

No terceiro tópico caracterizou-se a pesquisa com descrição dos procedimentos metodológicos utilizados realizados em uma das fases sugeridas por Bardin (2011), que é a dapré-análise que levou à composição final do *corpus* deste trabalho. Conclui-se esse tópico apresentando as unidades registro e de contexto escolhidas e, a partir delas, as categorias e subcategorias criadas.

No quarto tópico quatro, descreve-se como fora realizada a exploração, o tratamento e a interpretação das categorias selecionadas conforme o enfoque principal de cada pesquisa, seguindo, com adaptações, o roteiro proposto por Baqueiro (2016), sendo esta: 1) com base nos resumos dos trabalhos acadêmicos, fazer a apresentação das pesquisas, 2) realizar, quando necessário, uma análise cruzada das informações importantes contidas nos parágrafos dos resumos das pesquisas que encontram-se dentro de uma mesma subcategoria, promovendo desta forma um "diálogo" entre elas, trazendo à discussão algumas das conclusões dos trabalhos, procurando por pontos de convergências ou divergências e 3) Uma síntese com a exposição das nossas considerações sobre cada categoria/subcategoria, apresentando umresumo das contribuições dos autores sobre o tema "Teorema Fundamental do Cálculo".

No quinto tópico expô-se as considerações finais e os principais resultados obtidos do mapeamento.

2 PROBLEMÁTICA

2.1. MINHA BUSCA PESSOAL PELO TEMA DA PESQUISA

Como estudante do último ano de ensino médio, percebi que vários dos meus colegas com a seguinte pergunta, que se enquadrava e também ecoava em mim: "o que eu vou fazer da minha vida?" Uma decisão que parecia ser um fardo muito grande, sobre vidas ainda tão imaturase inexperientes. Afinal, o que "fazer da vida" soa, em primeiro momento, ser para toda vida. Então nenhuma pessoa quer ter arrependimentos pelo resto dela. Foi assim, que em 2016, último ano do ensino médio, havia em mim apenas o desejo de conhecer mais sobre carros velozes, que faziam curvas a mais de 250 km/h, recebendo enormes forças laterais , sem nem ao menos hesitarem. Máquinas estas que acompanho, assistindo todos os domingos, desde os meus 6 anos de idade, e que continuarei acompanhando até os fins dos meus dias.

Partindo deste amor pelas corridas de Fórmula 1, pensei em cursar engenharia mecânica, prestando vestibular para tal curso. Contudo, infelizmente não consegui, como desejava, uma vaga em uma universidade pública, já que não tinha condições para ingressar em uma instituição privada. Deste modo, planejei passar aquele longínquo ano de 2017 estudando, recluso em meu quarto. Foram bons meses e várias horas de estudo por dia, até minha mãe meinformar que tinha saído o edital para o vestibular da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), e me aconselhar a prestar o vestibular para licenciatura em Matemática, pois, em sua visão, eraum bom curso e eu poderia aproveitar algumas matérias mais adiante. Assim, fiz a prova e consegui a aprovação.

Ao iniciar o curso me deparei com uma realidade totalmente distinta da qual um dia pude imaginar para um curso de licenciatura em Matemática. Foram tantas novidades e desafiosque me motivavam a querer estudar mais. Costumo dizer que no primeiro semestre eu a "conheci" a matemática, no segundo semestre me "apaixonei" por ela, e no terceiro me "casei", pois tive a plena certeza de que ser professor de matemática era o que eu queria fazer para o restante da minha vida.

A motivação deste trabalho tem sua trajetória no início do curso de cálculo 2. No curso, geralmente os componentes de Cálculo são estereotipados pelos alunos como de difícil entendimento, apresentando altos índices de reprovação e desistência em sua grande maioria. Sob esta ótica, gerou-se em mim uma grande expectativa ao cursar este componente curricular, motivado especialmente por esse estigma, levando-me buscar aprendê-la ao máximo que fosse possível às minhas faculdades mentais.

As aulas foram ministradas pela mesma professora de Cálculo 1, à qual já tinha nos apresentado o conceito de Derivadas. Em Cálculo 2, lecionou integrais, sendo que entre outros conteúdos, exibiu o teorema fundamental do Cálculo (TFC). Em primeira instância não compreendi o significado e a importância daquele teorema, do qual despertou muito a minha atenção, pois em seu próprio título, exibe a palavra “fundamental”, denotando que este teorema apresentava uma “valiosidade” da qual eu não estava reconhecendo, aprendendo apenas como aplicá-lo. Partindo deste pressuposto, iniciei minha indagações consultando aos colegas de classe se tinham compreendido de fato o teorema exibido, e assim como eu, recebi relatos de que apenas compreenderam como aplicar para calcular integrais definidas. A partir de então, iniciei pesquisas sobre o TFC, procurando compreendê-lo por interesse próprio, não havendo em mim naquele instante a intenção de ser o objeto de estudo do trabalho de conclusão do curso(TCC).

Passando-se algum tempo, entrei em contato com a referida professora, manifestando omeu desejo de produzir o TCC sobre esta temática, desejando inicialmente, investigar e produzir um trabalho voltado a discursar apenas sobre a importância do TFC para explicitar a relação “inversa” presentes nos processos das operações de integração e derivação. Porém, impulsionado pelo anseio de exercer a docência, e pelos conselhos da professora de Cálculo 1 e 2, à qual aceitou me orientar, direcionei minhas inquietações para o ensino do TFC, desejando investigar sobre suas possíveis dificuldades, realizando uma pesquisa de campo com osdiscentes do curso.

Todavia, após reuniões de orientação, concessionamos que poderiam haver pesquisas com indagações e respostas para tal questionamento, não só voltados ao ensino, mas também às dificuldades de aprendizagem do TFC, fornecendo assim, novas perspectivas e implicações, aplicadas em ambientes distintos, sob vieses diferentes, projetando-se muito mais rico o nossoaprendizado sobre o tema escolhido.

Na sessão seguinte, será apresentado de modo resumido, o que vem a ser o TFC.

2.2. SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (TFC)

> "O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante doCálculo e um dos maiores feitos da mente humana." (STEWART, 2009, p. 364)

O TFC é uma das mais belas e importantes construções matemática, capacitando e potencializando duas grandes áreas do Cálculo da qual anteriormente não havia uma conexão estabelecida entre as quais atualmente são conhecidas por cálculo integral e cálculo diferencial, ambas inicialmente motivadas por perspectivas distintas contendo objetivos disjuntos, enquantoo estudo das derivadas parte do pressuposto de determinar a reta tangente a uma curva em certoponto, descrevendo assim sua taxa de variação neste ponto, o cálculo integral se encarrega inicialmente de calcular áreas de figuras planas quaisquer.

Antes de apresentar formalmente o TFC, serão expostas duas sessões seguintes, embasados em Eves (2011) e Boyer (1974), uma rápida noção do que vem a ser a integração e a derivação.

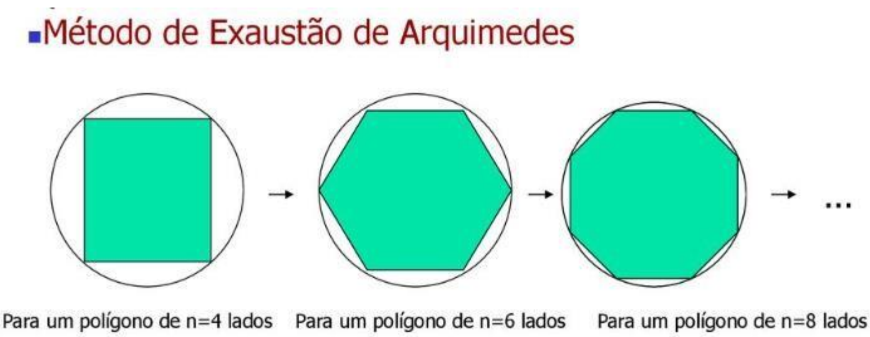
2.2.1. Integração

O cálculo integral tem suas origens estabelecidas em problemas relacionados ao estimaráreas, volumes e comprimento de arcos. Os primeiros registros dessa atividade são datados no Papiro Egípcio de Moscou, onde se encontram problemas de área com resolução semelhante àsfórmulas de integração conhecidas atualmente.

Outra contribuição importante para o desenvolvimento da concepção de integração foi o desenvolvimento do "método de exaustão" desenvolvido por Eudoxo admitindo que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará pôr fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 419)

Entre os matemáticos antigos, quem aplicou da melhor maneira o método da exaustão, chegando muito próximo da atual integração, foi Arquimedes. O mesmo chegou a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que são utilizadas atualmente, para o cálculo de árease volumes.



Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/15736103/

Sobre esta questão Boyer afirma o seguinte:

> O método da exaustão é um procedimento que consiste em esgotar a região cuja área se quer calcular por meio de outras áreas conhecidas. A ideia central está em: dada uma região cuja área se pretende determinar, nela se inscrever regiões poligonais, cuja área é conhecida, e que se aproximem da primeira. A seguir, escolhe- se outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e o processo continua tomando polígonos com número cada vez maior de lados, de modo a "cobrir" toda a região dada. (BOYER, 1974, p. 67).

A contribuição seguinte para o Cálculo Integral apareceu somente ao final do século XVI quando a mecânica levou vários matemáticos a examinar problemas relacionados com o centro de gravidade. Em 1606, em Roma, Luca Valerio publicou *De quadratura parabolae* onde utilizou o mesmo método grego para resolver problemas de cálculo de áreas desse tipo.

Kepler (1571-1630), em seu trabalho sobre o movimento dos planetas, teve que encontrar as áreas devários setores de uma região elíptica. O método de Kepler consistia em pensar na superfície como a soma de linhas - método este que, na prática, apresentava muita imprecisão. Analogamente, para calcular volumes de sólidos, pensava na soma de fatias planas. Desse modo, calculou os volumes de muitos sólidos formados pela revolução de uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para o cálculo de cada um desses volumes, Kepler subdividia o sólido em várias fatias, chamadas infinitésimos, e a soma desses infinitésimos se aproximava do volume desejado.

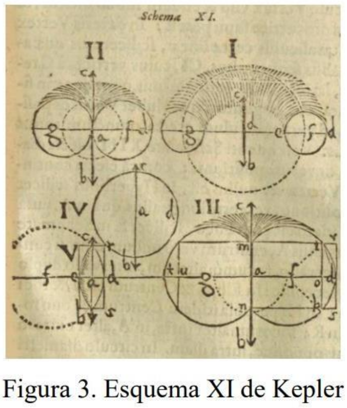


Figura 3. Esquema XI de Kepler

Fonte: Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática.
http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Moura_E_C_M_M%C3%A9todo_de_Integra%C3%A7%C3%A3o_de_Kepler.pdf

Os próximos matemáticos que tiveram grande contribuição para o nascimento do Cálculo Integral foram Fermat e Cavalieri. Em sua obra mais conhecida, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Cavalieri desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Aparentemente, Cavalieri pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos "indivisíveis". Ele mostrou, usando os

seus métodos, o que hoje em dia escrevemos: $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$

Todo o processo geométrico desenvolvido por Cavalieri foi então aritmetizado por Wallis. Em 1655, em seu trabalho *Arithmetica infinitorum,* Wallis desenvolveu princípios de indução e interpolação que o levaram a encontrar diversos resultados importantes, entre eles, aantecipação de parte do trabalho de Euler sobre a função *gamma*.

Fermat desenvolveu uma técnica para achar a área sob cada uma das, então chamadas, "parábolas maiores": curvas do tipo $y = kx^n$, onde k > 0 é constante e n = 2,3 ,4, etc. Empregouentão uma série geométrica para fazer o mesmo para cada uma das curvas do tipo $y = kx^n$, onde k $>$ 0 e n = -2, -3, -4, ... Por volta de 1640, a fórmula geral da integral das parábolas maiores era conhecida por Fermat, Blaise Pascal, Descartes, Torricelli e outros.

Os trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral foram publicados em 1684 e em 1686 sob o nome *Calculus Summatorius*. O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690.

Leibniz, diferentemente de Newton, usava a integração como uma soma, de uma maneira bastante parecida à de Cavalieri. Daí vem o símbolo $\int$ um 's' longo - para representar summa. Segundo ele, "represento a área de uma figura pela soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais definidos pelas ordenadas e pelas diferenças entre as abscissas... e, portanto, eu represento em meu cálculo a área da figura por $\int ydx$". Ambos desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, entretanto Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz o via mais como analítico.

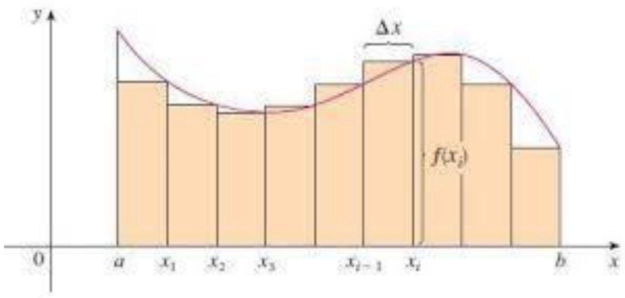
Leibiniz acreditava que a notação era de fundamental importância e, de fato, a sua notação foi mais eficaz do que a de Newton e acabou por se consolidar, sendo utilizada até os dias de hoje, mantendo exatamente a forma. Newton escrevia para si próprio e não foi feliz emencontrar uma notação consistente.

Atualmente define-se integral como:

> Definição: Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento igual a $\Delta x = (b - a)/n$.
> Sejam x_0 $(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(= b)$ pontos arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo entre $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida f de a em b é
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=}^{n} f(x^*)_i \Delta x$$
>
> Desde que o limite existe e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que é integrável em $[a, b]$. (STEWART, 2013, p. 337).

Para exemplificar, mostraremos como calcular, usando a definição, $\int_0^b x^2 dx$, da região delimitada pela parábola $y = x^2$ e as retas $x = b$ e $y = 0$. Dividiremos o intervalo [0,b] em n partes iguais pelos pontos $x_0 = 0, x_1 = \Delta x_1, x_2 = \Delta x_2, \ldots, x_n = b = n\Delta x$, tal que $\Delta x = \frac{b}{n}$.

Tomemos em cada subintervalo [xi-1,xi] o ponto ξi, que nesse caso será o ponto da extremidade direita de cada segmento, para encontrarmos a altura do retângulo e assim, construir retângulos com base Δx e altura $f(x_i)$, como representado na figura abaixo.



Fonte:https://wp.ufpel.edu.br/bottega/files/2015/02/apostilaC22015.pd

Assim, ao somarmos a área dos retângulos formados em cada subintervalo, cuja fórmulaé dada pela expressão $f(x_i)\Delta x_i$, obteremos a soma integral $S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_n)\Delta x$. Nesse caso teremos:

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x =$$

$$S_n = [(\Delta x^2)\Delta x + (2\Delta x^2)\Delta x + \cdots + (n\Delta x^2\ )\Delta x =$$

$$= (\Delta x^3)[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2].$$

Como sabemos: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, então temos que

$$S_n = \frac{b^3}{3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right);$$

Portanto, por definição temos que:

$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}$. (Adaptado de PISKOUNOV, 2000, p, 435 e 436).

Nesse exemplo, foi até “fácil” calcular a integral, mas o mesmo pode não acontecer comoutro tipo de função, o que vai reforçar a importância do TFC.

Após o estabelecimento do Cálculo, Euler daria continuidade ao estudo de funções - ainda prematuro na época - juntamente com Cauchy, Gauss e Riemann. Foi Euler, entretanto, quem reuniu todo o conhecimento até então desenvolvido e criou os fundamentos da Análise. Hoje em dia o Cálculo Integral é largamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática, mas de Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química, por exemplo. Na sequência, apresentaremos algumas noções sobre a derivação.

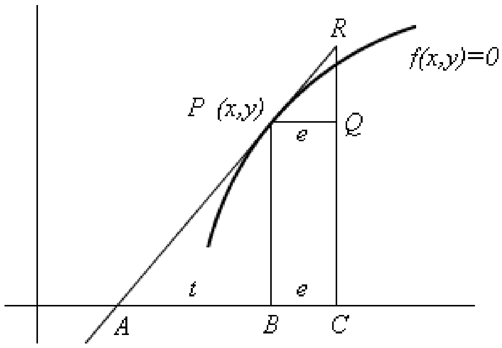
2.2.2. Derivação

A diferenciação se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões que buscavam determinar máximos e mínimos de funções. Na Grécia antiga, poréma primeira manifestação realmente clara do método diferencial data de 1629 (EVES, 2004). O alemão Johannes Kepler já tinha observado que os incrementos de uma função se tornam infinitesimais nas proximidades de um ponto de máximo ou de mínimo comum.

Porém foi o matemático francês Pierre de Fermat (1601–1665) quem primeiramente manifestou com clareza o método diferencial. Considerando a ideia de Kepler, Fermat estabeleceu um procedimento para determinar os pontos de máximo ou de mínimo.

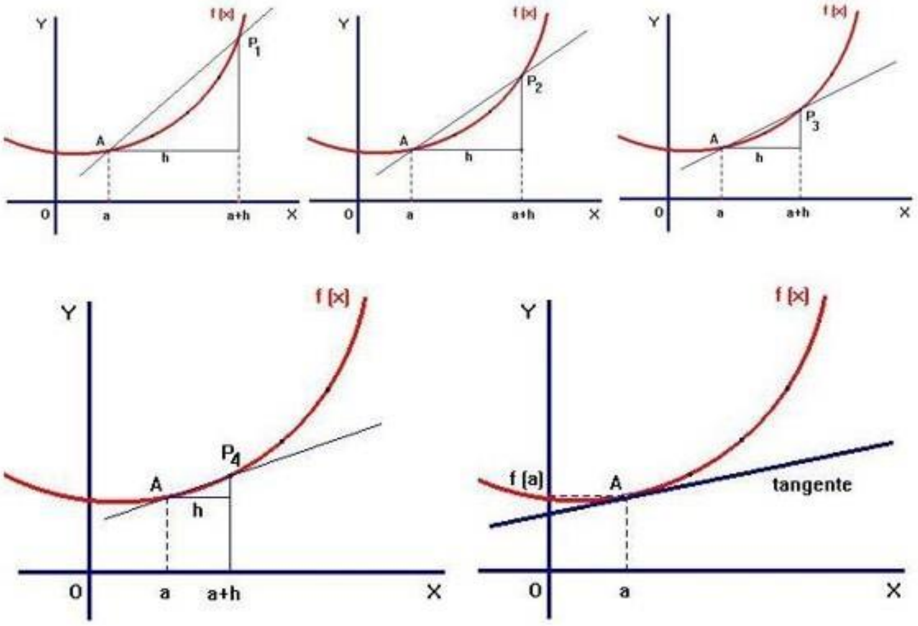
Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo comum em x e se incremento e for muito pequeno,então o valor de $f(x - e) = f(x)$, para tornar essa igualdade correta, impor que e assume o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais $f(x)$ assume um máximo ou mínimo. (EVES, 2004, p. 429).

Esse método é conhecido como método de Fermat. O método é incompleto, pois ignorou que a condição de a derivada de $f(x)$ se anular não é suficiente para que se tenha um máximo ou mínimo comum e também não fazia distinção entre valor máximo e valor mínimo (EVES, 2004). Outra descoberta de Fermat foi um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. O método consistia em achar a subtangente relativa ao ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo (EVES, 2004), cuja representação gráfica é a seguinte:



Fonte: https://livrozilla.com/doc/1340002/derivadas-como-no-tempo-de-newton-e-leibniz

Assim, a definição de derivada foi evoluindo historicamente até chegar na definição atual, por meio de limites, ou seja, tomar dois pontos na curva da função a ser estudada, traçar uma reta secante passando pelos dois pontos e uma reta tangenciando à curva em apenas um dos pontos. Com isso, relacionar as inclinações das duas retas, levando em consideração que a inclinação da reta tangente será o limite da inclinação da reta secante, conforme ilustrado na imagem seguinte.



Fonte:https://www.lemat.unican.es/lemat/proyecto_lemat/derivadas/nivel1/teoria/derivadas6.htm

Além disso, a inclinação da reta secante é dada pela tangente do seu respectivo ângulo formado com o eixo x, qual seja, $tg\alpha$

> Definição: a derivada de uma função f em um número a, denotado por $f'(a)$, é $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se o limite existir. (STEWART, 2013, p. 133).
> Ao deixarmos o a variar, e substituir a pela variável x, obtemos a derivada como uma função $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. (STEWART, p. 140).

Na seção seguinte apresentaremos o enunciado das duas partes do TFC, sem contudo demonstrá-los, mas apenas para com a intensão de mostrar como os processos envolvidos nas operações de integração e derivação estão relacionados.

2.2.3. Enunciando o TFC

O problema do *movimento* estava sendo estudado desde a época de Galileo. Tanto Torricelli como Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. A derivada da distância era a velocidade e a *operação inversa*, partindo da velocidade, levava à distância. A partir desse problema envolvendo movimento, a ideia de “operação inversa” da derivada desenvolveu-se naturalmente e a ideia de que a integral e a derivada eram “processos inversos” era familiar a Barrow. Embora Barrow nunca tenha enunciado formalmente o TFC, estava trabalhando em direção a esse resultado. Foi Newton, entretanto, quem, continuando namesma direção, formulou o teorema.

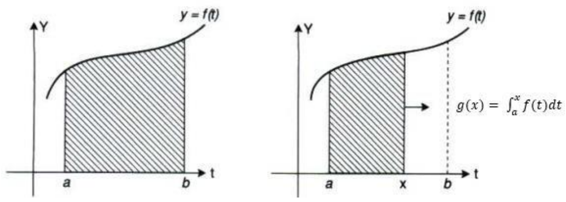
Newton continuou os trabalhos de Barrow e Galileo sobre o estudo do movimento dos corpos e desenvolveu o Cálculo aproximadamente dez anos antes de Leibniz. Ele desenvolveu os métodos das *fluxions* - derivação - e *fluents* - integração - e utilizou-os na construção da mecânica clássica. Para Newton, a integração consistia em achar *fluents* para um dado *fluxion* considerando, desta maneira, a integração como "inversa" da derivação. Com efeito, Newton sabia que a derivada da velocidade, por exemplo, era a aceleração e a integral da aceleração era a velocidade. Newton representava as integrais por um acento grave acima da letra em questão,por exemplo, a integral de y era representada por $\grave{y}$.

Principalmente como consequência do TFC de Newton, as integrais foram simplesmente vistas como derivadas "reversas". Na mesma época da publicação das tabelas de integrais de Newton, Johann Bernoulli descobriu processos sistemáticos para integrar todas as funções racionais, que é chamado método das frações parciais. Essas ideias foram resumidas por Leonard Euler, na sua obra sobre integrais.

O TFC como é abordado atualmente, é resultado do desenvolvimento do cálculo há mais de 3000 anos, envolvendo vários estudiosos matemáticos. É um dos mais importantes teoremas damatemática. Seu enunciado é dividido em duas partes:

> **Teorema Fundamental do Cálculo – Parte I**: Se f for contínua em $[a, b]$, então acfunção g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, a≤x≤b é contínua em [a,b] e derivável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$. (STEWART, 2010, p 359).

Esta primeira parte do TFC afirma que a função contínua $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, é uma primitiva (ou antiderivada) de f. Graficamente pode ser interpretada como a função que calculaa área sob o gráfico de f de a até x, onde x pode varia de a até b.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2013), p. 265.

Observe que g depende somente de x, que aparece como variável superior do limite daintegral. Se x for um número fixado, então a integral é um número definido. Se variarmos x, o número da integral acima também varia definindo uma função de x, que no caso denotamos por $g(x)$. Esta função g apresenta grande utilidade na parte II da demonstração do TFC pois, por meio dela, podemos determinar valores reais para a integral de uma determinada função contínua *f*, estabelecida em um intervalo fechado $[a, b]$, a partir da diferença entre as respectivasimagens de b e a pela função primitiva de *f*.

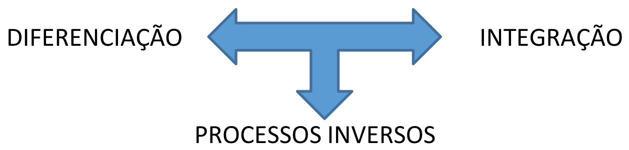
> **Teorema Fundamental do Cálculo – Parte II**: Se *f* for contínua em [a, b], então
> $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que
> $F'(x) = f(x)$. (STEWART, 2010, p 361).

Em suma, podemos agora calcular a integral definida determinando inicialmente a integral indefinida (como definido na parte I) correspondente e, em seguida, obter a diferença entre os valores numéricos desta para os extremos de integração (superior menos inferior) obtidos pelas imagens de F. Para exemplificar a parte II do TFC, utilizaremos a integral $\int_0^b x^2 dx$ que calculamos na seção 2.2.1 usando de definição de integral definida. Para tal, necessitamos inicialmente conhecer uma primitiva F tal que $F'(x) = x^2$. Não obstante, com o conhecimento de derivação, deduzimos que $F(x) = x^3/3$. Aplicando a parte II do TFC temos

$$\int_0^b x^2\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{b^3}{3}.$$

Então, do TFC podemos estabelecer que se tomarmos primeiro a função F(x), a diferenciarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F. De forma análoga, se integramos uma função contínua f e, e seguida, derivarmos o resultado, obteremos a função original f.

Resumindo temos que:



Na próxima seção compartilha-se o objetivo e a questão que norteia a investigação desta pesquisa.

2.3. O PROBLEMA

Gil (2008, p 33) descreve *problema* na acepção científica, como qualquer questão não resolvida e que é objeto de discussão, em qualquer domínio do conhecimento. Neste sentido, as inquietações iniciais do autor deste trabalho sobre o porquê a existência de um teorema no estudo do cálculo denominado de "fundamental" e o não esclarecimento desse fato quando cursou a disciplina, se mostrou pertinente e não resolvida em primeira instância.

Ao postular-se o problema, hove o pressuposto de compreender melhor o TFC bem como suas dificuldades apresentadas no ensino e aprendizagem do mesmo.O primeiro passo dado foi fazer uma busca por artigos que tratassem do tema, os quais foramencontrados os trabalhos dos autores: Melchiors, A e Soares, M. (2013), Fulini (2016), Moreira (2016), Filho (2001), Souza (2012), Silva (2019) e Silva (2016). Tais artigos apontavam o contexto histórico do desenvolvimento do TFC e também como demonstrar e aplicar o teorema. A leitura dos artigos, o estudo histórico do tema embasados em Eves (2011) e Boyer (1974), os vários e vastos momentos de reflexão do autor deste trabalho e os encontros de orientação, mostraram alguns aspectos interessantes sobre o TFC, que desencadeou nadesistência da ideia de fazer uma pesquisa de campo, com alunos do curso de licenciatura em matemática da UNEB/Campus II. O novo caminho traçado foi o de realizar uma busca por mais pesquisas, no caso dissertações e teses nacionais, que tratassem do TFC, no intuito de compreender melhor e ainda mais esse conteúdo que é fundamental no estudo do Cálculo.

Portanto, o objetivo deste trabalho monográfico é o de *pesquisar e analisar teses e dissertações de autores nacionais no período de 2006 a 2021, que abordem sobre o Teorema Fundamental do Cálculo,* no intuito de responder à seguinte questão: *quais foram as contribuições dos autores de dissertações e teses sobre o "Teorema Fundamental do Cálculo"*

3. METODOLOGIA

De acordo com o objetivo traçado, caracterizamos a presente pesquisa como sendo de *natureza qualitativa,* que Coswell (2010, p. 206) define como sendo aquela que:

> [...] emprega diferentes concepções filosóficas; estratégias de investigação; e métodos de coleta, análise e interpretação dos dados. [...] os procedimentos qualitativos baseiam- se em dados de texto e imagem, têm passos singulares na análise dos dados e se valemde diferentes estratégias de investigação.

Investigação qualitativa esta, que optou-se por realizar uma revisão de trabalhos "mapeados" no sítio da Coordenação eAperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES[3]), que é um acervo brasileiro que contém teses e dissertações nocampo do ensino e aprendizagem da matemática.

Este tipo de pesquisa é denominado "estado da arte" ou "estado de conhecimento", queconforme Ferreira (2002), traz em comum o desafio de mapear e discutir publicações existentes sobre determinada área de conhecimentos, que possam ter sido desenvolvidas em épocas distintas, sob perspectivas e condições diferentes determinadas dissertações de mestrado, teses de doutorado, publicações em periódicos e comunicações em anais de congressos e de seminários. Optamos por classificar a presente pesquisa como bibliográfica dotipo "estado da arte".

A escolha se deu por acreditarmos que esse tipo de investigação nos permitirá inferir e interpretar os dados coletados nas teses e dissertações que forem selecionadas, sob uma perspectiva que envolve contextos e concepções das quais não são possíveis serem mensuradase analisadas por meio da pesquisa quantitativa. Nossa expectativa é que o nosso estudo gere novos resultados e que possa contribuir para ampliar as produções científicas e os conhecimentos relativos ao TFC.

Trabalhos desta natureza se comprometem em inventariar as pesquisas já existentes, que podem se encontrar esparsadas e em primeiro olhar desconexas mesmo abordando o mesmotema, tal justificativa para a importância deste tipo de obra é salientada por Soares (1987) afirmando a necessidade do "estado de conhecimento" para o processo de evolução da ciência, pois ao organizar e acumular resultados já obtidos sobre determinado conhecimento, possibilitam a identificação de novas lacunas a serem preenchidas, comparações entre resultados e integração das mesmas.

Em conformidade com Gil (2008, p.50), classificamos essa pesquisa como bibliográfica que segundo o autor é aquela desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Refere também, que tal pesquisa, se utiliza fundamentalmente das contribuições dos diversos autores sobre determinado assunto, o que vaiao encontro do objetivo traçado por nós para esse trabalho.

Gil (2008, p.51) explica que parte dos estudos exploratórios podem ser definidos comopesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de *análise de conteúdo*, que segundo Bardin (2011, p. 45), possui função de inferência,ou seja, “a operação lógica pela qual se admite uma proposição em virtude da sua ligação com outras proposições já aceitas como verdadeiras”. Afirma também que é um conjunto de técnicade análise das comunicações visando:

> [...] obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens. (BARDIN, 2011, p. 48).

Assim a análise de conteúdo apresenta características que no possibilitam responder à questão que norteia essa pesquisa: *quais foram as contribuições dos autores de dissertações e teses sobre o “Teorema Fundamental do Cálculo”?* Bardin (2011) descreve três frases da análise de conteúdo:

- **Pré-análise;**
- **Exploração do material;**
- **O tratamento de resultados, a inferência e a interpretação.**

Na próxima seção, apresentaremos os procedimentos metodológicos adotados para cumprir a fase da pré-análise, sendo essa o início da pesquisa, encarregada de coletar e organizaros documentados a serem investigados.

3.1. A FASE DA PRÉ-ANÁLISE

O objetivo traçado nos levou naturalmente à decisão sobre o *corpus* que iríamos analisar, qual seja: dissertações de mestrado e teses de doutorado no contexto do ensino e aprendizagem da matemática que tratam do tema ‘teorema fundamental do cálculo’. Em nossa pesquisa talbusca foi primordialmente realizado no banco de teses e dissertações da CAPES, já que é uma plataforma que contém todos os trabalhos dos programas *strictu sensu* e de doutorado, além da sua fácil acessibilidade. A partir daí deu-se início a fase da pré-análise que é considerada por Bardin (2011) como a fase de organização e corresponde a um período de intuições, mas que tem por objetivo:

> [...] tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais, de maneira a conduzir a um esquema preciso de desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise. [...] Recorrendo ou não ao computador, trata-se de estabelecer um programa que, podendo ser flexível (quer dizer, que permita a introdução de novos procedimentos no decurso da análise), deve, no entanto, ser preciso. (BARDIN, 2011, p. 125)

Bardin (2011) caracteriza esta fase como um período onde o pesquisador deverá organizar o conteúdo de pesquisa definido anteriormente, formular hipóteses e objetivos e elaborar indicadores que fundamentem a intepretação final. Na seção sucedente descrevemos como ocorreram o recolhimento dos documentos que constavam no portal da CAPES.

3.1.1. “Mapeando” os documentos

Na nossa busca no sítio da Capes, digitamos inicialmente a palavra-chave *Teorema Fundamental do Cálculo*, à qual gerou como resultado 1.350.675 pesquisas, das mais diversasáreas de conhecimento, das quais não necessariamente tinham o TFC como objeto de estudo.

Resolvemos utilizar a mesma palavra-chave, só que colocando-a entre aspas, pois serve para buscar frases exatas e que apareçam nessa ordem. Com isso, conseguimos reduzir o resultado para trinta (30) pesquisas, sendo 7 teses e 23 dissertações, sendo treze (13) de mestrado profissional e dez (10) de mestrado acadêmico.

Vale ressaltar que inicialmente pensamos em mapear as pesquisas num período de 10 anos, compreendendo de 2011 a 2021, mas a pesquisa no sítio da CAPES retornou um número de trabalhos acadêmicos possíveis de serem tratados, sem haver a necessidade de criarmos filtros de refinamentos, o que nos levou a fixar o período dos anos encontrados nas dissertaçõese teses, que foi de 2006 a 2021.

A etapa seguinte foi a tentativa de salvar estes trabalhos em “nuvens” para não os perder. No entanto, percebemos que em 10 deles aprecia a frase “Trabalho anterior à Plataforma Sucupira” e com isso não conseguimos ter acesso ao *download* da obra na plataforma. Nas vinte (20) pesquisas restantes apareciam a opção “detalhes” que clicando nos dava acesso a algumas informações sobre o trabalho, entre elas o resumo. Desses,conseguiu-se fazer o *download* de dez (10), pois nos outros dez (10), no local que era destinado para baixar a pesquisa estava escrito: “resultado não encontrado”.

Como tínhamos vinte (20) documentos não disponíveis para *download* no sítio da

CAPES, resolveu-se buscar os arquivos no Google Acadêmico, digitando o nome do trabalho e do autor, sendo redirecionados aos respectivos repositórios acadêmicos das universidades de origem dos programas. Conseguimos desse modo fazer o *download* de mais quatroze (14) obras, disponíveis em formato PDF. Infelizmente, não foram localizados seis (06) trabalhos, sendo estes desconsiderados nesta pesquisa:

Quadro 1: Pesquisas não localizadas.

Autor	**Ano**	**Título**
Palaro	1998	O Teorema Fundamental do Cálculo e a Obra de H. Lebesgue
Jacyntho	2008	Uso de episódios históricos e de geometria dinâmica para desenvolvimento de conceitos de integral de Riemann e do teorema fundamental do cálculo para funções de variável real.
Grigoletto	2014	Equações Diferenciais Fracionárias e as Funções de Mittag-Leffler
Gomes		On Fuzzy Differential Equations
Simoes	2017	Sobre equações diferenciais para processos fuzzy linearmente correlacionados: aplicações em dinâmica de população
Oliveira	2018	Derivadas fracionárias: generalizações

Fonte: Dados da pesquisa

Foram baixados e armazenados os vinte e quatro (24) trabalhos encontrados na busca do sítio da CAPES em mídia digital – computador, pendrive, HD externo e nuvem de dados privados-para posterior consulta. Mostraremos a seguir como foi realizada a leitura flutuante desses documentos “mapeados”.

3.1.2. Leitura “flutuante” e as pesquisas pré-selecionadas

Bardin (2011) sugere que deve ser feita uma leitura superficial do material inicialmente coletado, da qual a mesma denomina de *leitura flutuante* e que proporciona ao pesquisador situar-se sobre o material encontrado, do que se trata e se apresenta alguma relação com o conteúdo de pesquisa. Para a autora, o objetivo é estabelecer contato com os documentos dos quais serão analisados, como também gerar impressões e orientações sobre a obra.

Dessa forma, iniciamos a *leitura flutuante* buscando inicialmente pelo nome do tema, Teorema Fundamental do Cálculo, no título e nas palavras-chave, sendo que em 13 deles não localizamos. Isso nos levou a uma leitura superficial do resumo constatando que continha o termo Teorema Fundamental do Cálculo. O quadro seguinte mostra o resultado dessa busca:

Quadro 2: Resultado da busca do termo “Teorema Fundamental do Cálculo”.

Autor	Seção da pesquisa em que foi localizado		
	Título	**Palavras-chave**	**Resumo**
Leal, A.S.L.			x
Leite, A.P.			x
Grande, A.L.	x	x	x
Guedes, A.S.			x
Picone, D.F.B.	x	x	x
Machado, G.P.			x
Andersen, É.	x	x	x
Nóbrega, G.Â.S.			
Anacleto, G.M.C.	x	x	x
Matos, L.S.			x
Campos, R.P.	x	x	x
Pereira, M.E.			x
Silva, R.S.R.	x	x	x
Santos, W.C.	x	x	x
Santos, A.S.			x
Silva, A.P.R.C.			x
Alonso, E.P.	x	x	x
Kondo, P.K.			
Soares, F.P.B.			x
Marco, M.L.B.	x	x	x
Silva, D.F.		x	x
Rachelli, J.			x
Reis, T.L.B.			x
Mattos, B.D. T.	x		

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados do quadro 2 apontam que quase dois terços das produções acadêmicas pré-selecionadas apresentavam o tema “Teorema fundamental do Cálculo” no resumo, sugerindo que este não era o foco principal destas obras. Assim, empreendeu-se uma leitura mais apurada dos resumos para conhecer o objeto de investigação de cada obra, a similaridade entre os trabalhos e se apresentavam familiaridade ao tema proposto para nossa pesquisa. Na próxima seção, será exibidas as as pesquisas selecionadas com leitura efetuada.

3.1.3. Pesquisas Selecionadas

Ao realizarmos a leitura dos resumos, mapeando os objetivos de cada produção, percebeu-se que quinze (15) - Quadro 3 – dos vinte e quatro (24) trabalhos pré-selecionados não se enquadravam no propósito desta pesquisa, pois suas contribuições não se referiam ao tema “Teorema Fundamental do Cálculo”.

Quadro 3: Pesquisas pré-selecionadas que não foram aproveitadas.

Autor	**Ano**	**Título**
Pereira, M.E.	1999	Uma Generalização da Integral de Riemann
Nóbrega, G.Â.S.	2010	Integrais de Linha Intervalares: Fundamentos e Aplicações
Guedes, A.S.		Evolução no Cálculo de Áreas de Figuras Planas: de Arquimedes a Newton
Leite, A.P.	2013	Funções elementares de primitiva não elementar
Matos, L.S.		compreensões sobre derivada e integral com o uso de um cas on line: um estudo com alunos do terceiro ano do ensino médio
Santos, A.S.	2014	Preenchimentos aplicados no cálculo de áreas de regiões parabólicas
Kondo, P.K.		Cálculo Finito: Demonstrações e Aplicações
Reis, T.L.B.		Integral Definida: conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem
Leal, A.S.L.	2015	Incerteza Intervalar em Otimização e Controle
Soares, F.P.B.		Conceitos e Ideias do Cálculo Diferencial e Integral
Silva, A.P.R.C.		Cálculo de Áreas no Ensino Médio
Rachelli, J.	2017	Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APÓS
Mattos, B.D. T.	2018	Cálculo de áreas sem o uso do Teorema Fundamental do Cálculo
Machado, G.P.		Introdução à Análise Não Standard
Silva, D.F.	2019	Uma introdução à integral de Riemann contextualizada ao Ensino Médio.

Fonte: Dados da pesquisa

Com este refinamento reduziu-se o número do nosso *corpus* para nove (09) documentos (Quadro 4) para serem analisados e daí podermos responder à questão norteadora dessa pesquisa.

Quadro 4: Trabalhos selecionados para constituição do *corpus* de pesquisa

<table>
<tr><th colspan="3">Trabalhos selecionados</th><th rowspan="2">Instituição</th><th rowspan="2">Programa</th><th rowspan="2">UF</th></tr>
<tr><th>MP</th><th>MA</th><th>D</th></tr>
<tr><td>–</td><td rowspan="2">4</td><td>1</td><td rowspan="2">PUC-SP</td><td>D em Educação Matemática</td><td>SP</td></tr>
<tr><td>1</td><td>–</td><td>MP em Ensino de Matemática</td><td>SP</td></tr>
<tr><td>–</td><td rowspan="3">1 cada</td><td rowspan="3">–</td><td>UNESP</td><td>MA em Educação Matemática</td><td>SP</td></tr>
<tr><td>–</td><td>UFRJ</td><td>MA em Ensino da Matemática</td><td>RJ</td></tr>
<tr><td>–</td><td>UFSCar</td><td>MA em Ensino de Ciências Exatas</td><td>SP</td></tr>
<tr><td>1</td><td>7</td><td>1</td><td colspan="3">Total de trabalhos “selecionados”: 9</td></tr>
</table>

MP: mestrado profissional; MA: mestrado acadêmico; D: doutorado.

Fonte: Dados da pesquisa.

Vale ressaltar que no apêndice deste trabalho colocamos o inventário produzido com uma descrição detalhada de todos os 9 trabalhos.

Com os documentos selecionados, o próximo passo da nossa pesquisa foi o de efetuar o *tratamento* dos mesmos, processo este que Bardin (2011) caracteriza como *codificação* e que, segundo Baqueiro (2016), depende da natureza do problema, bem como do arcabouço teórico e do problema norteador da investigação. Na seção seguinte, serão relatados os procedimentos realizados nesta etapa, ao qual fazem parte a escolha das *unidades de análise* e a *categorização*.

3.1.4. A fase da codificação

Esta fase da pesquisa caracteriza-se por organizar sistematicamente os dados inicialmente coletados e sem nenhum tratamento até então. Bardin (2011) refere que esta etapacorresponde a uma transformação pautada mediante regras precisas, como por recorte, agregação e enumeração, capacitando ao analista construir uma representação do conteúdo. A autora registra que ocorre no processo de recorte a identificação das unidades, sendo estas a *unidade de registro* e de *contexto*.

Bardin (2011) ressalta que a unidade de significação se liberta naturalmente de um texto analisado, segundo critérios relativos à teoria que serve de guia à leitura. Afirma também queo tema é geralmente utilizado para estudar tendências, o que por osmose comunga com oobjetivo da nossa pesquisa que é o de pesquisar e analisar teses e dissertações de autores nacionais, no período de 2006 a 2021, que abordem sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.

O estudo da unidade temática, segundo Bardin (2011), corresponde a descobrir os “núcleos de sentido” que compõe determinada comunicação e cuja presença, ou frequência deaparição, podem significar alguma coisa para o objetivo analítico escolhido. Partindo dessepressuposto, realizou-se o fichamento dos nove (09) trabalhos acadêmicos, identificando no resumo as seguintes informações: objetivo da pesquisa; objeto matemático de estudo, apontamento doresultado encontrado, sujeito destinatário.

Escolhida a unidade de registro, a etapa seguinte foi a de determinar a unidade de contexto à qual Bardin explica que corresponde ao segmento de mensagem, cujas dimensões (superiores às de unidade de registro) são ótimas para que se possa compreender a significaçãoexata da unidade de registro (BARDIN, 2011, p. 137). Para a autora a unidade de contexto pode ser a frase para a palavra e o parágrafo para o tema. Assim, com base nos fichamentos que foram preenchidos a partir do resumo dos nove (09) trabalhos selecionados, conseguimos identificar parágrafos no resumo que nos permitiram uma melhor compreensão do tema (unidade de registro), fazendo com que estes trechos se constituíssem nas nossas unidades de contexto.

Com as unidades de contexto consolidadas, fomos cruzar as informações dos fichamentos a fim de obtermos características semelhantes. Etapa esta que (Bardin, 2011, p.147) denomina de *categorização* e que consiste em uma "operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com critérios previamente estabelecidos".

Na próxima seção, serão descritas as categorias e subcategorias criadas a partir das unidades de registro e de contexto escolhidas.

3.1.5. Escolha das categorias e subcategorias

Com a escolha da unidade de contexto realizada, um importante passo foi dado, pois asunidades de contexto capacitam uma melhor compreensão da unidade base corroborando para a definição das categorias a serem criadas, que segundo Bardin (2011) são "rubricas ou classesas quais reúnem um grupo de elementos (unidade de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns desteselementos."

O preenchimento e posterior leitura dos fichamentos nos fez perceber que a unidade de registro era abordada sob quatro diferentes perspectivas, que deram origem às quatro seguintescategorias:

- **Categoria 1: O TFC na perspectiva do aluno. Este agrupamento abrangeu uma tese e cinco (05) dissertações.**
- **Categoria 2: O TFC na perspectiva do professor. Este agrupamento abrangeu duas (02) dissertações.**
- **Categoria 3: O TFC na perspectiva do livro didático. Este agrupamentoabrangeu uma (01) dissertação.**
- **Categoria 4: O TFC numa perspectiva histórica e epistemológico. Este agrupamento abrangeu uma (01) dissertação.**

À princípio, a segregação do *corpus* nestas quatro categorias se mostrou suficiente parafazermos as inferências. Contudo, após reiteradas releituras dos resumos e tentativas de agrupamento dos documentos para análise, detectamos a necessidade de subdividir e reagruparas quatro (04) categorias, criando subcategorias, conforme apresentado no Quadro 5.

Quadro 5. Subcategorias que emergiram das quatro categorias.

CATEGORIA 1	
Subcategorias	**Tipo de documento**
Aprendizagem do TFC com o uso de calculadora gráfica (ACCG)	Trabalhos acadêmicos que abordam o processo de aprendizagem do TFC utilizando softwares e calculadoras gráficas, explorando aspectos visuais e gráficos das ideias mobilizadas pelos alunos.
Aprendizagem do TFC sem o uso de calculadora gráfica (ASCG)	Trabalho acadêmico que investigou as ideias mobilizadas pelos alunos sem utilizar o recurso tecnológico da calculadora gráfica.
CATEGORIA 2	
Subcategorias	**Tipo de documento**
Representações mobilizadas por professores no ensino do TFC (RMPE).	Trabalho acadêmico que investigou quais registros de representação semiótica são mobilizados por professores no ensino do TFC.
Aplicação do TFC por meio da Modelagem Matemática (AMM)	Trabalho acadêmico que apresenta uma sequência didática para o ensino do TFC e que utiliza o software *Geogebra* como recurso para resolução dos problemas.
CATEGORIA 3	
Subcategoria	**Tipo de documento**
Representações mobilizadas em livros didáticos que abordam o TFC (RMLD)	Trabalho acadêmico que analisa os tipos de registros de representação semiótica presentes em livros didáticos de Cálculo.
CATEGORIA 4	
Subcategoria	**Tipo de documento**
Ideais envolvidas no processo histórico e epistemológico do TFC (IEHE)	Trabalho acadêmico que apresenta historicamente e epistemologicamente a evolução do conceito do TFC como forma de construção do conceito atual.

Fonte: Autor da pesquisa.

Com base nas categorias e subcategorias criadas, prosseguiremos ao levantamento e análisedas contribuições deferidas pelos autores dos trabalhos que compõem o *corpus* deste trabalho. A análise das categorias e subcategorias serão realizadas seguindo, com adaptações, o roteiro proposto por Baqueiro (2016):

- **Com base nos resumos dos trabalhos acadêmicos, fazer a apresentação das pesquisas.**
- **Realizar, quando necessário, uma análise cruzada das informações importantes contidas nos parágrafos dos resumos das pesquisas que encontram-se dentro de uma mesma subcategoria, promovendo desta forma um "diálogo" entre elas, trazendo à discussão algumas das conclusões dos trabalhos, procurando por pontos de convergências ou divergências.**
- **Uma síntese com a exposição das nossas considerações sobre cada categoria/subcategoria, apresentando um resumo das contribuições dos autores sobre o tema "Teorema Fundamental do Cálculo".**

Na seção seguinte apresentaremos o resultado da exploração, tratamento e interpretação das nove (09) pesquisas selecionadas, de acordo com as categorias e subcategorias que emergiram na fase da pré-análise.

4. EXPLORAÇÃO, TRATAMENTO E INTERPRETAÇÃO

4.1. CATEGORIA 1

Na presente seção, apresenta-se certos atributos das pesquisas desse grupo, por julgamos preponderante conhecer a distribuição espacial e a evolução no enfoque dessas produções acadêmicas. Os dados apresentados no quadro abaixo subsidiarão nossos comentários.

Quadro 6: Detalhes das pesquisas da Categoria 1

<table>
<tr><th colspan="4">Categoria 1: O Teorema Fundamental do Cálculo sob perspectiva do aluno</th></tr>
<tr><th>Autor</th><th>Ano</th><th>Instituição</th><th>Subcategoria</th></tr>
<tr><td>Silva, R.S.R.</td><td>2006</td><td>UNESP</td><td>ACCG</td></tr>
<tr><td>Anacleto, G.M.C.</td><td>2007</td><td rowspan="3">PUC-SP</td><td>ASCG</td></tr>
<tr><td>Andersen, É.</td><td>2011</td><td rowspan="2">ACCG</td></tr>
<tr><td>Grande, A.L.</td><td>2013</td></tr>
<tr><td>Alonso, E.P.</td><td>2017</td><td>UFRJ</td><td>ACCG</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa categoria os trabalhos acadêmicos voltados ao ensino do TFC se concentram na região sudeste do país, em especial na região sudeste e, mais particularmente no eixo Rio-São Paulo, com um número maior no estado de São Paulo. São trabalhos cujo foco são as ideias mobilizadas pelos alunos durante uma investigação sobre o TFC, em sua grande maioria utilizando recursos tecnológicos e a coleta de dados realizadas por instrumentos como questionários e oficinas.

A subcategoria 'Aprendizagem do TFC com o uso de calculadora gráfica (ACCG)' engloba quase 84% da categoria 1. Nossa expectativa era de que as contribuições desses trabalhos apontassem de que forma os recursos tecnológicos, a exemplo da calculadora gráfica, contribuíam para o ensino do TFC. Já na subcategoria 'Aprendizagem do TFC sem o uso de calculadora gráfica (ASCG)' espera-se que o único trabalho encontrado possa elucidar outras formas de mobilizar um melhor aprendizado do aluno a respeito do TFC, que poderá servir de intervenção de ensino, para um momento em que o professor não deseje ou não disponha do recurso da calculadora gráfica.

Apresenta-se na seguinte seção, às análises das duas subcategorias:

4.1.1. Resumos dos trabalhos da subcategoria ACCG

Foram selecionados 3 dissertações e uma tese, sendo os programas de pós-graduações voltados para o campo da Educação Matemática, Ensino de Matemática e Ensino de Ciências Exatas.

Quadro 7: Pesquisas classificadas na subcategoria ACCG.

Aprendizagem do TFC com o uso de calculadora gráfica (ACCG)		
Código	**Autor**	**Título**
$ACCG_1$	Silva (2006)	A investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com calculadoras gráficas
$ACCG_2$	Andersen (2011)	As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizados por alunos de licenciatura em Matemática
$ACCG_3$	Grande (2013)	Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao ensino
$ACCG_5$	Alonso (2017)	Aspectos visuais e gráfico do Teorema Fundamental do Cálculo

Fonte: Autor da pesquisa.

A seguir, será comentado cada uma das pesquisas, procedendo em seguida a uma análise cruzada dos dados e, no final a uma reflexão sobre a influência desses conhecimentos sobre o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo.

Silva (2006) - $ACCG_1$

Esta dissertação teve por objetivo investigar como os estudantes com a utilização do recurso calculadora gráfica TI-83 mobilizam os conhecimentos a respeito do Teorema Fundamental do Cálculo. Para tanto, Silva (2006) fundamentou-se na perspectiva epistemológica Seres-Humanos-com-Mídia, que evidencia o papel das tecnologias no processode produção do conhecimento.

O pesquisador desenvolveu o experimento em duas sessões com alunos do primeiro ano da graduação em matemática, separando-os em duplas, onde na primeira sessão os alunos utilizaram a calculadora TI-83 para investigar os conceitos da soma de Riemann e Integração. Na segunda sessão os alunos utilizaram a função integração da calculadora, juntamente com papel e lápis, estabelecendo conjecturas sobre o TFC.

O autor evidencia a importância da experimentação com a calculadora gráfica no processo de investigação para a conjectura do TFC e posteriormente a demonstração, destacando-se a abordagem intuitiva das noções do objeto matemático estudado, como fator estimulador, possibilitando o engajamento gradativo dos alunos em “discussões atemáticas dedutivas” a partir dos resultados obtidos experimentalmente com as atividades propostas na pesquisa.

Andersen (2011) - ACCG2

O objetivo desta dissertação foi o de investigar quais processos mentais poderiam intervir e serem combinados no desenvolvimento de atividades envolvendo a expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Além disso, Andersen (2011) verificou se esse tipo de atividade favoreceria à compreensão das ideias centrais que envolvem o TFC.

A autora fundamentou-se no texto de Tommy Dreyfus, intitulado “Processos de Pensamento Matemático Avançado”, que privilegia o ensino por descoberta, por tentativa e erro, como também se utilizou de algumas fases da engenharia didática.

Para a obtenção dos dados, a pesquisadora elaborou um instrumento de pesquisaaplicado a 14 estudantes do curso de licenciatura em Matemática, com o auxílio do *software Winplot*, resultando na indicação dos seguintes processos do PMA que foram mobilizados: visualização, representação, mudança entre representações, definição, validação, descoberta, generalização e síntese. Isso possibilitou que os alunos conjecturassem que a integração e a derivação são operações inversas entre si, aos quais os alunos se apropriaram das inter-relaçõesenvolvidas no TFC.

Grande (2013) - ACCG3

Esta tese realizou um estudo didático e epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo, apresentando como resultado uma proposta de intervenção de ensino que procurou fazer emergir a relação entre as operações de integração e derivação e sob quais condições se estabelece esta relação.

Utilizou-se os seguintes referenciais teóricos: Henri Poincaré (1995), bem como as categorizações da intuição e as inter-relações entre os componentes formal, algorítmico e intuitivo de Efraim Fischbein (1991) e Tall (1991) sobre o papel da visualização no ensino do Cálculo e as inter-relações com a intuição e o rigor.

A questão norteadora desta pesquisa foi: uma intervenção de ensino com a utilização do aplicativo *GeoGebra*, baseada nos princípios da intuição contribui na compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, por meio de uma situação problema que propicie emergir e evidenciar tais relações? A análise mostrou resultados melhores por parte dos estudantes nas atividades matemáticas, quando o eixo das interações entre os componentes algorítmico, formal e intuitivo é trabalhado em conjunto com o eixo relacionado à questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo.

Alonso (2017) - ACCG4

O objetivo desta dissertação foi o de investigar a utilização de recursos visuais e gráficos na aprendizagem matemática, especialmente na do Teorema Fundamental do Cálculo, e que conceitos matemáticos são evocados pelos alunos ao participarem de atividades relacionadas ao TFC, estimulados por meio de tal prática pedagógica. Como suporte teórico, Alonso (2017) apropriou-se da perspectiva de Tall &Vinner e de Fischbein, que consideram importante o papel da visualização e da intuição no processo de ensino e aprendizagem.

A pergunta norteadora dessa investigação constitui-se como: Que contribuições uma proposta visual/gráfica do TFC pode ter para o entendimento deste resultado? Para responder esta pergunta, o pesquisador laborou um questionário, aplicou uma oficina e por fim uma entrevista com graduandos dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Ciências da Computação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Como ferramenta auxiliadora, foi utilizado o *software GeoGebra*, por acreditar ser uma ferramenta rica em possibilidade alternativa de representação dinâmica dos conceitos matemáticos.

O autor concluiu que durante as atividades com computadores, a exploração e inter-relações entre representações visuais/gráficas foram intensificadas, do qual o mesmo conjectura que tanto a exploração quanto as representações visuais/gráficas desenvolvem aspectos intuitivos na produção do conhecimento matemático.

4.1.2. Análise cruzada das dissertações da subcategoria ACCG

Encontra-se como ponto em comum ao cruzarmos essas produções acadêmicas, o quão benéfico se mostrou a utilização da calculadora gráfica no processo de aprendizagem do aluno, possibilitando o “trânsito” entre as diversas representações do conhecimento exibido, bem como estimula o aluno a investigar os conhecimentos concernentes ao TFC por esses recursos tecnológicos disponibilizarem inúmeras funções de exploração. Em resumo, as pesquisas apontaram que a experimentação com a calculadora gráfica no ensino do TFC é importante:

- **No processo de investigação para a conjectura do TFC e posteriormente a demonstração.**
- **Como fator estimulador de uma abordagem mais intuitiva, possibilitando o**

engajamento gradativo dos alunos em "discussões matemáticas dedutivas".

- **Na mobilização de processos do PMA tais como: visualização, representação, mudança entre representações, definição, validação, descoberta, generalização e síntese.**
- **Possibilitar aos alunos a conjectura e apropriação das inter-relações envolvidas no TFC.**
- **Permitir interações entre os componentes algorítmico, formal e intuitivo trabalhando em conjunto com o eixo relacionado à questão da visualização.**
- **A exploração e inter-relações entre representações visuais/gráficas desenvolvendo aspectos intuitivos na produção do conhecimento matemático.**

Destaca-se ainda algumas contribuições inferidas na análise desses trabalhos que acreditamos, resultarão em uma melhora no ensino do TFC:

- **Utilização de calculadoras gráficas no ambiente de sala de aula promovendo melhor interação entre os componentes cognitivos e os conhecimentos anterioresdo qual o aluno carrega consigo;**
- **Utilização de situações problemas como abordagem introdutória do conteúdo, ou como abordagem exploratória após o TFC ser ministrado pelo docente, pois as situações problemas promovem a mobilização entre os conceitos de maneira natural;**

4.1.3. Resumo do trabalho da subcategoria ASCG

Nesta subcategoria está a obra agrupada segundo a abordagem do TFC sob a perspectivado aluno, e que não utilizam para fins de investigação as calculadoras gráficas como instrumento na pesquisa. Tal produção é apresentada com base em seu resumo.

Quadro 8. Pesquisa incluída na subcategoria ASCG

APRENDIZAGEM DO TFC SEM O USO DE CALCULADORA GRÁFICA		
Código	**Autor**	**Título**
$ACCG_1$	Anacleto (2007)	Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo

Fonte: Dados da pesquisa.

Por figurar um único trabalho nessa subcategoria apresentaremos um resumo da mesa seguida de uma síntese como resultado da nossa análise.

Anacleto (2007) - ASCG1

Esta dissertação teve por objetivo investigar os conhecimentos mobilizados por alunos que já haviam estudado o TFC, relativamente aos conceitos de derivada e integral e sua interação.

A pesquisa fundamentou-se nos pressupostos teóricos da dialética ferramenta-objeto e jogos de quadros de Douady (1987) e teve também como base a pesquisa realizada por Segadas(1998) sobre a compreensão do TFC pelos alunos ao final do curso de Cálculo.

O pesquisador desenvolveu um questionário-piloto como instrumento de pesquisa que inicialmente foi aplicado a alunos do curso de Ciência da Computação de uma universidade particular da cidade de São Paulo, todavia estes alunos não haviam recebido o conteúdo relativo ao TFC com a profundidade requerida pela pesquisa. Assim, o autor precisou reestruturar o questionário-piloto, aplicando para estudantes do curso de Licenciatura em Matemática desta mesma universidade, onde essa disciplina dispunha de uma maior carga horária.

Anacleto (2007) verificou que a maioria dos alunos encontrou dificuldades para solucionar problemas em que poderiam ter sido resolvidos com interpretações gráficas, pois este resultado demonstra que os obstáculos dos estudantes para compreender o TFC estão relacionadas com a falta de mobilização das noções de derivada, integral e continuidade, utilizando apenas parcialmente estes conhecimentos para a solução dos problemas apresentadosno questionário.

4.1.4. Síntese da subcategoria ASCG

A pesquisa de Anacleto (2007) trouxe uma importante contribuição no sentido de refletirmos sobre como é preciso, enquanto professores, estarmos atentos a como os alunos manipulam os objetos matemáticos, em vários contextos (algébrico, geométrico, gráfico, etc.),com atenção de como a mudança de quadros pode favorecer o processo de construção do conhecimento desses objetos.

Em relação ao quadro constata-se que se constitui de

- **Objetos, das relações entre eles, de suas formulações e imagens mentais que o indivíduoassocia aos objetos.**
- **São mudanças que o docente pode fazer, visando o avanço do aluno nas etapas do estudo,e consequentemente na evolução em suas concepções.**

No que diz respeito ao TFC, percebemos que no âmbito da pesquisa:

- **Os alunos sabiam que a derivada da integral é igual a função a ser integrada, contudo, esse entendimento ficava evidente apenas no domínio algébrico.**
- **Quando houve a mudança para o registro geométrico, os alunos sentiram dificuldades e não utilizaram os conhecimentos contidos nas representações para a resolução das questões apresentadas no questionário, tendo uma aprendizagem parcial do TFC.**
- **Os conhecimentos anteriores como como a noção de função, de continuidade, de integração como variação de uma quantidade de grandeza, de acumulação de quantidade de grandeza; não foram compreendidos em sua totalidade e nem em outros domínios além do algébrico.**
- **A falta de domínio no contexto gráfico dificultou aos alunos a visualização de uma estratégia de resolução do problema mais simples, levando-os a longos cálculos algoritmos.**
- **Que os alunos pesquisados, ao estudar o TFC, focaram a atenção nos aspectos conceituais do TFC, apenas memorizando o algoritmo dos procedimentos, todavia semrefletir sobre sua aplicabilidade.**

4.2. CATEGORIA 2

A categoria 2 abrange a pesquisa em que o TFC foi investigado sob a perspectiva do professor, apresentando assim o objeto de conhecimento destinado à prática docente, visando acompreensão de quais registros de representação semiótica são mobilizados por docentes no ensino do TFC e da sugestão de uma sequência didática para o ensino do TFC que utiliza o software *Geogebra*. Isto nos levou a constituir duas subcategorias: 'Representações mobilizadas por professores no ensino do TFC' (RMPE) e Aplicação do TFC por meio da Modelagem Matemática (AMM).

Quadro 9: Pesquisas classificadas na subcategoria RMPE

Categoria 2: O Teorema Fundamental do Cálculo sob a perspectiva do professor			
Autor	**Ano**	**Instituição**	**Subcategoria**
Picone	2007	PUC-SP	RMPE
Marco	2021	UFSCar	AMM

Fonte: Dados da pesquisa.

Constata-se que a pesquisa de Picone realizada no período de 2007 na PUC-SP tem certa conexão com as pesquisas da categoria 1, qual sejam, a de Anacleto (2007), Andersen (2011) e Grande (2013), pois todas elas têm origem na mesma instituição e apresentam o mesmo orientador, o Professor Doutor Benedito Antonio da Silva. Percebe-se ainda que Anacleto (2007) e Picone (2007) defenderam no mesmo ano, com o mesmo tema mudando apenas, o enfoque, pois enquanto o primeiro analisou a aprendizagem de alunos do TFC, Picone (2007) investigou as representações mobilizadas por professores. Tal fato sinaliza a ampliação das pesquisas realizadas no grupo de pesquisa liderado pelo professor Benedito Silva.

Já a pesquisa de Marco é bem recente e apresentou sugestões de aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo para professores dentro das disciplinas Cálculo Diferencial e Integral.Apresentaremos na próxima seção a análise das duas subcategorias.

4.2.1. Resumo do trabalho da subcategoria RMPE

Neste grupo foi selecionado uma dissertação do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Instituição PUC-SP.

Quadro 10: Pesquisa selecionada na subcategoria (RMPE)

Representações mobilizadas por professores no ensino do TFC (RMPE)		
Código	**Autor**	**Título**
RMPE	Picone (2007)	Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, reflete-se a pesquisa, procedendo de uma reflexão sobre a influência desses conhecimentos sobre o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Picone (2007) - $RMPE_1$

Esta dissertação teve por objetivo investigar quais registros de representação são mobilizados por professores no ensino do TFC, bem como se consideravam importante a coordenação desse registro e, ainda, se exploravam a visualização por meio da representação gráfica.

A pesquisadora cimentou sua fundamentação teórica baseada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, destacando o papel da identificação das variáveis pertinentes, na conversão do registro gráfico para o algébrico e vice-versa e na argumentação da língua natural.

Para Picone (2007) atingir este objetivo elaborou um questionário, dividido em duas etapas, seguido por uma entrevista com os professores de Cálculo de instituições públicas e privadas de ensino.

Constatou que os professores consideraram importante enfatizar que o ensino do TFC pode ser utilizado para o cálculo de áreas e estabelece uma conexão entre integração e derivação, porém não sendo explorado graficamente por todos. Consideraram igualmente importante a coordenação das diferentes representações do mesmo objeto matemático no ensinode Cálculo, sendo os mais comuns os registros algébrico, gráfico e a língua materna.

Contudo ao analisarem uma situação problema que explora a derivada e a integral graficamente, alguns relataram que não percebiam de que modo essas situações poderiam contribuir para o entendimento do teorema. Outros afirmaram que não propõem este tipo deatividade em sala por diversos motivos, como por exemplo o enfoque do curso e a carga horária

4.2.2. Síntese da subcategoria RMPE

O trabalho de Picone (2007) traz resultados importantes e pertinentes quanto aos registros de representações semióticas utilizados por professores, que no caso da pesquisa foram professores tanto de instituições públicas, quanto de instituições privadas. Considerações quemerece destaque:

- **Os professores exploraram a visualização gráfica do TFC, e mesmo lecionando em diferentes cursos não tratam de modo diferenciado no que diz respeito à mobilização ecoordenação dos registros de representação.**
- **mesmo lecionando para diferentes cursos o componente curricular cálculo pode-se mobilizar e coordenar os diversos registros de representação sem detrimento de algum deles.**
- **nem todos os professores que participaram do estudo foram capazes de identificar as variáveis cognitivas específicas do registro gráfico variáveis cognitivas estas que permitem determinar quais são as unidades significantes que devem ser levadas em consideração.**
- **Esses professores não apenas apresentaram sinais de que exploravam as relações entre as variáveis visuais pertinentes, como também evidenciaram um fato que consideram essencial no ensino do TFC: Se f é uma função positiva então a integral**

> **coincide com a área, quando negativa então a integral é a área com o sinal negativo e quando a função oscila entre positiva e negativa tem-se a diferença entre áreas (PICONE, 2007, p.117).**

4.2.3. Resumo do trabalho da subcategoria AMM

Neste grupo foi selecionado uma dissertação do programa de pós-graduação em Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática.

Quadro 11: Pesquisa selecionada na subcategoria (RMPE)

Representações mobilizadas por professores no ensino do TFC (RMPE)		
Código	**Autor**	**Título**
AMM	Marco (2021)	Teorema Fundamental do Cálculo: uma proposta de abordagem a partir da modelagem matemática com o auxílio do *GeoGebra*

Fonte Dados da Pesquisa.

Marco (2021) - AMM

Esta dissertação teve por objetivo apresentar uma abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo, mais especificamente, sobre aplicações de integrais a partir de pressupostos da modelagem matemática, usando recursos tecnológicos.

O autor aponta que realizou um estudo de cunho histórico-epistemológico por julgar deextrema importância o aluno ter contato com a origem e o desenvolvimento das teorias, das definições, dos teoremas, pois acredita que se faz necessário compreender de que maneira se atingiu soluções inovadoras e conclusões lógico-matemáticas para a resolução de problemas clássicos.

Marco (2021) descreve que para sua fundamentação teórica, foi realizado um estudo sobre a utilização da modelagem matemática como metodologia de ensino seguindo os pressupostos Biembengut e Heim (2019), Bassanezi (2015) e Bassanezi (2018) que podem instigar o espírito investigativo nos alunos no desenvolvimento de todos os passos de execuçãoe melhorar a compreensão dos conceitos através de um modo complementar.

Assim foram elaboradas duas sequências de atividades. A sequência 1, versa sobre o cálculo de área a partir de uma imagem de um lago e a sequência 2, trata do volume a partir de uma imagem de um copo. Em ambas, o desenvolvimento da solução foi realizado conforme as etapas do processo de modelagem matemática e modelação e teve como ferramenta auxiliar o software GeoGebra, o qual apresenta inúmeros recursos que auxiliam no aprendizado econduzem o aluno à autonomia, possibilitando o desenvolvimento de suas próprias aplicações de problemas reais de seu cotidiano.

4.2.4. Síntese da subcategoria AMM

O trabalho de Marco (2021) traz resultados importantes e pertinentes, já que apresenta a sugestão de duas sequências didáticas que podem vir a ser utilizadas por professores para o ensino do TFC. Elencamos alguns aspectos que foram ressaltados pelo autor sobre a importância:

- **De se conhecer a história de como os conceitos sobre o TFC foram construídos ao longo do tempo, na maioria das vezes, a partir da solução de problemas, cuja modelagem resultou no avanço e desenvolvimento das ferramentas matemáticas atuais.**
- **De seguir no ensino do TFC a mesma lógica de modelagem matemáticas de situações- problemas dos quais foram ponto de ignição para a modulação de soluções queresultaram em ferramentas importantes para o Cálculo.**
- **Da Modelagem matemática como aplicação de casos reais como base para orientação do professor de Ensino Superior desenvolver sua própria sequência de ensino.**
- **Do processo de modelação que podem instigar o espírito investigativo nos alunos no desenvolvimento de todos os passos de execução da resolução do problema, fornecendouma motivação ao discente em buscar compreender o TFC.**

4.3. CATEGORIA 3

A categoria 3 concentra a pesquisa que abrange o Teorema Fundamental do Cálculo, sob a perspectiva do livro didático e de como este objeto de acumulação, organização e disseminação de conhecimento aborda o TFC; quais são as ideias e representações mobilizadas em sua concepção didática. Isto nos levou a criação da subcategoria 'Representações mobilizadas em livros didáticos que abordam o TFC' (RMLD).

Quadro 12: Pesquisa selecionada na subcategoria (RMLD)

Categoria 3: O Teorema Fundamental do Cálculo sob a perspectiva do livro didático			
Autor	**Ano**	**Instituição**	**Subcategoria**
Campos	2007	PUC-SP	RMLD

Fonte: Autor da pesquisa.

Assim como Anacleto e Picone, Campos defendeu no ano de 2007 e foi orientado pelo professor Doutor Benedito Antonio da Silva, consolidando uma linha de estudo dentro do grupo de pesquisa, no qual estudaram o TFC sob ópticas e perspectivas diferentes: aprendizagem de alunos do ensino superior, representações mobilizadas por professores e no trabalho de Campos(2007) as representações mobilizadas no contexto do livro didático.

4.3.1. Resumo do trabalho da subcategoria RMLD

Foi selecionado uma dissertação do programa de pós-graduação em Educação Matemática da instituição PUC-SP.

Quadro 13. Pesquisa selecionada na subcategoria (RMLD)

Representações mobilizadas em livros didáticos que abordam o TFC (RMLD)		
Código	**Autor**	**Título**
$RMLD_1$	Campos (2007)	A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, o comentário da pesquisa, procedendo de uma reflexão sobre a influência dessas contribuições para o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo.

Campos (2007) - $RMLD_1$

Esta dissertação teve por objetivo o de analisar como quatro livros didáticos tratam o TFC. Para isso, foi investigado as diferenças fundamentais que são evidenciadas no enfoque dado por diferentes autores e como os livros didáticos exploram a coordenação dos registros derepresentação na apresentação do TFC.

O pesquisador fundamentou-se nos Registros de Representação semiótica de Raymond Duval, o qual defende que para a aquisição do conhecimento matemático, é preciso haver a mobilização de no mínimo dois registros simultaneamente e não cada um tomado isoladamente. Para nortear a pesquisa, Campos (2007) elaborou critérios de organização para análise baseados em Bardin, do qual sugere etapas para uma elaboração de resultados. Foram analisados os livros didáticos escritos pelos autores: Cálculo – J. STEWART; Cálculo – Um Curso Universitário – E. E. MOISE; Um Curso de Cálculo – H. L. GUIDORIZZI e Curso de Análise – E. L. Lima.

A partir das análises realizadas, Campos (2007) observou que um dos livros não discuteexplicitamente a questão referente à inter-relação entre Derivada e integral, contudo é feita no volume dois da obra. Quanto aos registros de representação, foi verificado que os autores exploram a coordenação desses em seus livros, entretanto tendo diferentes explorações devidoa atenderem a públicos-alvo diferente.

4.3.2. Síntese da subcategoria RMLD

O trabalho de Campos (2007) traz resultados importantes e pertinentes para o ensino e aprendizagem do TFC, já que a escolha de um livro didático para ser o texto base de uma disciplina, em específico do componente curricular Cálculo, perpassa sobre o enfoque que este livro apresenta e se converge com o público-alvo que o professor ministrará as suas aulas. Destacamos (Quadro 12) alguns dos resultados de Campos (2007) em relação a como os registros de representação semiótica são mobilizados nos livros didáticos analisados.

Quadro 14: Os livros didáticos e o registro de representação semiótica

Livros Didáticos analisados	**O que Campos (2007) constatou**
Cálculo – J. STEWART;	Uma das formas de compreensão dos conceitos é através de problemas, principalmente os que sugerem uma abordagem que se utiliza do *registro algébrico, numérico e gráfico*, em proporções mais parecidas, utilizando o registro algébrico para tratamento e o registro gráfico como auxiliar.
Cálculo – Um Curso Universitário – E. E. MOISE	Os conteúdos são apresentados “em forma de espiral” (buscando generalizações ao longo do tempo) e por meio de problemas, do qual destaca a utilização de *gráficos* para complementar ideias analíticas e vice-versa.
Um Curso de Cálculo – H. L. GUIDORIZZI	No prefácio da obra, a ordenação dos conteúdos sugere a utilização de *figuras* e *interpretações físicas* como motivação para apresentação do conteúdo e que Guidorizzi emprega predominantemente o *registro algébrico.*
Curso de Análise – E. L. Lima	É focado para um público que já teve uma experiência em Cálculo, com conteúdos estruturados logicamente, dando ênfase a conceituação precisa, utilizando-se do *registro algébrico simbólico* e o *registro da língua natural* como complemento.

Fonte: Dados da pesquisa

Conclue-se que esta pesquisa contribuiu para a nossa reflexão sobre o ensino e aprendizagem do TFC, ao apontar importância que o livro didático tem para a aprendizagem do teorema, bem como ressaltando a necessidade de compreendermos o enfoque que o livro didático apresenta e, por fim, anuncia os benefícios da mobilização dos registros de representação no processo de ensino e aprendizagem.

4.4. CATEGORIA 4

A quarta e última categoria abrange as pesquisas que investigam o TFC sob a perspectiva histórico-epistemológico, visando compreender o processo histórico de construçãodeste conhecimento, como foram mobilizados e inter-relacionados para chegar ao resultado em que conhecemos hoje o TFC. Para elucidar as ideias que envolvem todo o desenvolvimento doreferido teorema, desenvolvemos a subcategoria ‘Ideais envolvidas no processo histórico.

Quadro 15. Categoria 4: Detalhes da pesquisa

Categoria 4: O Teorema Fundamental do Cálculo na perspectiva histórico-epistemológico			
Autor	**Ano**	**Instituição**	**Subcategoria**
Santos	2011	PUC-SP	IEHE

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa categoria encontramos a produção acadêmica da Santos (2011) que também foi orientado pelo professor Doutor Benedito Antonio da Silva, o mesmo orientador de todas as produções acadêmicas da PUC-SP presentes no *corpus* deste trabalho. Numa pesquisa rápida descobrimos que o programa de Educação Matemática da PUC-SP apresenta um grupo de estudos denominado “Matemática do Ensino Superior: Didática do Ensino do Cálculo”, o que sedimenta o nosso julgamento de haver neste período um ambiente com uma linha de pesquisa, estímulo e com troca de conhecimento que alavancaram as investigações sobre o TFC corroborando para novas contribuições no processo de ensino e aprendizagem deste conhecimento matemático.

4.4.1. Resumo do trabalho da subcategoria IEHE

Neste grupo foi selecionado uma dissertação de mestrado profissional em Ensino de Matemática da instituição PUC-SP.

Quadro 16. Pesquisa selecionada na subcategoria (IEHE)

Ideias envolvidas no processo histórico-epistemológico do TFC (IEHE)		
Código	**Autor**	**Título**
IEHE	Santos (2011)	As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton e Leibniz

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, comenta-se as pesquisas e realizaremos uma reflexão sobre as contribuições destas produções para o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Santos (2011) -IEHE

Esta dissertação teve por intuito contribuir com o estudo das principais ideias que envolvem o Teorema Fundamental do Cálculo, desde a Grécia Antiga até as contribuições de Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716) no século XVII.

Devido a abrangência do tema, a pesquisadora foca no aspecto da incomensurabilidade,do qual decorre na definição de Proporção de Eudoxo (390 a.C. – 320 a.C.). Segundo a autora tal definição gera como consequência a 'geometrização' da matemática, traduzindo as ideias que culminaram nos conceitos de derivada e integral, nas questões de quadratura e cálculo de volumes, por meio dos métodos de Exaustão e o método Mecânico de Arquimedes (287 a.C. –212 a.C.), e no método do traçado de tangente de Apolônio (262 a.C. – 190 a.C.).

Na sequência do trabalho, Santos (2011) discorre como o renascimento da atividade matemática no século XV influenciou na constituição da base do desenvolvimento algébrico, surgindo então, no século XVII, a Geometria Analítica que muito contribuiu para os resultadosalcançados por Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716), estabelecendo em definitivo que o processo de integração e derivação são operações uma inversa da outra.

A autora conclui que o produto da sua pesquisa apresenta uma preocupação didática, do qual pretende facilitar o entendimento da interligação das ideias que contribuíram, através de séculos, para o resultado conhecido atualmente com TFC.

4.4.2. Síntese da subcategoria IEHE

Esta subcategoria, abrange dentro do contexto histórico-epistemológico do TFC, se concentram nas ideias imbuídas e conectadas que se desenvolveram ao longo do tempoculminando por Newton e Leibniz na conjectura deste importante Teorema.

O que é aclamado por Santos (2011) ao evidenciar em suas considerações finais que levando em consideração Picone (2007), Anacleto (2007) e Campos (2007), todas na área de Educação Matemática e que evidenciam a incompreensão do TFC em sua parte pela falta de mobilização entre os conceitos básicos que pressupõe o teorema, a dificuldade na percepção dosignificado dos conhecimentos envolvidos e existentes entre eles se torna um obstáculoconsiderável para o aprendizado.

Para isso Santos defende que compreender a evolução histórico-epistemológico do conhecimento é de grande valia para organização do conhecimento e ótima ferramenta para a mobilização do processo de intuição, motivando o espírito investigativo do aluno, bem como corrobora Marco (2021), que julga de extrema importância:

> [...] Os alunos terem contato com a origem e todo o desenvolvimento das teorias, definições dos teoremas, a sua ordem cronológica, além de todo o momento histórico, econômico e social e com toda essa influência na história da Matemática, de modo particular, como foram as condições reais do "nascimento" do Cálculo na linha tempo. apresenta dificuldades. (MARCO, 2021, p. 66)

Como também Picone (2007) corrobora em sua pesquisa ao afirmar sobre a importância alguns aspectos sobre a História do TFC, sendo confirmada na fala de alguns professores que colaboraram para sua pesquisa, ao salientarem que nas etapas de introdução do Teorema destacaparte do seu desenvolvimento.

Assim, infere-se que a compreensão histórica fornece um arcabouço teórico ao discente, que compreende como desde o trabalho de sistematização começado por Tales de Mileto (VI a.C.) estabelecendo a teoria dedutiva, perpassando por Eudoxo (390 a.C. – 320 a.C.), ao apresentar sua solução para a crise gerada pela incomensurabilidade, reduziu toda a matemática grega existente à geometria, consequência disto até hoje é a analogia realizada no ensino e aprendizagem de continuidade.

Posteriormente o método de traçado da tangente por Apolônio (262 a.C. – 190 a.C.), e seguindo para o desenvolvimento da Geometria Analítica. São grandes ideias e conceitos que podem ser conectados e elucidados em sala de aula, é obvio que a priori podem ser simplificados e desnutridos de rigor matemático, a fim de que estimule o aluno a interagir com o conhecimento.

Outra maneira de abordar o TFC em sala de aula é como salienta Grande (2013) ao pontarque "a noção de acumulação de quantidades, mesmo que de forma intuitiva, também foi observada no desenvolvimento histórico dos principais conceitos ligados à gênese do TFC".

Ao abordar a ideia de acumulação de quantidade de grandeza e variação dessa mesma quantidade torna-se mais orgânico, intuitivo e mais contextualizado no processo do que associar apenas a integral a área e a derivada relativa à inclinação da reta tangente em um ponto da curva.

Conclui-se que esta pesquisa contribui para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo ao oferecer subsídio histórico-epistemológico ao organizar as principais ideias que envolvem o TFC. Possibilitando assim que o docente possa utilizar esta pesquisa para conectar ideias embrionárias, mesmo que de maneira intuitiva, sendo uma possível forma de abordar inicialmente este conteúdo, bem como para o discente ter melhor compreensão do seuobjeto de estudo.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo mapear as contribuições dos autores brasileiros no que tange o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo. A escolha deste tema surgiu a princípio por um anseio pessoal de compreender melhor o TFC, bem como se estabelece a relação inversa entre a integração e derivação, e posteriormente se estendeu a compreender as dificuldades de aprendizagem deste Teorema tão importante, como o componente curricular Cálculo compõe a grade curricular dos cursos de Ciências Exatas e apresenta grande índice de reprovação, decidimos investigar o que as produções cientificas indicavam sobre este conteúdo. Considera-se esta pesquisa relevante para o cenário acadêmico por mapear e organizar as principais contribuições que apresentam resultados muito interessantes, de que podem melhorar o ensino, e consequentemente, a aprendizagem deste teorema tão importante para o componente curricular Cálculo.

Como abordagem metodológica, utilizamos os indicadores de inferência da análise de conteúdo, por julgá-la mais adequado ao cumprimento do nosso propósito proposto. Bardin (2011) descreve três fases da análise de conteúdo: a pré-análise; a exploração do material; e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Em síntese, encontrados em várias produções contribuições que direcionam o ensino do TFC em conjunto com a utilização do recurso tecnológico de calculadoras gráficas capazes de fornecer a visualização gráfica dos resultados algébricos, bem como permite ao aluno utilizar aintuição para investigação e conjectura do teorema.

Outra grande contribuição encontrada, concerne em como a utilização dos diferentes registros de representação no ensino do TFC, permite a mobilização das principais ideias e pensamentos que se interrelacionam e capacitam ao aluno compreender tanto o teorema, bem como converter este resultado entre os registros.

Mas também, duas contribuições marcantes se referem ao quão necessário deve-se levarem consideração para seleção do livro didático o enfoque do autor predestina em seu livro, e osregistros de representação presentes no texto, e outro resultado marcante que pode contribuir para o ensino e aprendizagem do TFC é a utilização da abordagem histórica como introdução ao teorema possibilitando ao aluno compreender como as principais ideias e concepções que compõem o TFC foram conectadas e mobilizadas para gerarem o teorema.

Propõe-se que novas pesquisas utilizem das contribuições e atividades propostas por estas que compõem o *corpus* da nossa investigação, para que sejam aplicadas em outros ambientes, sob circunstâncias distintas, como diferentes perspectivas enfoques para que possam fornecer mais resultados a serem aprimorados e poderem tornar melhor o nosso ensino do TFC.

6. REFERÊNCIAS

ALONSO, E. P. **Aspectos Visuais e Gráficos do Teorema Fundamentaldo Cálculo.** Dissertação. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

ANACLETO, G. M. C. **Uma Investigação Sobre a Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. Dissertação. PontifíciaUniversidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ANDERSEN, É. **As Ideias Centrais do Teorema Fundamental do Cálculo Mobilizadas por Alunos de Licenciatura em Matemática**. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro.São Paulo: Edições 70, 2011.

BOYER, C. B. **História da Matemática**.3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CAMPOS, R. P. **A Abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em Livros Didáticos e os Registros de Representação Semiótica**. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** in:Machado, S. D. A (org). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica.São Paulo: Papirus, 2003, p.11-33.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da Pesquisa Científica**. Fortaleza: UEC,2002. Apostila.

FULINI, M. A. **História do Cálculo Diferencial e Integral**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal São Jõao Del Rei – SãoJõao Del Rei, 2016.

GIL, A.C. **Dados e Técnicas de Pesquisa Social**. São Paulo, SP: Atlas,6° ed, 2008.

GRANDE, A. L. **Um Estudo Epistemológico do Teorema Fundamentaldo Cálculo**. Tese. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

MARCO, M. L. B. **Teorema Fundamental do Cálculo: Uma Proposta de Abordagem a Partir da Modelagem Matemática com o Auxíliodo Geogebra.** Dissertação. Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2021.

MELCHIORS, A; SOARES, M. **História do Cálculo Diferencial e Integral**. [s.d]. 13 pg. Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI.

MELCHIORS, A; SOARES, M. **História do Cálculo Diferencial e Integral**. **o Cálculo Diferencial e Integral**, [*s. l.*], p. 67-79, 2013. Acesso em: 5 jul. 2021.

PICONE, D. F. B. **Os registros de Representação Semiótica Mobilizados por Professores no Ensino do Teorema Fundamentaldo Cálculo.** Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

PISKUNOV, Nikolai et al. **Cálculo Diferencial e Integral**. 18ªedição emlíngua portuguesa. Livraria Lopes Da Silva-Editora. Mir, 1977.

SANTOS, W. C. **As Ideias Envolvidas na Gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes e Leibniz**. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

SILVA, M. F. **Teorema Fundamental do Cálculo**. **Origem, Demonstração e Aplicação**. Trabalho de Conclusão de Curso – (Graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Cajazeiras, 2019.

SILVA, R. S. R. **A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculocom Calculadoras Gráficas**. Dissertação. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SOARES, M. **Alfabetização no Brasil – O Estado do Conhecimento**. Brasília: INEP/MEC, 1989.

SOUZA, S. A. **Teorema Fundamental do Cálculo: Percepções, Demonstração e Algumas Aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação) – Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2012.

STEWART, J. **Cálculo - Vol. 1**, 7ª edição. Pioneira Thomson Learning, 2014.

i. APÊNDICE: Inventário das produções acadêmicas que compõem o corpus desta pesquisa

Nº, autor, título	Ano	Enfoque	Palavras-chave	Instit.	Estado, região	Orientador	Tipo
1. Silva, R. S. R. A investigação do Teorema Fundamental do cálculo com calculadoras gráficas	2006	Aluno	Educação Matemática, Calculadoras Gráficas, Teorema Fundamental do Cálculo, Seres-Humanos-com-Mídias, Experimentação com Tecnologias.	UNESP-RIO CLARO	SP, Sudeste	Marcelo C. Borba	MA em Ed. Mat.
2. Anacleto, G. M. C. Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental	2007	Aluno	Teorema Fundamental do Cálculo; Ferramenta Objeto; Jogo de Quadros	PUC-SP	SP, Sudeste	Benedito A. Silva	MA em Ed. Mat.
3. Campos, R. P. C. A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica		Livro didático	Teorema fundamental do cálculo; livro didático; registros de representação semiótica; coordenação de registro; indicadores	PUC-SP	SP, Sudeste	Benedito A. Silva	MA em Ed. Mat.
4. Picone, D. F. B. Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo		Prof	Teorema Fundamental do Cálculo; Registros de Representação Semiótica; Coordenação de Registros; Variáveis Visuais Pertinentes; Integração e Derivação	PUC-SP	SP, Sudeste	Benedito A. Silva	MA em Ed. Mat.
5. Andersen, É. As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizados por alunos de licenciatura em Matemática	2011	Aluno	Teorema Fundamental do Cálculo; Processos do Pensamento Matemático Avançado; Inter-relação entre Derivada e Integral; Ensino e Aprendizagem do Cálculo	PUC-SP	SP, Sudeste	Benedito A. Silva	MA em Ed. Mat.
6. Santos, W. C. As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton e Leibniz		Contexto histórico	Tangente; Quadratura; Incomensurabilidade; infinitamente pequeno; Teorema Fundamental do Cálculo	PUC-SP	SP, Sudeste	Benedito A. Silva	MP em Ens. Mat.
7. Grande, A. L. Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao ensino	2013	Aluno	Teorema Fundamental do Cálculo; Intuição; Rigor; Visualização	PUC-SP	SP, Sudeste	Benedito A. Silva	DO em Ed. Mat.
8. Alonso, E. P. Aspectos visuais e gráfico do Teorema Fundamental do Cálculo	2017	Aluno	Teorema Fundamental do Cálculo; Visualização; Imagem conceitual; Intuição; Recursos digitais no ensino de Matemática.	UFRJ-RIO DE JANEIRO	RJ, Sudeste	Maria M. F. Pinto	MA em Ens. Mat.
9. Marco, M. L. B. Teorema Fundamental do Cálculo: uma proposta de abordagem a partir da modelagem matemática com o auxílio do *GeoGebra*.	2021	Aluno	Teorema Fundamental do Cálculo. Modelagem Matemática. Modelação Matemática. Ensino Superior. Aplicação. GeoGebra.	UFSCar-SOROCABA	SP, Sudeste	Rogério F. Pires	MA em Ens. Mat.