



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS - CAMPUS VI  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

# O uso do *software Matrix Calculator* como Ferramenta para Resolução de Sistemas Lineares através de Métodos Diretos

Neisivaldo Guedes Santos

Caetité - BA

2026

Neisivaldo Guedes Santos

# O uso do *software Matrix Calculator* como Ferramenta para Resolução de Sistemas Lineares através de Métodos Diretos

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Ciências Humanas, campus VI, da Universidade do Estado da Bahia, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

**Orientadora:**  
**Prof. Ms. Monique Bonfim de Souza**

Caetité - BA

2026

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

# O uso do *software Matrix Calculator* como Ferramenta para Resolução de Sistemas Lineares através de Métodos Diretos

por

**Neisivaldo Guedes Santos**

*Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Ciências Humanas, campus VI, da Universidade do Estado da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**Licenciado em Matemática.**

Caetité - BA, 19 de janeiro de 2026.

Comissão Examinadora:

---

Ms. Monique Bonfim de Souza (Orientadora)-UNEB

---

Dr. Márcio Oliveira D'Esquivel-UNEB

---

Ms. Flávia Moraes Simões-UFMG

# Agradecimentos

---

Expresso minha profunda gratidão à minha família, que sempre me apoio em minha trajetória. Em especial, agradeço à minha mãe, Neuza Guedes da Silva, aos meus avós, Neide Guedes da Silva e Manoel Pereira da Silva e à minha tia, Sileide Guedes Oliveira, que sempre estiveram ao meu lado, me incentivando e acreditando em mim. Sem esse suporte, a conclusão deste curso não teria sido possível.

Agradeço também aos meus amigos, que estiveram presentes durante esta jornada, compartilhando conversas, oferecendo motivação e me apoiando nos momentos mais desafiadores.

Meus sinceros agradecimentos à minha orientadora, Ms. Monique Bonfim de Souza, por ter aceitado me orientar, pela paciência, pelo apoio e suporte para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço igualmente a todos os professores do curso, pela formação que me proporcionaram.

# Resumo

---

Este trabalho tem como objetivo explorar a utilização do *software Matrix Calculator* na resolução de sistemas lineares por métodos diretos, destacando suas aplicações. Inicialmente, foi realizada uma breve contextualização histórica seguida de uma revisão dos conceitos fundamentais de matrizes e sistemas lineares. Em seguida, detalham-se os métodos diretos de resolução, com ênfase na Eliminação de Gauss e na Fatoração LU, incluindo estratégias de pivoteamento. Por fim, são apresentadas e resolvidas aplicações com o auxílio do *Matrix Calculator*. Dessa forma, o trabalho busca evidenciar que o software pode ser usado como uma ferramenta para a resolução de problemas envolvendo sistemas lineares em diversas áreas do conhecimento.

**Palavras-chave:** Matrix Calculator; Sistemas Lineares; Métodos Diretos; Eliminação de Gauss; Fatoração LU.

# Abstract

---

This study investigates the use of the Matrix Calculator software for solving linear systems through direct methods, with emphasis on its practical applications. First, a brief historical overview and a review of fundamental concepts related to matrices and linear systems are presented. The study then examines key direct solution techniques— particularly Gaussian elimination, LU factorization, and associated pivoting strategies— highlighting their implementation within the software environment. Finally, a set of representative applications is solved using the tool, demonstrating its effectiveness, accessibility, and suitability as a computational resource for addressing linear system problems across a variety of fields.

**Keywords:** Matrix Calculator; Linear Systems; Direct Methods; Gaussian Elimination; LU Factorization.

# Notação

---

$A, B, C$	Matrizes (letras latinas maiúsculas)
$a_{ij}$	Elemento da matriz $A$ na linha $i$ , coluna $j$
$A_{m \times n}$	Matriz de ordem $m \times n$ ( $m$ linhas, $n$ colunas)
$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matriz nula de ordem $m \times n$
$I_n$	Matriz identidade de ordem $n$
$A^t$	Matriz transposta de $A$
$\det(A)$ ou $ A $	Determinante da matriz $A$
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$ (se existir)
$\mathbf{b}$	Vetor dos termos independentes
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	Sistema linear na forma matricial
$L$	Matriz triangular inferior (fatoração $LU$ )
$U$	Matriz triangular superior (fatoração $LU$ )
$P$	Matriz de permutação
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ , 0 caso contrário)
$\sum$	Somatório
$\in$	Pertence a
$i, j, k$	Índices
$i_1, i_2, i_3$	Correntes elétricas (aplicação em circuitos)
$R$	Resistência elétrica (ohm, $\Omega$ )
$V$	Tensão elétrica (volt, $V$ )

# Lista de Figuras

---

3.1	Tela inicial do <i>Matrix Calculator</i> . . . . .	39
3.2	Matriz $A$ . . . . .	40
3.3	Matriz $B$ . . . . .	40
3.4	Adição de Matrizes . . . . .	41
3.5	Detalhes da adição de Matrizes . . . . .	41
3.6	Multiplicação da Matriz $A$ por um escalar . . . . .	42
3.7	Multiplicação da Matriz $A$ pela $B$ . . . . .	42
3.8	Transposta da Matriz $A$ . . . . .	43
3.9	Inversa da Matriz $A$ . . . . .	43
3.10	Determinante da Matriz $A$ . . . . .	44
3.11	Ambiente de Soluções de Sistemas de Equações Lineares . . . . .	44
3.12	Sistema Linear . . . . .	45
3.13	Método de Gauss . . . . .	45
3.14	Forma Matricial do Sistema . . . . .	46
3.15	Decomposição LU da Matriz $A$ . . . . .	46
3.16	Representação do sistema $Ly = b$ . . . . .	47
3.17	Resolução do sistema $Ly = b$ . . . . .	47
3.18	Representação do sistema $Ux = y$ . . . . .	48
3.19	Resolução do sistema $Ux = y$ . . . . .	48
4.1	Circuito elétrico . . . . .	49
4.2	Representação do sistema no Matrix Calculator . . . . .	51
4.3	Resolução do sistema no Matrix Calculator . . . . .	51
4.4	Diagrama das Ruas do Centro . . . . .	52
4.5	Forma Matricial do Sistema . . . . .	53
4.6	Decomposição LU da Matriz $A$ . . . . .	53

---

4.7	Representação do sistema $Ly = b$ . . . . .	53
4.8	Resolução do sistema $Ly = b$ . . . . .	54
4.9	Representação do sistema $Ux = y$ . . . . .	54
4.10	Resolução do sistema $Ux = y$ . . . . .	55

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>1 Matrizes e Sistemas Lineares</b>	<b>7</b>
1.1 Aspectos Históricos . . . . .	7
1.2 Matriz . . . . .	8
1.3 Matrizes Especiais . . . . .	8
1.3.1 Matriz Nula . . . . .	8
1.3.2 Matriz Linha . . . . .	8
1.3.3 Matriz Coluna . . . . .	9
1.3.4 Matriz Quadrada . . . . .	9
1.3.5 Matriz Diagonal . . . . .	10
1.3.6 Matriz Identidade . . . . .	10
1.3.7 Matriz Triangular Superior . . . . .	11
1.3.8 Matriz Triangular Inferior . . . . .	11
1.3.9 Matriz Simétrica . . . . .	11
1.4 Operações com matrizes . . . . .	11
1.4.1 Adição . . . . .	11
1.4.2 Propriedades da Adição . . . . .	12
1.4.3 Multiplicação por um escalar . . . . .	13
1.4.4 Propriedades da Multiplicação por um Escalar . . . . .	13
1.4.5 Multiplicação . . . . .	15
1.4.6 Propriedades da Multiplicação . . . . .	16
1.4.7 Transposta . . . . .	18
1.4.8 Propriedades da Transposta . . . . .	18
1.4.9 Inversa . . . . .	19
1.4.10 Propriedades da Inversa . . . . .	20

1.5	Determinante . . . . .	22
1.5.1	Determinante de Matriz de Ordem 1 . . . . .	22
1.5.2	Determinante de Matriz de Ordem 2 . . . . .	22
1.5.3	Determinante de Matriz de Ordem 3 . . . . .	23
1.6	Sistemas Lineares . . . . .	24
1.6.1	Solução de um Sistema Linear . . . . .	24
1.6.2	Equivalência de Sistemas Lineares . . . . .	25
1.6.3	Classificação de Sistemas Lineares . . . . .	25
1.6.4	Representação Matricial de um Sistema Linear . . . . .	26
1.6.5	Matriz Aumentada de um Sistema Linear . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Métodos Diretos</b>	<b>27</b>
2.1	Método da Eliminação de Gauss . . . . .	28
2.1.1	Estratégias de Pivoteamento . . . . .	30
2.2	Fatoração LU . . . . .	31
2.2.1	Fatoração LU com Estratégia de Pivoteamento Parcial . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Matrix Calculator</b>	<b>38</b>
3.1	Introdução ao <i>Software Matrix Calculator</i> . . . . .	38
3.1.1	Estrutura do <i>Software Matrix Calculator</i> . . . . .	38
3.2	Operações Matriciais . . . . .	39
3.2.1	Adição de Matrizes . . . . .	40
3.2.2	Multiplicação por um Escalar . . . . .	41
3.2.3	Multiplicação de Matrizes . . . . .	42
3.2.4	Transposta de uma Matriz . . . . .	42
3.2.5	Inversa de uma Matriz . . . . .	43
3.2.6	Determinante . . . . .	44
3.3	Resolução de Sistemas Lineares por Métodos Diretos . . . . .	44
3.3.1	Eliminação de Gauss . . . . .	45
3.3.2	Fatoração LU . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Algumas aplicações</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>56</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Introdução

---

Matrizes e sistemas lineares possuem várias aplicações no cotidiano como na área da economia, otimização logística, computação gráfica e até na engenharia elétricos. Diante dessa gama de aplicações o presente trabalho tem como objetivo destacar algumas delas por meio do *Matrix Calculator*, um software gratuito e acessível no qual é possível resolver uma vasta quantidade de operações envolvendo matrizes, sistemas lineares e cálculos vetoriais.

Trata-se de um estudo de natureza qualitativa, que buscou investigar se o *software Matrix Calculator* pode ser utilizado como ferramenta na resolução de sistemas lineares em problemas concretos, especialmente por meio de métodos diretos.

O trabalho está organizada em cinco capítulos. No Capítulo 1 será realizada uma breve contextualização histórica sobre a evolução das matrizes e sistemas lineares, seguida pela apresentação das definições e conceitos essenciais de matrizes e sistemas lineares.

O Capítulo 2 ira detalhar os métodos diretos de resolução para sistemas lineares, com ênfase na Eliminação de Gauss e na Fatoração LU. Serão apresentadas as condições necessárias para sua aplicação, assim como o passo a passo detalhado de como utiliza-lo na resolução de sistemas lineares. Além disso, serão discutidas estratégias de pivoteamento parcial e completo.

O Capítulo 3 apresenta o *software Matrix Calculator*, descrevendo sua origem, as plataformas em que está disponível e principais funcionalidades. Será detalhada a interface do programa, incluindo a inserção de matrizes, operações básicas e avançadas, e opções de exibição, além de abordar sua utilização na resolução de sistemas lineares pelos métodos diretos abordados.

No Capítulo 4, serão destacadas algumas aplicações de matrizes e sistemas lineares por meio do *Matrix Calculator*, com resolução passo a passo. Por fim, o Capítulo 5, intitulado Considerações Finais, sintetizará as contribuições do trabalho.

---

# Matrizes e Sistemas Lineares

---

Neste capítulo, buscamos introduzir os conceitos fundamentais de matrizes e sistemas lineares, explorando suas definições, tipos especiais, operações algébricas e propriedades. Além disso, estudamos o determinante e classificação de sistemas de equações, utilizando como referências obras como a de Boldrini et al. (1980), complementada por Iezzi e Hazzan (2013) para os fundamentos elementares e por Silva et al. (2023) e Boyer e Merzbach (2012) para a abordagem histórica.

## 1.1 Aspectos Históricos

Os primeiros registros de matrizes datam da China Antiga, por volta do século II a.C. no livro *Jiuzhang Suanshu* (Chui-chang suan-shu), ou Nove Capítulos sobre a Arte Matemática como evidenciam. Como evidenciam Boyer e Merzbach (2012), a obra dá início ao estudo dos sistemas lineares, os quais eram resolvidos efetuando operações sobre arranjos numéricos distribuídos em colunas, uma versão antiga das matrizes modernas.

Apesar de ter sua origem na antiguidade o conceito de matriz foi definido ao longo dos séculos através das contribuições de diversos matemáticos. O primeiro uso implícito da noção de matriz data de 1790 sendo creditado a Joseph Louis Lagrange (1736-1813) como destacam Silva, C. J. et al (2023). Contudo, os estudos sobre o tema só foram retomados em 1826, quando Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) lhes deu o nome de “tabelas”.

Contudo, foram os matemáticos ingleses Arthur Cayley e James Joseph Sylvester que formalizaram o conceito de matriz. Silva, C. J. et al (2023) reforçam que em 1850, Sylvester definiu o termo matriz e seu significado, no entanto para ele as matrizes eram apenas ferramentas utilizadas nos estudos de determinantes. Foi Cayley com sua famosa “Memoir

on the Theory of Matrices”, em 1858, que divulgou o nome e começou a demonstrar sua utilidade e aplicações desmistificando matrizes como meros auxiliares dos determinantes.

## 1.2 Matriz

Sejam  $m$  e  $n$  dois números inteiros positivos tais que  $m, n \geq 1$ . Uma matriz  $M$  de ordem  $m \times n$  real é um arranjo de números organizados em uma tabela de  $m$  linhas e  $n$  colunas. Cada número neste arranjo é chamado de elemento ou entrada da matriz. A posição de cada elemento é denotada por  $a_{ij}$ , onde o índice  $i$  varia de  $1 \leq i \leq m$ , enquanto  $j$  varia de  $1 \leq j \leq n$ .

A representação genérica de uma matriz  $M$  é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Uma maneira abreviada de representar uma matriz é denotar simplesmente:  $M_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ .

## 1.3 Matrizes Especiais

Ao estudar matrizes, percebe-se a necessidade de verificar características e propriedades específicas cruciais para a resolução de problemas reais. Devido a essas propriedades e características, essas matrizes recebem nomes especiais.

### 1.3.1 Matriz Nula

**Definição.** É toda matriz  $m \times n$  com  $m, n \geq 1$  em que  $a_{ij} = 0$ , para todo  $i$  e  $j$ .

**Exemplo 1.3.1.**

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 1.3.2 Matriz Linha

**Definição.** É toda matriz do tipo  $1 \times n$ , ou seja, uma matriz que possui uma única linha e  $n$  colunas.

**Exemplo 1.3.2.**

$$A_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

### 1.3.3 Matriz Coluna

**Definição.** É toda matriz do tipo  $m \times 1$ , ou seja, uma matriz que possui uma única coluna e  $m$  linhas.

**Exemplo 1.3.3.**

$$A_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

### 1.3.4 Matriz Quadrada

**Definição.** É toda matriz do tipo  $m \times n$  em que o número de linhas é igual ao número de colunas ( $m = n$ ):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

No caso da matriz quadrada  $M_{n \times n}$ , diz-se que  $M$  é uma matriz de ordem  $n$ .

**Exemplo 1.3.4.**

*Matriz de ordem 3:*

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

*Matriz de ordem 2:*

$$B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

**Definição.** Toda matriz quadrada possui uma diagonal principal formada pelos elementos  $a_{ij}$  em que os dois índices são iguais, ou seja,  $i = j$ . Na matriz a seguir, estão destacados os elementos da diagonal principal:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

**Definição.** Toda matriz quadrada possui uma diagonal secundária formada pelos elementos  $a_{ij}$  em que a soma dos índices é igual a  $n+1$ , ou seja  $i+j = n+1$ . Na matriz abaixo, estão destacados os elementos da diagonal secundária:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \mathbf{a_{2(n-1)}} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \mathbf{a_{(n-1)2}} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ \mathbf{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

### 1.3.5 Matriz Diagonal

**Definição.** É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero, ou seja,  $a_{ij} = 0$  quando  $i \neq j$ .

**Exemplo 1.3.5.**

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

### 1.3.6 Matriz Identidade

**Definição.** É toda matriz quadrada em que os elementos da diagonal principal são iguais a um, enquanto os demais elementos são iguais a zero, ou seja,  $a_{ij} = 1$  quando  $i = j$  e  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ .

**Exemplo 1.3.6.**

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.3.7 Matriz Triangular Superior

**Definição.** *É toda matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero, ou seja,  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ .*

**Exemplo 1.3.7.**

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

### 1.3.8 Matriz Triangular Inferior

**Definição.** *É toda matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero, ou seja,  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ .*

**Exemplo 1.3.8.**

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

### 1.3.9 Matriz Simétrica

**Definição.** *É toda matriz quadrada que é igual à sua transposta, ou seja, os elementos satisfazem a condição  $a_{ij} = a_{ji}$  para todos  $i$  e  $j$ . Ou seja os elementos são simétricos em relação à diagonal principal.*

**Exemplo 1.3.9.**

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

## 1.4 Operações com matrizes

### 1.4.1 Adição

Sejam duas matrizes de mesma dimensão  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ . Definimos a adição dessas duas matrizes como  $A + B$  na qual se realiza a soma dos elementos correspondentes de  $A$  e  $B$  ou seja a entrada na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna é  $a_{ij} + b_{ij}$ , portanto:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

**Exemplo 1.4.1.** *Considere as matrizes:*

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

*A soma das matrizes A e B será igual a:*

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 \\ 2+3 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

## 1.4.2 Propriedades da Adição

**Definição.** *Sejam A, B e C matrizes reais de mesma ordem  $m \times n$ , valem as seguintes propriedades:*

- i. Comutatividade:  $A + B = B + A$ ;*
- ii. Associatividade:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;*
- iii. Existência do elemento neutro:  $A + 0 = A$ , onde 0 representa a matriz nula de ordem  $m \times n$ , ou seja, todos os seus elementos são iguais a zero;*
- iv. Existência de um inverso aditivo: Para cada matriz A existe uma única matriz  $-A$ , tal que  $A + (-A) = 0$ .*

*Demonstração.* Para realizar as provas, mostraremos que os elementos da matriz do lado esquerdo da equação são iguais aos elementos correspondentes da matriz do lado direito, utilizando as propriedades dos números reais.

Sejam  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  e  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ . Denotamos por  $[A]_{ij}$  o elemento na posição  $(i, j)$  da matriz A, e de forma análoga para B e C. Assim,  $[A]_{ij} = a_{ij}$ ,  $[B]_{ij} = b_{ij}$ ,  $[C]_{ij} = c_{ij}$ . Pela definição de adição de matrizes, temos  $[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

- i. Note que, como os elementos das matrizes são números reais, vale a comutatividade da adição entre os elementos:*

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B + A]_{ij}$$

Logo, como a igualdade vale para todos os elementos, temos que  $A + B = B + A$ .

- ii. Observe que, como os elementos das matrizes são números reais, vale a associatividade da adição entre os elementos:*

$$[(A + B) + C]_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = [A + (B + C)]_{ij}$$

Portanto, como vale para todos os elementos, temos que  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

iii. Seja  $0$  a matriz nula  $m \times n$ , onde cada elemento  $[0]_{ij} = 0$ . Então:

$$[A + 0]_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij} = [A]_{ij}$$

Logo, como a igualdade vale para todos os elementos, temos que  $A + 0 = A$ .

iv. Definindo a matriz  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ . Então:

$$[A + (-A)]_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0 = [0]_{ij}$$

Portanto,  $A + (-A) = 0$ . Agora vamos mostrar a unicidade do inverso, suponha que exista outra matriz  $B$  tal que  $A + B = 0$ . Então, para cada elemento:

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0 \Rightarrow b_{ij} = -a_{ij}$$

Logo,  $B = -A$ , provando a unicidade do inverso.

□

### 1.4.3 Multiplicação por um escalar

Sejam a matriz  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $k$  um número real. Definimos o produto do escalar  $k$  pela matriz  $A$  como  $kA$ , na qual  $k$  multiplica cada elemento da matriz  $A$ , então:

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

**Exemplo 1.4.2.** Considere  $k = 2$  e a matriz:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

A multiplicação de  $k$  pela matriz  $A$  será igual a:

$$kA = 2A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 9 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 6 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 18 & 4 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

### 1.4.4 Propriedades da Multiplicação por um Escalar

**Definição.** Sejam  $A, B$  matrizes reais de mesma ordem  $m \times n$  e os escalares reais  $k, k_1$  e  $k_2$ . Valem as seguintes propriedades:

- i. Comutatividade:  $kA = Ak$ ;*
- ii. Associatividade em relação à multiplicação de escalares:  $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$ ;*
- iii. Distributividade em relação à adição de escalares:  $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ ;*
- iv. Distributividade em relação à adição de matrizes:  $k(A + B) = kA + kB$ ;*
- v. Elemento neutro: Se  $k = 1$  então  $1 \cdot A = A$ ;*
- vi. Multiplicação pelo escalar zero:  $0 \cdot A = 0$ , isto é, multiplicar o escalar zero pela matriz  $A$  resulta na matriz nula  $0$ .*

*Demonstração.* Para realizar as provas, iremos mostrar que os elementos da matriz do lado esquerdo da equação são iguais aos elementos correspondentes da matriz do lado direito, utilizando as propriedades dos números reais.

- i.* Como  $k$  e os elementos da matriz  $A$  são números reais, vale a comutatividade da multiplicação entre eles, assim:

$$[kA]_{ij} = k \cdot a_{ij} = a_{ij} \cdot k = [Ak]_{ij}$$

Logo,  $kA = Ak$ .

- ii.* Note que pela associatividade da multiplicação nos números reais vale:

$$[k_1(k_2A)]_{ij} = k_1 \cdot (k_2 \cdot a_{ij}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot a_{ij} = [(k_1k_2)A]_{ij}$$

Portanto,  $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$ .

- iii.* Pela distributividade multiplicativa na adição de números reais temos que:

$$[(k_1 + k_2)A]_{ij} = (k_1 + k_2) \cdot a_{ij} = k_1 \cdot a_{ij} + k_2 \cdot a_{ij} = [k_1A + k_2A]_{ij}$$

Assim,  $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ .

- iv.* Novamente pela distributividade nos números reais vale:

$$[k(A + B)]_{ij} = k \cdot (a_{ij} + b_{ij}) = k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij} = [kA + kB]_{ij}$$

Dessa forma,  $k(A + B) = kA + kB$ .

v. Pela propriedade do elemento neutro multiplicativo dos números reais temos que:

$$[1 \cdot A]_{ij} = 1 \cdot a_{ij} = a_{ij} = [A]_{ij}$$

Logo,  $1 \cdot A = A$ .

vi. Pela propriedade do elemento nulo da multiplicação nos números reais vale:

$$[0 \cdot A]_{ij} = 0 \cdot a_{ij} = 0 = [0]_{ij}$$

Portanto,  $0 \cdot A = 0$ .

□

### 1.4.5 Multiplicação

A multiplicação de matrizes ocorre sob uma condição específica: o número de colunas da matriz  $A$  deve ser igual ao número de linhas da matriz  $B$ . Sejam  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ , então seu produto  $AB$  resulta em uma matriz onde cada elemento é dado por:

$$[AB]_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk},$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $k = 1, 2, \dots, p$ .

**Exemplo 1.4.3.** *Sejam as matrizes:*

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O produto  $AB$  é possível pois o número de colunas de  $A$  (3) é igual ao número de linhas de  $B$  (3). A matriz resultante  $AB$  terá dimensão  $2 \times 2$ , assim:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 + 18 + 3 & 8 + 0 + 6 \\ 28 + 45 + 6 & 32 + 0 + 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 14 \\ 79 & 44 \end{bmatrix}$$

**Observação 1.4.4.** Na multiplicação o produto de matrizes não é comutativo, ou seja,  $AB \neq BA$ .

### 1.4.6 Propriedades da Multiplicação

**Definição.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes reais tais que as operações de multiplicação abaixo sejam possíveis, seja  $I$  a matriz identidade e  $0$  a matriz nula. Valem as seguintes propriedades:

- i. Associatividade:*  $(AB)C = A(BC)$ ;
- ii. Distributividade em relação à adição à direita:*  $(A + B)C = AC + BC$ ;
- iii. Distributividade em relação à adição à esquerda:*  $A(B + C) = AB + AC$ ;
- iv. Elemento neutro:*  $AI = IA = A$  (onde  $I$  é uma matriz identidade possível de se realizar a operação).

*Demonstração.* Para realizar as provas, mostraremos que os elementos da matriz do lado esquerdo da equação são iguais aos elementos correspondentes da matriz do lado direito, utilizando as propriedades dos números reais.

- i.* Seja  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{jk}]_{n \times p}$  e  $C = [c_{kl}]_{p \times q}$ . Vamos determinar o elemento  $(i, l)$  das matrizes de cada lado da igualdade:

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{il} &= \sum_{k=1}^p (AB)_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kl}, \\ [A(BC)]_{il} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} (BC)_{jl} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl}. \end{aligned}$$

Como ambas as expressões resultam na mesma soma dupla, então  $(AB)C = A(BC)$ .

- ii.* Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $m \times n$  e  $C$  de ordem  $n \times p$ . Para demonstrar, vamos desenvolver a equação calculando o elemento  $(i, k)$  de  $(A + B)C$ :

$$\begin{aligned}
[(A+B)C]_{ik} &= \sum_{j=1}^n (A+B)_{ij}c_{jk} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij})c_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^n (a_{ij}c_{jk} + b_{ij}c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij}c_{jk} \\
&= (AC)_{ik} + (BC)_{ik} = [AC + BC]_{ik}.
\end{aligned}$$

Assim  $(A+B)C = AC + BC$

*iii.* Sejam  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$  e  $B, C$  de ordem  $n \times p$ . A demonstração é análoga à da propriedade *ii*, calculando o elemento  $(i, k)$  de  $A(B+C)$ :

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{ik} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(B+C)_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) \\
&= \sum_{j=1}^n (a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} \\
&= (AB)_{ik} + (AC)_{ik} = [AB + AC]_{ik}.
\end{aligned}$$

Dessa forma  $A(B+C) = AB + AC$ .

*iv.* Seja  $A$  uma matriz real de ordem  $m \times n$  e  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n \times n$ , definida por  $(I_n)_{kj} = \delta_{kj}$ , onde:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Para demonstrar que  $AI_n = A$ , vamos calcular o elemento  $(i, j)$  de  $AI_n$ :

$$[AI_n]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(I_n)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$$

De maneira análoga se  $I_m$  for uma matriz identidade de ordem  $m \times m$ , temos que vale a igualdade  $I_m A = A$ .

Portanto  $AI_n = A$  e  $I_m A = A$ . Se  $m = n$ , temos que  $I_m = I_n$  então  $AI = IA = A$ .

□

### 1.4.7 Transposta

Seja uma matriz  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ . Define-se a matriz transposta de  $A$ , denotada por  $A^t$ , como a matriz  $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$ , em que cada elemento  $a_{ij}$  é dado por:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Dessa forma a transposta de uma matriz é obtida trocando-se ordenadamente suas linhas por colunas e as colunas por linhas.

**Exemplo 1.4.5.** *Seja a matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

*Sua transposta, denotada por  $A^t$ , será:*

$$A^t = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

### 1.4.8 Propriedades da Transposta

**Definição.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes reais tais que as operações a seguir sejam possíveis e um escalar real  $k$ . Valem as seguintes propriedades:*

- i. Dupla Transposição:  $(A^t)^t = A$ ;*
- ii. Transposição de uma adição:  $(A + B)^t = A^t + B^t$ ;*
- iii. Transposição do Produto por um Escalar:  $(kA)^t = kA^t$ ;*
- iv. Propriedade da multiplicação:  $(AB)^t = B^t A^t$ .*

*Demonstração.* Para realizar as provas, mostraremos que os elementos da matriz do lado esquerdo da equação são iguais aos elementos correspondentes da matriz do lado direito, utilizando as propriedades dos números reais.

Considere  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ . Então o elemento na posição  $(i, j)$  da matriz  $A$  é  $a_{ij}$ , para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . A transposta  $A^t$  é tal que seu elemento na posição  $(i, j)$  é  $a_{ji}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ .

i. Seja  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ . Então:

$$[(A^t)^t]_{ij} = [A^t]_{ji} = a_{ij}$$

Portanto,  $(A^t)^t = A$ .

ii. Sejam  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ . Então temos que:

$$[(A + B)^t]_{ij} = [A + B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}$$

Assim,  $(A + B)^t = A^t + B^t$ .

iii. Seja  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $k$ . Note que:

$$[(kA)^t]_{ij} = [kA]_{ji} = k \cdot a_{ji} = k \cdot [A^t]_{ij} = [kA^t]_{ij}$$

Portanto,  $(kA)^t = kA^t$ .

iv. Sejam  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ , onde  $j = 1, \dots, n$  é o índice de linha de  $B$  e  $k = 1, \dots, p$  é o índice de coluna de  $B$ . Então:

$$[(AB)^t]_{ki} = [AB]_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Por outro lado:

$$[B^t A^t]_{ki} = \sum_{j=1}^n [B^t]_{kj} [A^t]_{ji} = \sum_{j=1}^n b_{jk} a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Portanto como os resultados dos dois lados da coincidem, temos  $(AB)^t = B^t A^t$ .

□

### 1.4.9 Inversa

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n \times n$ . Diz-se que  $A$  é inversível se, e somente se, existir uma matriz  $A^{-1}$  também de ordem  $n \times n$ , tal que o produto entre a matriz e sua inversa é igual à matriz identidade  $I_n$ , ou seja:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

**Observação 1.4.6.** *Uma condição necessária para que uma matriz possua inversa é que ela seja quadrada. Entretanto, apenas ser uma matriz quadrada não garante que ela tenha*

*inversa. Se uma matriz não possui inversa, dizemos que ela é não invertível ou singular.*

**Exemplo 1.4.7.** *Considere a matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

*Se a matriz  $A$  for inversível, então a sua inversa é uma matriz da forma:*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};$$

*tal que  $AA^{-1} = I_2$ . Assim:*

$$A^{-1}A = I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2c & -2d \\ 4a - 5c & 4b - 5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*O que resulta nos seguintes sistema de equações:*

$$\begin{cases} -2c = 1 \\ 4a - 5c = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} -2d = 0 \\ 4b - 5d = 1 \end{cases}$$

*Resolvendo os sistemas, obtemos a matriz inversa:*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix};$$

*Agora, verificando  $A^{-1}A = I_2$ :*

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 4 & -\frac{5}{8} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot (-5) \\ -\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 4 & -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 0 \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

### 1.4.10 Propriedades da Inversa

**Definição.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes quadradas de ordem  $n$ , tais que as operações a seguir sejam possíveis. Valem as seguintes propriedades:*

*i. Unicidade da Inversa: Toda matriz inversível tem uma e apenas uma inversa;*

*ii. Inversa da Inversa:  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;*

iii. *Inversa do Produto:*  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;

iv. *Inversa da Transposta:*  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

*Demonstração.* Para realizar as provas, mostraremos que os elementos satisfazem as condições da definição de matriz inversa.

i. Suponha que existam duas matrizes  $B$  e  $C$  tais que:

$$AB = BA = I_n \quad \text{e} \quad AC = CA = I_n.$$

Logo:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$

Portanto,  $B = C$ , assim a inversa é única.

ii. Pela definição da inversa temos:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Portanto  $A$  é a inversa de  $A^{-1}$ , ou seja,  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

iii. Note que:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

Agora desenvolvendo o outro lado da equação:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n.$$

Assim temos que,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

iv. Queremos mostrar que  $(A^{-1})^t$  é a inversa de  $A^t$ . Utilizando a propriedade da transposta do produto, temos:

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n,$$

Desenvolvendo o outro lado da equação:

$$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = I_n^t = I_n.$$

Portanto como são iguais vale que,  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

□

## 1.5 Determinante

O determinante é um número real associado a uma matriz quadrada, obtido a partir de operações realizadas sobre seus elementos. Para uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , o determinante é denotado por  $\det(A)$ .

### 1.5.1 Determinante de Matriz de Ordem 1

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 1:

$$A = [a_{11}]$$

Então o determinante de  $A$  é simplesmente o valor do próprio elemento  $a_{11}$ , ou seja:

$$\det(A) = a_{11}$$

**Exemplo 1.5.1.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 1:*

$$A = [12]$$

*O determinante desta matriz é:*

$$\det(A) = 12$$

### 1.5.2 Determinante de Matriz de Ordem 2

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz  $A$  é obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, ou seja, pela fórmula:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**Exemplo 1.5.2.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 2:*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é:

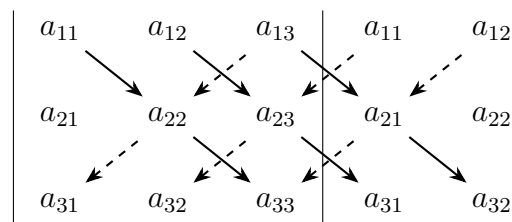
$$\det(A) = 6 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 13$$

### 1.5.3 Determinante de Matriz de Ordem 3

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para o cálculo do determinante da matriz  $A$  de ordem  $3 \times 3$ , utilizaremos o método denominado regra de Sarrus, que consiste, primeiramente, em ampliar a matriz, repetindo as suas duas primeiras colunas à direita da matriz original. Em seguida, devem-se observar as diagonais principais (indicadas pelas setas contínuas) e multiplicar os elementos de cada diagonal, somando todos os seus produtos. O mesmo procedimento será realizado para as diagonais secundárias (indicadas pelas setas tracejadas). O determinante será a diferença entre a soma das diagonais principais e a soma das diagonais secundárias, conforme ilustrado a seguir:



Assim, o determinante é dado por:

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

**Exemplo 1.5.3.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 3:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz pela regra de Sarrus é:

$$\det(A) = (4 \cdot 9 \cdot (-2) + 7 \cdot (-5) \cdot (2) + (-4) \cdot 6 \cdot 0) - ((-4) \cdot 9 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) \cdot (0) + (7) \cdot 6 \cdot (-2)) = 14$$

## 1.6 Sistemas Lineares

Considere uma equação linear com  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; representada da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

Onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b$  são números reais.

Um sistema linear  $S$  é portanto um conjunto de  $m$  equações lineares com  $n$  incógnitas, representado do seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

### 1.6.1 Solução de um Sistema Linear

Dizemos que a sequência ordenada de reais  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  é a solução de um sistema linear  $S$  se ela for a solução de todas as equações que compõem o sistema  $S$ . Considere um sistema com  $m$  equações lineares e  $n$  incógnitas, representado por:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Assim a sequência  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é solução quando todas as  $m$  igualdades forem verificadas.

**Exemplo 1.6.1.** *Considere o sistema linear:*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 1x - 2y = 0 \end{cases}$$

O par ordenado  $(2, 1)$  é a solução do sistema pois garante que as igualdades sejam verdadeiras:

$$\begin{cases} 3(2) + 2(1) = 8 \\ 1(2) - 2(1) = 0 \end{cases}$$

### 1.6.2 Equivalência de Sistemas Lineares

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. Em outras palavras, os sistemas  $S_1$  e  $S_2$  são equivalentes se toda solução de  $S_1$  é solução de  $S_2$ , e vice-versa.

**Exemplo 1.6.2.** *Considere os sistemas a seguir:*

$$S_1 \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad e \quad S_2 \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Note que são equivalentes pois ambos têm como solução o par  $(2, 1)$ .

### 1.6.3 Classificação de Sistemas Lineares

De acordo com o número de soluções que um sistema linear com coeficientes reais apresenta, ele pode ser classificado em:

- **Sistema Possível e Determinado (SPD):** É um sistema linear  $S$  que apresenta uma única solução.
- **Sistema Possível e Indeterminado (SPI):** É um sistema linear  $S$  que apresenta infinitas soluções.
- **Sistema Impossível (SI):** É um sistema linear  $S$  que não apresenta nenhuma solução.

### 1.6.4 Representação Matricial de um Sistema Linear

É possível representar um sistema linear com coeficientes reais na forma de uma equação matricial, dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou então por:

$$Ax = b,$$

no qual  $A$  é a matriz dos coeficientes,  $x$  a matriz-coluna das incógnitas e  $b$  a matriz-coluna dos termos independentes.

### 1.6.5 Matriz Aumentada de um Sistema Linear

Outra maneira de representar um sistema linear real é por meio da matriz aumentada, formada pela junção da matriz dos coeficientes  $A$  com a matriz dos termos independentes  $b$ , separadas por uma linha vertical. Essa representação pode ser denotada por  $(A|b)$ :

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Nesse caso, quando a matriz é de ordem  $m \times n$ , após ser escrita na sua forma aumentada ela terá  $n + 1$  colunas.

---

## Métodos Diretos

---

Nos baseamos em Ruggiero; Lopes (1995), para fundamentar este capítulo, os métodos diretos são descritos como métodos em que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações. Diferenciam-se dos métodos iterativos por não dependerem de aproximações sucessivas, mas sim de procedimentos de resolução bem definidos que resultam na solução do sistema.

Eles são ideais para resolver sistemas lineares de tamanho moderado. Entretanto, não são capazes de resolver sistemas de grande porte, devido ao elevado número de operações envolvidas. Ruggiero e Lopes reforçam esse ponto ao calcular o esforço computacional de operações realizadas por métodos como a Regra de Cramer:

Se  $n$  for igual a 20 podemos mostrar que o número total de operações efetuadas será  $21 \times 20! + 19$  multiplicações mais um número semelhante de adições. Assim, um computador que efetua cerca de cem milhões de multiplicações por segundo levaria  $3 \times 10^5$  anos para efetuar as operações necessárias. (Ruggiero; Lopes, 1995, p. 118)

Essa estimativa evidencia por que a Regra de Cramer é impraticável mesmo para sistemas de tamanho moderado, como  $n = 20$ . Em contraste, métodos como a Eliminação de Gauss e a Fatoração  $LU$  que serão detalhados nas seções seguintes são consideravelmente mais eficientes, com custo computacional significativamente menor.

É importante ressaltar que a aplicação desses métodos para obter uma solução única (sistema possível e determinado) exige que a matriz dos coeficientes seja quadrada (isto é, com  $n$  equações e  $n$  incógnitas) e inversível, ou seja,  $\det(A) \neq 0$ . Caso  $\det(A) = 0$ , o sistema pode ser impossível ou indeterminado.

## 2.1 Método da Eliminação de Gauss

O método da Eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear original em um sistema equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, permitindo que a resolução do sistema ocorra de maneira imediata por meio da substituição reversa. Para determinarmos esse sistema, podemos aplicar as seguintes operações elementares:

- i.* trocar a posição de duas linhas;
- ii.* multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- iii.* adicionar a uma linha outra linha multiplicada por uma constante não nula.

Durante o processo, em cada etapa  $k$  identifica-se um pivô, que é o elemento  $a_{kk}$  da matriz naquela etapa. Caso esse elemento seja nulo ou muito próximo de zero, realiza-se uma troca de linhas para garantir um pivô adequado. A partir do pivô, calculam-se os multiplicadores associados às linhas abaixo dele, dados por:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

Cada multiplicador é utilizado para eliminar os elementos  $a_{ik}$  situados abaixo do pivô, por meio de operações elementares nas linhas da matriz, de modo a zerar esses coeficientes e deixar a matriz em sua forma triangular superior.

**Exemplo 2.1.1.** *Seja o sistema linear:*

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z = 8 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$$

*Este sistema pode ser representado pela matriz aumentada:*

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

*O objetivo é resolver o sistema utilizando o Método da Eliminação de Gauss, assim como primeira operação elementar, vamos eliminar o elemento abaixo de  $a_{11}$ . Para isso vamos*

calcular o multiplicador, dado por:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$$

Em seguida vamos subtrair da segunda linha a primeira linha multiplicada por  $m_{21}$  para zerar o termo  $a_{21}$ , obtendo a matriz:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Em sequência a partir da matriz obtida, vamos encontrar o multiplicador que zere o elemento abaixo de  $a_{11}$  que é:

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{2}$$

Em seguida vamos subtrair da terceira linha a primeira linha multiplicada por  $m_{31}$  para zerar o termo  $a_{31}$ , obtendo a matriz:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -2 & -6 \end{array} \right]$$

Agora podemos trocar a posição da segunda linha pela terceira linha:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

Assim, podemos concluir que o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z = 8 \\ -5y - 2z = -6 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema triangular superior por substituição reversa temos que, a partir da terceira equação, obtemos o valor de  $z$ :

$$2z = 6 \implies z = 3$$

Substituindo o valor de  $z$  na segunda equação, encontramos  $y$ :

$$-5y - 2(3) = -6 \implies -5y - 6 = -6 \implies -5y = 0 \implies y = 0$$

Por fim, substituindo  $y = 0$  e  $z = 3$  na primeira equação, obtemos  $x$ :

$$2x + 4(0) + 2(3) = 8 \implies 2x + 6 = 8 \implies 2x = 2 \implies x = 1$$

Portanto, a solução do sistema é  $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ .

### 2.1.1 Estratégias de Pivoteamento

As estratégias de pivoteamento consistem em procedimentos para a seleção adequada da linha e/ou coluna pivotal durante o processo de resolução de sistemas lineares. A escolha do elemento pivô ideal é essencial para evitar trabalhar com pivôs próximos de zero, que podem conduzir a resultados numericamente imprecisos devido à amplificação de erros de arredondamento. Podendo ser classificadas em:

- **Estratégias de Pivoteamento Parcial:** Consiste em selecionar, a cada etapa  $k$  do processo de eliminação, o elemento de maior módulo entre os coeficientes da coluna  $k$ , a partir da linha  $k$  e trocar as linhas  $k$  e  $i$  se for necessário. Esta estratégia garante que os multiplicadores tenham módulo entre zero e um, evitando o aumento de erros de arredondamento.
- **Estratégias de Pivoteamento Completo:** Nesta estratégia, seleciona-se como pivô, a cada etapa  $k$  do processo, o elemento de maior módulo considerando todos os elementos que ainda participam do processo de eliminação. Podendo ser necessárias trocas de linhas e colunas, assim reorganizando as incógnitas do sistema.

## 2.2 Fatoração LU

A Fatoração LU é um método de decomposição matricial que consiste em expressar uma matriz quadrada  $A_{n \times n}$  como o produto de duas matrizes triangulares:

$$A = LU.$$

A matriz  $U$  corresponde a matriz triangular superior obtida ao final do processo de Eliminação de Gauss da matriz quadrada  $A$ , dada por:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

A matriz  $L$  é a matriz triangular inferior com diagonal unitária, cujos elementos abaixo da diagonal são os multiplicadores  $m_{ij}$  utilizados durante o processo de eliminação para zerar os elementos abaixo da diagonal principal:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, dados o sistema linear  $Ax = b$  e a fatoração  $LU$  da matriz  $A$ , temos:

$$Ax = b \iff (LU)x = b.$$

Seja  $y = Ux$ . A solução do sistema linear pode ser obtida através da resolução de dois sistemas triangulares:

- i.  $Ly = b$ , no qual encontraremos o vetor  $y$ .
- ii.  $Ux = y$ , para encontrar o vetor solução  $x$  do sistema original.

**Exemplo 2.2.1.** *Considere o sistema linear:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

*Este sistema pode ser representado na forma matricial  $Ax = b$ , onde:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

*O objetivo é resolver o sistema utilizando a fatoração LU, ou seja, expressar  $A$  como o produto de duas matrizes triangulares:*

$$A = LU.$$

*Assim vamos começar aplicando o método da Eliminação de Gauss sobre  $A$ , tendo como primeiro passo eliminar os elementos abaixo de  $a_{11}$ . Para isso vamos calcular os multiplicadores:*

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3$$

*Em sequência subtraímos da segunda linha a primeira linha multiplicada por  $m_{21}$  e da terceira linha a primeira linha multiplicada por  $m_{31}$ . Após essas operações, obtemos a matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

*Agora eliminamos o elemento abaixo de  $a_{21}$ . Calculamos o multiplicador:*

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2}{1} = 2$$

*Por fim subtraímos da terceira linha a segunda linha multiplicada por  $m_{32}$ , obtendo a matriz triangular superior  $U$ :*

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

*Já a matriz inferior  $L$  é formada pelos multiplicadores:*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora resolvendo  $Ly = b$ :

$$\begin{cases} y_1 & = & 2 \\ 2y_1 + y_2 & = & 5 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 & = & 3 \end{cases}$$

Como  $L$  é uma matriz triangular inferior, resolvemos por substituição direta a partir da primeira equação, temos:

$$y_1 = 2$$

Substituindo o valor de  $y_1$  na segunda equação, encontramos  $y_2$ :

$$2(2) + y_2 = 5 \implies 4 + y_2 = 5 \implies y_2 = 1$$

Por fim, substituindo  $y_1 = 2$  e  $y_2 = 1$  na terceira equação, obtemos  $y_3$ :

$$3(2) + 2(1) + y_3 = 3 \implies 6 + 2 + y_3 = 3 \implies 8 + y_3 = 3 \implies y_3 = -5$$

Portanto,

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Finalmente, resolvemos  $Ux = y$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ -5x_3 = -5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema triangular superior por substituição reversa temos que, a partir da terceira equação, obtemos o valor de  $x_3$ :

$$-5x_3 = -5 \implies x_3 = 1$$

Substituindo o valor de  $x_3$  na segunda equação, encontramos  $x_2$ :

$$x_2 + 2(1) = 1 \implies x_2 + 2 = 1 \implies x_2 = -1$$

Por fim, substituindo  $x_2 = -1$  e  $x_3 = 1$  na primeira equação, obtemos  $x_1$ :

$$x_1 + 1(-1) + 1(1) = 2 \implies x_1 + -1 + 1 = 2 \implies x_1 = 2$$

Portanto, a solução do sistema é

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 2.2.1 Fatoração LU com Estratégia de Pivoteamento Parcial

Para aplicar a estratégia de pivoteamento parcial à fatoração LU, é necessário realizar permutações de linhas na matriz  $A^k$  no início de cada etapa  $k$  da eliminação de Gauss. Essa permutação de linhas ocorre por meio de matrizes de permutação  $P$ , que correspondem à matriz identidade com suas linhas reorganizadas.

Ao pré-multiplicar a matriz original  $A$  por  $P$ , obtém-se a matriz  $PA$ , cujas linhas representam a reorganização das linhas de  $A$  conforme as trocas realizadas na matriz identidade para formar  $P$ . Assim a fatoração é expressa por:

$$PA = LU$$

Assim considere o sistema linear  $Ax = b$ , cujos fatores  $L$  e  $U$  são obtidos através da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial. No qual os fatores  $A' = PA$ , representam a matriz  $A$  após as permutações de linhas. As mesmas permutações aplicadas a  $A$  devem ser aplicadas ao vetor  $b$ , uma vez que permutar as linha linhas de  $A$  resulta em permutar as equações do sistema  $Ax = b$ . então temos:

$$b' = Pb$$

O sistema linear transformado  $A'x = b'$  é equivalente ao original e, como  $A' = LU$ , temos:

$$A'x = b' \rightarrow PAx = Pb \rightarrow (LU)x = Pb$$

Assim é preciso resolver os sistemas triangulares:

*i.*  $Ly = Pb$ , no qual encontraremos o vetor  $y$ .

*ii.*  $Ux = y$ , para encontrar o vetor solução  $x$  do sistema original.

**Exemplo 2.2.2.** *Seja o sistema linear:*

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

*Este sistema pode ser representado na forma matricial  $Ax = b$ , onde:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

*Aplicando as estratégias de Pivoteamento Parcial, encontramos como pivô desta etapa o maior elemento em módulo da coluna 1, que é  $a_{31} = 2$ . Realizando as devidas permutações, obtemos a matriz de permutação  $P$  dada por:*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Aplicando a matriz de permutação  $P$  à matriz  $A$  e ao vetor  $b$ , obtemos:*

$$PA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad Pb = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

*Assim vamos começar aplicando o método da Eliminação de Gauss sobre  $PA$ , tendo como primeiro passo eliminar os elementos abaixo de  $a_{11}$ . Para isso vamos calcular os multiplicadores:*

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0}{2} = 0$$

*Em sequência subtraímos da segunda linha a primeira linha multiplicada por  $m_{21}$  e na terceira não é necessária nenhuma operação. Após essa operação, obtemos a matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora eliminamos o elemento abaixo de  $a_{21}$ . Calculamos o multiplicador:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

Por fim subtraímos da terceira linha a segunda linha multiplicada por  $m_{32}$ , obtendo a matriz triangular superior  $U$ :

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

Já a matriz inferior  $L$  é formada pelos multiplicadores:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

Agora resolvendo  $Ly = Pb$ :

$$\begin{cases} y_1 & & = -1 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 & & = 10 \\ & \frac{2}{7}y_2 + y_3 & = 3 \end{cases}$$

Como  $L$  é uma matriz triangular inferior, resolvemos por substituição direta a partir da primeira equação, temos:

$$y_1 = -1$$

Substituindo o valor de  $y_1$  na segunda equação, encontramos  $y_2$ :

$$\frac{1}{2}(-1) + y_2 = 10 \implies -\frac{1}{2} + y_2 = 10 \implies y_2 = 10 + \frac{1}{2} \implies y_2 = \frac{21}{2}$$

Por fim, substituindo  $y_2 = \frac{21}{2}$  na terceira equação, obtemos  $y_3$ :

$$\frac{2}{7}\left(\frac{21}{2}\right) + y_3 = 3 \implies 3 + y_3 = 3 \implies y_3 = 0$$

Portanto,

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{21}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, resolvemos  $Ux = y$ :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{21}{2} \\ \frac{6}{7}x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema triangular superior por substituição reversa temos que, a partir da terceira equação, obtemos o valor de  $x_3$ :

$$\frac{6}{7}x_3 = 0 \implies x_3 = 0$$

Substituindo o valor de  $x_3$  na segunda equação, encontramos  $x_2$ :

$$\frac{7}{2}x_2 + 2(0) = \frac{21}{2} \implies \frac{7}{2}x_2 = \frac{21}{2} \implies x_2 = \frac{21}{2} \cdot \frac{2}{7} \implies x_2 = 3$$

Por fim, substituindo  $x_2 = 3$  e  $x_3 = 0$  na primeira equação, obtemos  $x_1$ :

$$2x_1 - 1(3) + 1(0) = -1 \implies 2x_1 - 3 = -1 \implies 2x_1 = 2 \implies x_1 = 1$$

Portanto, a solução do sistema é

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

# Matrix Calculator

---

## 3.1 Introdução ao *Software Matrix Calculator*

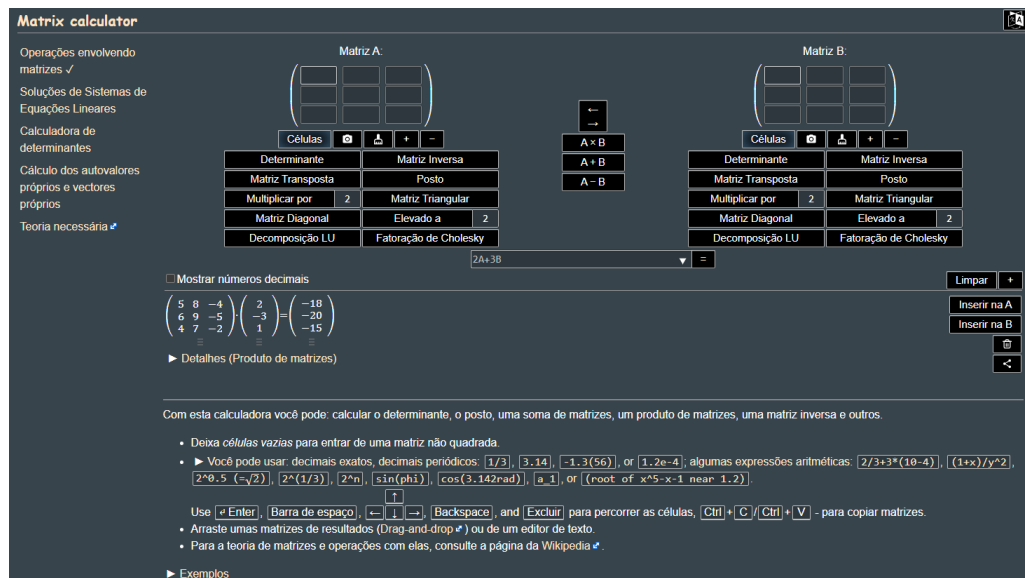
O *Matrix Calculator* é uma ferramenta desenvolvida para resolver e simplificar operações envolvendo matrizes, sistemas lineares e cálculos de vetores. Desenvolvido por Viktor Mukhachev, o *software* está disponível gratuitamente como plataforma online (<https://matrixcalc.org>) e também como aplicativo para Android e Windows.

O *software* possui uma gama de operações que vão desde as básicas como o cálculo de determinantes, inversão, adição e multiplicação de matrizes, até as avançadas como decomposições matrizes, autovalores, autovetores e resolução de sistemas lineares como descrito em sua página da Microsoft Store. Sua interface é simples e intuitiva, de forma que basta inserir os valores nos locais correspondentes e escolher a operação para visualizar o resultado.

Voltado principalmente para a área da Matemática, o *Matrix Calculator* destaca-se por tornar o processo de cálculo mais dinâmico facilitando a visualização e compreensão dos procedimentos realizados em cada etapa.

### 3.1.1 Estrutura do *Software Matrix Calculator*

A tela inicial do *Matrix Calculator* apresenta uma interface simples e bem organizada, conforme ilustrado na Figura 3.1:

Figura 3.1: Tela inicial do *Matrix Calculator*

Fonte: Autoria Própria

No canto superior esquerdo da interface, logo abaixo do título "*Matrix Calculator*", são listadas as principais funcionalidades do programa. Entre elas, estão as operações matriciais básicas, que estão ativas por padrão, solução de sistemas de equações lineares, cálculo de determinantes, obtenção de autovalores e autovetores, e acesso à teoria necessária, que direciona o usuário a materiais de apoio.

Ao centro, são exibidos os campos das matrizes  $A$  e  $B$ , onde usuário pode inserir valores através das células, ajustar suas dimensões ou limpar os dados. Próximo a esses campos, há uma série de botões que permitem realizar operações básicas e avançadas, como soma, subtração, multiplicação, trocar a ordem das matrizes, cálculo do determinante, matriz inversa, matriz transposta, decomposição LU e fatoração de Cholesky.

Na parte inferior da interface, encontram-se as opções de ajustar a exibição dos resultados para forma decimal, exportar os resultados ou excluir as matrizes inseridas. Além de um exemplo pré-gerado que demonstra o método de resolução do software, acompanhado por uma breve explicação sobre sua utilização logo abaixo.

## 3.2 Operações Matriciais

Para efetuar operações utilizando o *Matrix Calculator*, o usuário deve primeiro inserir os valores nas células da matriz  $A$ , conforme ilustrado na Figura 3.2:

Figura 3.2: Matriz  $A$ 

Fonte: Autoria Própria

Para operações que envolvem duas matrizes, é necessário também preencher os valores da matriz  $B$ , conforme mostrado na Figura 3.3:

Figura 3.3: Matriz  $B$ 

Fonte: Autoria Própria

Considere as matrizes  $A$  e  $B$  apresentadas acima. Podemos efetuar as seguintes operações:

### 3.2.1 Adição de Matrizes

A operação de adição ( $A + B$ ) é realizada através do botão correspondente localizado ao centro da página, desde que as matrizes possuam a mesma dimensão. A Figura 3.4 ilustra o resultado obtido após a operação:

Figura 3.4: Adição de Matrizes

The screenshot shows a software interface for matrix operations. On the left, 'Matriz A' is displayed as a 3x3 grid with values 1, 0, 3 in the first row; 9, 4, 1 in the second; and 1, 2, 5 in the third. Below it are various operation buttons like 'Determinante', 'Matriz Inversa', etc. On the right, 'Matriz B' is shown as a 3x3 grid with values 1, 2, 6 in the first row; 0, 4, 0 in the second; and 5, 3, 0 in the third. In the center, there are buttons for 'A x B', 'A + B', and 'A - B'. At the bottom, the result of the operation is shown as  $2A+3B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 9 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ . There are also buttons for 'Mostrar números decimais', 'Limpar', 'Inserir na A', and 'Inserir na B'.

Fonte: Autoria Própria

Também é possível exibir os detalhes da operação por meio da opção de nome correspondente, como mostrado na Figura 3.5:

Figura 3.5: Detalhes da adição de Matrizes

This screenshot is identical to Figure 3.4, but the 'Detalhes (Adição de matriz)' section at the bottom is expanded. It contains the text: 'A soma de duas matrizes é calculada adicionando elementos correspondentes das matrizes.' Below this, the calculation is shown step-by-step:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 & 3+6 \\ 9+0 & 4+4 & 1+0 \\ 1+5 & 2+3 & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 9 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ . The interface also shows the 'Limpar', 'Inserir na A', and 'Inserir na B' buttons.

Fonte: Autoria Própria

### 3.2.2 Multiplicação por um Escalar

A operação de multiplicação por um escalar é realizada por meio do botão "Multiplicar por", localizado abaixo da matriz que se deseja multiplicar. Basta inserir a matriz  $A$  e especificar o valor do escalar, nesse caso 3 conforme ilustrado na Figura 3.6:

Figura 3.6: Multiplicação da Matriz  $A$  por um escalar

The screenshot shows a matrix calculator interface. On the left, 'Matriz A' is defined as a 3x3 matrix with values  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Below it are various operation buttons, with 'Multiplicar por' set to 3. On the right, 'Matriz B' is a 3x3 empty matrix. In the center, there are buttons for 'A x B', 'A + B', and 'A - B'. At the bottom, the result of the operation is displayed as  $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 27 & 12 & 3 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ .

Fonte: Autoria Própria

### 3.2.3 Multiplicação de Matrizes

A multiplicação ( $A \times B$ ) é realizada através do botão correspondente, desde que o número de colunas de  $A$  seja igual ao número de linhas de  $B$ . A Figura 3.7 apresenta o resultado com detalhes:

Figura 3.7: Multiplicação da Matriz  $A$  pela  $B$ 

The screenshot shows the same matrix calculator interface as in Figure 3.6, but with 'A x B' selected. The result shown is the product of matrix A and matrix B, which is a 3x3 matrix with values  $\begin{pmatrix} 16 & 11 & 6 \\ 14 & 37 & 54 \\ 26 & 25 & 6 \end{pmatrix}$ . Below the result, there is a section titled 'Detalhes (Produto de matrizes)' which explains the calculation: 'Produto de matrizes: linhas da primeira matriz são multiplicados por colunas da matriz segundo.' and shows the calculation for the first row:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 6 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 9 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 & 9 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 & 9 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 6 \\ 14 & 37 & 54 \\ 26 & 25 & 6 \end{pmatrix}$ .

Fonte: Autoria Própria

### 3.2.4 Transposta de uma Matriz

Para determina a transposta de uma matriz, basta inserir a matriz  $A$  e dar o comando por meio do botão "Matriz Transposta", localizado abaixo da matriz que se deseja operar,

conforme ilustrado na Figura 3.8:

Figura 3.8: Transposta da Matriz  $A$

The screenshot shows a software interface for matrix operations. On the left, 'Matriz A' is defined as a 3x3 matrix with values  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ . A central menu has 'A x B', 'A + B', and 'A - B' options, with 'A x B' selected. On the right, 'Matriz B' is an empty 3x3 matrix. Below the matrices are two identical sets of operation menus, including 'Determinante', 'Matriz Inversa', 'Matriz Transposta', 'Posto', 'Multiplicar por', 'Matriz Triangular', 'Matriz Diagonal', 'Elevado a', 'Decomposição LU', and 'Fatoração de Cholesky'. The 'Matriz Transposta' option is highlighted in both. At the bottom, the result of the transpose operation is displayed as  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ . There are also buttons for 'Limpar', 'Inserir na A', 'Inserir na B', and a navigation arrow.

Fonte: Autoria Própria

### 3.2.5 Inversa de uma Matriz

Para calcular a inversa de uma matriz, deve-se repetir o processo inserindo a matriz  $A$  e selecionar o botão "Matriz Inversa", localizado na mesma área da opção anterior. A matriz deve ser quadrada e possuir determinante diferente de zero para que a operação seja realizada, conforme demonstrado na Figura 3.9:

Figura 3.9: Inversa da Matriz  $A$

The screenshot shows the same software interface as Figure 3.8. In the central menu, 'A x B' is selected. In the right-hand operation menu, 'Matriz Inversa' is highlighted. The result of the inverse operation is displayed as  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{11}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{7}{30} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$ . Below the result, there are three expandable sections: 'Detalhes (Método de Montante)', 'Detalhes (Eliminação de Gauss-Jordan)', and 'Detalhes (Usando a matriz adjunta)'. The interface also includes the same navigation and utility buttons as in Figure 3.8.

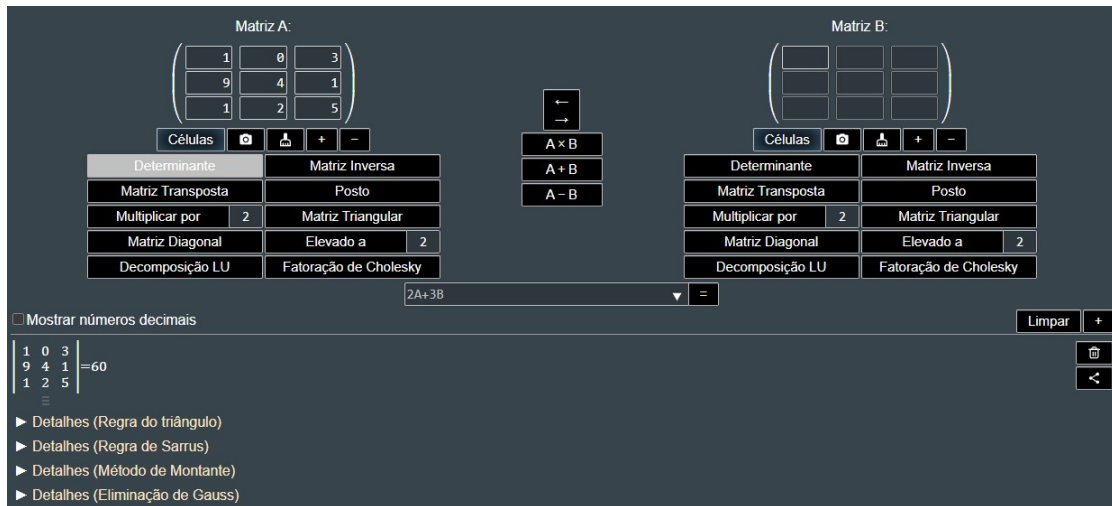
Fonte: Autoria Própria

Logo abaixo da solução, são disponibilizados diferentes métodos de resolução em detalhes, caso o usuário deseje saber o processo de resolução por um método específico.

### 3.2.6 Determinante

Para calcular o determinante de uma matriz, basta inserir uma matriz quadrada  $A$  e clicar na opção de determinante para realizar o cálculo como mostrado na Figura 3.10:

Figura 3.10: Determinante da Matriz  $A$



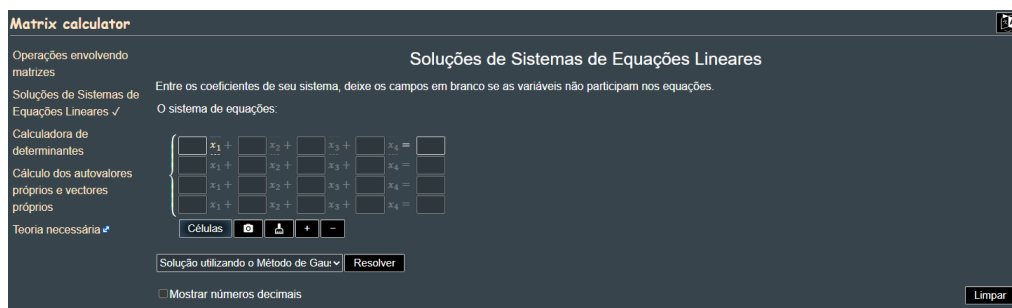
Fonte: Autoria Própria

Também é possível ver os detalhes de cada método de resolução caso o usuário queira entender os diferentes processos de resolução.

## 3.3 Resolução de Sistemas Lineares por Métodos Diretos

Como mencionado anteriormente, o software também é capaz de resolver sistemas lineares. Para acessar esse ambiente, basta clicar na opção "Soluções de Sistemas de Equações Lineares" e a interface de mesmo nome será exibida, conforme ilustrado na Figura 3.11:

Figura 3.11: Ambiente de Soluções de Sistemas de Equações Lineares



Fonte: Autoria Própria

Neste ambiente, o primeiro passo para resolver sistemas lineares é preencher as células do sistema com os valores desejados da mesma forma que no ambiente de matrizes. Por padrão, estão disponíveis as opções de aumentar, diminuir e limpar o sistema, além da opção de resolução. O método de resolução padrão é o método de Gauss, mas é possível selecionar outros métodos de resolução conforme for necessário. Considere como exemplo o sistema exibido na Figura 3.12.

Figura 3.12: Sistema Linear

Soluções de Sistemas de Equações Lineares

Entre os coeficientes de seu sistema, deixe os campos em branco se as variáveis não participam nos equações.

O sistema de equações:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \\ 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 2 \end{cases}$$

Células + -

Solução utilizando o Método de Gauss Resolver

Mostrar números decimais Limpar

Fonte: Autoria Própria

Podemos resolvê-lo no software usando os seguintes métodos:

### 3.3.1 Eliminação de Gauss

Por padrão, o método de eliminação de Gauss já está selecionado. Ao clicar em "Resolver", obtemos a solução apresentada na Figura 3.13: O software apresenta uma solução

Figura 3.13: Método de Gauss

Solução utilizando o Método de Gauss

(Algoritmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \times (-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 1 \cdot L_1 \rightarrow L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 1 \cdot L_1 \rightarrow L_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 = 0 \\ -1 \cdot x_3 = -4 \end{cases}$$

- Da equação 3 do sistema (1) obtemos a variável  $x_3$ :  
 $-x_3 = -4$   
 $x_3 = 4$
- Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável  $x_2$ :  
 $x_2 = 0$
- Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável  $x_1$ :  
 $x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - 0 - 4 = 2$

Resposta:  
 $x_1 = 2$   
 $x_2 = 0$   
 $x_3 = 4$

A solução geral:  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

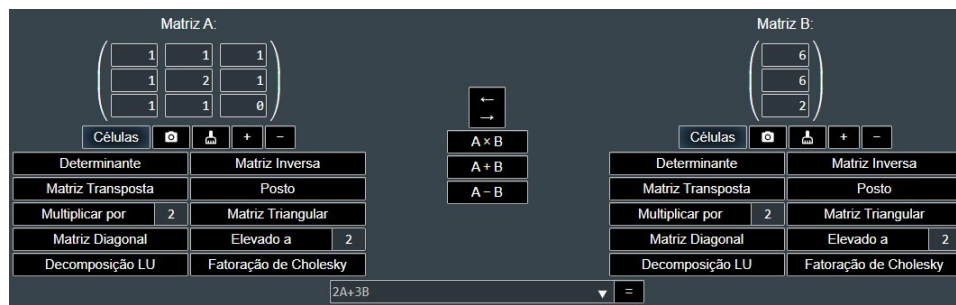
Fonte: Autoria Própria

detalhada, listando cada passo da resolução através de operações sobre as linhas da matriz aumentada. Em seguida o algoritmo transforma a matriz em sua forma escalonada, permitindo a resolução por substituição reversa. Caso existam dúvidas, é possível clicar nas interrogações destacadas em azul para obter mais detalhes sobre as operações realizadas.

### 3.3.2 Fatoração LU

O processo de fatoração LU é um pouco mais complexo que o método anterior. Inicialmente, é necessário representar o sistema linear em sua forma matricial dada por  $Ax = b$  no ambiente de matrizes, onde o vetor  $b$  é representado como uma matriz coluna  $B$ . A Figura 3.14 ilustra a representação matricial do sistema apresentado anteriormente na Figura 3.12:

Figura 3.14: Forma Matricial do Sistema



Fonte: Autoria Própria

Em seguida, é necessário realizar a decomposição da matriz  $A$  no produto  $LU$  através da opção "Decomposição LU", onde  $L$  é uma matriz triangular inferior e  $U$  é uma matriz triangular superior, conforme demonstrado na Figura 3.15:

Figura 3.15: Decomposição LU da Matriz A



Fonte: Autoria Própria

Retornando ao ambiente de sistemas lineares, é preciso inserir a matriz triangular inferior  $L$  e o vetor  $b$  para representar o sistema  $Ly = b$ , conforme ilustrado na Figura 3.16:

Figura 3.16: Representação do sistema  $Ly = b$

Soluções de Sistemas de Equações Lineares

Entre os coeficientes de seu sistema, deixe os campos em branco se as variáveis não participam nos equações.

O sistema de equações:

$$\begin{cases} 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 6 \\ 1y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 2 \\ 1y_1 + 0y_2 + 1y_3 = 2 \end{cases}$$

Células + -

Solução utilizando o Método de Gau: Resolver

Mostrar números decimais Limpar

Fonte: Autoria Própria

Ao pressionar a opção "Resolver", obteremos os valores do vetor solução  $y$  através do método de Gauss como evidenciado na Figura 3.17:

Figura 3.17: Resolução do sistema  $Ly = b$

Solução utilizando o Método de Gauss

(Algoritmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \times (-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 1L_1 \rightarrow L_2, R_3 \times (-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 1L_1 \rightarrow L_3}$$

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 0 \quad (1) \\ y_3 = -4 \end{cases}$$

Resposta:

$$y_1 = 6 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = -4$$

A solução geral:  $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Fonte: Autoria Própria

Agora é necessário inserir a matriz triangular superior  $U$  e o vetor solução  $y$  para representar o sistema  $Ux = y$  conforme ilustrado na Figura 3.18:





Figura 3.18: Representação do sistema  $Ux = y$ 

**Soluções de Sistemas de Equações Lineares**

Entre os coeficientes de seu sistema, deixe os campos em branco se as variáveis não participam nos equações.

O sistema de equações:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + -1x_3 = -4 \end{cases}$$

Células    

Solução utilizando o Método de Gau: Resolver

Mostrar números decimais Limpar

Fonte: Autoria Própria

Novamente ao pressionar a opção "Resolver" obtemos agora o vetor solução  $x$  do sistema original utilizando do método de Gauss conforme mostrado na Figura 3.19:

Figura 3.19: Resolução do sistema  $Ux = y$ 

**Solução utilizando o Método de Gauss**

(Algoritmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 = 0 \\ -1x_3 = -4 \end{cases} \quad (1)$$

- Da equação 3 do sistema (1) obtemos a variável  $x_3$ :  
 $-x_3 = -4$   
 $x_3 = 4$
- Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável  $x_2$ :  
 $x_2 = 0$
- Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável  $x_1$ :  
 $x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - 0 - 4 = 2$

Resposta:  
 $x_1 = 2$   
 $x_2 = 0$   
 $x_3 = 4$

A solução geral:  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

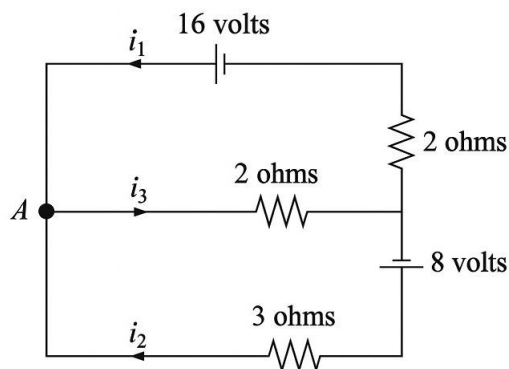
Fonte: Autoria Própria

## Algumas aplicações

Neste capítulo, buscamos evidenciar algumas aplicações dos métodos diretos na resolução de sistemas lineares através do software Matrix Calculator, utilizando como referências Leon (2010).

**Aplicação 4.1.** *Em circuitos elétricos, é possível determinar a intensidade da corrente em cada ramo a partir dos valores das resistências e tensões. Considere o circuito a seguir apresentado na Figura 4.1:*

Figura 4.1: Circuito elétrico




Fonte: Autoria Própria

Os símbolos apresentados na Figura 4.1 representam, respectivamente:

————— Fio condutor

—|—|— Fonte de tensão

—— Resistor

A fonte de tensão, geralmente uma bateria (com tensão medida em Volts) que alimenta a carga e produz uma corrente. A corrente flui do polo positivo (representado pela linha vertical mais longa no símbolo da bateria) para o negativo.

As resistências dos resistores, são medidas em Ohms. No circuito, a letra  $A$  representa um nó, que é um ponto de conexão onde três ou mais ramos do circuito se encontram. As variáveis  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  representam as correntes que fluem nesses ramos. As setas indicam a direção das correntes.

Para determinar os valores exatos dessas correntes, aplicam-se as Leis de Kirchhoff:

i. *Lei dos Nós:* Em qualquer nó, a soma das correntes que chegam é igual à soma das correntes que saem.

ii. *Lei das Malhas:* Ao longo de qualquer malha fechada, a soma algébrica de todos os ganhos de tensão deve ser igual a soma algébrica de todas as quedas de tensão. As quedas de tensão  $U$  para cada resistor são dadas pela Lei de Ohm definida por:

$$U = i \cdot R$$

No qual  $i$  representa a corrente em ampères e  $R$  é a resistência em Ohms.

Calculando as correntes do circuito apresentado na Figura 4.1. Pela Lei dos Nós no nó  $A$ , as correntes  $i_1$  e  $i_2$  chegam, enquanto  $i_3$  sai, assim temos:

$$i_1 + i_2 = i_3 \quad \text{ou} \quad i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Aplicando a Lei das Malhas na malha superior (percorrendo-a no sentido horário e considerando quedas de tensão positivas nos resistores):

$$2i_1 + 2i_3 = 16$$

Na malha inferior (também percorrida no sentido horário):

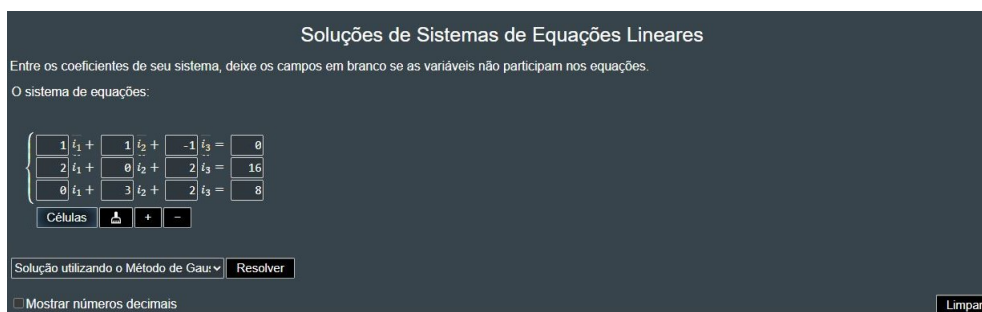
$$3i_2 + 2i_3 = 8$$

Assim, a intensidade das correntes no circuito pode ser obtida resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 2i_1 + 0i_2 + 2i_3 = 16 \\ 0i_1 + 3i_2 + 2i_3 = 8 \end{cases}$$

Para resolver esta aplicação, vamos inicialmente inserir o sistema no software matriz calculador conforme ilustrado na Figura 4.2,

Figura 4.2: Representação do sistema no Matrix Calculator



Fonte: Autoria Própria

Vamos adotar o método de Gauss para a resolução do sistema. Como ele está selecionado por padrão, basta clicar em "Resolver" para obter a solução apresentada na Figura 4.3:

Figura 4.3: Resolução do sistema no Matrix Calculator

Solução utilizando o Método de Gauss

(Algoritmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 16 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \times \frac{1}{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 3L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -16 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \times (-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - L_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 + L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 16 \quad (1) \\ 8x_3 = 32 \end{cases}$$

- Da equação 3 do sistema (1) obtemos a variável  $x_3$ :  
 $8x_3 = 32$   
 $x_3 = 4$
- Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável  $x_2$ :  
 $-2x_2 + 4x_3 = 16 - 4 \cdot 4 = 0$   
 $x_2 = 0$
- Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável  $x_1$ :  
 $x_1 - x_2 + x_3 = 0 + 4 = 4$   
 $x_1 = 4$

Resposta:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

A solução geral:  $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

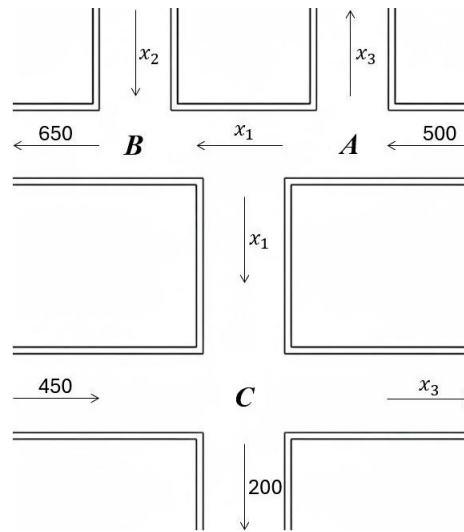
Fonte: Autoria Própria

O software utiliza a variável  $x$  como padrão no lugar de  $i$ , assim a intensidade da corrente em cada ramo é:

$$i_1 = 4 \text{ A}, i_2 = 0 \text{ amps e } i_3 = 4 \text{ A}$$

**Aplicação 4.2.** Na região central de uma cidade, ocorre a intercessão de várias ruas de mão única conforme ilustrado na Figura 4.4. O volume de tráfego que entra e sai dessa região durante o horário de pico está indicado por setas no diagrama. Considerando que o fluxo se mantém constante, determine o volume de tráfego em determinados pontos do percurso dados pelas variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ .

Figura 4.4: Diagrama das Ruas do Centro



Fonte: Autoria Própria

Para determinar o volume de tráfego, note que em cada interseção o número de veículos entrando deve ser o mesmo que o número saindo. Assim considerando as interseções destacadas pelas letras em maiúsculo temos:

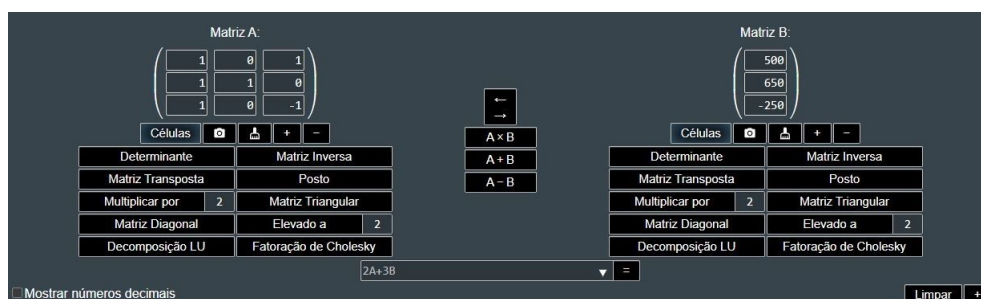
- interseção A:  $x_1 + x_3 = 500$
- interseção B:  $x_1 + x_2 = 650$
- interseção C:  $x_1 + 450 = x_3 + 200$  ou  $x_1 - x_3 = -250$

As equações dessas interseções podem ser escritas como o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = 500 \\ x_1 + x_2 + 0x_3 = 650 \\ x_1 + 0x_2 - x_3 = -250 \end{cases}$$

Adotando a resolução por LU, iremos representar esse sistema linear em sua forma matricial dada por  $Ax = b$  no matriz calculetor, note que novamente, o vetor  $b$  será representado como uma matriz coluna  $B$ , conforme ilustrado na Figura 4.5.

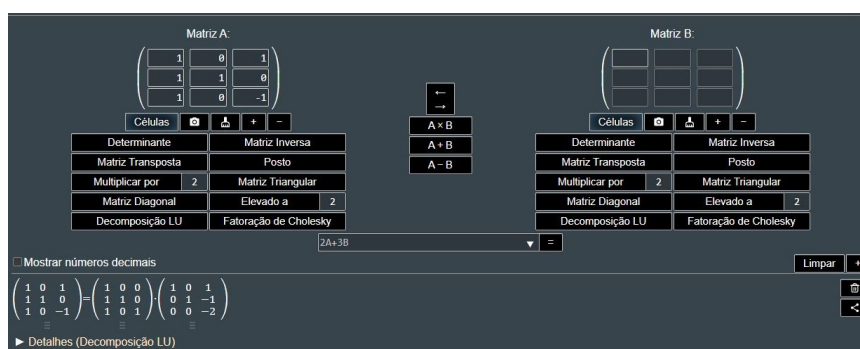
Figura 4.5: Forma Matricial do Sistema



Fonte: Autoria Própria

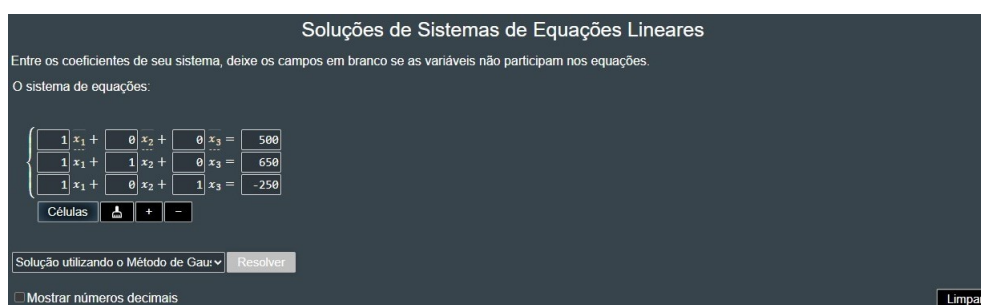
Na sequencia realizaremos a decomposição da matriz A no produto LU através da opção "Decomposição LU", onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior, conforme demonstrado na Figura 4.6:

Figura 4.6: Decomposição LU da Matriz A



Fonte: Autoria Própria

Agora retomaremos ambiente de sistemas lineares, iremos inserir a matriz triangular inferior L e o vetor b para representar o sistema  $Ly = b$ , conforme a Figura 4.7

Figura 4.7: Representação do sistema  $Ly = b$ 

Fonte: Autoria Própria

Em seguida pressionar "Resolver" para encontrar os valores do vetor solução y con-

forme ilustrado na Figura 4.8:

Figura 4.8: Resolução do sistema  $Ly = b$

Solução utilizando o Método de Gauss

(Algoritmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 1 & 0 & 650 \\ 1 & 0 & 1 & -250 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 1 & 0 & 1 & -250 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -750 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 & = & 500 \\ x_2 & = & 150 \quad (1) \\ x_3 & = & -750 \end{cases}$$

- Da equação 3 do sistema (1) obtemos a variável  $x_3$ :  
 $x_3 = -750$
- Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável  $x_2$ :  
 $x_2 = 150$
- Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável  $x_1$ :  
 $x_1 = 500$

Resposta:

$$\begin{cases} x_1 = 500 \\ x_2 = 150 \\ x_3 = -750 \end{cases}$$

A solução geral:  $X = \begin{pmatrix} 500 \\ 150 \\ -750 \end{pmatrix}$

Fonte: Autoria Própria

Agora é necessário inserir a matriz triangular superior  $U$  e o vetor solução  $y$  para representar o sistema  $Ux = y$  conforme ilustrado na Figura 4.9:

Figura 4.9: Representação do sistema  $Ux = y$

Soluções de Sistemas de Equações Lineares

Entre os coeficientes de seu sistema, deixe os campos em branco se as variáveis não participam nos equações.

O sistema de equações:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 500 \\ 0x_1 + 1x_2 + -1x_3 = 150 \\ 0x_1 + 0x_2 + -2x_3 = -750 \end{cases}$$

Células

Solução utilizando o Método de Gau:

Mostrar números decimais

Fonte: Autoria Própria

Agora pressionando a opção "Resolver" encontramos o vetor solução  $x$  do sistema original dado pela Figura 4.10:

Figura 4.10: Resolução do sistema  $Ux = y$ 

Solução utilizando o Método de Gauss <sup>✎</sup>

(Algoritmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & -1 & 150 \\ 0 & 0 & -2 & -750 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 500 \\ x_2 - x_3 = 150 \quad (1) \\ -2x_3 = -750 \end{cases}$$

- Da equação 3 do sistema (1) obtemos a variável  $x_3$ :  
 $-2x_3 = -750$   
 $x_3 = 375$
- Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável  $x_2$ :  
 $x_2 = 150 + x_3 = 150 + 375 = 525$
- Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável  $x_1$ :  
 $x_1 = 500 - x_3 = 500 - 375 = 125$

Resposta:  
 $x_1 = 125$   
 $x_2 = 525$   
 $x_3 = 375$

A solução geral:  $x = \begin{pmatrix} 125 \\ 525 \\ 375 \end{pmatrix}$

Fonte: Autoria Própria

Portanto temos que o volume de tráfego nos pontos é respectivamente:

$$x_1 = 125, x_2 = 525 \text{ e } x_3 = 375$$

---

## Considerações Finais

---

A partir do estudo realizado foi possível concluir que o *Matrix Calculator* é um software que pode ser utilizado para se trabalhar com matrizes e sistemas lineares. Sendo capaz de executar os cálculos de forma rápida e precisa, ainda podendo apresentar as etapas intermediárias da solução caso necessário, o que contribui para o aprendizado e para a visualização dos procedimentos realizados.

O *software* demonstrou ser capaz de realizar as operações básicas como adição, multiplicação por escalar e transposição de matrizes e até procedimentos mais complexos. Embora apresente algumas limitações como se limita à problemas cuja matriz seja dada por  $A_{m \times n}$  tal que  $m$  e  $n$  pertençam ao intervalo  $[1, 3]$  e a ausência de uma função para resolver a Fatoração  $LU$  diretamente, exigindo a utilização de um conjunto de funções para se chegar à resolução, ainda assim o software continuou tendo um bom desempenho nas resoluções, a apresentação indireta do método pode ser útil para o estudo detalhado da decomposição  $LU$  quando o software for utilizado em sala de aula para estudos sobre o tema.

Dessa forma, reforça-se que o *Matrix Calculator* pode ser uma ferramenta relevante para a resolução de problemas envolvendo matrizes e sistemas lineares. Este estudo alcançou seus objetivos ao apresentar, contextualizar e aplicar métodos diretos de solução, e demonstrando como os conceitos matemáticos podem ser aplicados com seu auxílio. Como trabalhos futuros, podemos aplicar atividades usando o software na resolução de problemas em sala de aula e verificar o quanto o uso do matrix calculator facilitou o processo de aprendizagem no ponto de vista do aluno de graduação e também ensino médio.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] Boldrini, J. L.; COSTA, S. I. Rodrigues; F, Vera L; W, Henry G. W. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo, SP: Habra, 1980.
- [2] Boyer, C. B.; Merzbach, U. C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- [3] Iezzi, G; Hazzan, S. **Fundamentos da matemática elementar 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas**. 8. ed. São Paulo, SP: Atual, 2013.
- [4] Leon, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [5] Ruggiero, M. A. G.; Lopes, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1995.
- [6] Silva, C. J. et al. **Problemas resolvidos de álgebra linear: pensando um pouco**. 2. ed. Piracanjuba, GO: Editora Conhecimento Livre, 2023. E-book.