



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA - UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA - DCET II
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

MAYKON LUCAS NASCIMENTO ANDRADE

**SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA AUXILIAR A COMPREENSÃO
DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO**

ALAGOINHAS (BA)

2025

MAYKON LUCCAS NASCIMENTO ANDRADE

**SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA AUXILIAR A
DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Campus II, Departamento de Ciências Exatas e da Terra (DCET), como exigência para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, sob a Orientação da Professora Dra. Grace Dórea Santos Baqueiro.

ALAGOINHAS (BA)

2025


MAYKON LUCCAS NASCIMENTO ANDRADE

**SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA AUZILIAR A
DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO**


Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da
Universidade do Estado da Bahia - UNEB para a obtenção do título parcial de
Licenciada em Matemática.

Alagoinhas, 16 de dezembro 2025


Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
 **GRACE DOREA SANTOS BAQUEIRO**
Data: 31/12/2025 11:17:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dra. Grace Dórea Santos Baqueiro - Orientadora
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

Documento assinado digitalmente
 **MARIA ELIANA SANTANA DA CRUZ SILVA**
Data: 31/12/2025 13:47:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dra. Maria Eliana Santana da Cruz Silva
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

Documento assinado digitalmente
 **ARIANE PINTO DANTAS SILVA**
Data: 31/12/2025 11:10:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me Ariane Pinto Dantas Silva
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

Este trabalho é dedicado a todos que de alguma forma contribuíram para esta construção.

AGRADECIMENTOS

Chegar até aqui representa o fechamento de uma etapa muito significativa da minha vida, uma etapa marcada por crescimento, desafios e aprendizados que levarei comigo para sempre. Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pois sem ele nada disso teria sido possível. É por sua graça que estou concluindo mais essa fase e seguindo adiante.

Agradeço profundamente aos meus pais, Liliane Nascimento e Maykedson Santos, minha avó, Rosália Nascimento e a minha irmã Layane Nascimento. Cada um deles foi essencial na minha trajetória, oferecendo apoio, força e presença nos momentos mais importantes. Tudo o que conquistei até aqui também é fruto do cuidado e do amor deles.

Sou muito grato aos meus colegas da UNEB, especialmente à turma de 2022.1. Compartilhamos dúvidas, trabalhos, noites de estudo e, acima de tudo, companheirismo. Estar cercado por pessoas que realmente caminharam junto comigo fez toda a diferença para que eu permanecesse firme na universidade.

Deixo também meu agradecimento às professoras que marcaram minha formação, em especial à professora Dra. Grace Dórea Santos Baqueiro. As disciplinas que cursei com ela foi um divisor de águas na minha trajetória acadêmica. Foi a partir dessas experiências que ganhei motivação para me dedicar mais, entender e buscar novos conhecimentos com entusiasmo.

Por fim, deixo registrado meu carinho e minha gratidão pelo trio que se formou ao longo do curso: Eu, Daniel Godinho e Francisco Xavier. Nessa parceria que nasceu na brincadeira, seguramos as mãos uns dos outros em todos os semestres. Foi um apoio mútuo que me fortaleceu e que levarei comigo como uma das melhores partes dessa caminhada.

Não é possível refazer este país, democratizá-lo, humanizá-lo, torná-lo sério, com adolescentes brincando de matar gente, ofendendo a vida, destruindo o sonho, inviabilizando o amor. Se a educação sozinha não transformar a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda (Freire, 2016, p. 77)

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Respostas Esperadas nos itens (a) e (b)	40
Tabela 2 - Respostas Esperadas no item (a) da Questão 2	42
Tabela 3 - Respostas Esperadas item (b) da Questão 2.....	43
Tabela 4 - Respostas Esperadas nos itens (a) e (b)	58

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura das Intervenções Estruturantes	29
Figura 2 - <i>Applet</i> 2 da Parte 1	39
Figura 3 - Questão 1 da Parte 1, itens (a) e (b)	40
Figura 4 - <i>Applet</i> 2 da parte 1.....	41
Figura 5 - Itens (a), (b) e (c) da Questão 2	42
Figura 6 - Questão 2 itens (d) e (e)	44
Figura 7 - Questão 3 da Parte 1	45
Figura 8 - Questão 3.....	47
Figura 9 - <i>Applet</i> 1 da Parte 2	48
Figura 10 - Itens (a), (b) e (c) da Questão 1	49
Figura 11 - Construção da Questão 2 Parte 2.....	50
Figura 12 - Itens (a) e (b) da Questão 2.....	50
Figura 13 - Item (c) da Questão 2	52
Figura 14 - Item(d) da Questão 2	53
Figura 15 - Item (e) da Questão 2	54
Figura 16 - <i>Applet</i> 3 da Parte 2.....	54
Figura 17 - Formalização da Parte 2.....	55
Figura 18 - Teorema do Valor Médio e sua aplicação no TFC.....	56
Figura 19 - <i>Applet</i> 1 da Parte 3.....	57
Figura 20 - Alternativas (a), (b) e (c) da Questão 1	58
Figura 21 - Itens (d), (e) e (f) da Questão 1	59
Figura 22 - <i>Applet</i> 1 com a solução dos itens (d) e (e) da Questão 1	59
Figura 23 - Formalização do Teorema do Valor Médio.....	60
Figura 24 - <i>Applet</i> 2 da Parte 3.....	61
Figura 25 - Itens (a), (b) e (c) da Questão 2	62
Figura 26 - Formalização da Questão 2	63
Figura 27 - <i>Applet</i> 3 da Questão 3	64
Figura 28 - Itens (a) e (b) da Questão 3.....	64
Figura 29 - Formalização da Questão 3.....	65

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 - Intervenções Estruturantes Escritas Pré e Pós Formais	31
Quadro 2 - Caracterização da sequência didática construída	37
Quadro 3 - Categorias de Intervenções Estruturantes segundo Cabral (2017).....	37

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo elaborar e propor uma sequência didática para auxiliar na compreensão da primeira parte da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, conforme apresentada no livro *Cálculo A*, de Diva Marília Flemming, seguindo pressupostos do modelo de estrutura e elaboração sugerido por Cabral (2017). A proposta busca oferecer um percurso que facilite a compreensão dos elementos presentes na demonstração, utilizando diferentes representações do objeto matemático envolvido. A pesquisa dialoga com estudos que destacam a importância do uso de tecnologias digitais no ensino de Cálculo e o papel das sequências didáticas na organização do ensino, o que reforça a pertinência da proposta. No entanto, o referencial teórico-metodológico adotado baseia-se nas Intervenções Estruturantes de Cabral (2017), que orientam a organização da sequência por meio de etapas articuladas: intervenção inicial, reflexiva, exploratória, formalizante, avaliativa restrita e avaliativa aplicada. A investigação apresenta natureza qualitativa, caráter exploratório e também se caracteriza como científica e pedagógica, pois articula fundamentação teórica e elaboração de um produto didático voltado ao ensino de Cálculo. A análise da sequência elaborada mostrou que foi possível organizar um percurso que contempla as intervenções estruturantes e articula aspectos algébricos da demonstração com representações construídas no GeoGebra. As intervenções serviram como momentos que incentivam a reflexão, a observação e o levantamento de hipóteses, contribuindo para a compreensão dos conceitos estudados. O material produzido pode ser utilizado e adaptado por docentes, mostrando potencial para apoiar a compreensão da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

Palavras-chave: Sequência Didática; Intervenções Estruturantes; Teorema Fundamental do Cálculo; GeoGebra; Ensino de Cálculo.

ABSTRACT

This work aims to develop and propose a didactic sequence to support the understanding of the first part of the demonstration of the Fundamental Theorem of Calculus, as presented in the book *Cálculo A* by Diva Marília Flemming, following the structure and elaboration model proposed by Cabral (2017). The proposal seeks to offer a pathway that facilitates the comprehension of the elements involved in the demonstration by using different representations of the mathematical object addressed. The research is informed by studies that highlight the importance of digital technologies in the teaching of Calculus and the role of didactic sequences in organizing instructional processes, reinforcing the relevance of the proposal. However, the theoretical and methodological framework adopted is based on Cabral's (2017) Structuring Interventions, which organize the didactic sequence into articulated stages: initial, reflective, exploratory, formalizing, restricted evaluative, and applicative evaluative interventions. The investigation is qualitative, exploratory, and also characterized as scientific and pedagogical, as it articulates theoretical foundations and the development of a didactic product designed for the teaching of Calculus. The analysis of the proposed sequence showed that it was possible to organize a pathway that incorporates the structuring interventions and connects algebraic aspects of the demonstration with representations constructed in GeoGebra. These interventions encouraged reflection, observation, and hypothesis formulation, contributing to the understanding of the studied concepts. The material produced can be used and adapted by teachers, demonstrating potential to support the comprehension of the demonstration of the Fundamental Theorem of Calculus.

Keywords: Didactic Sequence; Structuring Interventions; Fundamental Theorem of Calculus; GeoGebra; Calculus Teaching.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
2. PROBLEMÁTICA.....	16
2.1 Caminho até a escolha do tema.....	16
2.2 Revisão de Literatura	17
2.2.1 Sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.....	18
2.2.2 Ensino e Aprendizagem do TFC e Dificuldade de Demonstração.....	22
2.2.3 O Uso de Ferramentas digitais para o Ensino de Cálculo	24
2.2.4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	26
3. REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO.....	28
3.1. Cabral (2017): estrutura e elaboração de Sequencia Didática.....	28
3.1.1 Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC)	29
3.1.2 As Intervenções Estruturantes.....	30
4. METODOLOGIA	34
4.1 Caracterização da Pesquisa	34
4.2 Procedimentos Metodológicos.....	35
5. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA	39
Parte 1 da SD:.....	39
Parte 2 da SD:	48
Parte 3 da SD:	56
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
7. REFERÊNCIAS.....	71

1. INTRODUÇÃO.

Ao longo da formação em Licenciatura em Matemática, o estudo do Cálculo Diferencial e Integral apresenta-se como um dos momentos de maior complexidade conceitual, especialmente no que se refere à compreensão das demonstrações matemáticas. Em diferentes disciplinas do curso, observa-se que muitos estudantes conseguem reproduzir procedimentos algébricos, mas encontram dificuldades em compreender o significado dos conceitos envolvidos e a lógica que fundamenta suas demonstrações, em particular no estudo do Teorema Fundamental do Cálculo.

Essas dificuldades não se restringem a experiências individuais, mas são recorrentes entre licenciandos, evidenciando a presença de obstáculos na articulação entre os registros algébrico, geométrico e conceitual. Esse cenário constitui o ponto de partida da presente pesquisa e justifica a investigação de abordagens didáticas que possam favorecer uma compreensão mais significativa da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

Estudos como os de Tall (2002), Alonso (2017), Richit et. al (2012), Paulin e Ribeiro (2019), Grande (2016) e Picone (2007), juntamente com a revisão apresentada por Cavalcante (2022), apontam que o uso de tecnologias digitais, em especial o *GeoGebra*, contribui para a visualização de propriedades, para a articulação entre diferentes registros de representação e para o engajamento ativo dos estudantes. Esses resultados dialogam com a perspectiva de Duval (1999), ao defender que a compreensão de objetos matemáticos depende do trânsito entre representações gráficas, geométricas e algébricas, o que reforça o papel de ambientes digitais no ensino de conteúdos ligados ao Teorema Fundamental do Cálculo.

Além disso, diferentes autores têm discutido a importância de sequências didáticas como metodologia que organiza o ensino em etapas planejadas e coerentes. Zabala (1998) concebe a sequência didática como um conjunto estruturado de atividades que orienta o processo de ensino e aprendizagem, possibilitando ao estudante construir e reconstruir significados de forma progressiva. Essa abordagem reforça a necessidade de um planejamento que favoreça a participação ativa do aluno, valorize suas interpretações e permita o desenvolvimento gradual de ideias matemáticas.

Nesse contexto, o modelo apresentado por Cabral (2017) oferece uma proposta específica para a elaboração de sequências didáticas fundamentadas em intervenções estruturantes. O autor compreende a sequência didática como um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais que sistematizam as ações de ensino com a intenção de favorecer a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Em suas análises, Cabral (2017) destaca que essas intervenções funcionam como elos conectados, organizando etapas que permitem a observação, a generalização e a construção conceitual ao longo do processo de aprendizagem.

Nesse modelo, as intervenções são classificadas como Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f), Intervenções Avaliativas Restritas (IA_r) e Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a), que orientam o desenvolvimento gradual das ideias pretendidas no ensino.

Considerando essas discussões, este trabalho tem como objetivo elaborar e propor uma sequência didática que ajude na compreensão da primeira parte da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, apresentada no livro *Cálculo A*, de Diva Marília Flemming. A proposta busca apoiar essa compreensão utilizando diferentes representações do objeto matemático presente na demonstração.

Quanto à natureza, esta pesquisa é qualitativa, pois busca compreender e organizar concepções teóricas relacionadas ao ensino e à visualização dos conceitos que compõem a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo. Do ponto de vista de seus objetivos, apresenta caráter exploratório, uma vez que procura sistematizar fundamentos teóricos que embasam a construção da sequência didática. A investigação também pode ser caracterizada como científica e pedagógica, pois articula análise conceitual, fundamentação teórica e elaboração de um produto didático destinado a apoiar a prática docente e ampliar as possibilidades de abordagem no ensino de Cálculo. Esta investigação apresenta-se em cinco capítulos.

O capítulo 1 discute a problemática que motivou a pesquisa, apresentando o percurso até a escolha do tema e a revisão de literatura relacionada ao ensino de Cálculo, ao uso de ferramentas digitais e às sequências didáticas. Tais estudos permitiram delinear o objetivo geral da pesquisa.

O capítulo 2 apresenta o referencial teórico-metodológico adotado, com ênfase no modelo de estruturação de Cabral (2017).

O capítulo 3 expõe a caracterização da pesquisa e os procedimentos utilizados para a construção da sequência didática.

O capítulo 4 apresenta e analisa a sequência elaborada, relacionando-a às Intervenções Estruturantes.

Por fim, o capítulo 5 reúne as considerações finais, nas quais são discutidos os principais resultados do trabalho.

2. PROBLEMÁTICA

2.1 Caminho até a escolha do tema

Dos motivos que me levaram à escolha do meu tema, considero importante começar pela minha trajetória desde o início da graduação. Quando cheguei à UNEB, já possuía algum conhecimento sobre certos conceitos matemáticos, mas percebia uma dificuldade significativa em compreender o porquê das definições. Muitas vezes, em vez de realmente entender o que estava por trás dos conceitos, eu apenas memorizava algoritmos de resolução.

Essa limitação ficou ainda mais evidente no segundo semestre, ao cursar a disciplina de Geometria Plana, ministrada pela professora doutora Maridete Ferreira Cunha. Nela, percebi que a simples memorização não seria suficiente, pois a disciplina exigia a capacidade de pensar além dos procedimentos e, sobretudo, desenvolver demonstrações. Foi nesse momento que compreendi a importância de aprender a argumentar matematicamente, indo além da aplicação mecânica de regras.

A partir dessa experiência, meu olhar para as disciplinas mudou. Mais adiante, ao cursar Cálculo I e II, ministrados pela professora doutora Grace Dórea Santos Baqueiro, especialmente em Cálculo II, enfrentei novamente dificuldades relacionadas às demonstrações, em particular a do Teorema Fundamental do Cálculo. Naquele momento, percebi que me faltavam conhecimentos prévios sobre alguns conceitos utilizados na demonstração, o que dificultava a compreensão. Ao compartilhar minhas dúvidas com a professora, ela utilizou o quadro para representar graficamente os pontos em que eu me perdia, e essa abordagem visual tornou o conteúdo muito mais claro e significativo para mim.

Esse episódio foi decisivo: percebi que, assim como eu, muitos estudantes podem necessitar de recursos visuais para compreender determinados conceitos matemáticos. Reconhecer essa necessidade me fez enxergar o ensino da Matemática de forma diferente, compreendendo que as representações visuais podem atuar como mediadoras importantes na construção do conhecimento.

Chegando ao 7º semestre, recebi o convite da professora doutora Grace Doréa para participar de um projeto de iniciação científica, que justamente tinha

como objetivo investigar o ensino de conceitos de Cálculo por meio de *applets*, pequenos programas que, dentro de um ambiente mais amplo (no caso específico, o *GeoGebra*), executam tarefas específicas e interativas (Nasser et al., 2025). A proposta dialogava diretamente com minhas próprias experiências e convicções sobre a importância de recursos visuais no processo de aprendizagem. Por isso, aceitei o convite e, atualmente, venho desenvolvendo um *applet* no *GeoGebra* voltado para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo.

Dessa forma, minha escolha de tema para o TCC nasceu tanto das minhas vivências enquanto estudante, enfrentando dificuldades reais na compreensão de demonstrações, quanto da oportunidade de contribuir para que outros alunos tenham acesso a ferramentas que facilitem esse processo. Acredito que uma sequência didática apoiada em recursos visuais pode desempenhar um papel fundamental na aprendizagem significativa, tornando conceitos abstratos mais acessíveis e fortalecendo a autonomia dos estudantes na compreensão das demonstrações matemáticas.

2.2 Revisão de Literatura

A partir das experiências e vivências construídas ao longo da graduação, a definição do tema deste trabalho foi sendo amadurecida e consolidada por meio das leituras realizadas durante o percurso formativo. Essas leituras se mostraram fundamentais para a estruturação da pesquisa, orientando a escolha dos referenciais teóricos e das discussões apresentadas.

Dessa forma, a presente revisão de literatura foi organizada em subseções que abordam aspectos considerados essenciais para o desenvolvimento do estudo. Inicialmente, é discutido o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com um breve resgate histórico e a apresentação da primeira parte de sua demonstração, conforme exposta no livro *Cálculo A* (FLEMMING; GONÇALVES, 2007). Em seguida, aborda-se o ensino e aprendizagem do TFC, destacando as dificuldades conceituais e formais enfrentadas pelos estudantes na compreensão de sua demonstração.

Posteriormente, é analisada a importância da visualização como recurso didático no ensino de Cálculo, considerando o potencial de ferramentas

tecnológicas, especialmente o *GeoGebra*, para promover a articulação entre diferentes registros de representação (algébrico, gráfico e geométrico) e favorecer uma aprendizagem mais significativa. Por fim, discute-se o papel das sequências didáticas como estratégia pedagógica no ensino de conteúdos de Cálculo, evidenciando como sua utilização pode potencializar a aprendizagem de conceitos complexos, como o próprio Teorema Fundamental do Cálculo.

Nessa perspectiva, os estudos analisados evidenciam que compreender o TFC vai além da manipulação algébrica: envolve interpretar relações conceituais entre derivação e integração, desenvolver competências de visualização e argumentação matemática, e participar de processos de ensino que favoreçam a construção gradual do conhecimento.

2.2.1 Sobre o Teorema Fundamental do Cálculo

O estudo do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) ocupa um lugar central na história da Matemática, pois estabelece uma ponte entre dois dos principais ramos do cálculo: a derivação e a integração. Seu desenvolvimento histórico remonta às investigações do século XVII, quando matemáticos como Isaac Barrow, Isaac Newton e Gottfried Leibniz, a partir de problemas relacionados ao cálculo de áreas e à determinação de tangentes, perceberam que as operações de integração e diferenciação estavam conectadas. A formulação moderna do teorema, contudo, só se consolidou posteriormente, com o avanço da formalização do cálculo e da noção de limite, tal como desenvolvida por Cauchy e outros matemáticos no século XIX. Nesse sentido, Eves (2011, p. 418) afirma que “indubitavelmente, porém, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz”.

Antes de Newton e Leibniz, já existiam tentativas para lidar com problemas de área e de tangente usando métodos geométricos. O método da exaustão, empregado pelos matemáticos gregos, em especial Eudoxo e Arquimedes, consistia em aproximar áreas e volumes por meio de polígonos inscritos e circunscritos, antecipando a ideia de limite. Como lembra Eves (2011, p. 418), “primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial”, evidenciando que a busca por métodos de integração antecedeu historicamente os avanços no cálculo diferencial.

No século XVII, a contribuição de Barrow foi essencial para a formulação do TFC. Em suas *Lectioes*, ele demonstrou que a diferenciação e a integração eram operações inversas. Como afirma Eves (2011, p. 435), “em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como teorema fundamental do cálculo e aparece enunciada e provada nas *Lectioes* de Barrow”

Essa caminhada histórica, desde os gregos até Newton, Leibniz e Barrow, evidencia que o TFC não surgiu de forma repentina, mas é fruto de uma evolução de ideias. Hoje, além de sua relevância teórica, esse teorema assume papel pedagógico essencial no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, justamente por explicitar a ligação entre duas operações que os estudantes aprendem de maneira separada. Para tornar essa ligação mais clara, é necessário recorrer à sua demonstração, que evidencia, de forma rigorosa, como a área acumulada sob uma curva se relaciona diretamente com a taxa de variação da função.

Para este trabalho, julgamos importante apresentar a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo tal como exposta por Flemming e Gonçalves (2007), no livro *Cálculo A*. Essa versão privilegia o rigor matemático, evidenciando a relação entre derivada e integral de forma formal e sistemática. Trata-se de uma construção clássica, baseada em propriedades fundamentais da integral definida e no uso do Teorema do Valor Médio da Integral, que permite estabelecer a formulação geral do Teorema Fundamental do Cálculo. A seguir, reproduzimos a proposição, a prova e o enunciado da primeira parte do teorema segundo a referida obra.

Proposição

6.10.1

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$. Então a função $G:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

Tem derivadas em todos os pontos $x \in [a,b]$ que é dada por:

$$G'(x) = f(x), \quad \text{ou seja,} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Em outras palavras, se *integrarmos* uma função contínua f e, em seguida, *derivarmos* o resultado, obteremos a função a ser integrada, só que na variável x . Portanto, a prova da parte I do TFC, consiste em mostrar que a função $G(x)$ é uma primitiva da função f .

Prova. Vamos determinar a derivada $G'(x)$, usando a definição

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_a^x f(t) dt, \\ G(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt, \\ G(x + \Delta x) - G(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Usando a propriedade da integral em intervalos adjacentes,

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Portanto,

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Como f é contínua em $[x, x + \Delta x]$, pelo Teorema do Valor médio da Integral, existe um ponto \bar{x} entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = (x + \Delta x - x) f(\bar{x}) = f(\bar{x}) \Delta x.$$

Assim,

$$\frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = f(\bar{x}).$$

Logo,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}).$$

Como \bar{x} está entre x e $x + \Delta x$, segue que $\bar{x} \rightarrow x$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Pela continuidade de f , temos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = f(x).$$

Portanto,

$$G'(x) = f(x).$$

Segundo Duval (1995), compreender uma demonstração requer “a coordenação de diferentes registros de representação semiótica, como o algébrico, o geométrico e o discursivo”. Essa ideia é particularmente relevante para o estudo dessa primeira parte da demonstração TFC, que envolve simultaneamente a noção de área sob a curva (registro geométrico), a expressão integral (registro simbólico) e a relação entre taxa de variação e acumulação (registro conceitual).

Picone (2007), em sua dissertação, investigou quais registros de representação eram mobilizados por professores no ensino do TFC, bem como se consideravam importante a coordenação desse registro e, ainda, se exploravam a visualização por meio da representação gráfica. Concluiu, entre outras coisas que,

Embora tenham sido identificados sinais de que os professores consideram importante a coordenação de registros de representação no ensino de alguns conceitos fundamentais do Cálculo, como por exemplo, nos conceitos de função, derivada, integral e cálculo de áreas, concluímos que nem todos os professores coordenam os registros de representação no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo. Não foram explicitadas convenientemente justificativas para o fato de no ensino do TFC os professores não terem a mesma preocupação e não buscarem abordá-lo da mesma forma que abordam esses outros conceitos. (PICONE, 2007, p. 118).

Percebe-se que na demonstração apresentada por Flemming & Gonçalves (2007) predomina o registro simbólico, o que pode levar a uma falta de compreensão do real significado do TFC.

Balacheff (2022) observa que, para muitos estudantes, “a prova não é uma ferramenta de explicação, mas um ritual de legitimação do saber”. Assim sendo, a visão mecanicista tem consequências diretas na aprendizagem do Cálculo, sobretudo na compreensão do TFC, cuja demonstração requer a articulação entre argumentação lógica e intuição geométrica.

Deste modo, faz-se necessário o uso de outras formas de representação essencial no ensino de Cálculo, pois permite que o estudante possa perceber a demonstração não sendo puramente algébrica, mas também por meio de interpretações geométricas. A subseção seguinte traz um pouco mais de reflexão acerca das dificuldades tanto no ensino e aprendizagem do TFC, quanto na sua demonstração.

2.2.2 Ensino e Aprendizagem do TFC e Dificuldade de Demonstração.

De acordo com Paulin e Ribeiro (2019, p. 240), “o Teorema Fundamental do Cálculo traz a ideia central do Cálculo, sendo considerado a pedra angular do Cálculo Diferencial e Integral, pois estabelece a relação entre as duas principais operações deste campo: a derivação e a integração”. No entanto, o seu ensino e a aprendizagem, configuram-se como um dos maiores desafios enfrentados tanto por docentes quanto por discentes de diversos cursos do ensino superior, em especial os de Licenciatura em Matemática, principalmente quando, sua abordagem em sala de aula se dá de forma expositiva e centrada apenas na manipulação algébrica, o que pode dificultar a compreensão conceitual.

Apesar de sua relevância, muitos estudantes não conseguem compreender o significado dessa relação. Paulin e Ribeiro (2019) apontam que a aprendizagem do TFC demanda uma articulação sólida entre os conceitos de limite, derivada e integral, sendo o conceito de função o eixo estruturador dessa conexão. Segundo os autores, “os resultados mostram evidências da importância do conceito de função para a compreensão de conceitos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo e, conseqüentemente, para o ensino e aprendizagem do Cálculo” (PAULIN; RIBEIRO, 2019, p. 241). A ausência dessa articulação leva os estudantes a

perceberem o cálculo de forma fragmentada, o que compromete a interpretação do teorema e de suas implicações.

As dificuldades de aprendizagem, contudo, não se restringem à compreensão conceitual do teorema, mas também à capacidade de compreender e elaborar demonstrações matemáticas, etapa essencial para o pensamento dedutivo. A ausência dessa compreensão mais ampla do papel da demonstração faz com que muitos alunos a percebam como um conjunto de passos formais a serem seguidos, sem conexão com o raciocínio que justifica cada etapa. Kirnev e Savioli (2013), ao investigarem licenciandos em Matemática, destacam que essa limitação decorre do fato de que, na Educação Básica, o contato com demonstrações é escasso ou inexistente, o que leva o estudante a ingressar na universidade sem a familiaridade necessária com o raciocínio lógico-dedutivo.

Essa lacuna se manifesta com força nas disciplinas de Cálculo, nas quais os alunos tendem a associar demonstração apenas a manipulações algébricas, sem compreender o seu papel explicativo. Como afirmam as autoras, “há dificuldades relacionadas a demonstrações matemáticas quanto à forma e ao conteúdo, pois a argumentação não caracteriza uma sequência lógica dedutiva” (KIRNEV; SAVIOLI, 2013, p. 12).

Essas constatações dialogam com Cavalcante (2022), que enfatiza que muitos licenciandos “apresentam problemas em compreender a inter-relação entre integração e derivação, especialmente quando essas operações são apresentadas em registros diferentes, como o gráfico e o algébrico” (p. 33). Assim, as dificuldades de demonstração e de compreensão do TFC se complementam: ambas exigem do estudante o domínio do raciocínio dedutivo e a habilidade de articular diferentes formas de representação matemática.

Dessa forma, torna-se necessário que o ensino do TFC vá além da exposição algébrica e promova um ambiente de aprendizagem que valorize a explicação, a argumentação e a análise conceitual. Trabalhos de referência, como os de Balacheff (2022) e Duval (1995) indicam que a compreensão das demonstrações matemáticas é condição indispensável para a construção do pensamento teórico em Matemática. Quando aplicados ao contexto do Cálculo, esses princípios reforçam a importância de práticas pedagógicas que incentivem o aluno a entender a demonstração do TFC

não como um procedimento formal, mas como um processo de construção de sentido.

Resumindo, os estudos analisados evidenciam que compreender o TFC vai além da manipulação algébrica: envolve interpretar relações conceituais entre derivação e integração, desenvolver competências de visualização e argumentação matemática, e participar de processos de ensino que favoreçam a construção gradual do conhecimento.

Essa perspectiva prepara o caminho para discutir, na subseção seguinte, a importância do processo da visualização e o uso de recursos tecnológicos, como o *GeoGebra*, para o ensino e aprendizagem do Cálculo, em particular, na compreensão do TFC.

2.2.3 O Uso de Ferramentas digitais para o Ensino de Cálculo

Ao refletir sobre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes de Licenciatura em Matemática na aprendizagem do Cálculo, especialmente do TFC torna-se evidente a necessidade de estratégias de ensino que favoreçam a compreensão conceitual e não apenas a execução de procedimentos. Nesse sentido, o processo da *visualização* assume um papel central, pois permite que o aluno transite entre diferentes formas de representação gráfica, algébrica e geométrica construindo significados que se tornam fundamentais para o entendimento do conteúdo.

Além disso, estudos apontam que os alunos podem sentir-se mais motivados ao utilizarem recursos tecnológicos como computadores e calculadoras gráficas, já que tais ferramentas podem contribuir para um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e participativo. Conforme destaca Palis (1995, p. 25, apud RICHIT et al., 2012, p. 93):

“Tem-se constatado que algumas mudanças na qualidade do aprendizado dos alunos ocorrem simplesmente porque eles participam mais ativamente em aulas ou trabalhos apoiados em computadores e/ou calculadoras, seguem o curso mais de perto e fazem mais perguntas, do que em ambientes de ensino tradicionais.”

Essa constatação evidencia que o uso de tecnologias digitais pode favorecer o envolvimento dos estudantes com o conteúdo e contribuir para um processo de aprendizagem mais significativo. Quando utilizadas de forma intencional, essas ferramentas possibilitam ao aluno explorar visualmente conceitos complexos,

tornando perceptíveis relações que, de outra forma, permaneceriam restritas ao campo simbólico.

Segundo Duval (1999), compreender um conceito matemático envolve saber trabalhar com diferentes formas de representá-lo, já que nenhum objeto é entendido apenas por um único tipo de registro. Nessa perspectiva, a conversão corresponde a passar uma ideia de um registro para outro, como transformar uma expressão algébrica em um gráfico, mantendo o mesmo significado mesmo que a forma externa mude. Diferente do tratamento, que ocorre dentro do próprio registro, a conversão exige reorganizar a mesma ideia em outra linguagem. Quando o aluno observa uma função no gráfico ou traduz uma expressão simbólica para uma representação visual, esse movimento pode contribuir para que ele perceba novos sentidos no que antes aparecia apenas de forma simbólica.

Em consonância com essa perspectiva, Tall (2002, apud Grande, 2016, p. 6) afirma que “ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional”. Essa visão reforça a importância da visualização como elemento essencial no ensino de conceitos abstratos do Cálculo, pois pode contribuir para que os alunos construam imagens mentais que auxiliem na compreensão das relações entre variação e acumulação, fundamentais para a interpretação do TFC.

Nesse contexto, o uso do *GeoGebra* surge como uma possibilidade relevante para integrar diferentes registros de representação, especialmente o algébrico e o gráfico (ou visual). O software permite a criação de *applets* interativos nos quais o aluno manipula parâmetros, visualiza áreas sob a curva e compreende, simultaneamente, aspectos simbólicos e geométricos das relações entre derivadas e integrais. Essa abordagem, embora não garanta por si só a aprendizagem, favorece um ambiente exploratório, no qual o aluno pode formular hipóteses, testar ideias e refletir sobre o comportamento do objeto estudado.

Portanto, a integração entre visualização e tecnologia pode contribuir para um ensino de Cálculo mais investigativo e compreensivo, no qual o estudante é convidado a interpretar e relacionar os diferentes registros de representação. Diversas pesquisas também corroboram a relevância dessa perspectiva. Paulin e

Ribeiro (2019) destacam que o ensino e a aprendizagem do TFC têm se beneficiado da incorporação de recursos visuais e tecnológicos, que possibilitam ao estudante compreender o teorema como um elo conceitual entre derivação e integração.

Paulin e Ribeiro (2019) referem também, que a visualização é um elemento essencial para romper com uma abordagem puramente técnica, permitindo ao aluno compreender as ideias de acumulação e variação de modo dinâmico e exploratório. Assim, a visualização não se limita a um auxílio gráfico, mas constitui uma forma de pensamento matemático que pode potencializar a compreensão conceitual e estimular o raciocínio reflexivo sobre o Cálculo.

Em síntese, as contribuições de autores como Duval (1999), Tall (2002), Grande (2016) e Paulin e Ribeiro (2019) reforçam que compreender a demonstração do TFC pode ser mais viável se houver o trânsito entre diferentes registros de representação e a mediação de tecnologias que favoreçam a construção de significados. Essa abordagem visual, ao ser incorporada de modo intencional e planejado, abre caminho para metodologias que explorem não apenas o que ensinar, mas como ensinar Cálculo de forma mais significativa, conduzindo, assim, à necessidade de refletir sobre estruturas de ensino planejadas, como as sequências didáticas, que serão discutidas a seguir.

2.2.4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O ensino de Cálculo, pela sua natureza abstrata e pela densidade conceitual dos temas que abrange, demanda metodologias que favoreçam a construção gradual do conhecimento e a superação das dificuldades frequentemente apresentadas pelos estudantes. Nesse contexto, a utilização de sequências didáticas constitui uma estratégia pedagógica relevante, pois organiza o ensino em etapas progressivas e interligadas, promovendo a articulação entre os conhecimentos prévios dos alunos e os novos saberes em construção.

De acordo com Zabala (1998), uma sequência didática é composta por um conjunto estruturado de atividades que possuem uma intencionalidade educativa clara, orientada à aprendizagem de determinados conteúdos ou competências. Essa organização permite que o processo de ensino se desenvolva de maneira planejada, coerente e contínua, garantindo que cada etapa tenha sentido em relação à anterior e prepare o estudante para a seguinte. No ensino de Cálculo, essa estrutura

favorece o desenvolvimento conceitual, evitando que o aprendizado se restrinja à manipulação de fórmulas e algoritmos descontextualizados.

A relevância das sequências didáticas nessa área é reforçada por pesquisas que exploram o uso de recursos visuais e intuitivos para a abordagem de conceitos abstratos. O estudo de Grande (2016), por exemplo, apresenta uma sequência de ensino voltada à compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), na qual o uso de recursos gráficos e tecnológicos, especialmente o *GeoGebra*, contribuiu para que os estudantes percebessem com maior clareza a relação entre as operações de derivação e integração. Os resultados apontaram que uma abordagem visual e interativa favorece o desenvolvimento do pensamento intuitivo e a construção de significados, tornando o aprendizado mais dinâmico e significativo

Além disso, Cabral (2017) destaca que o uso de sequências didáticas no ensino de Matemática deve estar fundamentado em uma estrutura que privilegie a reconstrução conceitual dos alunos. Em sua proposta teórica, o autor apresenta o modelo da Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC), apoiado nas Intervenções Estruturantes, que têm como finalidade criar condições para que o estudante avance na compreensão dos conceitos por meio de situações que estimulam a reflexão e a argumentação. Nessa perspectiva, a sequência didática não se resume à organização de atividades, mas constitui um instrumento de mediação didático-pedagógica, em que o professor atua como orientador da aprendizagem e o aluno como sujeito ativo do processo

Dessa forma, compreender a relevância das sequências didáticas para o ensino de Cálculo é reconhecer seu potencial para integrar visualização, problematização e formalização conceitual. O planejamento intencional dessas etapas possibilita que o estudante compreenda gradualmente as relações fundamentais entre derivada e integral, aproximando-se da essência conceitual do Teorema Fundamental do Cálculo.

Essas discussões conduziram à delimitação do objetivo central desta pesquisa, que é o de elaborar e propor uma sequência didática fundamentada no modelo de estrutura e elaboração sugerido por Cabral (2017), com o intuito de auxiliar na compreensão da primeira parte da demonstração do TFC.

Com base nas reflexões apresentadas, o presente trabalho não busca aplicar empiricamente uma sequência didática, mas propor sua elaboração teórica,

fundamentada nas concepções de Cabral (2017) e inspirada nas potencialidades observadas em pesquisas como a de Grande (2016). Assim, pretende-se construir uma proposta, feita em modo de *applet* no *GeoGebra*, que possa servir de referência para práticas futuras que explorem a relação entre o uso do *GeoGebra*, a visualização e a compreensão conceitual do TFC. O Capítulo seguinte traz a caracterização da pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados na elaboração da SD.

3. REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

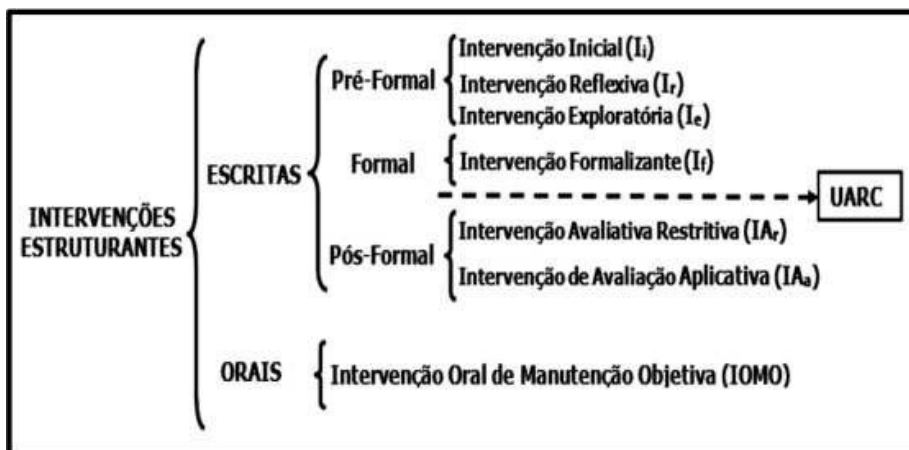
Neste capítulo, apresento os fundamentos teóricos e metodológicos que sustentam a elaboração da sequência didática proposta neste trabalho, construída com o intuito de favorecer a compreensão da primeira parte da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo. O referencial adotado apoia-se no modelo teórico-metodológico proposto por Cabral (2017), cuja estrutura busca orientar o processo de reconstrução conceitual no ensino de Matemática. Tal modelo se organiza a partir da Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC) e das Intervenções Estruturantes, que compõem o núcleo da abordagem utilizada neste estudo.

A escolha desse referencial se deve à sua coerência com os objetivos da pesquisa, uma vez que ele oferece subsídios para planejar e desenvolver ações didáticas que possibilitem ao aluno reconstruir conceitos matemáticos de maneira gradual e articulada, por meio de situações de exploração, reflexão e formalização.

3.1. Cabral (2017): estrutura e elaboração de Sequencia Didática

Cabral (2017) propõe uma estrutura didático-metodológica fundamentada na ideia de que o processo de aprendizagem matemática ocorre por meio de intervenções planejadas e intencionais, que orientam o aluno na reconstrução dos conceitos. Essas ações são denominadas *Intervenções Estruturantes* e são organizadas em níveis que correspondem ao desenvolvimento progressivo do pensamento conceitual e podem ser *escritas* ou *orais*. (Figura 1).

Figura 1 - Estrutura das Intervenções Estruturantes



Fonte: Cabral (2017, p. 97).

Cabral (2017) define as Intervenções Estruturantes Escritas como momentos distintos, porém articulados, do processo de ensino e aprendizagem, que se organizam em três níveis: pré-formal, formal e pós-formal.

As intervenções do nível pré-formal compreendem a Intervenção Inicial (Ii), a Intervenção Reflexiva (Ir) e a Intervenção Exploratória (Ie); o nível formal é representado pela Intervenção Formalizante (If); e o nível pós-formal inclui as Intervenções Avaliativas Restritivas (IAr) e Avaliativas Aplicativas (IAa). De modo transversal a todas elas, encontra-se a Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO), que atua de forma contínua na mediação discursiva entre professor e aluno.

Diante do objetivo traçado para esta pesquisa, que é a de elaborar e propor uma SD, o uso da estrutura de Cabral (2017) ficará limitada apenas às Intervenções Estruturantes Escritas, ficando a parte Oral para uma futura aplicação. As subseções seguintes trazem, de forma sucinta, os conceitos de tais Intervenções.

3.1.1 Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC)

A proposta de Cabral (2017) tem como núcleo a Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC), que representa o ciclo completo de reconstrução de um conceito matemático. Segundo o autor, “a concepção que proponho aqui se fundamenta numa analogia da reconstrução conceitual de um objeto matemático com o procedimento adotado para se determinar a medida da área de uma superfície a partir de uma unidade previamente definida” (CABRAL, 2017, p. 39).

Por essa analogia, o conceito em reconstrução é comparado a uma superfície (S), e as UARC's funcionam como unidades que revestem essa superfície gradualmente, representando cada etapa do processo de aprendizagem. Cabral (2017, p. 40) explica que “à medida que as UARC's são evocadas à superfície S o conceito [...] é reconstruído/revestido. O que o aluno, em tese, aprende em cada uma dessas UARC's contribui potencializando sua capacidade de reconstrução conceitual”.

Cada UARC, portanto, é formada pelo conjunto de argumentações e atividades que envolvem as Intervenções Estruturantes pré-formais e formais, sendo consolidada quando o aluno atinge um novo nível de compreensão conceitual. O próprio autor resume essa ideia ao afirmar que “cada UARC é, portanto, definida pelo conjunto de argumentações empírico-intuitivas construído por todas as Intervenções Estruturantes pré-formais que antecedem e inclui alguma Intervenção Formalizante” (CABRAL, 2017, p. 59).

Dessa forma, o modelo da UARC não se limita a uma sequência linear, mas propõe um movimento cíclico e articulado de reconstrução conceitual, no qual cada unidade se conecta à anterior e prepara o terreno para a seguinte. Em sua analogia, Cabral descreve que cada UARC “deverá tomar uma peça unitária imediatamente ligada à primeira, a qual denominei de UARC-2 (unidade articulável de reconstrução conceitual de segunda geração)” (CABRAL, 2017, p. 39).

3.1.2 As Intervenções Estruturantes

Intervenção Inicial (I_i)

A Intervenção Inicial (I_i) é o ponto de partida da reconstrução conceitual, sendo o “primeiro elemento de um jogo discursivo dirigido pelo professor com a intenção definida de estimular os aprendizes à percepção de alguma verdade do pensamento matemático” (CABRAL, 2017, p. 40-41). Essa intervenção tem o papel de despertar no aluno uma percepção empírico-intuitiva das regularidades funcionais de um conceito.

O autor propõe duas modalidades para sua aplicação:

- Exploração Potencial (I_i-EP): consiste em desencadear, por meio de questionamentos, simulações, conjecturas e analogias, um processo investigativo que mobilize o pensamento do aluno.
- Conexão Pontual (I_i-CP): baseia-se em comandos sequenciais, nos quais cada procedimento está logicamente ligado ao anterior, formando uma cadeia de ações interligadas.

A diferença essencial entre ambas está no grau de exploração cognitiva, sendo a primeira mais aberta e investigativa, e a segunda, mais diretiva e procedimental.

Além dela tem ainda:

Quadro 1 - Intervenções Estruturantes Escritas Pré e Pós Formais

DEMAIS INTERVENÇÕES ESTRUTURANTES	SIGNIFICADO
Intervenção Reflexiva (I_r)	A Intervenção Reflexiva (I _r) busca levar o aluno a pensar sobre o que está fazendo, questionando resultados, justificando procedimentos e reconhecendo relações matemáticas. Segundo Cabral (2017, p. 41), “o aluno é orientado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências”. Nesse momento, o papel do professor é o de mediador dialógico, conduzindo o raciocínio do estudante para a compreensão das regularidades envolvidas.
Intervenção Exploratória (I_e)	A Intervenção Exploratória (I _e) aprofunda o trabalho iniciado na etapa reflexiva, solicitando dos alunos ações concretas como simulações, preenchimento de tabelas, elaboração de gráficos e descrições experimentais. Cabral (2017, p. 41) ressalta que “os alunos são convidados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações”. Nesse estágio, as intervenções I _r e I _e se complementam, estimulando o aluno à percepção de padrões e generalizações que sustentam o raciocínio matemático. Essa dinâmica “muda substancialmente o que, em geral, é realizado a partir do modelo focado exclusivamente na exposição didática” (CABRAL, 2017, p. 41).
Intervenção Formalizante (I_f)	A Intervenção Formalizante (I _f) representa o momento em que o professor reelabora as verdades redescobertas pelos alunos com as vestes da formalidade matemática. Cabral (2017, p. 42) explica que, nesse ponto, as compreensões são consolidadas “com uma linguagem mais abstrata”, atendendo “às exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática”.

Fonte: adaptado de Cabral, 2017, p.41-42

O autor destaca que o modelo estruturante não abandona as exigências formais do saber, mas busca “valorizar um cenário didático amplificado que

pressupõe um olhar mais compassivo em respeito às limitações dos aprendizes” (CABRAL, 2017, p. 42).

Intervenções Avaliativas Restritivas (IA_r)

As Intervenções Avaliativas Restritivas (IA_r) têm como objetivo aferir a aprendizagem conceitual do aluno em dois aspectos centrais:

- O que é o objeto matemático em estudo - seu significado e sentido;
- Como se justificam e operam os algoritmos decorrentes - suas propriedades e operações.

Essas intervenções valorizam a capacidade do estudante de argumentar sobre o conceito, mais do que apenas reproduzir algoritmos. Assim, elas funcionam como instrumentos de diagnóstico conceitual, indicando o nível de internalização do conhecimento.

Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a)

As Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a) representam o nível mais elevado do processo, pois envolvem a resolução de problemas de aplicação. De acordo com Cabral (2017, p. 43), sua finalidade é fazer com que “o aluno seja capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino”.

Nessa etapa, o aluno demonstra não apenas o domínio conceitual, mas também a transferência e a autonomia cognitiva na aplicação do conhecimento matemático.

Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO)

Por fim, a Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO) é uma categoria que se manifesta de forma implícita e transversal durante todo o processo de ensino. Cabral (2017, p. 45-46) define-a como “uma espécie de Sequência Didática implícita complementar, sustentada no discurso do professor, que permite a ele fazer as reformulações emergentes inevitáveis no processo de reconstrução conceitual”.

Essa intervenção mantém o foco dos alunos nos objetivos da aprendizagem, funcionando como uma regulação discursiva que assegura a continuidade e a coerência entre as etapas das intervenções escritas.

Dessa maneira, o modelo proposto por Cabral (2017) apresenta uma estrutura didático-metodológica que integra momentos de exploração, reflexão, formalização e aplicação do conhecimento matemático, mediado por ações intencionais do professor. A articulação entre as diferentes intervenções favorece um processo de aprendizagem contínuo e dialógico, no qual o estudante é conduzido à reconstrução conceitual de maneira progressiva e significativa.

A partir desses fundamentos teóricos e metodológicos, o próximo capítulo apresenta a metodologia e a apresentação da sequência didática elaborada neste trabalho, construída com base no modelo de Cabral (2017). Nessa etapa, são descritas as atividades propostas, sua organização e as relações estabelecidas com os princípios teóricos discutidos anteriormente.

Desse modo, o modelo proposto por Cabral (2017) apresenta uma estrutura didático-metodológica que integra momentos de *exploração, reflexão, formalização e aplicação do conhecimento matemático*, mediado por ações intencionais do professor. Sendo assim, para esta pesquisa, foi adotado tal modelo pois dois motivos:

- A garantia de que a atividade a ser elaborada seja realmente uma SD.
- E porque entende-se que a articulação entre as diferentes intervenções poderá vir a favorecer um processo de aprendizagem contínuo e dialógico, no qual o estudante deverá ser conduzido à reconstrução conceitual do TFC de maneira progressiva e significativa.

Portanto, os fundamentos teóricos apresentados nesta subseção, foi adotado como suporte metodológico da presente pesquisa, já que foi utilizado na elaboração da SD., cujos procedimentos e descrição serão expostos no capítulo a seguir.

4. METODOLOGIA

4.1 Caracterização da Pesquisa

Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa, de caráter exploratório, uma vez que não se propõe a testar hipóteses ou mensurar variáveis, mas sim compreender e interpretar concepções teóricas que possam subsidiar a elaboração de uma sequência didática voltada ao ensino e à visualização dos elementos conceituais envolvidos na demonstração da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

A abordagem qualitativa mostra-se a mais adequada por centrar-se na interpretação dos significados, nas relações entre teoria e prática docente, e não na quantificação de dados. Nesse sentido, Bogdan e Biklen (1994) afirmam que:

“O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas. Por outras palavras, os investigadores qualitativos preocupam-se com aquilo que se designa por perspectivas participantes.”
(BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51)

Essa compreensão reforça que, no presente estudo, o foco não está em medir resultados ou testar intervenções em sala de aula. Em vez disso, o objetivo é entender e organizar as ideias necessárias para construir uma SD, analisando como determinados conceitos podem ser apresentados, visualizados e estruturados. Assim, privilegia-se o processo de entendimento e reflexão sobre o tema, o que se alinha ao caráter exploratório da pesquisa.

Segundo Gil (2008, p. 27), a pesquisa exploratória “visa proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses”. Essa característica justifica-se neste trabalho, uma vez que a elaboração de uma sequência didática demanda compreender melhor o objeto matemático envolvido, identificar dificuldades recorrentes no ensino do TFC e analisar possibilidades metodológicas que favoreçam sua visualização. Assim, o caráter exploratório permite construir uma proposta fundamentada teoricamente, ainda que sem aplicação prática, orientando escolhas que serão mobilizadas na estruturação da sequência.

Além disso, esta investigação apresenta também um caráter científico e pedagógico, pois, como indicam Onuchic et al. (2014), pesquisas dessa natureza

buscam, em essência, compreender e aprimorar processos de ensino e aprendizagem, articulando elementos teóricos, escolhas metodológicas e observações oriundas da prática docente. No contexto deste trabalho, o caráter científico se manifesta na organização sistemática das leituras, na análise conceitual dos elementos envolvidos na demonstração do TFC e na fundamentação que orienta cada etapa da sequência didática. Trata-se de um movimento investigativo que procura compreender o objeto matemático, selecionar referenciais adequados, justificar decisões metodológicas e estabelecer relações coerentes entre teoria e proposta pedagógica. Assim, embora não envolva aplicação direta da sequência didática, o estudo mantém sua relevância pedagógica ao propor reflexões e instrumentos que podem orientar práticas futuras no ensino de Cálculo.

4.2 Procedimentos Metodológicos

Para elaborar a sequência didática, foi necessário seguir algumas etapas que orientaram o percurso metodológico adotado. O primeiro, consistiu em fazer uma revisão de literatura de trabalhos acadêmicos que tratavam do TFC, especialmente aqueles que utilizavam o *GeoGebra* como ferramenta de visualização. Entre os textos encontrados, destacam-se os estudos de Tall (2002), Paulin e Ribeiro (2019), Grande (2016), Picone (2007) e Cavalcante (2022), que contribuíram para compreender como diferentes autores exploram recursos visuais, dificuldades conceituais e possibilidades metodológicas relacionadas ao ensino do TFC. Esse levantamento inicial permitiu identificar tendências, lacunas e abordagens já consolidadas na literatura, fornecendo um panorama das potencialidades do software e das dificuldades recorrentes dos alunos.

Após essa etapa de reconhecimento do que já havia sido pesquisado sobre o TFC, foi realizada uma leitura mais aprofundada dos trabalhos selecionados, buscando entender de que forma articulavam o conceito de integral à sua representação visual e como tratavam aspectos da demonstração do TFC. Além disso, consultou-se artigos que discutiam sobre a importância da visualização no ensino de Matemática e o papel das tecnologias digitais como apoio à aprendizagem, o que reforçou a pertinência de optar por uma abordagem que integrasse diferentes registros de representação na construção da sequência didática.

Em paralelo a essas leituras, houve também o estudo específico sobre sequências didáticas, o que levou ao modelo teórico-metodológico de Cabral (2017). A proposta do autor, baseada nas Intervenções Estruturantes e na lógica da UARC, mostrou-se adequada para orientar a organização da sequência, uma vez que oferece um caminho estruturado para conduzir à reconstrução conceitual do objeto matemático. A leitura do texto de Cabral foi fundamental para compreender a função de cada intervenção e para pensar em como integrá-las de forma coerente às construções e questionamentos que compõem a SD.

Nesse percurso, houve a necessidade de aprimoramento das habilidades no uso do *GeoGebra*, buscando um domínio que fosse suficiente para realizar as construções dinâmicas julgadas necessárias. Para isso, o autor deste TCC participou de um curso de *GeoGebra* promovido pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR – Apucarana), realizado entre 18 de setembro e 16 de novembro de 2025, com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Mato Grosso (FAPEMAT). Essa formação foi essencial para desenvolver competências técnicas relativas à criação de *applets*, manipulação de comandos, ajustes gráficos e organização de janelas de visualização, possibilitando transformar ideias teóricas em construções visuais adequadas aos objetivos da sequência. Vale ressaltar também a preciosa ajuda do licenciando em matemática, Vilemar Fraga dos Reis Filho, que também já tinha feito o curso supracitado e adquiriu várias habilidades, que foram úteis em vários momentos da construção da SD.

A partir dessas referências e da análise da demonstração da primeira parte do TFC apresentada no livro *Cálculo A*, foram identificados elementos, com potencial de conversão geométrica e passei na elaboração dos *applets*. No software, os *applets* podem ser criados com ferramentas visuais, sem necessidade de programação, permitindo manipulação direta dos objetos e interação com o usuário, aspecto essencial para explorar múltiplas representações e favorecer a compreensão conceitual dos conteúdos matemáticos.

Cada *applet* foi pensado de modo a representar, de forma visual e dinâmica, etapas fundamentais da demonstração, articulando momentos de exploração, reflexão e formalização, conforme orientam as intervenções estruturantes do modelo de Cabral. Esses procedimentos constituíram o caminho percorrido até a elaboração

da SD, cujas questões serão apresentadas no próximo capítulo, juntamente com o resultado da análise.

A partir dos estudos realizados em Cabral (2017) sobre a elaboração de SD, orientadas por intervenções estruturantes, foi construída a presente proposta, organizada de modo a favorecer uma compreensão gradual das ideias envolvidas na demonstração da primeira parte do TFC. A seguir, apresentam-se os principais elementos que compõem essa sequência.

Quadro 2 - Caracterização da sequência didática construída

OBJETIVO PRINCIPAL:	Facilitar a compreensão da demonstração da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS:	<ul style="list-style-type: none"> • Incentivar o uso ativo do <i>GeoGebra</i> • Explorar diferentes representações do objeto matemático estudado
TEMPO ESTIMADO:	Quatro horas aula de cinquenta minutos cada.
PÚBLICO-ALVO:	Estudantes de ensino superior cursando uma disciplina de Cálculo que trate do TFC.
ORGANIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA:	Estruturada em três partes, cada uma com um foco pedagógico específico.
MATERIAIS NECESSÁRIOS:	Computadores, notebooks ou celulares com acesso à internet.

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Para organizar a análise da SD, optou-se por sintetizar (Quadro 3), as categorias de Intervenções Estruturantes propostas por Cabral (2017), que constituem a base teórica do modelo de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC) e permitem compreender como cada etapa da sequência pode contribuir para a formação gradual das ideias matemáticas envolvidas.

Quadro 3 - Categorias de Intervenções Estruturantes segundo Cabral (2017)

INTERVENÇÃO ESTRUTURANTE	SIGLA	FINALIDADE GERAL
Intervenção Inicial	I_i	Criar um ponto de partida para a reconstrução conceitual, favorecendo o engajamento inicial do aluno com a ideia matemática mobilizada.
Intervenção Reflexiva	I_r	Incentivar o aluno a questionar, levantar hipóteses, comparar informações e reorganizar sua compreensão ao longo da experiência.

Intervenção Exploratória	I_e	Propor ações práticas como experimentações, preenchimento de tabelas, construção de gráficos e observações que permitam reconhecer regularidades.
Intervenção Formalizante	I_f	Conduzir o aluno a enunciar ideias utilizando uma linguagem mais abstrata, aproximando-o da estrutura formal do objeto matemático.
Intervenção Avaliativa Restrita	IA_r	Verificar se o estudante alcançou o domínio mínimo previsto para o conceito em reconstrução, sem ampliar ainda para aplicações mais gerais.
Intervenção Avaliativa Aplicativa	IA_a	Mobilizar o conceito em situações que exigem raciocínio, resolução de problemas ou aplicação a contextos diversos, consolidando a aprendizagem.

Fonte: Adaptado Cabral (2017)

Essa sistematização funcionará como referência ao longo da análise, facilitando o uso das siglas e a identificação do papel desempenhado por cada momento da sequência. Deste modo, na análise da SD destacar-se-á:

- ✓ a intencionalidade pedagógica
- ✓ as possíveis respostas esperadas
- ✓ relação estabelecida com as Intervenções Estruturantes propostas por Cabral (2017).

No capítulo seguinte serão apresentadas as questões e a descrição detalhada da análise.

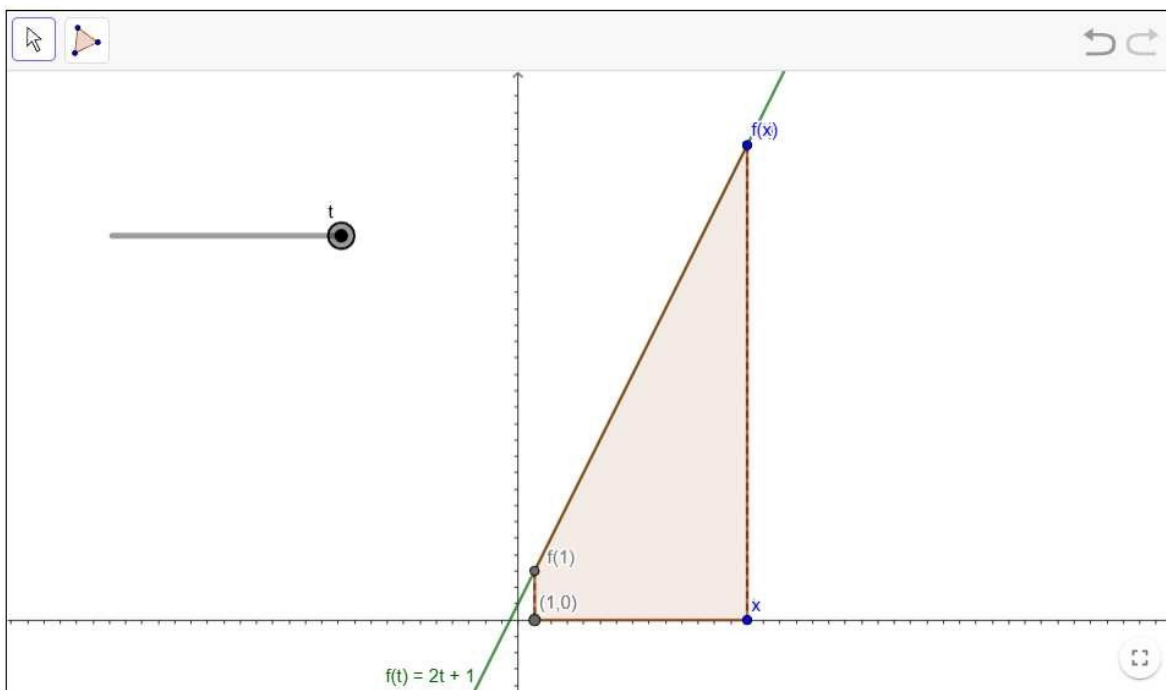
5. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA

Neste capítulo apresento a análise das atividades que compõem a SD elaborada, destacando os objetivos de cada questão, as respostas esperadas, a intencionalidade pedagógica e a relação estabelecida com o referencial teórico adotado, especialmente as Intervenções Estruturantes propostas por Cabral (2017). Para cada item da sequência, procuro evidenciar como cada escolha contribui para a compreensão gradual da demonstração da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

Parte 1 da SD:

A Parte 1 da SD foi organizada com a intenção de facilitar a compreensão prévia do objeto matemático que aparece logo no início da demonstração da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo: a função área. Para possibilitar uma melhor compreensão da prova apresentada no livro, buscou-se construir um percurso visual e intuitivo que lhe permitisse formar uma representação geométrica clara do que é essa função.

Figura 2 – *Applet* 2 da Parte 1



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A primeira questão da sequência didática foi planejada com a intencionalidade pedagógica de aproximar o estudante do objeto de estudo por meio de uma

atividade simples, acessível e amparada apenas por conhecimentos prévios de geometria plana. A construção apresentada envolve a região sob o gráfico de uma função linear, delimitada por pontos facilmente identificáveis. Ao mover o controle deslizante t , o aluno observa mudanças na configuração da área e percebe, de maneira intuitiva, que essa área varia conforme o intervalo escolhido. Essa percepção empírica inicial é importante, pois começa a introduzir a ideia de dependência entre grandezas, necessária para a construção progressiva da função área ao longo da sequência

Figura 3 – Questão 1 da Parte 1, itens (a) e (b)

[I_i - CP] a) Nesta construção você pode movimentar o controle deslizante "t".

Deslize-o para o valor para $t=3$, observe a região sombreada no gráfico. Utilizando seus conhecimentos de geometria determine a área dessa região.

Digite sua resposta aqui...

[I_i - CP] b) Alterando o valor do controle deslizante para $t = 4$, determine novamente a área da região.

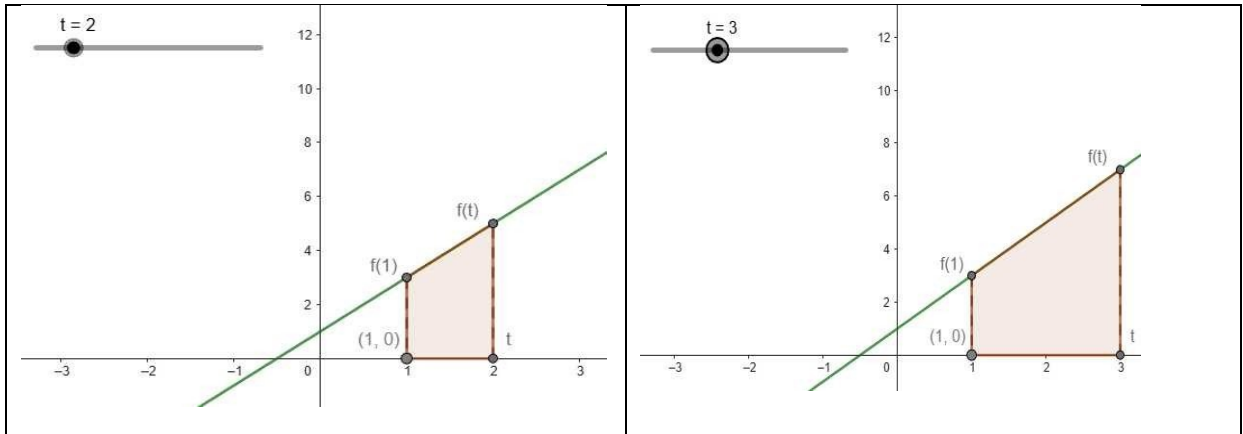
Digite sua resposta aqui...

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Quanto às respostas esperadas, o objetivo é que o estudante reconheça a região indicada como um trapézio e, a partir disso, identifique suas bases e altura para calcular corretamente as áreas solicitadas nas letras a e b para $t = 3$ e $t = 4$. Espera-se que ele utilize apenas conhecimentos geométricos, sem recorrer ainda as ideias de integral.

Tabela 1 - Respostas Esperadas nos itens (a) e (b)

B: VALOR DA BASE MAIOR b: VALOR DA BASE MENOR h: VALOR DA ALTURA A: VALOR DA ÁREA		$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$	
Item (a)		Item (b)	
BASE MAIOR = 7. BASE MENOR = 3 ALTURA = 2	$\frac{(7 + 3) \times 2}{2} = 10$	BASE MAIOR = 9 BASE MENOR = 3. ALTURA = 3	$\frac{(9 + 3) \times 3}{2} = 18$



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)


Em relação às Intervenções Estruturantes propostas por Cabral (2017), esta primeira questão foi elaborada como uma Intervenção Inicial do tipo Conexão Pontual ($I_i - CP$). Esse tipo de intervenção tem a função de mobilizar conhecimentos prévios por meio de ações curtas e direcionadas, permitindo ao aluno reconhecer elementos fundamentais do problema sem exigir, nesse momento, uma articulação explícita com o conceito final. Assim, a Questão 1 cumpre o papel de iniciar o percurso formativo, preparando o terreno para as demais construções da sequência.

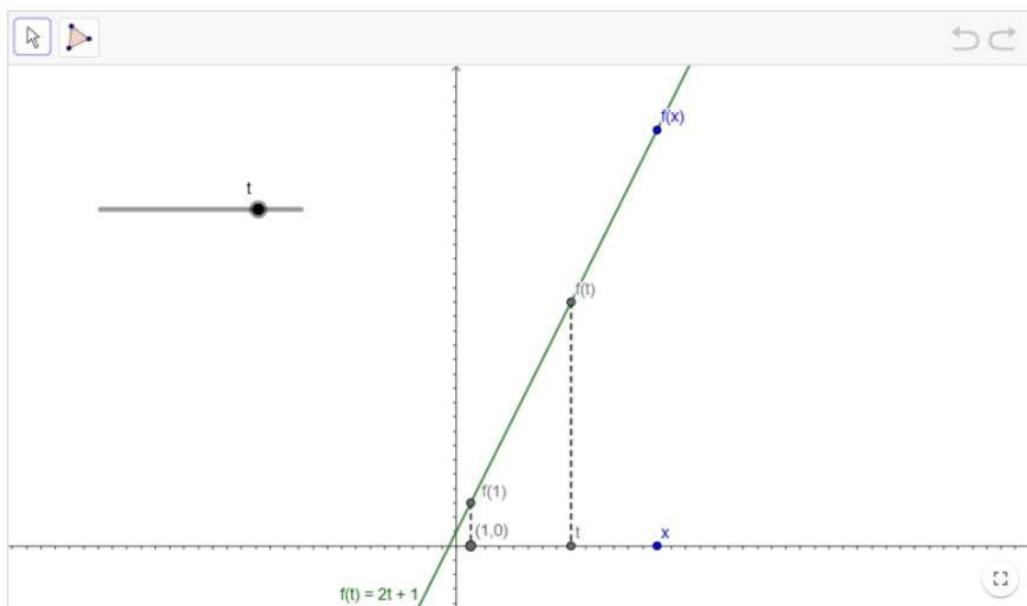
Figura 4 – Applet 2 da parte 1.

2. Siga novamente os passos abaixo para construir no plano cartesiano a região de um trapézio:

Passo 1: No canto superior esquerdo aperte na caixa  e selecione a opção "Polígono".

Passo 2: Aperte nos pontos $(1,0)$, $f(1)$, $F(t)$, t e $(1,0)$. (Nessa ordem)

Passo 3: Aperte na ferramenta  no canto superior esquerdo para poder voltar ao cursor.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A questão 2 amplia o trabalho realizado anteriormente ao propor que o estudante deixe de operar apenas com valores numéricos específicos e avance para a formulação de uma expressão geral para a área acumulada no intervalo $[1, x]$. No item (a), pretende-se que o aluno observe a região construída e generalize o cálculo previamente realizado, produzindo uma expressão algébrica para a área. A intenção é conduzi-lo à percepção de que a área depende do valor atribuído a t , aproximando-o da noção de função área.

Figura 5 - Itens (a), (b) e (c) da Questão 2

[I.] a) Encontre uma **expressão algébrica** para a área da região acumulada no intervalo $[1, x]$.

Digite sua resposta aqui...

[I.] b) Utilize a expressão encontrada no item (a) e calcule o valor da área para $x = 3$ e $x = 4$.

Digite sua resposta aqui...

[I.] c) Compare os resultados obtidos no item 2(b) com as respostas de 1(a) e 1(b). As respostas foram iguais ?

Caso **SIM**, avance para a próxima questão.

Se por acaso **NÃO**, revise a expressão algébrica encontrada para verificar e ajustar um possível erro.

OBSERVAÇÃO: Registre na caixa de resposta qual foi o seu erro.

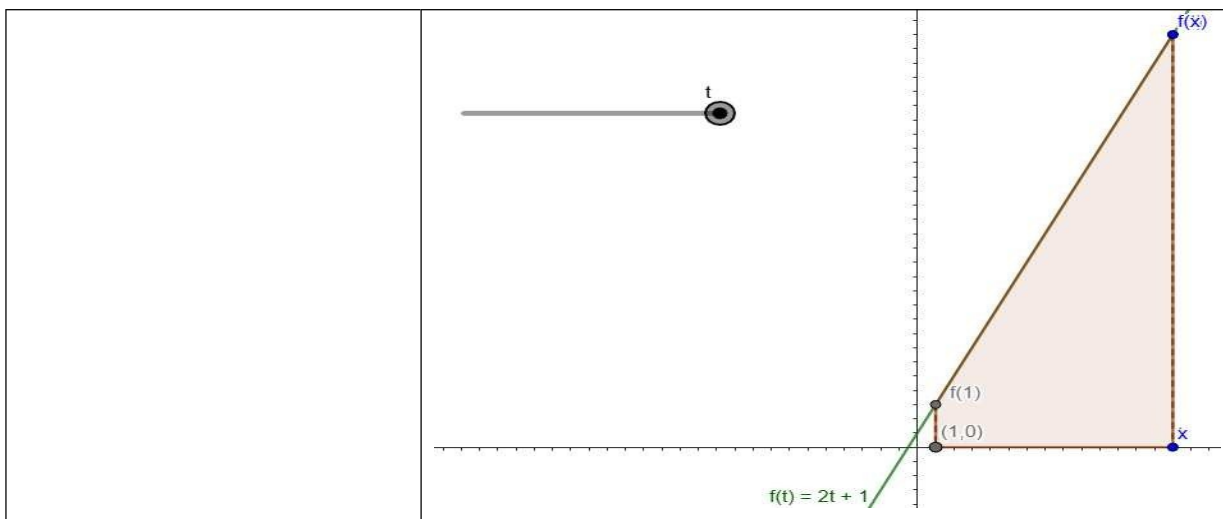
Digite sua resposta aqui...

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Quanto às respostas esperadas, no item (a) espera-se que o estudante determine uma expressão geral para a área delimitada no intervalo $[1, x]$. De modo que ele responda a expressão correta utilizando a fórmula da área de um trapézio como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 - Respostas Esperadas no item (a) da Questão 2

B: BASE MAIOR = $2x + 1$ b: BASE MENOR = 3 h: ALTURA = $x - 1$ A = $\frac{(B + b) \cdot h}{2}$	$A(x) = \frac{(2x + 1 + 3) \cdot (x - 1)}{2}$ $A(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{2}$ $A(x) = x^2 + x - 2$
---	---



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

No item (b), espera-se que o estudante substitua os valores específicos $x = 3$ e $x = 4$ de modo que encontre $A(3) = 10$ e $A(4) = 18$. No item (c), pretende-se que o estudante compare os valores encontrados usando a expressão com aqueles obtidos utilizando conceitos de geometria e perceba que são iguais, entretanto caso o estudante encontre um valor diferente, é necessário que revise o que fez, tente ajustar e registre na caixa de resposta.

Tabela 3 - Respostas Esperadas item (b) da Questão 2

$x = 3$	$x = 4$
$A(3) = 3^2 + 3 - 2 = 10$	$A(4) = 4^2 + 4 - 2 = 18$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

O item (a) foi classificado como uma Intervenção Exploratória (I_e), pois o estudante precisa manipular a construção, observar regularidades e transformar dados geométricos em uma generalização algébrica. No item (b), ainda sob a mesma modalidade (I_e), o estudante é orientado a substituir valores específicos na expressão obtida, verificando se os resultados coincidem com as áreas calculadas na questão anterior.

O item (c) passa a exigir um posicionamento reflexivo, razão pela qual foi classificado como Intervenção Reflexiva (I_r). Essa etapa incorpora o questionamento como elemento central, favorecendo a tomada de consciência sobre o processo realizado e contribuindo para a consolidação do conceito em construção.

A articulação entre a I_r e a I_e presente nesses três itens encontra apoio no que Cabral (2017) discute sobre o encadeamento das Intervenções Estruturantes.

Concebo a utilização colaborativa dessas duas formas de intervenções de ensino — I_r e I_e — no sentido de estimular o aluno à percepção de certas regularidades envolvidas no processo de reconstrução conceitual. O processo de ensinar e aprender precisa necessariamente passar por essa dinâmica, qual seja, de se elaborar o cenário didático com a finalidade de levar os alunos a perceberem, ainda que intuitivamente, os padrões, as regularidades que possibilitam a configuração de modelos generalizantes. (CABRAL, 2017)

Dessa maneira, os itens (a), (b) e (c) compõem uma trajetória que conduz o estudante da observação e formulação de uma expressão geral à verificação e análise crítica de sua validade. Esse encadeamento favorece a compreensão da área como uma função, preparando-o para as etapas subsequentes da sequência, especialmente para as discussões propostas nos itens (d) e (e).

Figura 6 - Questão 2 itens (d) e (e)

[[I]] d) Quanto maior seja o valor de x que substituirmos na expressão algébrica encontrada, o que acontecerá com o valor da área ?

Aa π Digite sua resposta aqui...

[[I]] e) Podemos dizer que a expressão algébrica encontrada é uma função ? Justifique.

Aa π Digite sua resposta aqui...

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Os itens (d) e (e) dão continuidade ao processo iniciado nas etapas anteriores ao direcionar o estudante para interpretar a expressão construída a partir de suas consequências e significado. No item (d), a finalidade didática deste momento é possibilitar que o aluno observe como o valor da área se modifica quando valores maiores de x são inseridos na expressão. A expectativa é que ele perceba que, ao aumentar o valor de x , a área também aumenta, identificando um comportamento crescente que se justifica pela própria geometria da construção. Esse movimento caracteriza uma Intervenção Reflexiva (I_r), pois exige que o estudante interprete os

resultados produzidos e compreenda o modo como eles se relacionam com a situação representada.

No item (e), o propósito pedagógico da etapa é levar o aluno a reconhecer que a expressão obtida pode ser entendida como uma função, cuja associa a cada valor de x a exatamente um valor da área. Intenciona-se que ele justifique essa conclusão com base no que observou e calculou nos itens anteriores, identificando que a expressão descreve uma dependência consistente entre as grandezas envolvidas. Essa etapa também foi classificada como Intervenção Reflexiva (I_r), pois requer que o estudante analise o objeto construído, justificando sua natureza por meio das observações e experimentações realizadas.

É a partir dessa percepção inicial que se inicia a transição para a próxima etapa, na qual essa expressão passa a ser tratada de maneira formal, ou seja, de uma função área na qual a lei de formação envolve a integral definida, consolidando o conceito que fundamenta a primeira parte da demonstração do TFC.

Figura 7 - Questão 3 da Parte 1

[I_r] FORMALIZANDO O PENSAMENTO

Observe que:

Para cada valor do intervalo de $[a,x]$, obtivemos uma região delimitada pelo gráfico da função $f(t)$, pelo eixo t e pelas retas verticais $t = a$ e $t = x$.

A cada valor de x , foi possível associar exatamente uma área correspondente.

Essa correspondência pode ser entendida como uma função que associa o número " x " a um valor de área. Assim, podemos definir formalmente a função área como sendo:

Seja $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Escolhido um ponto inicial $a \in \mathbb{R}$, define-se a **função área** $A(x)$ por:

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \geq a$$

Fonte: Adaptado Flemming e Gonçalves, 2007.

Essa etapa representa o momento em que esta parte da SD passa da fase exploratória e reflexiva para a formalização do conceito. O estudante é convidado a reconhecer que a expressão construída em termos de integral, sendo agora apresentada como definição da função área. O objetivo é que ele compreenda essa

expressão como uma função que associa a cada valor de x exatamente um valor de área, consolidando o comportamento identificado nas etapas anteriores.

Essa fase caracteriza-se como uma Intervenção Formalizante (I_f), pois corresponde ao momento em que o professor reelabora, com linguagem própria da matemática, as regularidades descobertas pelo aluno durante o processo investigativo.

Aqui o professor reelabora as verdades 'redescobertas' pelos alunos com as vestes da formalidade Matemática. Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurará satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática.

(CABRAL, 2017, p. 42)

A formalização aqui apresentada encerra uma Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC), integrando as percepções iniciais, as explorações e as comparações reflexivas em uma definição matemática que sintetiza a função área. Trata-se de um ponto de chegada parcial, que dá unidade ao conceito e estabelece as bases para as etapas seguintes da sequência. Dessa forma, após apresentar o conceito matemático, sentiu-se a necessidade de propor atividades para verificar se houve a devida apreensão.

Neste sentido, a questão 3 tem o propósito de verificar se o estudante reconhece que a função área $A(x) = x^2 + x - 2$ encontrada na questão 2, também pode ser escrita por meio de uma lei de formação que utiliza a integral definida, onde a função a ser integrada é a $f(t) = 2t + 1$ nos intervalos onde $1 \leq t \leq 3$ (questão 3, item a) e $1 \leq t \leq x$ (questão 3, item b). É uma etapa de confirmação do que foi trabalhado antes, na qual o aluno deve reconhecer e escrever a função área de forma algébrica, mostrando que compreendeu a relação entre a construção visual e sua representação matemática.

Figura 8 - Questão 3

[IA_r] 3. a) A região delimitada pelo gráfico da função, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais $t=1$ e $t=3$ pode ser representada por uma integral definida.

Qual das alternativas abaixo expressa corretamente essa área, sem realizar o cálculo?

a) $\int_0^3 (2t + 1) dt$

b) $\int_3^1 (2t + 1) dt$

c) $\int_1^3 (t^2 + 1) dt$

d) $\int_1^3 (2t + 1) dt$

[IA_r] b) A região delimitada pelo gráfico da função, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais $t=1$ e $t=x$ também pode ser representada por uma integral definida.

Qual das alternativas abaixo expressa corretamente essa área, sem realizar o cálculo?

a) $\int_0^x (2t + 1) dt$

b) $\int_x^1 (2t + 1) dt$

c) $\int_1^x (t^2 + 1) dt$

d) $\int_1^x (2t + 1) dt$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

No item (a), espera-se que o estudante selecione a alternativa D, que corresponde à representação correta da área no intervalo de 1 a 3. Assim como no item (b), espera-se que reconheça a forma geral da função área ao escolher a alternativa D, que representa a expressão para o intervalo de 1 a x. Em ambos os itens, o aluno não precisa realizar novos cálculos, mas apenas identificar a representação compatível com o que já foi desenvolvido nas questões anteriores.

Por essa razão, os dois itens foram classificados como Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r), pois conforme Cabral (2017), “trata-se de uma espécie de “primeiros passos” para se checar os rudimentos do conceito em tese apreendido. A ênfase nesse momento é para as implicações conceituais do objeto reconstruído e para as propriedades operacionais com a manipulação de algoritmos envolvidos.” De modo

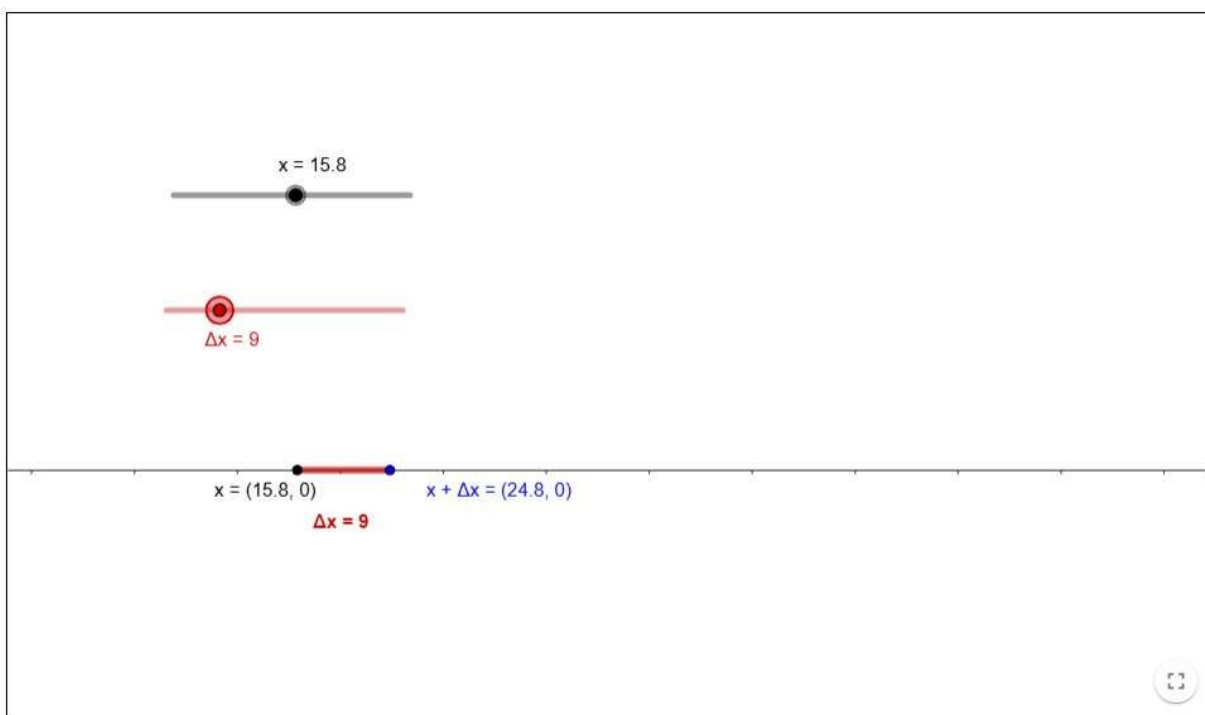
que permita avaliar se o estudante reconhece a função área expressa por sua representação integral antes de avançar para etapas posteriores da sequência.

Sendo assim, encerramos a primeira parte da sequência didática. A partir deste ponto, iniciamos a segunda etapa, na qual o aluno passa a explorar e compreender outros conceitos que também fazem parte da demonstração da primeira parte do TFC.

Parte 2 da SD:

A Parte 2 da sequência didática foi elaborada com a finalidade de introduzir o estudante ao significado da variação Δx e ao papel que essa variação desempenha na composição dos intervalos de integração utilizados na demonstração. Como a demonstração requer compreender expressões como $G(x+\Delta x)$, $G(x)$ e a subtração $G(x+\Delta x) - G(x)$, buscou-se construir um percurso gradual que permitisse ao aluno perceber o sentido geométrico e algébrico dessas expressões antes de encontrá-las formalmente no texto da prova.

Figura 9 – Applet 1 da Parte 2.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A primeira questão desta parte foi planejada como uma Intervenção Inicial do tipo Conexão Pontual (I_i - CP), pois busca introduzir o estudante à ideia de variação

representada por Δx . Ao mover os controles deslizantes, o estudante percebe que há um acréscimo Δx ao ponto inicial x que a partir daí temos o surgimento do ponto $x + \Delta x$ na reta.

Figura 10 - Itens (a), (b) e (c) da Questão 1

[I₁ - CP] a) Coloque o controle deslizante "x" em $x = 3$ e em seguida posicione o controle deslizante " Δx " em $\Delta x = 3$. Ao realizar esses procedimentos qual são as coordenadas do ponto $x + \Delta x$?

Digite sua resposta aqui...

[I₁ - CP] b) Agora mude o controle deslizante "x" para $x = 5$ e o " Δx " para $\Delta x = 4$. Quais são as coordenadas do ponto $x + \Delta x$?

Digite sua resposta aqui...

[I₁ - CP] c) Por fim, para qualquer que seja o número real x e o valor de Δx também um número real qualquer, ou seja, um x_1 . Como serão as coordenadas do ponto $x + \Delta x$?

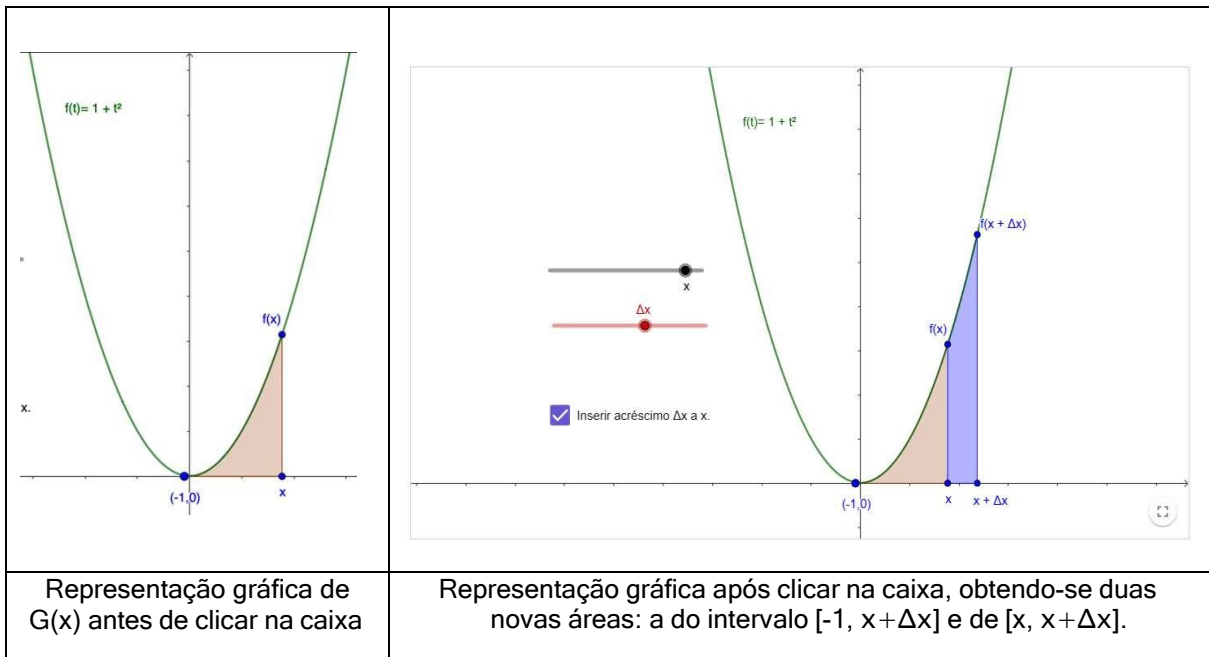
Digite sua resposta aqui...

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Essa dinâmica se alinha ao que Cabral (2017) aponta ao afirmar que a conexão de procedimentos pontuais “cria, em tese, condições para a percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações empírico-intuitivas”, favorecendo que o aluno identifique padrões simples antes de avançar para situações mais complexas. Nesse sentido, no item (a), ao ajustar $x = 3$ e $\Delta x = 3$, espera-se que o estudante identifique que o valor de $x + \Delta x = 6$. No item (b), ao escolher $x = 5$ e $\Delta x = 4$, espera-se que ele registre 9 como resposta. Por fim, no item (c), ele é levado a generalizar o comportamento observado nos casos anteriores, compreendendo que, para quaisquer valores reais x e Δx , ou seja, $\Delta x = x_1$ o resultado para $x + \Delta x$ é $x + x_1$.

Com a finalidade de permitir a análise visual das variações de área em um determinado intervalo, foi construído um *applet*, ilustrado na figura 11, que possibilita ao estudante realizar manipulações em tempo real.

Figura 11 – Construção da Questão 2 Parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Quando o aluno marca a opção “Inserir o acréscimo Δx a x ”, espera-se que ele perceba que a área aumentou, indo do intervalo de -1 até $x + \Delta x$ e ainda, o surgimento de uma nova área, destacada em azul, correspondente exatamente ao intervalo adicional entre x e $x + \Delta x$.

Figura 12 – Itens (a) e (b) da Questão 2

[Ie] a) Ao clicar na caixa “Inserir o acréscimo Δx a x ”, o que você observa acontecer no gráfico?

Aa π Digite sua resposta aqui...

[Ie] b) Ao variar o valor de Δx , o que acontece com a nova área (em azul)?

Aa π Digite sua resposta aqui...

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Ao mover o controle deslizante de Δx , a intenção é que o estudante perceba que a área em azul aumenta ou diminui. Isso acontece porque essa região depende diretamente do tamanho do intervalo entre x e $x + \Delta x$. Quanto maior o Δx , maior é a área representada; quando Δx diminui, a área fica mais estreita. Esse movimento contínuo ajuda o estudante a enxergar que a área construída não é fixa: ela varia

junto com o valor escolhido para Δx , mostrando de forma visual e progressiva como a mudança no intervalo altera a região destacada no gráfico

No item (a), espera-se que, ao marcar a opção “Inserir o acréscimo Δx a x ”, o estudante perceba que surge no gráfico uma nova região destacada em azul, correspondente ao intervalo adicional entre x e $x + \Delta x$. Já no item (b), espera-se que o aluno observe que, ao variar o valor de Δx no controle deslizante, a área em azul aumenta ou diminui. Isso mostra que essa região depende diretamente do tamanho do incremento: quanto maior o Δx , maior a área; quanto menor o Δx , menor a área. Assim, a questão como um todo permite que o estudante visualize a relação entre o valor de Δx e a área formada no gráfico.

Assim, tanto o item (a) quanto o item (b) foram classificados como Intervenções Exploratórias (I_e), pois envolvem observação, manipulação e comparação de resultados diretamente na construção dinâmica, alinhando-se ao que Cabral (2017) descreve como ações que possibilitam ao estudante testar, investigar e atribuir significado ao comportamento do objeto matemático a partir da própria experiência de interação.

Assim, tanto o item (a) quanto o item (b) foram classificados como Intervenções Exploratórias (I_e), pois envolvem observação, manipulação e comparação de resultados diretamente na construção dinâmica, alinhando-se ao que Cabral (2017) descreve como ações que possibilitam ao estudante testar, investigar e atribuir significado ao comportamento do objeto matemático a partir da própria experiência de interação.

Com relação ao item (c) (Figura 13), pretende-se que o estudante identifique corretamente a expressão que representa $G(x+\Delta x)$ a partir da definição inicial de $G(x)$. Espera-se que ele perceba que substituir o limite superior da integral por $x+\Delta x$ não altera a função a ser integrada, mas apenas estende o intervalo de integração, o que o leva à expressão que vai de -1 até $x+\Delta x$. Além disso, deseja-se que o estudante utilize a construção da questão 2 (Figura 11) para apoiar essa compreensão, observando geometricamente a nova região formada e, a partir dela, realizar a conversão para a notação algébrica correspondente.

Figura 13 – Item (c) da Questão 2

[[J] c) Considerando $G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, qual seria a expressão que representa $G(x+\Delta x)$?

Assinale a sua resposta aqui

- A $\int_x^{-1} f(t) dt$
- B $\int_{-1}^x f(t) dt$
- C $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$
- D $\int_{-1}^{x+\Delta x} f(t) dt$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Como destaca Duval (1999), compreender Matemática exige transitar entre registros distintos, e aqui o aluno é instigado a converter a representação geométrica da área adicionada para sua forma simbólica. Por exigir essa articulação conceitual e a interpretação do significado da variação no limite superior, este item caracteriza-se como uma Intervenção Reflexiva (I_r).

No item (d) (Figura 14), o estudante deve utilizar a propriedade de integrais, conforme mostra no enunciado da questão, para reescrever $G(x+\Delta x)$ (resposta letra c) como a soma de duas integrais. A intenção pedagógica é reforçar o entendimento de que a integral de -1 até $x+\Delta x$ pode ser decomposta em duas parcelas: a integral de $f(t)$ que varia de -1 até x , somada à integral de $f(t)$ que varia de x até $x+\Delta x$. Pois, na demonstração é utilizado esse mecanismo para fazer uma operação entre as integrais $G(x)$ e $G(x+\Delta x)$.

Figura 14 - Item(d) da Questão 2

[I,] d) Sabendo qual é a expressão de $G(x+\Delta x)$, utilizando a propriedade da soma das integrais: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ como você poderia reescrever $G(x+\Delta x)$ de forma algébrica?

Assinale a sua resposta aqui

- A $\int_{-1}^x f(t) dt - \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$
- B $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$
- C $\int_{-1}^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$
- D $\int_{-1}^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_{-1}^x f(t) dt$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Trata-se também de uma Intervenção Reflexiva (I_r), pois exige que o aluno estabeleça conexões entre propriedades formais da integral e os significados visuais construídos anteriormente, preparando-o para reconhecer essa mesma representação na prova apresentada no livro.

No item (e) (Figura 15), o objetivo é verificar se o estudante é capaz de expressar algebricamente o resultado da diferença $G(x+\Delta x) - G(x)$ (resposta letra d), retomando tudo o que foi explorado nos itens anteriores. Depois de compreender, como as áreas se comportam ao acrescentar Δx ao limite superior da integral, espera-se que o aluno reconheça que essa subtração elimina exatamente a parte comum das duas integrais, restando apenas a área correspondente ao intervalo adicional $[x, x + \Delta x]$.

A intenção é levar o aluno a explicitar essa ideia em linguagem matemática, articulando raciocínio geométrico e simbólico. Por isso, esse item foi caracterizado como uma Intervenção Reflexiva (I_r): o estudante precisa analisar a relação entre as duas expressões, identificar o intervalo que permanece após a subtração e converter essa percepção em uma expressão integral adequada.

Figura 15 - Item (e) da Questão 2

[17] e) Com base nos exercícios anteriores e na construção anterior, determine o resultado de $G(x + \Delta x) - G(x)$.

Assinale a sua resposta aqui

- A $\int_{-1}^{x+\Delta x} f(t) dt$
- B $\int_{-1}^x f(t) dt$
- C $\int_{x+\Delta x}^x f(t) dt$
- D $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Na questão 3, pretende-se que o estudante já saiba reconhecer a partir das atividades anteriores, a expressão algébrica que representa a diferença $G(x+\Delta x) - G(x)$. No entanto, compreender essa diferença apenas de forma simbólica pode não ser suficiente.

Figura 16 – Applet 3 da Parte 2

3. [16] Agora que você já sabe o resultado da expressão $G(x + \Delta x) - G(x)$, vamos observar como esse resultado é representado geometricamente utilizando a construção abaixo.

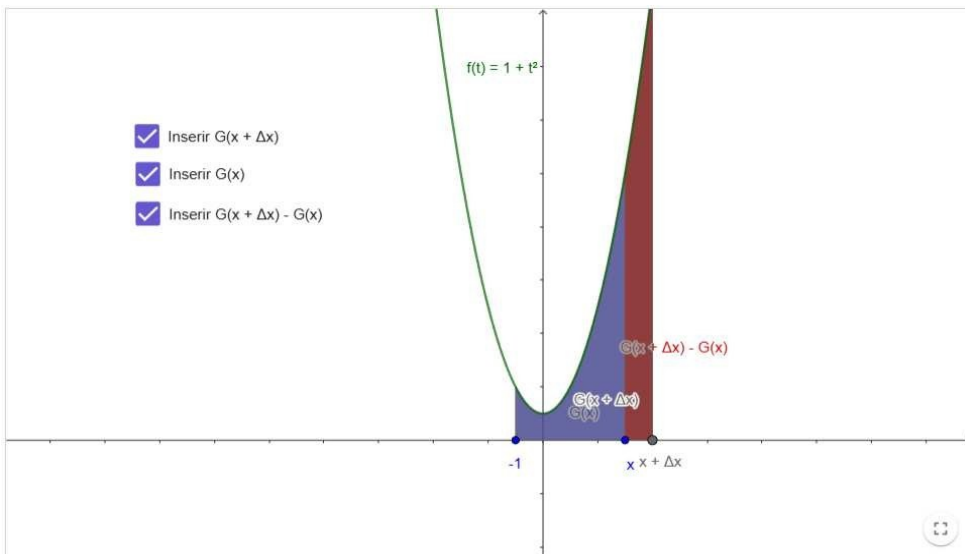
Sendo assim, siga os seguintes passos:

Passo 1: Selecione a caixa Inserir $G(x + \Delta x)$

Passo 2: Selecione a caixa inserir $G(x)$

Passo 3: Selecione a caixa inserir $G(x + \Delta x) - G(x)$

Após clicar nas três caixas observe as regiões formadas e observe o resultado da expressão $G(x + \Delta x) - G(x)$.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A atividade propõe que o aluno visualize diretamente, como essa diferença se manifesta em termos de áreas. Ao ativar sucessivamente as caixas “Inserir $G(x+\Delta x)$ ”, “Inserir $G(x)$ ” e “Inserir $G(x+\Delta x) - G(x)$ ”, o estudante observa três regiões distintas: a área total até $x + \Delta x$, a área total até x e, por fim, a área que representa exatamente a diferença entre elas. Essa última coincide com a região compreendida entre x e $x+\Delta x$, sob o gráfico da função f .

Esta atividade foi planejada como uma Intervenção Exploratória (I_e), pois convida o estudante a manipular a construção e observar, por si mesmo, o comportamento geométrico da diferença $G(x+\Delta x) - G(x)$. Assim, mesmo que o estudante encontre dificuldade para responder o item (e) da questão 3 a representação algébrica da diferença, a construção dinâmica funciona como um apoio intuitivo, fortalecendo a compreensão e criando um elo entre representação algébrica e representação geométrica.

Na questão 4, apresentamos a etapa de Intervenção Formalizante (I_f), cuja função é registrar, com o rigor próprio da linguagem matemática, o resultado que vinha sendo construído de forma intuitiva e exploratória nas atividades anteriores.

Figura 17 - Formalização da Parte 2

[I_f] FORMALIZANDO O PENSAMENTO

Ao retomar a definição

$$G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt,$$

podemos descrever com mais precisão o que foi observado nas atividades desta parte. Quando substituimos x por $x+\Delta x$, obtemos

$$G(x + \Delta x) = \int_{-1}^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Pela propriedade da integral em relação aos limites, a área acumulada de -1 até $x+\Delta x$ pode ser decomposta em duas parcelas: a área de -1 até x e a área de x até $x+\Delta x$, isto é,

$$\int_{-1}^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_{-1}^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Como $G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, segue que

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Em termos geométricos, essa igualdade expressa que a diferença entre as áreas acumuladas de -1 até $x+\Delta x$ e até x coincide exatamente com a área da faixa adicional que surge quando o limite superior da integral é deslocado de x para $x+\Delta x$.

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Segundo Cabral (2017), na etapa de Intervenção Formalizante (I_f),

O professor reelabora as verdades “redescobertas” pelos alunos com as vestes da formalidade Matemática. Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurar satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática.” (Cabral, 2017)

Portanto, a diferença $G(x+\Delta x) - G(x)$ é expressa de modo sistemático, retomando a definição de integral e organizando o raciocínio que o estudante já havia desenvolvido geometricamente e algebricamente nas Questões 3 e 4 desta parte. Com isso, consolidamos formalmente o conceito trabalhado e conduzimos o estudante ao fechamento de mais uma Unidade de Aprendizagem Reconstitutiva (UARC).

Parte 3 da SD:

A Parte 3 da sequência teve como objetivo central favorecer a compreensão do Teorema do Valor Médio para Integrais, a partir de uma abordagem visual, aproximando o estudante dos elementos que aparecem na demonstração formal do TFC.

Figura 18 – Teorema do Valor Médio e sua aplicação no TFC

6.9.10 Proposição Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto c entre a e b tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c).$$

Se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, podemos visualizar geometricamente esta proposição. Ela nos diz que a área abaixo da curva $y = f(x)$, entre a e b , é igual à área de um retângulo de base $b - a$ e altura $f(c)$ (ver Figura 6.9).

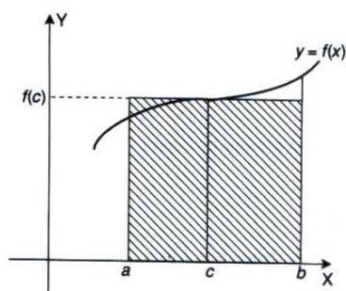


Figura 6.9

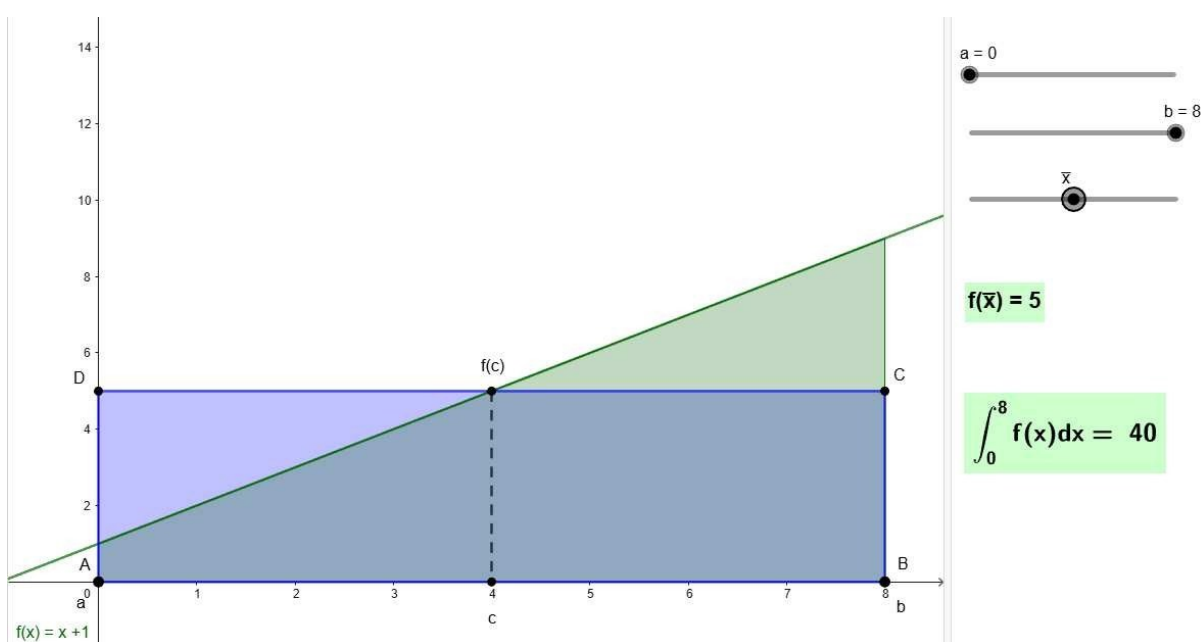
Como f é contínua em $[x, x + \Delta x]$, pela Proposição 6.9.10, existe um ponto \bar{x} entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt &= (x + \Delta x - x)f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x})\Delta x. \end{aligned}$$

Fonte: Flemming e Gonçalves, 2007, págs. 264 e 266.

Para isso, explorou-se, por meio dos *applets*, tanto a igualdade entre a área do retângulo $f(\bar{x}) \cdot (b-a)$ e o valor da integral em pequenos intervalos $[x, x + \Delta x]$, quanto o comportamento de \bar{x} quando Δx tende a zero, aspectos essenciais que estão presentes na demonstração. Assim, o intuito foi permitir que o aluno visualizasse esses resultados de forma intuitiva, observando na construção os mesmos fenômenos que serão utilizados na prova.

Figura 19 - Applet 1 da Parte 3



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Os três primeiros itens da questão foram planejados com o objetivo de introduzir o estudante à estrutura geométrica que fundamenta o Teorema do Valor Médio para Integrais. Para isso, o aluno é convidado a realizar manipulações no *applet*, explorando a variação dos parâmetros e observando a formação das regiões destacadas, bem como a relação entre a área sob o gráfico da função e a área do retângulo associado ao valor médio.

Figura 20 - Alternativas (a), (b) e (c) da Questão 1

[I_i - CP] a) Ajuste os controles deslizantes para $a = 0$, $b = 8$ e $\bar{x} = 4$. Determine a área do retângulo ABCD.

Digite sua resposta aqui...

[I_i - CP] b) Agora ajuste os controles deslizantes para $a = 1$, $b = 5$ e $\bar{x} = 3$. Determine a área do retângulo ABCD.

Digite sua resposta aqui...

[I_i - CP] c) De modo geral, considerando um intervalo qualquer $[a, b]$ e $\bar{x} \in [a, b]$, qual a expressão que representa a área do retângulo ?

Digite sua resposta aqui...

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Nos itens (a) e (b), o estudante trabalha com valores específicos para a , b e \bar{x} , determinando a área do retângulo ABCD a partir de medidas concretas. Essa escolha permite que o aluno manipule a situação de forma intuitiva, sem ainda mobilizar conceitos gerais ou abstrações mais amplas.

Tabela 4 - Respostas Esperadas nos itens (a) e (b)

Item (a)	Item (b)
VALOR DA BASE: $8 - 0 = 8$ VALOR DA ALTURA: $f(4) = 4 + 1 = 5$ $A = 5 \cdot 8 = 40$	VALOR DA BASE: $5 - 1 = 4$ VALOR DA ALTURA: $f(3) = 3 + 1 = 4$ $A = 4 \cdot 4 = 16$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Em seguida, no item (c), o estudante é conduzido a generalizar o procedimento realizado anteriormente. Ao solicitar que ele determine a expressão da área para um intervalo qualquer $[a, b]$ e um ponto $\bar{x} \in [a, b]$, busca-se que o aluno reconheça o padrão estrutural que liga os casos particulares à formulação geral: $f(\bar{x}) \cdot (b - a)$. Essa generalização é essencial para preparar o terreno para a etapa posterior, na qual essa expressão aparece ligada ao valor da integral.

Na sequência, nos itens (d) e (e) foi estruturada como intervenção exploratória, pois a proposta consiste em orientar o estudante a manipular diretamente o *applet*, ajustando os limites da integral conforme indicado nos comandos.

Figura 21 - Itens (d), (e) e (f) da Questão 1

[I.] d) Posicione o controle deslizante em $a = 0$ e $b = 8$ e observe o valor da integral.

[I.] e) Posicione o controle deslizante em $a = 1$ e $b = 5$ e observe o valor da integral.

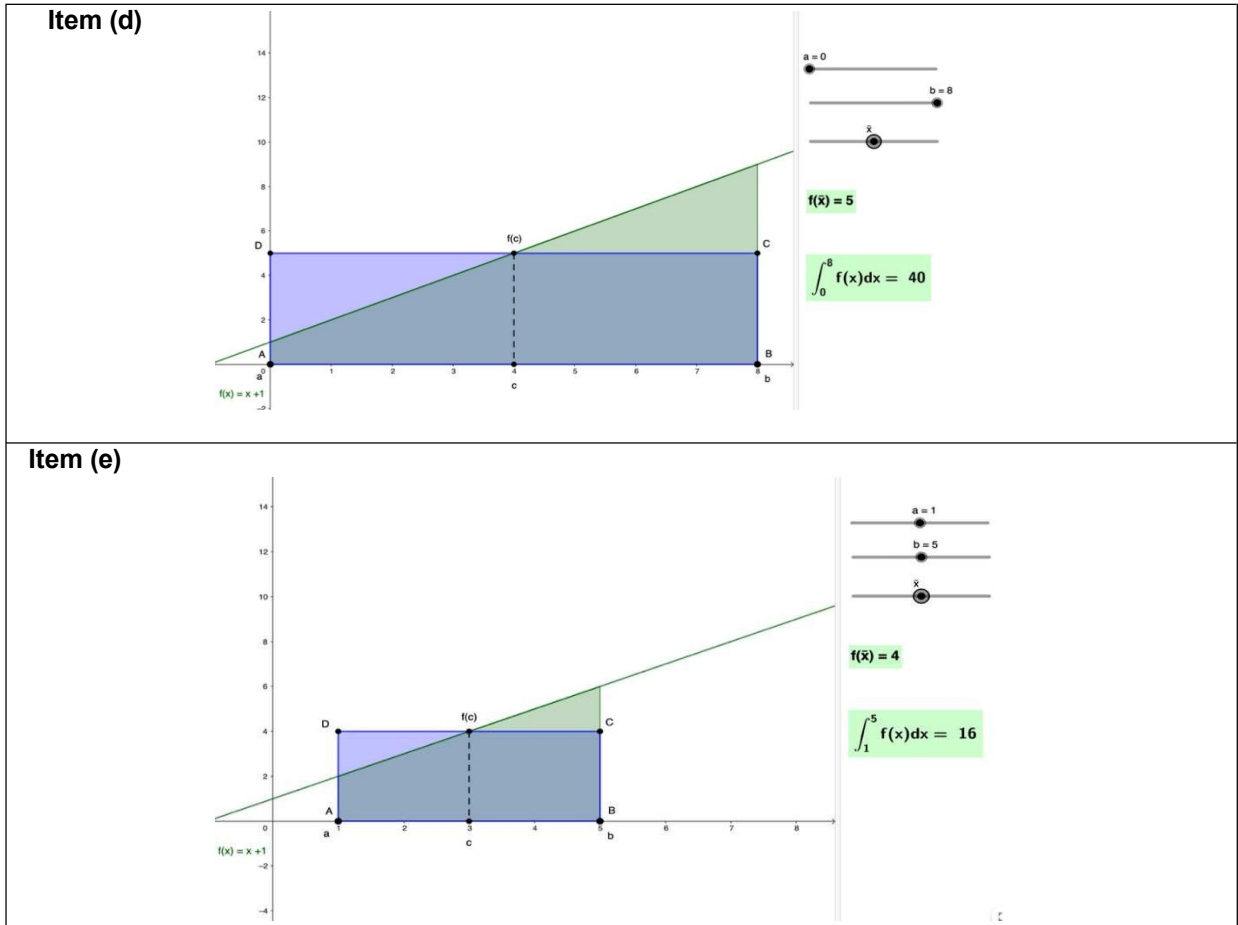
[I.] f) Com base nos resultados dos itens (a) e (b), o que você observa em relação ao valor da integral nos respectivos intervalos?

Aa π Digite sua resposta aqui...

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A intenção pedagógica aqui é ampliar a percepção iniciada nos itens anteriores, permitindo que o aluno observe, na própria construção, o valor assumido pela integral para os intervalos $[0,8]$ e $[1,5]$. Ao realizar esses ajustes, espera-se que ele visualize imediatamente o resultado numérico da integral apresentada no ambiente gráfico, reconhecendo, de modo empírico, a área sob o gráfico da função nesses dois trechos.

Figura 22 - Applet 1 com a solução dos itens (d) e (e) da Questão 1



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Diferentemente das etapas anteriores, que se restringiam à observação e manipulação, na letra (f), o estudante é convidado a comparar o que calculou nos itens (a) e (b) referentes às áreas dos retângulos com os valores das integrais observados nos itens (d) e (e) (Figura 22). Espera-se que ele identifique que, em ambos os intervalos considerados, os valores numéricos coincidem, ou seja, que a área do retângulo corresponde exatamente ao valor da integral no respectivo intervalo. Essa etapa reflexiva se alinha ao referencial de Cabral (2017), pois promove uma reorganização cognitiva do estudante, permitindo que ele perceba a regularidade que estrutura o Teorema do Valor Médio para Integrais.

Figura 23 - Formalização do Teorema do Valor Médio

[1_f] FORMALIZANDO O PENSAMENTO

Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$.

Então **existe** pelo menos um número \bar{x} em $[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(\bar{x}) \cdot (b - a).$$

Em outras palavras, existe um ponto \bar{x} no intervalo $[a,b]$ de modo que o valor da integral nesse intervalo é igual a área do retângulo cuja altura é $f(\bar{x})$ e a base o comprimento do intervalo.

Dessa forma, podemos interpretar $f(\bar{x})$ como o valor médio da função no intervalo $[a,b]$. Em consequência dessa proposição, esse valor médio pode ser calculado da seguinte forma:

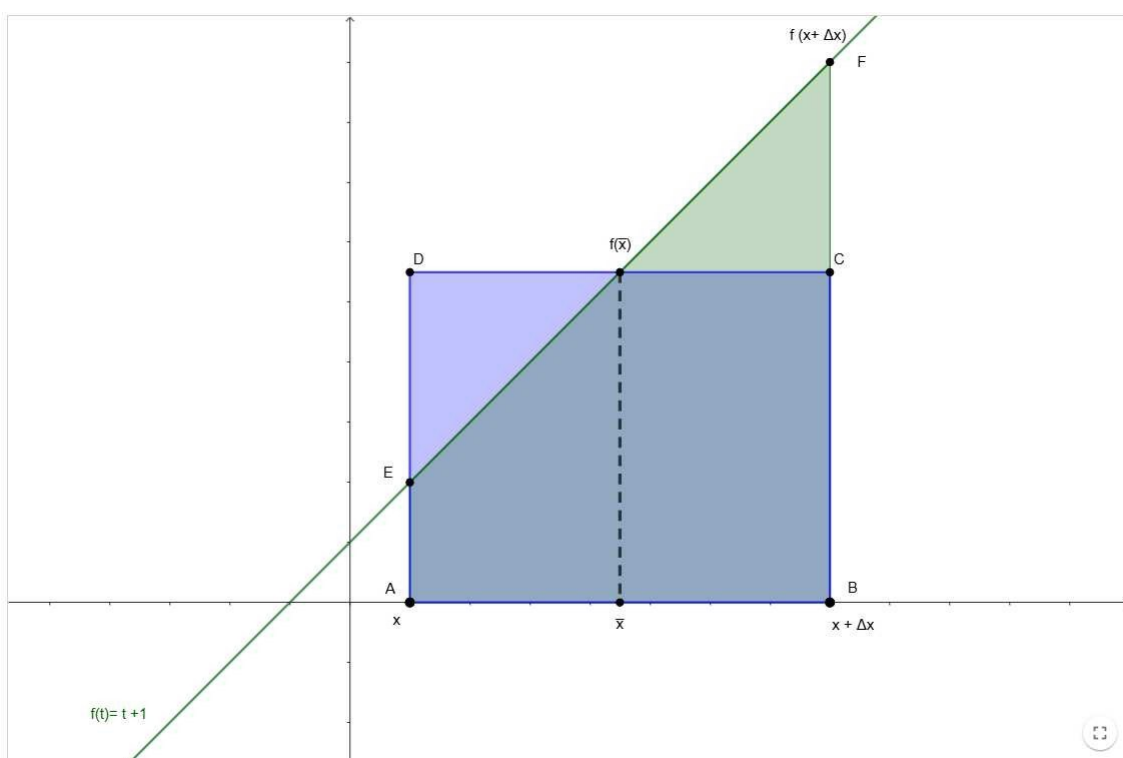
$$f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Fonte: Adaptado do Livro de Cálculo A de Diva Fleming.

A etapa de formalização tem como finalidade apresentar o Teorema do Valor Médio para Integrais com o rigor matemático que lhe é próprio, permitindo que o aluno tenha contato direto com o objeto de conhecimento em sua forma conceitualmente acabada. Trata-se do momento em que a interpretação geométrica explorada anteriormente dá lugar à formulação precisa do resultado.

Tall (2002) destaca que, para que um conceito seja devidamente compreendido, a formulação simbólica deve ser acompanhada de estruturas que lhe atribuam significado, de modo que a expressão formal se torne compreensível para o estudante. Nesse contexto, a formalização cumpre exatamente essa função, ao apresentar o teorema com clareza e justificativa conceitual. Essa etapa foi caracterizada, conforme os pressupostos de Cabral (2017), como intervenção formalizante (I_f), pois é nela que o conhecimento é organizado de maneira rigorosa após momentos de exploração, consolidando-se o conceito matemático propriamente dito

Figura 24 - Applet 2 da Parte 3



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A questão 2 foi elaborada com a intenção de aproximar o estudante da estrutura que aparece posteriormente na demonstração da primeira parte do TFC, agora considerando o intervalo variável $[x, x + \Delta x]$.

Figura 25 - Itens (a), (b) e (c) da Questão 2

[I_e] a) Com base na construção acima qual seria a expressão que define a área do retângulo ABCD ?

$\frac{A}{f_x}$	
-----------------	--

[I_e] b) Da mesma forma, qual expressão que define, em termos de integral, a área do trapézio ABFE?

- a) $\int_{-1}^x (1+t) dt$
- b) $\int_x^{x+\Delta x} (1+t) dt$
- c) $\int_{x+\Delta x}^x (1+t) dt$
- d) $\int_a^b (1+t) dt$

[I_r] c) Considerando que na construção o valor de $f(\bar{x})$ é o **valor médio** da função neste intervalo $[x, x + \Delta x]$, qual a relação que podemos concluir entre as expressões dos itens (a) e (b)?

$\frac{A}{f_x}$	
-----------------	--

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

No item (a), o estudante é convidado a determinar a expressão que representa a área do retângulo construído, retomando uma ideia já trabalhada anteriormente, mas agora aplicada a outro intervalo. Trata-se de uma intervenção exploratória cujo objetivo é fazer com que o aluno perceba que a área, neste caso, deve ser expressa por $f(\bar{x}) \cdot (x + \Delta x - x) = f(\bar{x}) \cdot (\Delta x)$.

No item (b), mantendo o caráter exploratório, solicita-se ao estudante que identifique a expressão integral que define a área do trapézio apresentado. A resposta esperada é que ele reconheça corretamente a integral como representação dessa área, marcando a alternativa B correspondente.

O item (c) assume caráter reflexivo, pois direciona o estudante a comparar as duas expressões determinadas anteriormente. Aqui, o propósito é que ele perceba

que, ao considerar $f(\bar{x})$ como o valor médio da função no intervalo $[x, x + \Delta x]$ fez com que as áreas obtidas nos itens (a) e (b), fossem iguais, de acordo com o Teorema do Valor Médio para Integrais.

Essa relação é essencial para compreender a igualdade das expressões, sendo também, uma ideia que está presente na prova do TFC. Vale ressaltar que essa etapa se relaciona diretamente com o que Cabral (2017) caracteriza como intervenção reflexiva (I_r), pois leva o aluno a reorganizar as informações obtidas, articulando-as para formar uma conclusão mais elaborada.

Figura 26 - Formalização da Questão 2

[I_r] FORMALIZANDO O PENSAMENTO

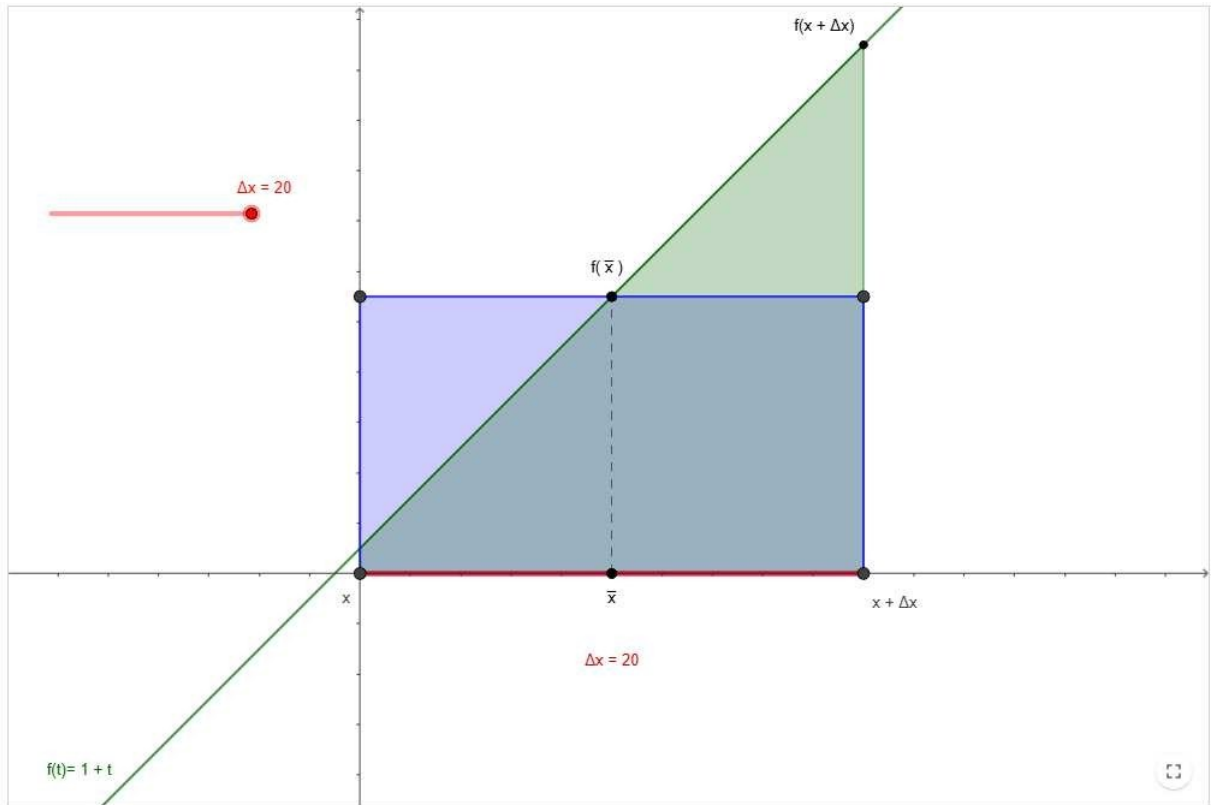
Na construção realizada, o ponto \bar{x} foi escolhido dentro do intervalo $[x, x + \Delta x]$ de modo que a área do retângulo construído seja exatamente igual à área sob o gráfico da função nesse mesmo intervalo. Assim, temos que:

$$f(\bar{x}) \Delta x = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

Fonte: Adaptado do Livro de Cálculo A de Diva Fleming.

Esta etapa corresponde ao momento de formalização da sequência, no qual é apresentada a relação que foi explorada nas construções anteriores. Na figura 24, é exibida a igualdade entre a área do retângulo construído e a área correspondente ao trecho do gráfico considerado no intervalo $[x, x + \Delta x]$. A intenção aqui é que o estudante visualize o resultado de forma precisa, reconhecendo, em linguagem matemática, aquilo que já havia observado de modo intuitivo nas atividades anteriores. Trata-se do ponto em que o conceito assume sua forma mais estruturada, permitindo ao aluno compreender a relação apresentada como um enunciado formal que será utilizado posteriormente na demonstração.

Figura 27 - Applet 3 da Questão 3



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A Questão 3 dessa parte foi planejada para aproximar o estudante de outra estrutura algébrica presente na demonstração, agora envolvendo diretamente o comportamento do ponto \bar{x} quando o comprimento do intervalo $[x, x + \Delta x]$ é reduzido.

Figura 28 - Itens (a) e (b) da Questão 3

[I_e] a) Movimente o controle deslizante lentamente Δx de modo que ele fique bem próximo de zero, para qual valor \bar{x} parece tender dentro do intervalo $[x, x + \Delta x]$?

Ab π Digite sua resposta aqui...

[I_f] b) Utilizando a construção dada podemos afirmar que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} f(\bar{x})$? Justifique.

Ab π Digite sua resposta aqui...

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A construção apresentada na Figura 27 permite ao aluno visualizar simultaneamente o intervalo variável, o ponto \bar{x} escolhido dentro dele e o valor $f(\bar{x})$,

conduzindo-o à compreensão de como essas quantidades se comportam quando Δx se aproxima de zero, etapa essencial na demonstração formal.

O item (a) convida o estudante a manipular o valor de Δx e observar como o ponto \bar{x} se comporta dentro do intervalo $[x, x + \Delta x]$. À medida que o controle deslizante é ajustado e o intervalo é reduzido, a construção permite visualizar que \bar{x} permanece sempre entre as extremidades e, por isso, tende naturalmente a se aproximar de x quando Δx se torna muito pequeno. A intenção é que o aluno perceba essa aproximação de forma direta, a partir da própria dinâmica da construção. Essa etapa caracteriza uma intervenção exploratória (I_e), pois o aluno é levado a descobrir o comportamento de \bar{x} por meio da manipulação da construção e da observação ativa do fenômeno

No item (b), o estudante é levado a refletir sobre o comportamento da função associado à aproximação observada anteriormente. A proposta é que analise a relação entre os limites apresentados e avalie se eles são iguais. A expectativa é que o aluno conclua que, uma vez que \bar{x} se aproxima de x quando $\Delta x \rightarrow 0$ os valores correspondentes de $f(\bar{x})$ também tendem a se aproximar de $f(x)$. Assim, ele reconhece que ambas as expressões convergem para o mesmo resultado. Essa etapa configura uma intervenção reflexiva (I_r), pois exige que o estudante reorganize as observações feitas anteriormente e formule uma justificativa conceitualmente consistente para a equivalência entre os limites analisados.

Figura 29 - Formalização da Questão 3

[I_r] FORMALIZANDO O PENSAMENTO

Em cada posição do controle deslizante, o ponto \bar{x} permanece contido no intervalo $[x, x + \Delta x]$. Isso garante as desigualdades

$$x \leq \bar{x} \leq x + \Delta x,$$

e, equivalentemente,

$$0 \leq \bar{x} - x \leq \Delta x.$$

Quando o intervalo é reduzido e Δx se aproxima de zero, a distância entre \bar{x} e x também se aproxima de zero. Assim,

$$\bar{x} \rightarrow x \quad \text{quando} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A formalização apresentada ao final desta questão tem como finalidade organizar, em uma linguagem matemática mais formal, o comportamento que o estudante observou nas construções anteriores. A figura 29 apresenta um registro,

de maneira precisa, a relação entre o intervalo $[x, x + \Delta x]$, o ponto \bar{x} que permanece contido nele e a forma como essa proximidade se intensifica à medida que o comprimento do intervalo diminui.

Essa etapa busca consolidar, de modo claro e estruturado, a ideia de que o encolhimento do intervalo força a aproximação entre \bar{x} e x , o que também implica a aproximação entre suas respectivas imagens por meio da função utilizada. Assim, o que antes foi percebido pela manipulação e pela observação passa a ser apresentado formalmente, cumprindo o papel de Intervenção Formalizante (I_f). Esse é o momento em que o conhecimento adquire sua forma definitiva, estabelecendo a base necessária para compreender a estrutura matemática que aparece no desfecho da demonstração.

Dessa forma, o desenvolvimento deste capítulo permitiu apresentar e analisar cada etapa da sequência didática elaborada, respeitando os pressupostos teóricos de Cabral (2017) e o objetivo central deste trabalho, que não foi o de aplicar a proposta, mas sim de construí-la de forma fundamentada e coerente. Por não envolver aplicação em sala de aula, não foi possível empregar a Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO), que tem natureza interativa e depende diretamente da mediação entre professor e estudantes. No entanto, trata-se de um recurso plenamente possível em estudos futuros, caso a sequência venha a ser experimentada em um contexto real de ensino.

Ainda que não tenha sido aplicada, a proposta construída apresenta potencial para auxiliar a compreensão da demonstração da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, sobretudo quando utilizada previamente à exposição formal feita pelo professor. A organização das três partes buscou contemplar os principais elementos envolvidos na demonstração, oferecendo ao estudante uma aproximação progressiva que articula exploração, visualização e formalização. Embora a sequência possua uma extensão considerável, seu tamanho decorre da necessidade de abordar com cuidado cada estrutura conceitual presente na demonstração, preservando a coerência entre os objetivos pedagógicos e o caminho matemático que se pretende que o aluno percorra.

Nesse sentido, a proposta elaborada está em consonância com o entendimento de Cabral de que uma sequência didática deve constituir um percurso planejado e intencional, capaz de orientar o aluno na construção de significados matemáticos. Para o autor, “as intervenções estruturantes compõem um encadeamento que dá forma ao conceito trabalhado”, permitindo que o estudante avance de ações iniciais e intuitivas para níveis mais formais de compreensão. Assim, o conjunto de intervenções utilizado nesta sequência reflete esse encadeamento, organizando o conhecimento de maneira gradual e intencional.

Considera-se, portanto, que a sequência didática aqui apresentada não é um produto fechado, mas uma proposta que pode ser modificada, ampliada ou reorganizada conforme o contexto de aplicação. Sua estrutura oferece um caminho possível para apoiar o ensino e a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo, cabendo ao professor adaptá-la às necessidades de seus estudantes e às particularidades do ambiente de ensino. Dessa forma, este capítulo encerra a análise da sequência, abrindo espaço para que, nas considerações finais, sejam discutidos os alcances e perspectivas da proposta elaborada.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em retrospectiva, observa-se que os estudos analisados convergem para destacar a importância do uso de recursos digitais no ensino de Cálculo. Pesquisas como as de Richit et al. (2012), Alonso (2017), Grande (2016), e Picone (2007), bem como a revisão apresentada por Cavalcante (2022), evidenciam que o *GeoGebra* constitui uma ferramenta capaz de favorecer a visualização de conceitos, promover maior engajamento dos estudantes e articular diferentes registros de representação durante o estudo de conteúdos de Cálculo. Em consonância com essa perspectiva, Duval (1999) e autores que dialogam com sua teoria argumentam que a compreensão de conceitos como o Teorema Fundamental do Cálculo envolve necessariamente o trânsito entre registros simbólicos, geométricos e gráficos, aspecto que pode ser potencializado pelo uso de ambientes digitais dinâmicos.

Paralelamente, o presente trabalho também se apoiou em autores que discutem a elaboração e a função pedagógica das sequências didáticas, destacando sua relevância como metodologia de ensino. Zabala (1998) define sequência didática como um conjunto organizado de atividades estruturadas em etapas, planejadas com intencionalidade educativa e orientadas à consolidação de determinados objetivos de aprendizagem. Na perspectiva do autor, a SD constitui uma metodologia que permite sistematizar o trabalho pedagógico de forma progressiva, articulando momentos que possibilitam ao estudante construir e reconstruir significados ao longo do percurso proposto.

Cabral (2017) aprofunda a discussão sobre sequências didáticas ao concebê-las como um conjunto articulado de ações planejadas que orientam o processo de ensino e aprendizagem. O autor define a SD como sendo:

“[...] um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral, que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de matemática, a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações, adotando-se uma dinâmica de intenções empírico-intuitivas” (CABRAL, 2017, p. 12).

Para Cabral, o desenvolvimento desses procedimentos de ensino admite diversas estratégias, organizadas passo a passo, de modo que cada intervenção favoreça a compreensão do objeto estudado. Nessa perspectiva, o autor destaca ainda que

“Esse conjunto de intervenções ‘passo a passo’ dirigido pelo professor com a finalidade de atingir objetivos de aprendizagem sugere a ideia dos elos conectados de uma corrente. Cada elo posterior está devidamente articulado aos elos anteriores e permite outras articulações com elos subsequentes. Uma forma de rede que se estrutura a partir dessas articulações conceituais” (CABRAL, 2017, p. 33).

Com base nessas considerações, Cabral (2017) apresenta-se um modelo de estruturação de sequências didáticas fundamentado nas Intervenções Estruturantes, a saber: Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f), Intervenções Avaliativas Restritas (IA_r) e Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a), sintetizadas no Quadro 2 (p. 34-35).

Assim, tomando como referência as Intervenções Estruturantes propostas por Cabral (2017), este trabalho teve como objetivo *elaborar e propor uma sequência didática voltada à compreensão da primeira parte da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo*. A elaboração da SD considerou os elementos conceituais presentes na demonstração apresentada no Livro *Cálculo A de Diva Marília* e buscou organizar um percurso metodológico que favorecesse a construção gradual desses conceitos antes do contato direto com o texto formal. De acordo com a metodologia utilizada e com a natureza da proposta desenvolvida, compreende-se que a sequência apresentada não constitui um produto acabado; ao contrário, deve ser entendida como um material inicial, aberto a adaptações, reformulações e aprimoramentos futuros por parte daqueles que se interessarem em utilizá-la ou estudá-la.

A pesquisa realizada culminou na elaboração de uma sequência didática estruturada a partir de atividades que exploram aspectos algébricos e geométricos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo, com a intenção de favorecer o processo de aprendizagem. Buscou-se, ainda, que as atividades fossem apresentadas de maneira simples e coerente, de forma a despertar o interesse e a atenção dos alunos para os conceitos que seriam trabalhados posteriormente na abordagem formal do teorema.

Desse modo, a sequência didática foi compartilhada com a intenção de estimular o raciocínio lógico, a observação e a investigação por parte dos estudantes, convidando-os a refletir, levantar hipóteses, formular conjecturas e estabelecer generalizações. Em sua organização, valorizou-se a mobilização de

conhecimentos prévios e a construção progressiva de novos significados, favorecendo uma postura ativa diante do objeto matemático em estudo. Ao promover a articulação entre diferentes registros de representação, a SD pretende contribuir para que o estudante compreenda, de maneira mais intuitiva e visual, elementos conceituais que aparecem de forma algébrica na demonstração da primeira parte do TFC.

Espera-se que esta sequência didática possa colaborar com a prática dos docentes de Matemática, oferecendo uma alternativa metodológica que estimule abordagens mais investigativas e visuais no ensino de Cálculo.

Portanto, em outro momento, a sequência didática elaborada poderá ser aplicada, uma vez que, neste trabalho, foi apenas proposta e analisada. A aplicação prática permitirá verificar se ela atende ao propósito para o qual foi construída e indicar possíveis ajustes. Sugere-se também que outros docentes interessados façam uso da sequência e compartilhem seus retornos, contribuindo para o aprimoramento da proposta.

7. REFERÊNCIAS

ALONSO, Erasto Piedade; PINTO, Márcia Maria Fusaro. **O papel da visualização e da intuição no processo de ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. Vidya, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 435-458, jul./dez. 2017. ISSN 2176-4603.

BALACHEFF, Nicolas. **Um estudo dos processos de prova dos alunos no colégio**. Tradução de Saddo Ag Almouloud e Méricles Thadeu Moretti. Educação Matemática em Pesquisa, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 698-721, 2022.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

CABRAL, N. F. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Curitiba: CRV, 2017.

CAVALCANTE, Lucas Alves. **As contribuições das Tecnologias de Informação e Comunicação para o ensino da função afim**. 2024. 40 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado da Bahia, Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Alagoinhas, 2024.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Suisse: Peter Lang S. A., 1995.

DUVAL, R. (1999). **Representation, vision and visualization: Cognitive functions in Mathematical thinking. Basic issues for learning**. Proceedings XXI Psychology of Mathematics Education, n. 1. México: Eric, p. 2-26.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, S. D. A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papirus, 2003. p.11-34.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da indignação: cartas pedagógicas e outros escritos**. São Paulo: Editora UNESP, 2000.

FLEMMING, Diva M.; GONÇALVES, Mirian B. **Cálculo A**. São Paulo: Pearson, 2012.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

KIRNEV, Debora Cristiane Barbosa; SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. **Um estudo sobre dificuldades em demonstrações de licenciandos em matemática**. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, v. 1, p. 1-14, 2013.

NASSER, Lilian; BIAZUTTI, Ângela Cássia (orgs.). **Transição do Ensino Médio para o Superior: Pré-Cálculo com Resolução de Problemas e GeoGebra [recurso eletrônico]**. 1. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2025. 263 p. Recurso digital. ISBN 978-65-86502-12-1.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner; JUSTULIN, Andresa Maria. (Orgs.). **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco, 2014.

PAULIN, E. L.; RIBEIRO, A. J. **Ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo: uma revisão sistemática de literatura**. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, São Paulo, v. 10, n. 3, p. 235-247, 2019.

RICHT, A.; BENITES, V.; ESCHER, M.; MISKULIN, R. **Contribuições do software Geo-Gebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia**. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 2012.

STEWART, J. **Cálculo: volume 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.