



UNEB: UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – CAMPUS II

ANNA CECÍLIA PERÔNIO BACELAR DOS SANTOS

O OLHAR GEOMÉTRICO:
UM ESTUDO DAS PESQUISAS QUE TRATAM DA VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA
SEGUNDO RAYMOND DUVAL

Alagoinhas – Ba, 2025

ANNA CECÍLIA PERÔNIO BACELAR DOS SANTOS

O OLHAR GEOMÉTRICO:
UM ESTUDO DAS PESQUISAS QUE TRATAM DA VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA
SEGUNDO RAYMOND DUVAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora da Universidade do Estado da Bahia, como exigência parcial para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob orientação da professora Dra. Maridete Brito Cunha Ferreira.

Alagoinhas – Ba, 2025

ANNA CECÍLIA PERÔNIO BACELAR DOS SANTOS

O OLHAR GEOMÉTRICO:
UM ESTUDO DAS PESQUISAS QUE TRATAM DA VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA
SEGUNDO RAYMOND DUVAL

Monografia apresentada à Universidade do Estado da Bahia como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovada 05 de Agosto de 2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br MARIDETE BRITO CUNHA FERREIRA
Data: 27/08/2025 18:42:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.ª Dr.ª. Maridete Brito Cunha Ferreira – (Orientadora) – UNEB

Prof. Me. Gustavo Pereira Nascimento – UNEB

Documento assinado digitalmente
gov.br GUSTAVO PEREIRA NASCIMENTO
Data: 25/08/2025 18:59:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.ª Dr.ª. Maria de Fátima Costa Leal – UNEB



AGRADECIMENTOS

A Deus, aquele a quem confio e que me sustentou até esse momento, o qual também, em seu plano perfeito, me colocou neste lugar e me presenteou com a graça de cohecer pessoas maravilhosas a quem também devo meus agradecimentos.

Aos meus estimados pais Joilson e Sônia, que me deram as condições e o suporte para que pudesse chegar a esse momento, abdicando durante todos esses anos de muitos prazeres para que suas filhas pudessem ter um futuro diferente e melhor que os deles. A minha irmã Nayla e primos Alanna, Lidio, Vinícius os quais sempre me motivaram a viver a universidade e aproveitar todas as oportunidades.

Ao meu marido Pedro, o qual me acalentou e me motivou quando o desespero e as pressões me instigavam a desistir.

Aos meus familiares que me incentivavam e vibravam a cada vitória, a cada final de semestre, a cada momento importante vivenciado por mim.

A minha professora e orientadora Maridete Ferreira, a qual me fez amar mais ainda a geometria. Obrigada pela paciência e pelo cuidado e por se tornar uma das maiores inspirações que levarei para a vida. Sentirei saudades.

Aos meus amigos Valdirene, Rodrigo, Willian, Ivina, Igor, Pedro e Samuel, foi um prazer conviver com vocês nesses últimos anos, obrigada pelo apoio nos momentos difíceis durante o curso.

Ao professor Erivelton Santana e ao Coordenador Mario Ferreira, obrigada pela empenho e atenção dada a mim para que esse momento se concretizasse.

Aos excelentes professores que tive o prazer de conviver e aprender seja sobre a disciplina, a licenciatura ou a vida. Em especial a Maria de Fatima Costa e Gustavo Perreira, os quais agradeço também pela participação na minha banca. Levarei um pouco de cada um para minhas futuras salas de aulas.

Com o coração cheio de gratidão e ainda custoso a acreditar, encerro esse ciclo agradecendo a todos por um dia cruzarem o meu caminho e me ajudarem na minha jornada.

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa do tipo Estado da Arte, destinada a levantar e analisar as contribuições de teses e dissertações que tratam da visualização geométrica no período de 2015 a 2023. O termo *visualização*, aqui empregado, está na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por Raymond Duval, a qual fundamentou as análises. O referencial metodológico utilizado foi a análise de conteúdo de Laurence Bardin. O procedimento de busca e codificação foi o utilizado por Baqueiro (2016). Como resultado, foi observado que as pesquisas analisadas não apresentam explicitamente os fatores que ajudam ou inibem a atividade de visualização geométrica, ou seja, características das figuras, posições ou contextos que facilitam ou dificultam os tratamentos figurais ou a identificação de propriedades das figuras. Nessa perspectiva, foi constatado que, apesar de as tarefas contidas nas pesquisas solicitarem a mobilização das apreensões perceptiva, operatória e discursiva, há poucas em que a operação de reconfiguração estivesse presente, além da ausência de tarefas para exercitar a desconstrução dimensional das formas. Foi observado, na maioria dos casos, os envolvidos podendo fazer uso da atividade de visualização para solucionar os problemas propostos. No entanto, de modo geral, os autores dos trabalhos pesquisados afirmam que os tratamentos figurais são um meio para o desenvolvimento da visualização.

Palavras-chave: Visualização; Geometria; Estado da arte; Raymond Duval.

ABSTRACT

This study presents the results of a state-of-the-art study aimed at identifying and analyzing the contributions of theses and dissertations that address geometric visualization in the period from 2015 to 2023. The term “visualization,” as used here, is grounded in the perspective of the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRSR), developed by Raymond Duval, which served as the analytical foundation. The methodological framework adopted was Laurence Bardin’s content analysis. The search and coding procedure followed the approach proposed by Baqueiro (2016). As a result, it was observed that the studies analyzed do not explicitly present the factors that support or hinder the activity of geometric visualization—that is, the characteristics of the figures, positions, or contexts that facilitate or complicate figural treatments or the identification of properties of geometric shapes. From this perspective, it was found that although the tasks in these studies required the mobilization of perceptual, operative, and discursive apprehensions, few of them involved reconfiguration operations, and tasks aimed at practicing dimensional deconstruction of shapes were absent. In most cases, participants were able to make use of visualization to solve the proposed problems. However, in general, the authors of the analyzed works affirm that figural treatments serve as a means for the development of visualization.

Keywords: Visualization; Geometry; State of the art; Raymond Duval.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Desconstrução dimensional de um paralelogramo	19
Figura 2: Dissertação de Cassoli (2021) utilizando <i>highlight</i>	26

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Apresentação do conceito primitivo reta em diferentes registros de representação	15
Quadro 2: Decomposição do paralelogramo em subfiguras	19
Quadro 3: Comparação entre análise de conteúdo e análise documental	21
Quadro 4: Trabalhos após primeira análise	24
Quadro 5: Trabalhos após segunda análise	24
Quadro 6: Corpus da pesquisa baseado na leitura flutuante	25
Quadro 7: Corpus da pesquisa após exploração do material	27
Quadro 8: Descrição das categorias	27
Quadro 9: Identificação do <i>corpus</i> da pesquisa	28
Quadro 10: Trabalhos que compõe a Categoria 1	29
Quadro 11: Resultados principais de Polizeli (2020)	30
Quadro 12: Resultados principais de Mello (2015)	31
Quadro 13: Trabalhos que compõe a Categoria 2	33
Quadro 14: Resultados principais de Cassoli (2021)	35
Quadro 15: Resultados principais de Machado (2020)	36
Quadro 16: Resultados principais de Santos (2020)	37
Quadro 17: Resultados principais de Ferner (2019)	39
Quadro 18: Resultados principais de Siqueira (2019)	40

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
CAPÍTULO I: REFERENCIAL TEÓRICO METODOLÓGICO.	14
1.1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica	14
1.1.1. Visão/Visualização segundo Raymond Duval.	16
1.2. Análise de Conteúdo segundo Laurence Bardin	20
CAPÍTULO II: PROCEDIMENTO DE BUSCA: O GARIMPO	23
2.1. Pré-análise	23
2.2. Exploração do Material	25
CAPÍTULO III: ANÁLISE DAS PESQUISAS GARIMPADAS	29
3.1 Categoria 1	29
3.2 Categoria 2	33
CAPÍTULO IV: CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
REFERÊNCIAS	46

INTRODUÇÃO

Motivação pessoal

Sendo fruto de uma educação escolar pautada em práticas tradicionais, conteudistas e expositivas, desde sempre fui motivada a memorizar inúmeras fórmulas e procedimentos, aprendendo assim a resolver os problemas mecanicamente. Porém, essa situação não limitava meu interesse pela matemática e, em especial, pela geometria. Mesmo inconscientemente sendo privada de alguns ensinamentos, sempre gostei da dinâmica da geometria, com suas fórmulas e suas propriedades utilizadas na resolução dos problemas.

Ao ingressar no ensino superior tive contato com disciplinas curriculares voltadas à geometria, onde pude entender uma forma diferente de aprender sobre este campo da matemática: de onde vinham as suas propriedades e suas fórmulas e a presença das figuras geométricas de uma forma diferente. Nesse momento, pude então ter conhecimento que havia justificativas para muito do que me foi ensinado na educação básica.

Aprofundei meu interesse a partir de 2023, ao integrar um projeto de iniciação científica, onde o foco principal era estudar o papel das figuras geométricas na resolução de problemas, tendo por base os processos de visualização geométrica segundo Raymond Duval. Nesse momento me deparei com um grande desafio, já que um dos principais focos da pesquisa estava em observar a figura em situações em que a sua potencialidade heurística fosse explorada, ou seja, eram as operações que deveriam ser realizadas sobre a figura para garantir a resposta do problema, sem uso de fórmulas ou números e de forma simplesmente “abstrata”. Pude então observar a importância que uma figura pode ter na resolução de um problema e que a forma como a utilizamos pode influenciar no desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante, sem uma submissão a um procedimento mecanizado ou meramente a aplicação de uma fórmula pré-determinada.

Problemática, Justificativa e Objetivos

Ao analisar a forma como a geometria ainda é abordada na educação básica, observamos — a partir de vivências escolares e acadêmicas — que muitos estudantes carecem de habilidades que os estimulem ao aprofundamento no conhecimento geométrico. Essa realidade os impede de reconhecer a figura como parte integrante do problema e da solução.

Na concepção de Flores (1997, p.25), “[...] a abordagem exclusivamente psicológica da percepção das figuras, aquela imediata, não dá condições ao aluno de olhar a figura num nível mais profundo, com um olhar matemático”. Na perspectiva de Duval (2022, p. 9), “Passar de uma maneira de ver a uma outra constitui uma mudança profunda de olhar, que frequentemente é ignorada no ensino”, além disso, o conhecimento é modificado de acordo com o quanto o aluno se ache capaz de mobilizar a figura, pois é necessário, a um funcionamento heurístico, utilizar-se de artifícios a fim de chegar ao resultado.

Duval (2011) destaca que, ao apresentar uma figura a um estudante, o professor espera-se que ele imediatamente formule inúmeras hipóteses tal qual um especialista, no entanto esta não é a realidade, mesmo em estágios já avançados da escolarização, pois para isso é preciso que o aluno tenha conhecimento de operações figurais e compreenda/perceba as desconstruções dimensionais. O que é desenvolvido a partir de atividades que excluam o uso de medidas e cálculos e a criação de tarefas que incentivem o exercício das operações e das desconstruções separadamente para assim poderem visualizar geometricamente a figura. Sendo assim, para este autor, a visualização geométrica pode ser desenvolvida desde que seja exercitada e, para isso, devem ser propostas tarefas específicas para esse fim.

Diante do exposto, e motivada pela experiência adquirida na Iniciação Científica, surgiu o interesse em aprofundar os estudos sobre visualização geométrica na perspectiva de Duval, especialmente considerando o potencial didático das figuras quando exploradas de forma heurística.

Dessa forma, os estudos realizados apontam para a necessidade de realização de pesquisas que permitam compreender o processo de visualização, identificando fatores que influenciam neste processo para se desenvolver problemas em que as figuras tenham produtividade heurística e, desse modo,

contribuir para o desenvolvimento da visualização geométrica dos estudantes, além de fomentar habilidades lógicas e independentes no campo da geometria. Dada a dificuldade que muitos alunos enfrentam na matemática — frequentemente associada ao excesso de fórmulas e à incompreensão dos processos —, é essencial que o professor compreenda o papel da visualização e utilize atividades intencionalmente voltadas a esse fim.

Assim sendo, este trabalho teve como objetivo: *Analisar as contribuições das teses e dissertações que tratam da visualização geométrica segundo Raymond Duval, cadastradas no repositório da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), no período de 2015 a 2023.*

Para alcançar o objetivo geral, tivemos como objetivos específicos:

- Realizar um mapeamento das pesquisas que tratam da visualização geométrica na perspectiva de Duval no período referido;
- Apresentar os trabalhos selecionados e suas contribuições para o desenvolvimento da visualização geométrica;
- Fazer inferências sobre os resultados obtidos nas pesquisas, contribuindo para uma compreensão mais ampla dos processos de visualização dos estudantes.

Para a realização da pesquisa seguiremos os procedimentos metodológicos utilizados por Baqueiro (2016) fundamentados na Análise de Conteúdo segundo Bardin (2011).

Como fundamentação teórica nos apoiaremos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica – Visão, visualização, desenvolvida por Raymond Duval. Esta teoria foi utilizada como base para as inferências ao analisar os trabalhos garimpados.

Estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em quatro capítulos. O Capítulo 1 apresenta o referencial teórico, TRRS, especialmente os aspectos da visualização geométrica segundo Raymond Duval. O Capítulo 2 descreve os

procedimentos metodológicos de busca, seleção e categorização dos trabalhos que compõem o corpus da pesquisa. O Capítulo 3 traz a análise dos dados e as contribuições identificadas nas pesquisas, relacionando-as à fundamentação teórica adotada. Por fim, no capítulo 4, as considerações finais apresentam os resultados encontrados, a partir das inferências e discussões oriundas da análise realizada, destacando implicações para o ensino da geometria.

CAPÍTULO I: REFERENCIAL TEÓRICO METODOLÓGICO.

Este capítulo tem por objetivo apresentar os referenciais teórico-metodológico que fundamentaram esta pesquisa.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), especificamente no que se refere à Visualização Geométrica será utilizada para compreender o processo relacionado ao olhar uma figura geométrica na perspectiva de Raymond Duval e permitir fundamentar as análises dando suporte para as inferências que serão feitas sobre os resultados dos trabalhos garimpados.

Como referencial metodológico apresentaremos alguns elementos da Análise de Conteúdo segundo Laurence Bardin que servirá de suporte para fundamentar o procedimento de análise dos trabalhos pesquisados.

Iniciaremos, em 1.1, apresentando aspectos gerais da TRRS e, em seguida, abordaremos especificamente o significado da Visualização geométrica do ponto de vista da TRRS. Em 1.2, apresentaremos aspectos da Análise de conteúdo segundo Bardin (2011).

1.1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Historicamente, a simbologia era entendida como uma referência semelhante a algo natural já conhecido, sem que houvesse um fator oculto. Porém é no final do renascimento, com a manifestação das indagações dos homens a respeito da sua existência, que se questiona o abstrato presente nas simbologias. É nesse momento em que os signos mudam o seu significado na história e se conceitua de forma rudimentar como “[...] um objeto que representa um outro objeto” (Flores, 2006, p.8), por exemplo, uma pintura de um local é um signo que o representa.

A partir daí, o signo se constitui em uma relação binária entre seu significado e o objeto. Desse modo, ele não fica preso a um só modelo, mas dependente da correlação entre o seu significado próprio e o objeto, atingindo a abstração. Fato que, na época, abriu espaço para duplicação dos objetos

matemáticos e, por consequência, para o desenvolvimento da matemática pura, com seus símbolos, técnicas e formas de representações.


Assim, todo sinal ou linguagens matemáticas utilizadas para expressar um pensamento matemático e que leve a uma associação de ideias, correspondem a signos que estão sendo representados.

Outro ponto importante para compreender a representação dos signos é entender o contexto o qual está sendo mencionado, isto é, existe uma possibilidade de representações por meio de signos de um objeto matemático, que varia conforme a referência demandada. Em vista de esclarecimento damos um exemplo: Tenhamos duas retas “a” e “b” e queremos apresentar a posição que elas ocupam em um plano, no caso retas paralelas. Em linguagem simbólica podemos representar como $a//b$, enquanto em uma representação figural desenharíamos duas retas lado a lado paralelamente. Logo há um único objeto, duas representações por signos, cada uma para uma referência diferente.

Do exemplo acima podemos então retirar dois registros de representação: simbólica e geométrica. Desse modo, vemos que existem diferentes registros de acordo com a referência dada com suas características próprias para representar o objeto matemático. Em síntese são “[...] registros de representação semiótica, já que são produzidos segundo um sistema semiótico, isto é, a partir de regras, convenções, códigos (Flores, 2006, p. 16).”

Para ilustrar, o quadro 1 apresenta o conceito primitivo *reta* em diferentes registros de representação.

Quadro 1: Apresentação do conceito primitivo *reta* em diferentes registros de representação

Objeto	Representações	Tipo de registro
reta	$y=mx+n$ \overleftrightarrow{AB}	Algébrico/Simbólico
		Figural
	reta	Língua natural

Fonte: elaborado pela autora

A função de representação semiótica, além de permitir a comunicação dos objetos matemáticos, permite transformar de uma representação em outra e essas transformações podem ocorrer dentro de um mesmo sistema, o que o autor chama de *tratamento*, ou entre sistemas semióticos diferentes que é a *conversão*.

Em se tratando de Geometria, as representações envolvidas são a língua natural, a simbólica e as representações geométricas ou figurais. Para serem resolvidos, os problemas de geometria necessitam, em sua maioria, do apoio da figura, o que corresponde à conversão de um problema em língua natural para um problema no registro figural. E na resolução do problema muitas vezes se faz necessário transformar uma figura em outra, o que corresponde a um tratamento figural, pois permaneceu dentro do mesmo registro.

Diante da importância da figura na resolução dos problemas geométricos, este autor considera importante compreender a forma de ver, específica da geometria, que este campo da matemática exige. Isto é o que apresentaremos no tópico seguinte.

1.1.1. Visão/Visualização segundo Raymond Duval.

Do ponto de vista da TRRS, a figura geométrica apresenta aspectos específicos relacionados ao seu uso na matemática. Para Duval (2012), uma figura não deve ser entendida apenas por um reconhecimento superficial: ela precisa estar submetida a propriedades geométricas, podendo ser utilizada em diferentes situações de resolução de problemas. Além disso, sua formação exige relações de grandezas.

Isso significa que uma figura possui dois aspectos fundamentais: a forma (aquilo que percebemos visualmente) e as propriedades que a determinam (aquilo que a define matematicamente). É justamente essa dualidade que diferencia uma figura de um simples desenho, pois o desenho está limitado à representação visual, enquanto a figura envolve estrutura conceitual.

Sobre a questão de acesso aos objetos geométricos, Duval (2011) faz uma análise cognitiva das figuras que, segundo ele, diz respeito à forma de “ver” que elas necessitam para que possamos utilizá-las na resolução de um problema

ou no reconhecimento de uma propriedade geométrica aplicada a uma situação real. Para que ocorra essa visualização, que Duval (2011) chama de um modo matemático de ver a figura, o autor afirma que é preciso mudar o olhar sem que a representação visual seja modificada. Portanto, para o autor, a geometria tem particularidades que a diferenciam de outros conteúdos matemáticos e as atividades cognitivas mobilizadas na apreensão dos conceitos geométricos são abrangentes, complexas e dificultam seu aprendizado e seu ensino (Duval, 2011).

O autor acrescenta que as definições e os problemas em geometria requerem, mesmo que inconscientemente, ações de reprodução, construção e desconstrução de figuras que, associadas aos textos, requerem formas de interpretação que classifica em: Perceptiva, operatória, discursiva e sequencial.

- A apreensão perceptiva está mais relacionada ao “ver” da figura, nesse sentido é o primeiro olhar do estudante para o objeto matemático apresentado, ainda enrijecido e vago. Nessa apreensão o estudante se prende apenas ao que é visto de imediato e cria conclusões diante disto.
- A apreensão operatória, em síntese, está relacionada à ação, ao ato de operar diante das informações, é o momento em que a teoria e a prática se encontram. Nesse momento, o estudante usa de dados disponibilizados no problema e interpreta e opera sobre a figura para chegar ao resultado.
- A apreensão discursiva está no ato da justificativa, logo o que foi percebido, criado uma sequência lógica e elaborado, precisa de uma explicação aceitável matematicamente. Nessa apreensão, é requerido que o estudante interprete os elementos da figura geométrica e articule com as hipóteses impostas sobre ela.
- Por fim, na apreensão sequencial relacionada às atividades de construção geométrica ou descrição de uma figura, com o objetivo de reproduzi-la.

Tomar consciência da distinção entre as três primeiras formas de apreensão é condição necessária para a resolução de problemas em geometria e para entrada na forma de desenvolvimento do raciocínio exigida por essa resolução (Duval, 2011). De acordo com o autor, a articulação dessas formas

de apreensão da figura geométrica é uma condição para a apreensão dos objetos geométricos.

Duval (2012) considera que a utilização da figura de forma heurística, está baseada na apreensão operatória e opõe-se à percepção. Este autor completa que a forma heurística de ver, independe da Matemática. “Pelo contrário, esta exploração heurística, que é uma exploração puramente visual, é o pré-requisito cognitivo para reconhecer na figura qual(is) propriedade(s) geométrica(s) utilizar para resolver o problema colocado.” (Duval, 2012, p. 09)

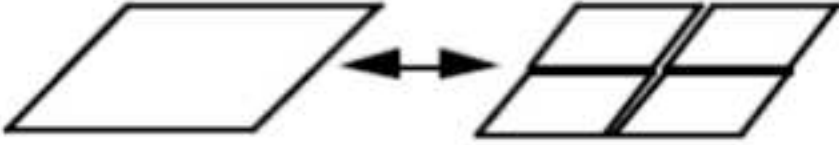

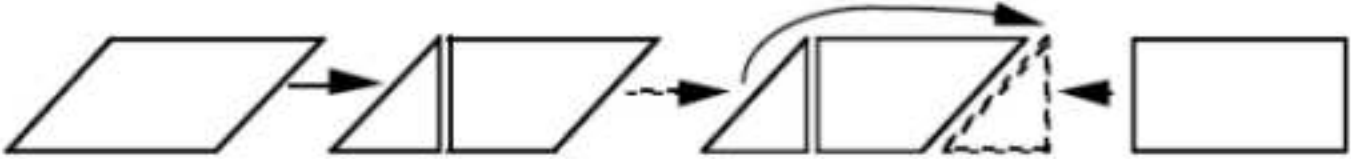
A apreensão operatória mobiliza três tipos de operações exploratórias que o autor denomina como mereológicas, ópticas e posicionais. Sobre estas operações, Duval (2012) revela que:

Essas operações podem ser realizadas fisicamente. Para as operações mereológicas, basta utilizar um suporte de papel para cortar uma figura em diferentes partes. Eles podem ser combinados de diferentes maneiras, como peças de um quebra-cabeça, desde que você tenha algumas peças duplicadas. Para operações ópticas, lentes podem ser usadas. Para operações posicionais, basta “mover” a figura de um de seus vértices para girá-la ou esticá-la. (Duval, 2012, p. 9)

Com relação às operações figurais, Duval (2011) enfatiza a divisão mereológica e a desconstrução dimensional, como fundamentais para o processo da visualização geométrica.

Como mencionado pelo autor, as modificações mereológicas consistem em mudanças na figura decorrentes da sua divisão em partes, de mesma dimensão que a original, as quais podem ser ditas estritamente homogêneas (partes que possuem o mesmo formato que a figura inicial), homogêneas (partes que possuem um formato diferente da inicial, mas que são todas de mesma forma) ou heterogêneas (partes que possuem o formato diferente do inicial e entre si). Tem-se que essas partes originárias das decomposições são chamadas por subfiguras. Para uma melhor ilustração é apresentado o quadro 2

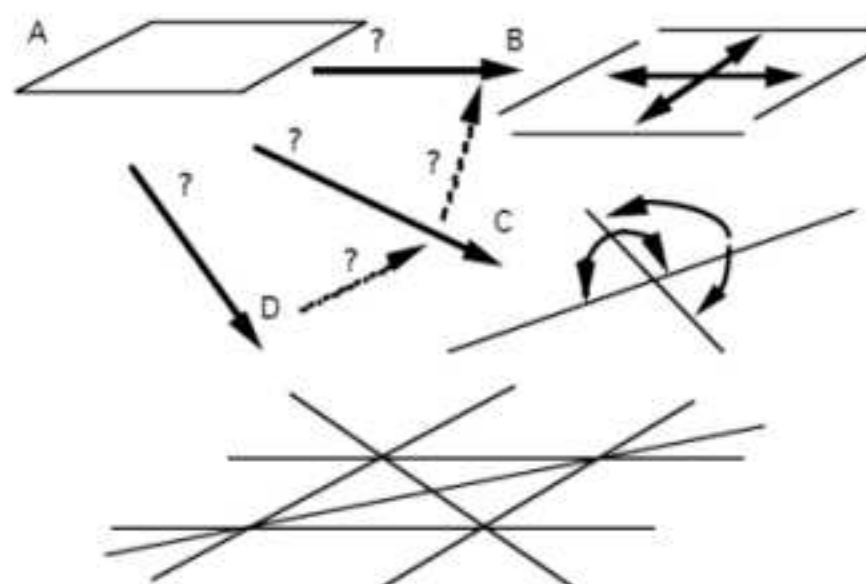
Quadro 2: Decomposição do paralelogramo em subfiguras

Estritamente homogêneas	
Homogênea	
Heterogênea	

Fonte das imagens: Duval, 2022

A desconstrução dimensional refere-se ao reconhecimento das unidades figurais de dimensão inferior às dimensões da figura original, que se classificam em dimensão zero (0D) onde seu único integrante é o ponto, a dimensão um (1D) que corresponde as retas e curvas abertas, a dimensão dois (2D) curvas fechadas bidimensionais e a dimensão três (3D) as figuras com profundidade, as tridimensionais. Além disso, “ela é feita necessariamente em articulação com uma atividade discursiva”. Duval (2022, p. 21). A título de exemplificação, temos a figura 1, onde por meio da desconstrução dimensional, podemos compreender a sua estrutura por meio de segmentos de reta(1D) e pontos (0D).

Figura 1: Desconstrução dimensional de um paralelogramo



Fonte: Duval, 2022

A visualização geométrica segundo Duval (2011) corresponde à articulação entre a apreensão operatória e a desconstrução dimensional. A apreensão operatória envolve os tratamentos figurais, especialmente a divisão mereológica e a desconstrução dimensional está relacionada às propriedades da figura e a justificativa das operações efetuadas. Na perspectiva de Duval (2011, p.90), “sem real consciência dessas duas operações, os alunos e os adultos educados podem ficar cegos diante das representações geométricas e esperar cada vez que alguém lhes diga o que fazer.”

1.2. Análise de Conteúdo segundo Laurence Bardin

Esta pesquisa é de caráter bibliográfico, do tipo estado da arte das pesquisas que tratam da *visualização geométrica* na perspectiva de Raymond Duval. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) esse tipo de pesquisa “procura inventariar, sistematizar e avaliar a produção científica em uma determinada área ou tema de conhecimento” (p.105). Este autor completa que pesquisas desse tipo identificam tendências e descrevem o estado de conhecimento de um determinado tema.

Análise de Conteúdo de Bardin (2011), é usada como referencial metodológico para análise das pesquisas garimpadas. Esta teoria nos apresenta rigores importantes que mediam a leitura e as reflexões feitas acerca do que foi lido, isto é, servem como estruturação e exploração elaborada do que é apresentado até chegar a uma interpretação definitiva, em vista de “[...] desempenharem o papel de ‘técnicas de rupturas’ face à intuição aleatória e fácil” (Bardin, 2011, p. 15).

A proposta da pesquisa apresentada nesse estudo é ir além de uma análise documental que para Bardin (2011, p.51) “é uma operação ou conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob uma forma diferente da original, a fim de facilitar, num estado ulterior, a sua consulta e referenciação”. Para a autora a análise documental tem como objetivo dar forma conveniente e representar de outro modo a informação contida nos documentos pesquisados para facilitar o acesso ao observador proporcionando-o o máximo de informação (aspecto quantitativo) e com o máximo de pertinência (aspecto qualitativo). Por outro lado, a análise de conteúdo vai além deste tipo de análise

por apresentar a função de inferência. Esta autora entende inferência como “operação lógica, pela qual se admite uma proposição em virtude da sua ligação com outras proposições já aceita como verdadeiras.” (Bardin, 2011, p. 45).

Para possibilitar a compreensão das diferenças entre essas duas modalidades de análise, apresentamos no quadro 3 duas características de cada uma delas.

Quadro 3: Comparação entre análise de conteúdo e análise documental

Análise documental	Análise de conteúdo
Trabalha com documentos	Trabalha com as mensagens (comunicação)
Tem como objetivo a representação condensada da informação para consulta e armazenamento.	É manipulação da mensagem para evidenciar os indicadores que permitem inferir sobre outra realidade que não a mensagem.

Fonte: Elaborado pela autora com base em Bardin, 2011.

As fases da análise de conteúdo estão organizadas em três fases que seguem uma cronologia:

- pré-análise;
- exploração do material;
- tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A fase da *pré-análise* corresponde ao pontapé inicial da análise de conteúdo, é o momento da organização dos documentos a serem analisados. Esta fase tem como objetivo tornar possível a operacionalização e sistematização das ideias. Para a autora, esta fase possui três missões: a formulação das hipóteses, dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentam a interpretação final. Na pesquisa utilizamos da leitura flutuante para ter o primeiro contato com os possíveis documentos a serem aprofundados na pesquisa, assim diante da leitura do resumo, das conclusões e das hipóteses criadas a respeito deles criamos a lista dos documentos.

A *exploração do material*, segundo Bardin (2011) é fase da análise propriamente dita, em que consiste na codificação, que é, como o próprio nome diz, onde se codifica as informações superficiais tiradas do texto a fim de associar o conteúdo do texto às unidades de descrições apresentadas. Trata-se de um processo que depende da natureza do problema, dos fundamentos teóricos

e da questão de pesquisa de cada trabalho a ser analisado. É o instante em que são estabelecidas as *unidades de registro e contexto*.

A *unidade de registro* refere-se “a unidade de significação codificada e corresponde ao segmento de conteúdo considerado como unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial”. (Bardin, 2011, p. 134). Neste trabalho, por ter uma abordagem qualitativa, a unidade de registro vai possibilitar a categorização dos trabalhos. Neste caso, não nos preocuparemos com a quantidade de vezes em que a unidade de registro irá aparecer e sim sua presença ou ausência em um fragmento de texto. Esta unidade pode ser uma palavra-chave (item, tema, objeto, personagem, acontecimento ou documento).

A *unidade de contexto*, por sua vez, corresponde ao contexto em que essa palavra está inserida, funcionando como elemento explicativo por trás da palavra-chave selecionada.

Nesta fase também ocorreu a categorização, etapa responsável pela classificação e reagrupamento dos elementos, onde dependem do critério escolhido e conveniente aos conteúdos. Nesta pesquisa, por exemplo, foi o momento de procurar semelhanças entre os documentos e agrupá-los em categorias, visando a organização dos trabalhos.

Na fase de *tratamento dos resultados*, Bardin (2011) traz que os resultados brutos devem ser processados de maneira a serem significativos e válidos. A autora completa que tendo mão desses resultados o pesquisador pode propor inferências e interpretar as informações a propósito dos objetivos da pesquisa que está sendo desenvolvida.

No próximo tópico apresentaremos o procedimento de busca e análise explicitando como estas fases foram desenvolvidas.

CAPÍTULO II: PROCEDIMENTO DE BUSCA: O GARIMPO

Como citado anteriormente, tomamos por referência três fases descritas por Bardin (2011): Pré-análise; exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

2.1. Pré-análise

A *pré-análise* é a fase em que ocorre a escolha dos documentos que serão submetidos à análise. Serão elaboradas hipóteses, os objetivos e indicadores que fundamentarão a interpretação final (BARDIN, 2011). É a fase em que será constituído o *corpus* da pesquisa.

Na fase da pré- análise, buscamos no banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior [CAPES], todos os trabalhos que envolveram o tema do referido estudo no período estipulado na pesquisa. Seguindo a proposta de Bardin (2011) fizemos a leitura flutuante dos trabalhos encontrados e escolhemos aqueles que constituíram o *corpus* da pesquisa, a saber as teses e dissertações defendidas no período de 2015 a 2023, que tratam de visualização geométrica segundo a TRRS.

Iniciamos nossa busca acessando o sítio da CAPES e, procurando produções acadêmicas que continham as palavras-chave *Geometria* e *Visualização* tivemos como resultado 571 trabalhos entre teses e dissertações. A fim de restringir nossa busca aos estudos voltados para o ensino e aprendizagem de Geometria, dentro do período estipulado, impomos alguns filtros. A priori, tomamos apenas o tipo [mestrado e doutorado], grande área de conhecimento [Ciências Exatas e da Terra e a multidisciplinar] e área do conhecimento [Ensino de ciências e matemática]. Assim obtivemos um resultado de 26 publicações dentro do parâmetro.

Diante do resultado obtido, impomos outras restrições relacionadas a área de concentração [Educação em Ciências e Matemática; Educação Matemática; Educação matemática, Cultura e Diversidade; Ensino de Ciências e Matemática; Ensino de Ciências e Educação Matemática e Ensino e Aprendizagem da matemática e seus fundamentos Filosóficos e Científicos]; período [2015 a 2023]. Finalizando com 24 [vinte e quatro] trabalhos.

Após esta etapa, fizemos a leitura do título, resumo e palavras-chave a fim de identificar se o termo “visualização” estava sendo abordado no trabalho segundo a perspectiva de Raymond Duval. Para esta identificação procuramos nas partes mencionadas o nome “Duval” ou “Teoria dos Registros de Representações Semióticas” ou ainda “TRRS” tendo como resultado 6 documentos listados no quadro 4.

Quadro 4: Trabalhos após primeira análise

AUTOR	ANO	TIPO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO
Camila Bonini de Araujo Cassoli	2021	Dissertação
Raquel Polizeli	2020	Tese
Dienifer da Luz Ferner	2019	Dissertação
Elisabete Marcon Mello	2015	Tese
Samuel de souza	2019	Tese
Daiane Gisele de lima	2023	Dissertação

Fonte: Dados da pesquisa

Adiante, em conversa com o grupo de estudo, alguns outros documentos foram levados em consideração, pois, em uma outra análise, apesar de não haver no título ou no resumo propriamente os termos mencionados, alguns desses registros apresentavam indícios de que a “visualização” era abordada segundo a teoria de registros de representação semiótica ao mencionar sobre os tipos de apreensões que fazem parte desta teoria. Logo, foram acrescentados mais 3 documentos apresentados no quadro 5:

Quadro 5: Trabalhos após segunda análise

AUTOR	ANO	TIPO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO
Gabrielly Beatriz Batista Machado	2020	Dissertação
José Edeson de Melo Siqueira	2019	Tese
Valéria da Silva Santos	2020	Dissertação

Fonte: Dados da pesquisa

Totalizando 9 documentos entre teses e dissertações. No entanto, ao tentar baixar os trabalhos de Daiane Gisele e de Dienifer da Luz havia uma

notificação no site da CAPES não autorizando a divulgação dos referidos documentos. Diante da impossibilidade de acesso aos documentos na íntegra, decidimos por procurar em outras plataformas autorizadas e recorreremos à plataforma de teses e dissertações da BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações), onde foi encontrada apenas a tese de Dienifer da Luz. Apesar de acreditar que a falta de autorização para Download do trabalho de Daiane Gisele tenha sido um equívoco no momento do depósito, decidimos não acrescentar por não ter sido encontrado em sites autorizados. Diante do resultado se tornou como melhor opção a retirada da dissertação de Daiane Gisele da pesquisa, mantendo-se 08 documentos apresentados no quadro 6.

Quadro 6: Corpus da pesquisa baseado na leitura flutuante

AUTOR	Ano	TIPO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO
Camila Bonini de Araujo Cassoli	2021	Dissertação
Dienifer da Luz Ferner	2019	Dissertação
Elisabete Marcon Mello	2015	Tese
Gabrielly Beatriz Batista Machado	2020	Dissertação
José Edeson de Melo Siqueira	2019	Tese
Raquel Polizeli	2020	Tese
Samuel de Souza	2019	Tese
Valéria da Silva Santos	2020	Dissertação

Fonte: Dados da pesquisa

É possível que haja outros trabalhos que tratem da visualização, no entanto estes foram os trabalhos encontrados seguindo os critérios explicitados.

2.2. Exploração do Material

Em seguida, foi realizada a *Exploração do Material*, fase em questão que foram estabelecidas as unidades de registro e de contexto e a categorização dos documentos, de forma a agrupá-los de acordo com uma classificação conveniente aos objetivos da pesquisa. Para este fim, iniciou-se a leitura do resumo e considerações finais das teses e dissertações e quando necessário a exploração de outras partes dos textos para esclarecer dúvidas ou fundamentar nossas inferências.

Seguindo o procedimento proposto por Baqueiro (2016), definimos a unidade de registro como sendo o tema central da pesquisa, ou seja, definimos então como *unidade de registro* a palavra *visualização*, uma vez que buscamos as contribuições dos autores a respeito da visualização geométrica; e a *unidade de contexto* foi o trecho do resumo e das considerações finais em que a palavra *visualização* estivesse presente. Logo, os resumos e as conclusões de todos os trabalhos foram revisitados e grifadas, via recurso *highlight*, as partes que continham *visualização*. Por exemplo, a figura 2 apresenta uma parte das considerações finais da dissertação de Camila Bonini que mostra como utilizamos este recurso:

Figura 2: Dissertação de Cassoli (2021) utilizando *highlight*

estudantes Maria e Ana. Para que ocorresse esse tratamento figural da circunferência e do retângulo, presentes nas respostas, foi necessária a mobilização da visualização que também ocorreu de forma intuitiva.

Diante disso, as características que fazem dessa tarefa uma Tarefa Criativa potencializaram a etapa da visualização dos objetos geométricos que emergiram durante as resoluções, uma vez que, por serem questões abertas, possibilitaram fluxo de diferentes ideias e resoluções a respeito do formato do canteiro, as quais foram registradas de forma figurativa. Ou seja, os canteiros foram observados de forma intuitiva por meio das formas geométricas já conhecidas pelos alunos. Assim, a visualização se deu de forma satisfatória sendo o principal processo mobilizado durante as discussões e as produções dos registros escritos e figurais.

Fonte: Cassoli (2021)

Na fase de exploração do material, observamos que os trabalhos de Souza (2019), que apesar de afirmar que a visualização era abordada na perspectiva da TRRS, a ênfase dada fugiu ao objetivo de nossa pesquisa, desse modo teve por definido o *corpus* de análise constituído de 7 [sete] trabalhos que tratam da visualização Geométrica segundo a TRRS de Raymond Duval, no período de 2015 a 2023, obedecendo aos filtros estabelecidos.

Assim, estabelecemos nosso *corpus* definitivo que apresentamos no quadro 7.

Quadro 7: Corpus da pesquisa após exploração do material

AUTOR	ANO	TIPO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO
Camila Bonini de Araujo Cassoli	2021	Dissertação
Dienifer da Luz Ferner	2019	Dissertação
Elisabete Marcon Mello	2015	Tese
Gabrielly Beatriz Batista Machado	2020	Dissertação
José Edelson de Melo Siqueira	2019	Tese
Raquel Polizeli	2020	Tese
Valéria da Silva Santos	2020	Dissertação

Fonte: Dados da pesquisa

Foram criadas duas categorias: na primeira entraram os trabalhos em que o objeto de investigação é explicitamente o processo de Visualização Geométrica. Nesta categoria, classificamos 2 (dois) trabalhos. Na segunda categoria estão os trabalhos em que o processo de visualização aparece de forma implícita. Nesta categoria o objetivo do trabalho não expressa explicitamente que pretende pesquisar a visualização, mas investiga elementos relacionados a esta atividade, como as apreensões geométricas. Nesta categoria foram classificados cinco trabalhos.

Quadro 8: Descrição das categorias

Categoria	Descrição da categoria
Categoria 1	Trabalhos em que se pretendia investigar como ocorre a atividade da visualização geométrica.
Categoria 2	Trabalhos de que o tema visualização foi abordado na pesquisa, em que se faz uso de algum dispositivo didático para o desenvolvimento da visualização ou para identificar elementos relacionados à visualização.

Fonte: Elaborado pela autora

O quadro 9 apresenta o *corpus* de análise com o ano de publicação, o tipo de pesquisa [mestrado ou doutorado], o título e a categoria em que foi classificado.

Quadro 9: Identificação do *corpus* da pesquisa

Autor	Ano	Tipo	Título	Categoria
CASSOLI, C. B. A.	2021	D	As contribuições de tarefas criativas nas fases da aprendizagem da circunferência no Ensino Fundamental.	C2
POLIZELI, R.	2020	T	As contribuições de tarefas criativas nas fases da aprendizagem da circunferência no Ensino Fundamental.	C1
MACHADO, G.B.B	2020	D	Curvas cônicas: uma análise das articulações entre os registros de representação com auxílio do Conics 3D.	C2
SANTOS, V.S.	2020	D	Registros de Representações Semióticas mobilizados por professores de matemática no ensino dos prismas.	C2
FERNER, D.L	2019	D	Geometria espacial de posição sob a ótica dos registros de representação semiótica: um estudo com licenciandos em matemática.	C2
SIQUEIRA, J.E.	2019	T	Articulando os registros de representação semiótica das curvas cônicas através da integração de recursos computacionais.	C2
MELLO, E.M.	2015	T	A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: um estudo sob a ótica de Duval	C1

D: dissertação; T: tese; C1: Categoria 1; C2: categoria 2

Fonte: dados da pesquisa

Observamos que a maioria dos trabalhos foram desenvolvidos entre os anos 2019 e 2020, sendo no total quatro teses e três dissertações. Além disso, apenas dois trabalhos objetivam analisar explicitamente o processo de visualização.

No próximo capítulo serão feitos o *tratamento dos resultados, a interpretação e as inferências* sobre o corpus constituído à luz da Teoria dos Registros de representações semióticas Visão e Visualização.

CAPÍTULO III: ANÁLISE DAS PESQUISAS GARIMPADAS

Ao categorizar os trabalhos em dois grupos, vamos analisar as principais contribuições dos pesquisadores com relação à visualização geométrica.

Para apresentar a análise das pesquisas seguiremos o devido roteiro:

1. Síntese de cada documento
2. Quadro com os principais resultados de cada trabalho.
3. Uma análise cruzada dos trabalhos de cada categoria e inferências fundamentadas na TRRS – Visão, Visualização.

3.1 Categoria 1

Iniciaremos apresentando, no quadro 10, os objetivos das duas pesquisas que compõem a Categoria 1 - os trabalhos em que se pretende investigar a atividade da visualização geométrica como tema central da pesquisa.

Quadro 10: Trabalhos que compõe a Categoria 1

Autoria	Objetivo
Polizeli (2020)	Investigar a atividade de Visualização na resolução de tarefas de Geometria, pelos integrantes de dois grupos de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade ao norte do Estado do Paraná.
Mello (2015)	Investigar como alunos cegos visualizam objetos geométricos, embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Visão e Visualização de Raymond Duval

Fonte: Dados da pesquisa

POLIZELI (2020)

A pesquisa de Polizeli se baseia na investigação do processo de visualização geométrica entre dois grupos de licenciandos, sendo um grupo formado por alunos calouros que não tiveram acesso aos componentes que envolvem geometria e o outro formado por alunos que já concluíram estes componentes.

A autora recorreu a uma entrevista semi-estruturada em que continham seis tarefas do tipo problema de exploração e que para sua resolução a

visualização era requerida. As questões apresentavam situações diversas que envolviam a exploração de figuras geométricas para a resolução dos problemas.

Desse modo pode-se observar o desenvolvimento e/ou carência das apreensões figurais, da habilidade heurística da figura, da discriminação visual e de operações mentais nos dois grupos e com isso a autora trouxe uma perspectiva diante dos resultados, ora observando os grupos em particular, ora criando paralelos entre estes.

A pesquisa evidenciou a necessidade de buscar estratégias que promovam o conhecimento, o manuseio e a aplicação dos elementos que compõem a visualização já que apesar do grupo que já havia estudado as disciplinas terem melhores resultados ainda possuíam argumentos perceptivos e intuitivos em suas respostas. Apresentamos no quadro 11 os principais resultados observados na pesquisa de Polizeli (2020).

Quadro 11: Resultados principais de Polizeli (2020)

QUESTÕES	Como acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade no Brasil resolvem tarefas de Geometria Euclidiana em que a visualização é requerida? Como se dá a atividade de Visualização nesse público? Há diferenças na atividade de Visualização de alunos ingressantes e de concluintes? Os conceitos geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados para eles?
PRINCIPAIS RESULTADOS	<ul style="list-style-type: none"> • Foram observadas dificuldades principalmente em relação ao emprego da função discursiva por parte dos integrantes dos dois grupos, e que essas dificuldades são acentuadas nas produções dos membros ingressantes; • Dificuldade no processo de conversão, evidenciado pela dificuldade na formalização e no emprego de justificativas pautadas em conceitos e propriedades matemáticas, e não em argumentos intuitivos e perceptivos; • Observa-se que, embora haja a passagem entre os registros figural e língua natural pela coordenação entre as funções heurística e discursiva, há dificuldades nessa conversão nas respostas dos integrantes de ambos os grupos; • Necessidade de melhorias em relação a estratégias que possibilitem melhor compreensão e desenvolvimento da Visualização nas disciplinas, principalmente nas de Geometria do curso em que ocorreu a pesquisa; • Necessidade da busca de estratégias que promovam o conhecimento, o manuseio e a aplicação dos elementos

Fonte: Adaptado dos resultados apresentados na pesquisa de Polizeli (2020)

MELLO (2015)

No trabalho de Elisabete Marcon Mello é apresentado o interesse da autora para entender a forma como se desenvolve a visualização de objetos

geométricos por estudantes cegos. Para isso, foi feito o estudo de caso em uma escola onde havia alunos cegos frequentando as salas de aula comuns.

A autora buscou investigar como os estudantes cegos trabalham com as representações figurais, se podem criar suas próprias representações ou se sempre dependem de outras pessoas para ter acesso a elas.

Foram realizadas cinco entrevistas com dois estudantes cegos congênitos que estudaram em escolas públicas da cidade de Santo André – São Paulo.

Com a pesquisa, foi verificado que os alunos entrevistados conseguiam reconhecer figuras geométricas planas quando em relevo, mas não reconheciam sólidos geométricos em perspectiva, pois o contorno desses objetos não correspondia ao contorno de sua representação no papel. O que remete a diferença na ordem da percepção pelo tato quando o sólido é apresentado por meio de um material concreto e por meio da representação em relevo no papel.

Na tese a autora traz pontos a respeito do processo da visualização referente ao observar as partes e o todo da figura, como também a importância do material concreto para o aprendizado. No quadro 12 apresentamos os principais resultados observados no trabalho de Mello (2015).

Quadro 12: Resultados principais de Mello (2015)

QUESTÃO	Como os alunos cegos visualizam objetos geométricos?
---------	--

PRINCIPAIS RESULTADOS	<ul style="list-style-type: none"> • O aluno cego tem acesso às representações por meio do tato, portanto ele não tem a imagem visual de referência para guiar a construção de sua imagem mental. Sendo assim, ele se guiará pelo contorno do objeto e não pela sua imagem, que dispõe de cores e sombras; • Os alunos entrevistados identificaram figuras geométricas planas, representadas em relevo, no papel, reconhecendo suas formas, mas não reconheceram representações de sólidos geométricos em perspectiva, pois o contorno desses objetos não corresponde ao contorno de sua representação no papel; • A ordem de percepção pelo tato é diferente quando o aluno cego tem um objeto concreto em suas mãos e quando tem uma representação deste objeto em relevo no papel. Quando o aluno cego tem um objeto concreto em suas mãos, e este objeto lhe é familiar, ele reconhece o todo, sem necessidade de observar as partes, mas, quando a representação está em relevo no papel, mesmo que o aluno conheça o objeto representado, ele visualiza primeiro as partes para depois visualizar o todo; • É necessário ensinar esse aluno a reconhecer as representações; • É necessário ensinar a visualizar, é preciso que o aluno cego aprenda a identificar em cada representação, o objeto que está sendo representado, reconhecendo seus contornos, conhecendo suas características e relacionando, parte por parte, a representação ao objeto retratado. Esse reconhecimento não é automático, mas pode ser aprendido; • A falta de conhecimento geométrico do aluno pode prejudicar e até inviabilizar a visualização.
-----------------------	--

Fonte: Adaptado dos resultados apresentados na pesquisa de Mello (2015)

Observamos que apenas dois trabalhos buscam investigar explicitamente como se dá o processo de visualização. Embora ambos investiguem o modo de ver uma figura em geometria, as pesquisas ocorrem em contextos diferentes. Enquanto Polizeli (2020) busca investigar como se dá a atividade de visualização em estudantes considerados *normovisuais*, a pesquisa de Mello (2015) investiga como os alunos *cegos* visualizam objetos geométricos.

As duas pesquisas se utilizaram de entrevistas contendo questões de geometria para coleta de dados. As atividades envolveram a identificação de figuras bidimensionais e tridimensionais no plano. Para resolução das atividades o estudante deve empregar as funções heurística e discursiva da figura geométrica. O trabalho de Mello (2015), além dos registros figural e da língua natural, se utilizou de materiais manipuláveis.

Podemos evidenciar no trabalho de Polizeli (2015) dificuldade por parte dos estudantes envolvidos no emprego da função discursiva, que é revelado pela predominância de argumentos empíricos nas justificativas apresentadas, prevalecendo a apreensão perceptiva.

Mello (2015) apresenta a forma como o aluno *cego congênito*, que não tem referência das representações dos conceitos geométricos, visualiza as figuras geométricas. A autora constatou que os alunos entrevistados identificaram figuras geométricas planas, representadas em relevo, no papel, reconheceram suas formas, mas não reconheceram representações de sólidos geométricos em perspectiva, uma vez que o contorno desses objetos não corresponde ao contorno de sua representação no papel.

Ambas as pesquisas revelam que a falta de conhecimento de geometria dificulta no processo de visualização e que a visualização precisa ser exercitada nos diversos níveis de ensino.

3.2 Categoria 2

A priori, apresentaremos no quadro 13 os trabalhos que compõem a categoria 2, que corresponde aos trabalhos em que a visualização foi abordada por meio do uso de algum mecanismo didático para o seu desenvolvimento.

Quadro 13: Trabalhos que compõe a Categoria 2

Autoria	Objetivo
Cassoli (2021)	Identificar as apreensões figurais durante a aprendizagem dos conceitos que embasam a circunferência como um lugar geométrico em uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental.
Machado (2020)	Investigar o processo de articulação entre os registros de representação das Curvas Cônicas sob uma perspectiva dinâmica de articulação através de uma sequência de atividades com o auxílio do protótipo “Conics 3D”.
Santos (2020)	Compreender como os registros de representação semiótica são mobilizados por professores de matemática no ensino dos prismas no sexto ano do Ensino Fundamental.
Ferner (2019)	Analisar tratamentos figurais mobilizados por licenciandos em Matemática ao estudar conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição.
Siqueira (2019)	Conceber, desenvolver e validar um artefato que possibilite a integração de recursos computacionais na exploração dos tratamentos e das conversões dos registros de representação semiótica das curvas Cônicas.

Fonte: Dados da pesquisa

CASSOLI (2021)

Para sua pesquisa a autora valeu-se de três tarefas criativas envolvendo o conceito de circunferência aplicadas individualmente a 6 alunos do sétimo ano do ensino fundamental, cujo objetivo era identificar os processos

cognitivos- visualização, construção e raciocínio- propostos por Duval que podem ser identificados por meio das apreensões perceptiva, operatória, sequencial e discursiva. Cada uma das tarefas explorava alguns tipos das apreensões citadas de forma a criar uma relação entre elas e os processos cognitivos desenvolvidos.

Na tarefa criativa 1, a visualização pode ser desenvolvida quando os estudantes precisam saber de qual forma as plantas devem ser posicionadas no jardim para satisfazer a questão e ao tentar resolver a questão o aluno usará a apreensão operatória. Na tarefa criativa 2 a visualização se apresenta no momento em que o estudante precisa compreender as características trabalhadas e pensar nas estratégias durante a criação das inúmeras circunferências solicitadas. Na tarefa criativa 3, diante da proposta da construção de uma mandala no papel, a visualização se apresenta pela apreensão perceptiva e operatória.

Como conclusão é feito um quadro observando a trajetória das 6 crianças nas tarefas e nos processos cognitivos desenvolvidos e com a análise dos resultados a autora afirma que foi possível perceber a eficiência das tarefas criativas ao potencializarem os processos cognitivos identificados por meio das apreensões. No quadro 14 apresentamos os principais resultados observados na pesquisa de Cassoli (2021).

Quadro 14: Resultados principais de Cassoli (2021)

QUESTÃO	Quais as apreensões figurais mobilizadas por estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental ao resolverem Tarefas Criativas que contemplam a circunferência como lugar geométrico?
PRINCIPAIS RESULTADOS	<ul style="list-style-type: none"> • Tarefas Criativas [aquelas que contemplam os aspectos: fluência, flexibilidade e originalidade] sobre a circunferência como um lugar geométrico, com o intuito de mobilizar as apreensões figurais, contribuíram como um caminho para alcançar a aprendizagem do objeto geométrico circunferência potencializando esse processo por meio da mobilização das apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial e, conseqüentemente, a visualização, a construção e o raciocínio; • Os aspectos que fazem uma tarefa ser uma Tarefa Criativa, ou seja, a fluência, a flexibilidade e a originalidade, oportunizaram situações que potencializaram a visualização do objeto geométrico.

Fonte: Adaptado dos resultados apresentados na pesquisa de Cassoli (2021)

MACHADO (2020)

A pesquisa de caráter pesquisa-intervenção tem por questão norteadora: “Como se dá o processo de articulação dos registros de representação das Curvas Cônicas através de uma abordagem articulada e dinâmica com auxílio de uma sequência de atividades e do protótipo Conics 3D?” . Portanto, o objetivo está em observar a articulação entre os registros de representação das curvas cônicas através de uma sequência dividida em duas etapas usando o protótipo “*Conics 3D*”. A iniciativa tem por justificativa da autora a carência do ensino do ensino deste conceito no Brasil e em outros países.

Os participantes da pesquisa eram do sexto semestre do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica (UFPE) e já tinham conhecimento de Curvas cônicas desde o primeiro semestre da graduação.

A primeira etapa consistiu no reconhecimento de outras representações das curvas diferentes do registro algébrico. A segunda etapa focou na conversão entre os registros geométricos e algébricos durante as nove questões aplicadas.

Os resultados obtidos reforçam a necessidade de atividades voltadas à mobilização cognitiva já que as cônicas em sua maioria são ensinadas de forma

apenas algébrica, sem considerar as suas outras representações. Logo a simulação da representação figural espacial no *software* favoreceu a identificação de propriedades dos cones além do reconhecimento das diferentes representações das curvas cônicas.

O *Conics 3D* favorece a visualização da integração dos registros algébricos e geométricos do objeto matemático em questão, visto que havia a necessidade da mobilização das apreensões perceptivas e operatórias (modificação ótica) e operações de conversão e tratamento na resolução das questões apresentadas pelo pesquisador.

No quadro 15, apresentamos os principais resultados observados nesta pesquisa.

Quadro 15: Resultados principais de Machado (2020)

QUESTÃO	Como se dá o processo de articulação dos registros de representação das Curvas Cônicas através de uma abordagem articulada e dinâmica com auxílio de uma sequência de atividades e do protótipo <i>Conics 3D</i> ?
PRINCIPAS RESULTADOS	<ul style="list-style-type: none"> • Os tratamentos figurais no ambiente de geometria dinâmica ocorrem de maneira diferente do ambiente de papel e lápis, pois os alunos acessam as transformações de maneira dinâmica a partir do software, diferente do que aconteceria com recursos não dinâmicos; • A influência dos registros dinâmicos de representação pode se caracterizar como um importante recurso na percepção e na coordenação dos registros de representação semiótica dos objetos matemáticos.

Fonte: Adaptado dos resultados apresentados na pesquisa de Machado (2020)

SANTOS (2020)

Valeria Santos na sua dissertação buscou compreender como os registros de representação semiótica são mobilizados por professores de matemática no ensino dos prismas. Para tal objetivo, 4 professores foram observados em suas aulas e participaram de um diálogo com a pesquisadora, iniciativas que desencadeiam nas conclusões.

É demonstrado, segundo relatos dos professores, que os estudantes possuem dificuldade em visualizar o prisma a partir do registro na língua natural. Além de observar que as apreensões perceptivas e as operatórias foram as mais mobilizadas pelos professores na resolução dos problemas propostos nas aulas.

Os resultados da pesquisa mostram que o ensino dos prismas no contexto analisado depende de uma coordenação de três combinações: língua natural, perspectiva e planificado; língua natural, planificado e material manipulável; língua natural, perspectiva e material manipulável. A seguir, o quadro 16 apresenta os principais resultados observados no trabalho de Santos (2020).

Quadro 16: Resultados principais de Santos (2020)

QUESTÃO	Que registros de representação semiótica são mobilizados por professores de matemática no ensino dos prismas no 6º ano do Ensino Fundamental?
PRINCIPAIS RESULTADOS	<ul style="list-style-type: none"> • Os resultados da pesquisa mostram que o ensino dos prismas no contexto analisado repousa sobre a coordenação de, pelo menos, três combinações de registros de representação semiótica: língua natural, perspectiva e planificado; língua natural, planificado e material manipulável; língua natural, perspectiva e material manipulável. Os quais foram submetidos às duas transformações semióticas – tratamento e conversão – e às quatro apreensões – perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. • As apreensões foram identificadas em três tipos de problemas geométricos: visualização do prisma construído com material manipulável [o qual mobilizou as apreensões perceptiva e operatória posicional e mereológica], visualização do prisma em perspectiva [que mobilizou as apreensões perceptiva e operatória mereológica] e construção do prisma com materiais manipuláveis. • Observou-se a importância de os cursos de formação de professores agregarem a teoria dos registros de representações semióticas, visando prepará-los para o reconhecimento das nuances do trabalho com diferentes registros e da necessidade de diversificar os tratamentos e conversões nos diferentes momentos do processo.

Fonte: Adaptado dos resultados apresentados na pesquisa de Santos (2020)

FERNER (2019)

A pesquisa usou elementos da análise de conteúdo e buscou analisar como os licenciandos mobilizavam tratamentos nas figuras quando incubidos na geometria de posição.

Em uma primeira etapa, visando entender como esse ensino se apresentava aos licenciandos, foi realizada uma análise de bibliografias mais presentes nos componentes curriculares.

As obras escolhidas se deram por meio de uma pesquisa minuciosa onde a priori, foram contabilizadas as instituições no Brasil que ofertavam o curso de licenciatura em Matemática e, em seguida, listadas as disciplinas que envolviam a geometria. Por fim, foram escolhidas as quatro obras mais presentes nos referidos cursos.

Com a investigação notou-se algumas atividades que se apresentavam apenas usando a linguagem natural em seus enunciados e permanecendo nelas. Além do registro figural e a desconstrução dimensional serem pouco exploradas.

A partir daí e com o intuito de criar uma atividade voltada ao exercício dos tratamentos figurais, foram elaboradas três tarefas estruturadas a partir da reorganização e/ou influência dessas atividades presentes nas obras

As tarefas fizeram com que os sujeitos mobilizassem diferentes tipos de transformações cognitivas e distintas apreensões figurais o que contribuiu para o movimento de desconstrução dimensional e para o funcionamento espontâneo da visualização.

Na atividade elaborada a autora buscou mobilizar as apreensões operatória, ótica e posicional, além da presença da operação mereológica e da desconstrução dimensional. No quadro 17 apresentamos os principais resultados obtidos por Ferner (2019).

Quadro 17: Resultados principais de Ferner (2019)

QUESTÃO	Quais contribuições de um estudo de conceitos da Geometria Espacial de Posição, apoiado em tratamentos figurais, de acordo com Duval, na formação inicial de professores de Matemática?
PRINCIPAIS RESULTADOS	<ul style="list-style-type: none"> ▪ As diferentes representações do cubo e a necessidade de recorrer a diferentes resultados da Geometria Espacial de Posição provocou nos estudantes envolvidos na pesquisa a mobilização de diferentes tipos de transformações cognitivas e diferentes apreensões figurais; ▪ Aspectos da teoria dos RRS contribuíram para o movimento de desconstrução dimensional, isto é, observar as diferentes unidades figurais contidas em um objeto com a intenção de solucionar o problema proposto; ▪ À vista deste resultado pode-se afirmar que os tratamentos figurais são um meio que contribui na aprendizagem da visualização em Geometria, considerando as soluções apresentadas pelos acadêmicos na realização das atividades propostas.

Fonte: Adaptado dos resultados apresentados na pesquisa de Ferner (2019).

SIQUEIRA (2019)

A tese de José Edeson Siqueira se desenvolve a partir da observação de que o estudo das curvas cônicas tem se perdido na educação básica em vários países, inclusive no Brasil. Como o estudo das curvas cônicas se apresentava algumas vezes fragmentada, observou-se a necessidade de haver uma proposta interativa, na qual seria possível a articulação entre as várias representações e suas transformações por conversão e tratamento. Assim é desenvolvido o protótipo “*Conics Studium 3D*”, utilizando de recursos computacionais para a exploração dos registros semióticos e relação das curvas cônicas sendo assim um auxiliador para o ensino.

O trabalho se divide em três partes definidas como “PARTE A”, “PARTE B” e “PARTE C”, que envolve a parte teórica, o desenvolvimento do protótipo e a validação com a experimentação do protótipo.

Pelas palavras do pesquisador:

Segundo a avaliação dos professores participantes do processo de validação, o protótipo permite a visualização das várias representações das curvas cônicas, disponibilizando suas diferentes representações e as alterações concomitantes, isto é, articulações dinâmicas entre as variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes. (Siqueira 2019, p 297)

Logo, com o software pode-se fazer modificações no gráfico e nas expressões algébricas gerando uma observação da representação da figura espacial, além de gerar habilidades de raciocínio, análise e visualização de estudantes e professores. Segue o quadro 18 com os principais resultados de Siqueira (2019).

Quadro 18: Resultados principais de Siqueira (2019)

QUESTÃO	Quais os princípios teórico-metodológicos que podem servir à concepção-desenvolvimento-validação de um recurso computacional capaz de favorecer a manipulação e articulação dinâmica de sistemas de representação, em particular no caso das cônicas?
PRINCIPAIS RESULTADOS	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dificuldades referentes ao ensino das curvas cônicas estão relacionadas a articular as diferentes representações, associadas às transformações por conversão; as dificuldades em articular um mesmo registro, relacionado às transformações por tratamento e principalmente à abordagem fragmentada no ensino das curvas cônicas; ▪ O protótipo do <i>Conics Studium 3D</i> oferece a possibilidade de exploração do que denominamos de “registros semióticos dinâmicos”, isto é, de articular de maneira dinâmica suas equações (e suas várias formas entre si – transformação por tratamento), sua representação gráfica cartesiana e a sua representação figural espacial, de modo que, ao realizar deslocamentos na representação figural espacial, obtemos modificação no gráfico cartesiano e nas expressões algébricas, permitindo o acesso rápido e contínuo a várias situações (Transformação por conversão). ▪ Segundo a avaliação dos professores participantes do processo de validação, o protótipo permite a visualização das várias representações das curvas cônicas, disponibilizando suas diferentes representações e as alterações concomitantes, isto é, articulações dinâmicas entre as variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes. Além disso, permite observar a curva enquanto corte de um cone duplo a partir de elementos de uma curva traçada no sistema de coordenadas no plano cartesiano.

Fonte: Adaptado dos resultados apresentados na pesquisa de Siqueira (2019)

Observamos que a maioria dos trabalhos fazem parte da categoria 2, uma vez que o processo de visualização aparece de forma implícita, ao verificar elementos que compõe esta atividade, segundo a TRRS, por meio de algum dispositivo didático.

Os contextos em que as pesquisas foram realizadas diferem com relação aos ambientes [Geometria dinâmica e papel e lápis], aos níveis [Ensino fundamental e superior] e público envolvido [estudantes e professores].

Com relação aos objetos geométricos abordados nas pesquisas envolveram geometria euclidiana e não euclidiana: circunferência, abordada por Cassoli (2021), prisma, por Santos (2020), Geometria espacial de posição no cubo por Ferner (2019) e estudo das curvas cônicas por Siqueira (2019) e Machado (2020), sendo estes dois últimos do mesmo programa.

Os trabalhos de Cassoli (2021) e Ferner (2019) apontam que as tarefas propostas, contemplando diferentes representações de um mesmo objeto, provocaram a mobilização de diferentes transformações cognitivas e das apreensões perceptiva, operatória, discursiva, contribuindo para a aprendizagem dos conceitos envolvidos e para o desenvolvimento da visualização.

Santos (2020) observou as aulas de um grupo de professores sobre prisma no Ensino Fundamental e constatou que, no contexto analisado, foi possível registrar a coordenação de diferentes registros de representações e a mobilização das apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial.

Siqueira (2019) e Machado (2020) realizaram suas pesquisas no contexto da geometria dinâmica, mais especificamente com o Software *Conics Studium 3D*, e o objeto matemático envolvido nas duas pesquisas foi o estudo das Curvas Cônicas.

Siqueira (2019) verificou que o Software possibilitou a articulação dos registros algébrico, gráfico e figural, de forma dinâmica, por meio da exploração dos *registros dinâmicos*. Dessa forma, segundo o autor, permitiu a mobilização das transformações cognitivas de tratamento e conversão.

Machado (2020) observou que a mobilização das apreensões perceptiva e operatória ocorrem de maneira diferente nos ambientes de geometria dinâmica e papel e lápis, pois, segundo a autora, “os alunos acessam as transformações de maneira dinâmica a partir do software, diferente do que aconteceria com recursos não dinâmicos”. (Machado 2020, p.114).

Todos os trabalhos afirmam que, em alguma medida, houve indícios de desenvolvimento da visualização dos estudantes envolvidos. Dentre os indicadores percebidos pelos pesquisadores para justificar esta constatação estão a mobilização das apreensões perceptiva, operatória e discursiva; os

tratamentos figurais realizados pelos estudantes e a articulação entre as funções heurística e discursiva, conforme proposto por Duval (2022).

Diante dos resultados analisados foi possível constatar que problemas que requerem a conversão para uma figura geométrica e exigem justificativa; tarefas que associam recursos didáticos manipulativos associados à sua representação figural e tarefas com uso de software de geometria dinâmica podem contribuir para o desenvolvimento da visualização.

Segundo a TRRS, a atividade de visualização em geometria está relacionada à representação figural da situação apresentada em problemas, propriedades ou conceitos de Geometria. Desse modo, qualquer que seja o dispositivo didático ou artefato que será testado com o intuito de avaliar seu potencial para o desenvolvimento da visualização deverá solicitar representação e tratamentos figurais que avalie a utilização da figura de forma heurística.

Para Flores e Moretti (2004, p. 3) “A produtividade heurística de uma figura para resolução de problemas matemáticos depende das possibilidades de aplicar nela tratamentos figurais”. Esses tratamentos figurais citados pelos autores dizem respeito à apreensão operatória de uma figura, especialmente a divisão mereológica e a operação de reconfiguração que, segundo Duval (2011), se apoiam na percepção. A esse respeito, a maioria dos trabalhos analisados apresentaram tarefas em que esta operação precisou ser mobilizada, mas observamos poucas tarefas elaboradas no sentido de exercitá-la.

Com relação à desconstrução dimensional, os trabalhos pesquisados requerem a mobilização desta atividade ao solicitar a justificativa de cada solução apresentada, no entanto, não identificamos tarefas com o intuito de desenvolver esta habilidade.

Para a elaboração de problemas com finalidade de desenvolver a visualização, Duval (2011) orienta que a organização das tarefas de geometria deve fazer variar a figura, depois a situação que ajuda a ver a solução até aquelas em que, ao contrário, dificulta de vê-la. Dessa forma torna-se possível identificar fatores figurais que facilitam ou inibem um tratamento figural do problema.

Segundo este autor, para o desenvolvimento da visualização é necessário que se desenvolvam tarefas específicas em que se exercite com os estudantes a operação de reconfiguração e tarefas que exercitem a desconstrução dimensional das formas. O autor acrescenta que um tipo de tarefa não desenvolve as duas habilidades, estas possuem características distintas. No primeiro tipo de tarefa é desenvolvida a habilidade de usar a figura de forma heurística na resolução de um problema, ou seja, manipular a figura em busca da solução, e no segundo tipo, o estudante desenvolve a habilidade de identificar as propriedades da figura e justificar matematicamente as soluções apresentadas.

A constatação de que a falta de conhecimentos geométricos dos estudantes envolvidos nas pesquisas dificultou e até inviabilizou a visualização, foi um resultado comum nas pesquisas analisadas. Nesse caso, podemos inferir que há necessidade de se trabalhar atividades que exercitem a visualização geométrica desde os anos iniciais e de se discutir sobre esse processo nas formações inicial e continuada de professores, sob o risco de se instalar um ciclo vicioso em que não se aprende geometria porque não desenvolveu a habilidade de visualizar e, reciprocamente, não se visualiza porque não tem os conhecimentos de geometria necessários para coordenar as funções heurísticas e discursiva que compõem esse processo.

CAPITULO IV: CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho de conclusão de curso apresentado teve por base o mapeamento de pesquisas, entre teses e dissertações, que tratassem da Visualização geométrica na perspectiva da TRRS segundo Raymond Duval. Desse modo, tivemos como ponto de partida o estudo desta teoria.

Como referencial metodológico, nos referenciamos na Análise de Conteúdo desenvolvida por Laurence Bardin. Além disso, seguimos o procedimento de busca e codificação utilizado por Baqueiro (2016).

Seguindo critérios definidos de acordo com o objetivo deste estudo, constituímos o corpus da pesquisa com 7 trabalhos, entre teses e dissertações, os quais foram analisados à luz dos referenciais teóricos citados.

Buscamos compreender os fatores que pudessem influenciar no desenvolvimento da visualização e, para isso, a pesquisa teve como objetivo *Analisar as contribuições das teses e dissertações que tratam da visualização geométrica segundo Raymond Duval, cadastradas no repositório da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), no período de 2015 a 2023.*

Para alcançar este objetivo

- Realizamos o mapeamento das pesquisas que tratam da visualização geométrica na perspectiva de Duval no período referido e os apresentamos para serem consultados em pesquisas futuras que tratem da visualização geométrica;
- Apresentamos os trabalhos selecionados e suas contribuições para o desenvolvimento da visualização geométrica. Destacamos os objetivos e os principais resultados de cada uma delas;
- Fizemos inferências sobre os resultados obtidos nas pesquisas, contribuindo para uma compreensão mais ampla dos processos de visualização dos estudantes.

Diante de nossas análises observamos que as pesquisas não apresentam explicitamente os fatores que ajudam ou inibem a atividade de visualização geométrica, ou seja, características das figuras, posições ou contextos, que

facilitam ou dificultam os tratamentos figurais ou identificação de propriedades das figuras, uma vez que não foi o objetivo de nenhum deles. No entanto, de modo geral os autores dos trabalhos pesquisados afirmam que os tratamentos figurais são um meio para o desenvolvimento da visualização.

Nessa perspectiva, observamos que apesar das atividades presentes nas pesquisas solicitarem a mobilização das apreensões operatória e discursiva, identificamos poucas tarefas em que a operação de reconfiguração estivesse presente e ausência de tarefas para *exercitar* a desconstrução dimensional das formas. Embora essas operações tenham sido mobilizadas em tarefas presentes nas pesquisas.

Observamos também a necessidade de se desenvolver mais trabalhos que busquem compreender o processo de visualização de estudantes com deficiência visual uma vez que os problemas de geometria envolvem figuras que precisam ser manipuladas e modificadas no papel e nem sempre estas representações figurais correspondem à sua representação material.

Acreditamos que alcançamos nosso objetivo e ratificamos a necessidade de mais pesquisas que tratem da visualização em geometria e que este tema seja discutido nas formações inicial e continuada de professores a fim de contribuir para um ensino de geometria que propicie o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

REFERÊNCIAS

- BAQUEIRO, Grace Dorea Santos. *Achados sobre Generalização De Padrões ao 'garimpar' pesquisas brasileiras de Educação Matemática (2003 - 2013)*. 2016. 229f. Tese (doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.
- BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70, 2011.
- INSTITUTO BRASILEIRO DE INFORMAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA (IBICT). *Biblioteca Digital de Teses e Dissertações – BDTD*. Disponível em: <https://bdtd.ibict.br/vufind/>.
- CASSOLI, Camila Bonini de Araujo. *As contribuições de tarefas criativas nas fases da aprendizagem da circunferência no ensino fundamental*. 2021. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2021.
- CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. *Portal de Periódicos CAPES*. Disponível em: <https://www.periodicos.capes.gov.br/>.
- DUVAL, Raymond. *As Condições Cognitivas Da Aprendizagem Da Geometria: Desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos*. Tradução da Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, 2022.
- DUVAL, Raymond. Figuras e visualização geométrica: "ver" na geometria. *Anais de Didática e Ciências Cognitivas*, [S. l.], v. 10, p. 147-182, 2012.
- DUVAL, Raymond. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.
- FERNER, Dienifer da Luz. *Geometria espacial de posição sob a ótica dos registros de representação semiótica: Um estudo com licenciandos em matemática*. 2019. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.
- FIorentini, Dário; Lorenzato, Sérgio Aparecido. *Investigação em educação matemática: Percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados, 2006.
- FLORES, Cláudia Regina. *Geometria e visualização: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração*. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.
- FLORES, Cláudia Regina. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 19, n. 26, p. 1–22, 2006.

FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. O papel heurístico de uma figura geométrica: o caso da operação de reconfiguração. In: *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*. Recife, 2004.

MACHADO, Gabrielly Beatriz Batista. *Curvas Cônicas: Uma análise das articulações entre os Registros de Representação com o auxílio dos Conics 3d*. 2020. 127f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

MELLO, Elisabete Marcon. *A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: Um estudo sob a ótica de Duval*. 2015. 174f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

POLIZELI, Raquel. *Visualização em geometria: Um estudo com ingressantes e concluintes de um curso de licenciatura em matemática*. 2020. 214f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2020.

SANTOS, Valéria da Silva. *Registros de Representações Semióticas Mobilizados por Professores de Matemática no Ensino dos Prismas*. 2020. 241f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

SIQUEIRA, José Edeson de Melo. *Articulando os registros de representação semiótica das curvas cônicas através da integração de recursos computacionais*. 2019. 317f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.