Maria Cristina Elyote Marques Santos
Vânia Gonçalves de Brito dos Santos
Organizadoras

MATEMÁTICA

APONTAMENTOS PARA O CÁLCULO

EdUneb
Editora da Universidade do Estado da Bahia

MATEMÁTICA

Maria Cristina Elyote Marques Santos
Vânia Gonçalves de Brito dos Santos
Organizadoras

MATEMÁTICA
apontamentos para o cálculo

EDUNEB
Salvador
2020

Depósito Legal na Biblioteca Nacional
Impresso no Brasil em 2020.

Coordenação Editorial
Fernanda de Jesus Cerqueira

Coordenação de Design
Sidney Silva

Revisão textual (português) e Normalização
Lais Otero Fugaitti | Tikinet

Capa
Rodrigo Caiobi Yamashita

Diagramação
George Luís Cruz Silva

Revisão de textual de prova
Julinara Silva Vieira Moitinho

Revisão de diagramação de prova
Sidney Silva

Imagem da Capa
Bedneyimages | Freepik (números)
Jayanta Behera | FreeImages (quadrados)
Macrovector | Freepik (gráficos)

Ficha Catalográfica

Bibliotecária: Fernanda de Jesus Cerqueira – CRB 162-5

Santos, Maria Cristina Elyote Marques

Matemática: apontamentos para o Cálculo/ Organizado por Maria Cristina Elyote Marques Santos e Vânia Gonçalves de Brito dos Santos. – Salvador: EDUNEB, 2020.

156 p. il.

ISBN: 978-65-88211-22-9

1. Matemática. 2. Preparação ao Cálculo. 3. Estudo de Funções. I. Santos, Vânia Gonçalves de Brito dos.

CDD 510

Editora da Universidade do Estado da Bahia – EDUNEB
Rua Silveira Martins, 2555 – Cabula
41150-000 – Salvador – BA
editora@listas.uneb.br
portal.uneb.br

Esta Editora é filiada à
Associação Brasileira das Editoras Universitárias

SUMÁRIO

PREFÁCIO 7
Iracema Campos Cusati

APRESENTAÇÃO 11
Maria Cristina Elyote Marques Santos

CONJUNTOS NUMÉRICOS 17
Daniel de Cerqueira Góes

FUNÇÕES 51
Maria Cristina Elyote Marques Santos

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS 107
Vânia Gonçalves de Brito dos Santos

FUNÇÕES ESPECIAIS 139
Hélcio Moreira Perin

SOBRE OS AUTORES 155

PREFÁCIO

Escrever o prefácio deste livro me alegra, pois é a oportunidade de conhecer a obra, fruto do estudo de pesquisadores próximos à minha linha de pesquisa e ao meu universo acadêmico, em sua versão primeira. Esta publicação é a realização de uma intencionalidade afetiva revelada à sociedade de forma escrita. Os autores são professores atentos aos problemas apresentados por seus estudantes devido às lacunas que trazem de trajetória escolar. A pretensão da obra não é ser mais um livro de Matemática, formal e de difícil compreensão, mas um suporte aos conteúdos estudados nas disciplinas de Cálculo em cursos da área de Ciências Exatas e da Terra.

O livro trata de funções elementares com o intuito de sanar algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes de graduação no aprendizado do Cálculo. A preocupação premente com a aprendizagem e a responsabilidade em relação a ela incumbem aos autores a tarefa de dar continuidade a esse trabalho em outro volume que abranja funções, tais como as trigonométricas e modulares.

A escolha desse tema é fruto de observações e reflexões dos autores, que participam do Grupo de Extensão e Pesquisa em Matemática Aplicada (GEPMAT), pela percepção da necessidade de construir estratégias que proporcionem ao estudante melhor aprendizagem do Cálculo.

Os capítulos apresentam os assuntos de maneira didática, proporcionando ao estudante uma aprendizagem gradual. Assim, na seção 1, apresentam-se os conjuntos numéricos, tratados como coleções de números reunidos a partir de suas características e propriedades semelhantes.

A seção 2 trata do plano cartesiano, das relações matemáticas e dos conceitos gerais das funções, englobando classificação por propriedades. A seção 3 é dedicada ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas. Na seção 4 o olhar dos autores se dirige a funções especiais.

Os conteúdos dos referidos textos são apresentados de forma clara e objetiva, seguidos de exemplos que ilustram os assuntos abordados, exercícios resolvidos com solução comentada e exercícios propostos com gabarito. Destaque-se que, em todos os capítulos, os assuntos são apresentados a partir de definições concisas, mesmo usando a notação Matemática que o assunto requer. Além disso, utilizam-se exemplos, imagens e exercícios resolvidos e propostos de forma a proporcionar aos estudantes um texto leve e de fácil compreensão.

O cuidado com a leveza do texto não impediu a precisão e o rigor matemáticos necessários, a exemplo dos gráficos que foram todos gerados com o software livre Geogebra, facilmente encontrado na rede mundial de computadores ou como aplicativo para celulares.

Este livro é acadêmico no estrito sentido da palavra, o que se comprova pelos conceitos com exemplos advindos da experiência dos autores. Estes são professores pesquisadores que atuam no sistema educacional brasileiro e têm compromisso com uma educação de qualidade atrelada à formação da cidadania, no universo cultural, social, político e econômico que vivemos na contemporaneidade. Isso é um incentivo à capacidade dos estudantes de superar obstáculos.

Eu recomendo o livro a universitários, bem como a alunos do ensino médio, educadores, professores e pesquisadores, para uma leitura surpreendente e inovadora, como um convite à leitura da condição humana, na constante caminhada libertadora da sociedade brasileira recente, para entendimento das páginas, dos textos e dos exemplos que se seguem. Por fim, uma possibilidade de profícuos estudos de pré-Cálculo ou até mesmo de Cálculo.

Iracema Campos Cusati
Matemática, doutora em Didática,
Teorias de Ensino e Práticas Escolares pela
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo
Docente da Universidade de Pernambuco

APRESENTAÇÃO

A quantidade de publicações que tratam da Matemática, tanto no Brasil quanto no resto do mundo, é enorme. Diante disso, este não poderia ser apenas mais um livro sobre o assunto a ser editado. Por isso ele busca atender a uma demanda observada por cada um dos pesquisadores em suas salas de aula: estudantes com dificuldade no aprendizado do Cálculo devido a lacunas trazidas do ensino médio e fundamental.

A partir da percepção dos autores em sua vivência docente, a presente obra foi pensada e meticulosamente elaborada de maneira a ter explicações, exemplos e exercícios bem dosados em gradação de dificuldade. Além disso apresenta explicações e explanação para que, ao beneficiar a aprendizagem dos estudantes, também possa ser usada em sala de aula pelos próprios professores como recurso didático.

A percepção das dificuldades para estudantes ingressantes no ensino superior desenvolverem atividades matemáticas decorre da experiência na área de trabalho dos autores. Como professores e pesquisadores de Matemática da educação superior, eles escolheram o tema do livro com bases em suas observações.

Em muitos anos de trabalho, esses professores sentiram necessidade de ter uma ferramenta didática que os auxiliasse na tarefa de proporcionar ao estudante um ponto de apoio em sua aprendizagem do Cálculo. Além disso, o formato escolhido para apresentação dos assuntos possibilita o uso do livro por estudantes de qualquer curso que requeira os conhecimentos nele explicitados, não se restringindo a estudantes do ensino superior. A ideia é proporcionar ao estudante um texto leve e esclarecedor.

Assim, considerando a vasta aplicabilidade do Cálculo, as diversas áreas do conhecimento e as fragilidades frequentes em estudantes dos primeiros semestres dos cursos universitários – as quais podem acarretar seu baixo desempenho –, surge o livro *Matemática: apontamentos para o cálculo*. Como o nome indica, o texto pretende ser leve sem ser descuidado com o rigor da verdade matemática.

É preciso deixar claro que o Cálculo não surgiu num piscar de olhos, pois foi desenvolvido a partir da Álgebra (cujos primórdios estão documentados no papiro de Ahmes ou Rhind e no *Arithmetica*, de Diofanto) e da Geometria (cujos maiores contribuidores são Pierre de Fermat e René Descartes) (CAJORI, 2007). Seus ramos principais são o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e a integral de diferenciais. O estudo da derivada de funções surge a partir do problema da tangente a uma curva; já a integral se baseia no estudo de área sob uma curva. Foram necessários muitos séculos e muitos estudiosos para que esse edifício fosse construído!

Entre outros nomes, o cálculo de limites foi desenvolvido por Georg Riemann (1826-1866), matemático alemão que contribuiu com a Análise e a Geometria diferencial, e Leibniz (1646-1716), filósofo e matemático alemão) que contribuiu sensivelmente para o cálculo diferencial e integral, independentemente das ideias de Isaac Newton para a mesma área.

Muitos historiadores da matemática destacam a contribuição de Leibniz ao Cálculo também por ele ter proposto uma notação simples e inovadora, por ser "[…] uma simbologia que contribuiu enormemente para o rápido cultivo e perfeito desenvolvimento do Cálculo" (CAJORI, 2007, p. 285). Newton (1643-1727), cientista inglês, desenvolveu a teoria das fluxões, considerada a ideia embrionária para o Cálculo diferencial e integral.

Newton teve suas ideias fortemente influenciadas por Isaac Barrow, seu professor e orientador, cujas reflexões contribuíram para a elaboração do Teorema Fundamental do Cálculo (TEOREMA…, 2020). Esse importante resultado torna possível visualizar que o cálculo de derivadas e o cálculo de integrais estão interligados, sendo possível "recuperar" a função original se integrarmos e depois derivarmos uma função contínua!

O estudo de funções é um dos temas mais importantes em Matemática e suas aplicações não estão restritas a essa ciência. É possível encontrá-las em muitas outras áreas – Biologia, Medicina, Estatística, Física, Química, entre outras – para calcular propriedades como curvas de logística, comportamento de funções, carbono C^{14} para datar fósseis, taxas relacionadas, crescimento e decrescimento populacional, entre outros.

Vale destacar que o estudo de funções se aplica também para as áreas de Administração, Contabilidade e Economia, pois pode imprimir aos processos próprios a essas áreas uma dinâmica mais eficiente. Isso ocorre, por exemplo, com a produção, venda e distribuição de serviços e produtos (estudo de logística), de maneira geral, bem como com o excedente do consumidor.

O ensino de Cálculo na educação superior vem sendo de forma crescente discutido em eventos nacionais e internacionais, nos quais educadores e pesquisadores tratam das grandes dificuldades, especialmente em Matemática, a partir da falta de base que os estudantes apresentam quando ingressam nesse nível de formação. De alguma maneira, isso leva ao fracasso na aprendizagem de conceitos matemáticos mais abstratos, pois o estudante universitário se depara com uma construção mais axiomática, a qual exige rigor científico formal. Esse cenário tem levado um grupo razoavelmente grande ao desestímulo, à repetência e à evasão.

Esse contexto impacta fortemente todas as carreiras das ciências, exatas ou não, pois em todos os casos pode-se trabalhar com os conceitos aqui apresentados, a exemplo das bases para os processos de otimização de funções, que são estudados no Cálculo.

Neste livro, o texto "Conjuntos numéricos", Daniel de Cerqueira Góes mostra ao leitor a construção teórica dos conjuntos numéricos em seu encadeamento (não de surgimento histórico, mas levando em consideração como eles se englobam), bem como suas propriedades. No texto "Funções", Maria Cristina Elyote Marques Santos trata de forma leve, mas sem perder o rigor necessário, a teoria de funções, abordando várias formas de representação, além de destacar propriedades importantes. No texto "Funções exponenciais e logarítmicas", Vânia Gonçalves de Brito dos Santos apresenta essas funções de maneira simples e direta, destacando sua definição, propriedades, representação gráfica. No texto "Funções especiais", Hélcio Moreira Perin traz ao leitor uma abordagem sintética de algumas funções classificadas como especiais, tais como as funções polinomiais, funções racionais, entre outras. Destaque-se que os autores permearam, o conteúdo abordado, com exemplos e exercícios propostos com solução comentada.

Portanto, o livro *Matemática: apontamentos para o Cálculo* trata os assuntos a partir de um texto leve, cujo objetivo é oferecer aos estudantes do Cálculo meios para preencher possíveis lacunas ocorridas nos níveis educacionais anteriores. Seus exemplos, exercícios resolvidos e propostos procuram dar apoio à compreensão dos assuntos aos leitores, possibilitando melhor aprendizagem dos conteúdos propostos. Com a mesma intenção, ao final de cada texto, o tópico Curiosidades traz um pouco da história da Matemática, com aspectos intrigantes de brilhantes personagens dessa ciência tão antiga.

Maria Cristina Elyote Marques Santos
Matemática, doutora em Educação e Contemporaneidade
pela Universidade do Estado da Bahia
Professora Adjunta da Universidade do Estado da Bahia

REFERÊNCIAS

CAJORI, Florian. *Uma história da matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

TEOREMA fundamental do cálculo. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. [São Francisco: Wikimedia Foundation], 2020. Disponível em: https://bit.ly/3gwrt8C. Acesso em: 9 jan. 2020.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Daniel de Cerqueira Góes

Os números governam o mundo.
Pitágoras (571-490 a.C.)

A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes.
Malba Tahan (Julio César de Mello e Souza) (1895-1974)

Toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos.
Elon Lages Lima (1929-2017)

Os conjuntos numéricos são coleções de números historicamente reunidos por possuírem características semelhantes. Foram o resultado das necessidades da humanidade em determinado período histórico ou do desenvolvimento de teorias, como a teoria dos números, de Pierre de Fermat.

OS NÚMEROS NATURAIS

Uma das habilidades mais importantes do ser humano é saber contar. Necessitamos contar as horas, animais de uma família, objetos de uma coleção, dinheiro, gols de uma partida de futebol, pessoas de um grupo, estrelas no céu e muitas outras coisas. O processo de contar é tão antigo quanto a própria humanidade.

Para contar, o homem primitivo empregava pedrinhas, às vezes os seus próprios dedos ou quaisquer outros acessórios que pudessem ajudá-lo com a noção de quantidade através da comparação ou correspondência, um a um, entre duas coleções. Acredita-se que, no princípio da aventura humana, pastores de ovelhas controlavam seu rebanho fazendo corresponder a cada ovelha uma pedrinha, que era bem guardada num saquinho de couro. Com isso, ele saberia se alguma ovelha se perdeu ou se o rebanho aumentou a cada comparação (uma a uma) entre as ovelhas e a coleção de pedras.

Provavelmente o que levou o homem à noção de número foi a sua necessidade de quantificar e controlar coisas da natureza, ou seja, as grandezas naturais (grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado). É possível fazer a suposição de que isto tenha dado origem ao primeiro conjunto de números, denominados *números naturais*, pela sua simplicidade e identidade com a natureza, cuja representação é feita este símbolo: $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}.$$

Importante observar que a inclusão do *zero* (0) como um número natural veio posteriormente, com a necessidade de representar a ausência de objetos para contar. As reticências (…) indicam que o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito e que podemos elaborar indefinidamente a sequência dos números naturais, ou seja, todo número natural $\boldsymbol{n}$ tem um sucessor $\boldsymbol{n + 1}$. Atualmente, com o emprego do asterisco (*)

para indicar a ausência do *zero* em um conjunto numérico, prevalecem as seguintes representações:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (conjunto dos números naturais) e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (conjunto dos números naturais sem o *zero*).

A Matemática, por ser em essência intangível (abstrata), faz uso de recursos (símbolos) em sua linguagem para representar seus conceitos. Por exemplo, quando se escreve 10 (numeral dez) tem-se a representação conceitual do número *dez*. O numeral 10 é formado pelos algarismos 1 e 0. Na prática, simplesmente verbalizamos "número dez" quando nos deparamos com o numeral 10!

O conjunto $\mathbb{N}$ é muito importante e nele estão definidas duas operações fundamentais, a *adição* e a *multiplicação*. Isso quer dizer que a adição de dois números naturais é sempre um número natural e o produto de dois números naturais também é um número natural.

Podemos escrever:

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{N} \Longrightarrow (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{N} \Longrightarrow (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \in \mathbb{N}$$

Mas o conjunto $\mathbb{N}$ não contempla quantidades negativas, aquelas associadas a débitos, perdas, prejuízos, saldos bancários deficitários ou mesmo a temperaturas muito frias classificadas abaixo de *zero* grau (0ºC). Para tanto, e no intuito de suprir tal deficiência, surgiu o conjunto dos números inteiros apresentado a seguir.

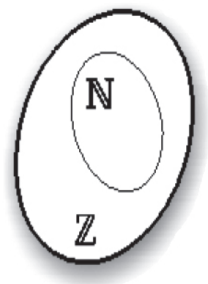
OS NÚMEROS INTEIROS

A necessidade de representar e operar com quantidades negativas levou a humanidade ao conceito de *simétrico* (ou oposto) de um número natural. Assim, para cada número natural $\boldsymbol{n}$ associa-se o seu respectivo simétrico $\boldsymbol{-n}$ (lê-se "menos *n*") de tal modo que $\boldsymbol{n+(-n) = 0}$. Isso permite ampliar o conjunto dos números naturais com a inclusão de todos os seus simétricos, que podem ser chamados de *números negativos* (exceto o zero), para formar um novo conjunto numérico, representado por $\mathbb{Z}$ e chamado conjunto dos *números inteiros*.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

É fácil perceber que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ou seja, todo número natural é inteiro, mas nem todo número inteiro é natural, a exemplo dos números negativos: -1, -2, entre outros (Figura 1).

Figura1 – Diagrama de inclusão



Fonte: elaborada pelo autor.

Os números inteiros são também conhecidos como *números relativos* e os naturais agora podem ser chamados de inteiros não negativos. $\mathbb{N}^*$ (naturais sem o zero) pode ser denominado conjunto dos inteiros positivos.

Além da *adição* e da *multiplicação*, o conjunto $\mathbb{Z}$ permite a definição de mais uma operação fundamental, a *subtração*, e isto quer dizer que a diferença (subtração) entre dois números inteiros é sempre um inteiro. Podemos escrever:

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \in \mathbb{Z}$$

Algumas propriedades

i) O oposto do oposto de a é o próprio a: $-(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$;

ii) O oposto de zero é zero: $\mathbf{0} + (-\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{0} = -\mathbf{0}$;

iii) Subtrair b de a é o mesmo que fazer a adição de a com o oposto de b, isto é, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$;

iv) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$;

v) $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (0 é o elemento neutro da adição);

vi) $\boldsymbol{a} \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (1 é o elemento neutro da multiplicação);

vii) $\boldsymbol{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

A divisibilidade em $\mathbb{Z}$ tem a ver com a importante noção de divisor. Diz-se que a é divisor de b (indica-se por $\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}$) quando existe c de modo que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, admitindo-se que sejam números inteiros. Nesse caso ***b*** é considerado um múltiplo de ***a***.

Por exemplo, **3|–15**, pois **–15 = 3 × (–5)**. No exemplo, podem ser empregadas as expressões tais como "**3** é divisor de –15" ou "**3** divide **–15**" ou "**–15** é divisível por **3**" ou mesmo "**–15** é múltiplo de **3**".

O conjunto dos divisores de um número inteiro ***b*** é indicado por ***D(b)*** e o conjunto dos seus múltiplos por ***M(b)***.

Um número inteiro ***a*** é chamado de *número primo* quando ***a ≠ 0, a ≠ 1, a ≠ –1 e D(a) = {1, –1, a, –a}***. Dois números inteiros são primos entre si, se o maior (máximo) divisor comum de ***a*** e ***b*** for igual a unidade, escreve-se ***mdc (a, b) = 1.***

Exemplo 1:

a) Encontre o conjunto dos divisores de 12.

Solução: ***D(12) = {± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12}***

b) D*escreva o conjunto dos múltiplos de 5.*

Solução: ***M(5)={0, ± 5, ± 10, ± 15, ± 20,...}***

c) Determine o conjunto dos dez primeiros números primos positivos.

Solução: ***{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}***

Das quatro operações fundamentais a *divisão* não está definida em $\mathbb{Z}$, pois nem sempre o quociente de dois inteiros é um número inteiro. O conjunto $\mathbb{Z}$ ainda é limitado por não contemplar quantidades fracionárias ou não inteiras, isto é, aquelas associadas a partes de um todo. Por exemplo, divide-se uma pizza em cinco partes iguais e retira-se uma dessas partes, quanto a parte retirada representa em relação ao todo? Como dimensioná-la? Para suprir tal deficiência surgiu o conjunto dos números racionais que será apresentado a seguir.

OS NÚMEROS RACIONAIS

Para melhor compreender os *números racionais*, consideremos dois números inteiros quaisquer a e b, com $b \neq 0$. A divisão de a por b é muitas vezes representada sob a forma de fração $\frac{a}{b}$, ou seja, $a \div b = \frac{a}{b}$, em que *a* representa o *numerador* da fração e *b* o *denominador*. Este sempre deve ser diferente de zero para satisfazer a condição de existência da fração, uma vez que não tem sentido a divisão por zero. De fato, dividir 20 por 5 equivale a encontrar uma resposta objetiva para a pergunta “quantas vezes o 5 cabe em 20”.

Nesse caso a resposta objetiva é 4, pois $\boldsymbol{4 \times 5 = 20}$. Agora imagine a divisão de 20 por 0, observe que não existe resposta objetiva para a pergunta "quantas vezes o 0 cabe em 20", que não faz sentido algum, portanto o denominador não pode ser nulo.

Exemplo 2:

a) $10 \div 2 = \frac{10}{2} = 5$

b) $4 \div 3 = \frac{4}{3}$

c) $-5 \div 8 = \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{-8}} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$

d) $12 \div 36 = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ (com a simplificação)

e) $0 \div 17 = \frac{0}{17} = 0$ (de modo geral $\frac{\mathbf{0}}{\boldsymbol{b}} = 0, \forall b \neq 0$)

Duas fraçõesesesão $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ e $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ ditas *equivalentes* ou *iguais* se, e somente se, $\boldsymbol{a \times d = b \times c}$. O exemplo (d) ilustra uma equivalência resultante da simplificação.

Exemplo 3:

a) $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ (pois $4 \times 2 = 8 \times 1$)

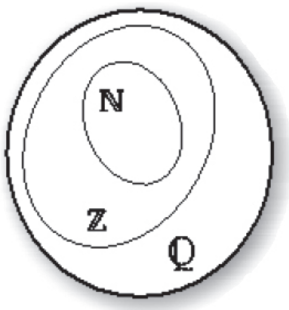
b) $\frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{3}}$ (pois $-10 \times 3 = 6 \times (-5)$)

Quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número inteiro não nulo, obtemos uma fração equivalente.

c) $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{2 \times 4}}{\mathbf{5 \times 4}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{20}}$ (observe que $2 \times 20 = 5 \times 8$)

O conjunto dos *números racionais*, representado por $\mathbb{Q}$, engloba todas as frações $\frac{a}{b}$ em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Em símbolos: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$. É importante destacar que todo número inteiro também pode ser posto sob a forma de fração com denominador unitário, por exemplo $7 = \frac{7}{1}$, portanto todo número inteiro é racional $(\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q})$ (Figura 2).

Figura 2 – Diagrama de inclusão



Fonte: elaborada pelo autor.

Soma (adição ou subtração) e multiplicação em $\mathbb{Q}$.

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais quaisquer.

Define-se:

i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$

ii) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{a \times d + b \times (-c)}{b \times d}$

iii) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Em particular, para frações com denominador comum a equivalência decorre da simplificação: $\frac{m}{p} \pm \frac{n}{p} = \frac{m \pm n}{p}$.

Exemplo 4:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2\times5+3\times1}{3\times5} = \frac{10+3}{15} = \frac{13}{15}$

b) $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4\times3}{7\times5} = \frac{12}{35}$

c) $\frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{3} + \frac{-2}{5} = \frac{4\times5+3\times(-2)}{3\times5} = \frac{20-6}{15} = \frac{14}{15}$

d) $\frac{3}{2} - \frac{8}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{2} - \frac{8\times1}{3\times5} = \frac{3}{2} - \frac{8}{15} = \frac{3\times15-2\times8}{2\times15} = \frac{45-16}{30} = \frac{29}{30}$ (importante observar a hierarquia das operações e o emprego de parênteses)

e) $\frac{7}{10} + \frac{9}{10} - \frac{6}{10} = \frac{7+9-6}{10} = \frac{10}{10} = 1$ (frações com o denominador comum)

f) $\left(\frac{-5}{3} + \frac{17}{6}\right) \times \frac{6}{7} = \left(\frac{-5\times2}{3\times2} + \frac{17}{6}\right) \times \frac{6}{7} = \left(\frac{-10}{6} + \frac{17}{6}\right) \times \frac{6}{7} = \left(\frac{-10+17}{6}\right) \times \frac{6}{7} = \left(\frac{7}{6}\right) \times \frac{6}{7} = 1$

O inverso de um número racional

Considere $x \in \mathbb{Q}$, ***com*** $x \neq 0$, o *inverso* de x é o número racional representado por x^{-1}, de modo que $x.x^{-1} = 1$. A expressão x^{-1} tem o mesmo significado de $\frac{1}{x}$, ou seja, $x.x^{-1} = x.\frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$ portanto. O único número racional que não admite inverso é *0* (zero) uma vez que não tem sentido a divisão de *1* por *0*.

Se $x = \frac{a}{b}$, então $x^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

De fato $x.x^{-1} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a.b}{b.a} = 1$

Divisão em $\mathbb{Q}^*$

A operação de *divisão* está definida no conjunto $\mathbb{Q}^*$ (racionais diferentes de zero). Sejam $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ números racionais não nulos, a *divisão* de $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{y}$, indicada por $\boldsymbol{x \div y}$, corresponde ao produto de x pelo inverso de y. Portanto, $\boldsymbol{x \div y = \frac{x}{y} = x\,\frac{1}{y} = x.y^{-1}}$

Se $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ e $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$,
então $\boldsymbol{x : y = x.y^{-1}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}\right)^{-1} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{a.d}}{\boldsymbol{b.c}}$

Exemplo 5:

a) $\frac{4}{3} \div \frac{2}{9} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{4\times 9}{3\times 2} = \frac{36}{6} = \mathbf{6}$

b) $-10 \div \frac{5}{3} = \frac{-10}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{-10\times 3}{1\times 5} = \frac{-30}{5} = \mathbf{-6}$

c) $\frac{2/7}{3} = \frac{2}{7} \div \frac{3}{1} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2\times 1}{7\times 3} = \frac{2}{21}$

d) $1 \div \left(-\frac{1}{10}\right) = 1 \times \frac{10}{-1} = -10$

Representação decimal

Qualquer número racional $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ tem uma representação decimal que pode ser obtida através da divisão euclidiana de $\boldsymbol{a}$ por $\boldsymbol{b}$. A representação poderá ser *exata*, quando o número de casas decimais for finito, ou *periódica* quando este número for infinito e com algarismos que se repetem (dízima periódica).

Exemplo 6:

a) $\frac{7}{1} = 7$

b) $\frac{3}{4} = 0{,}75$

c) $\frac{5}{10} = 0{,}5$

d) $\frac{1}{3} = 0{,}333\ ...$ (dízima com período 3)

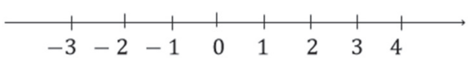
e) $\frac{12}{11} = 1{,}090909\ ...$ (dízima com período 09)

O processo inverso também é realizado, por exemplo $\boldsymbol{0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}}$. Outros exemplos serão vistos em questões comentadas e nos exercícios.

Representação geométrica dos números racionais

Os números racionais podem ser representados sobre uma reta que aponta sempre no sentido em que eles crescem (reta orientada) e com o zero separando os números positivos dos negativos (Figura 3).

Figura 3 – Reta orientada



Fonte: elaborada pelo autor.

Na reta orientada, se o número ***a*** está à esquerda do número ***b***, então ***a*** é menor que ***b***, escreve-se ***a*** < ***b***, isto é, ***b*** – ***a*** > ***0***.

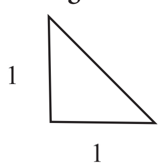
Entre dois números racionais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ existem infinitos outros números racionais. De fato, se $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, então é simples demonstrar que, em que $\boldsymbol{a} < \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}} < \boldsymbol{b}$ em que $\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}$ é racional. Com raciocínio análogo, são identificados, indefinidamente, outros racionais entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Dessa forma, diz-se que o conjunto $\mathbb{Q}$ é *denso*.

OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Para Pitágoras de Samos "[...] os números governam o mundo" (BOYER, 2010, p. 37). Homem dotado de extraordinária inteligência, junto aos seus discípulos, percebeu que os números racionais não eram suficientes para dar todas as respostas aos fenômenos da natureza. Por exemplo, notou que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários não podia ser expressa por um número racional.

A partir daí, foi demonstrada a existência de números que não poderiam ser expressos como uma razão (divisão) de dois números inteiros. Tais números passaram a ser chamados de *irracionais*. O conjunto dos números irracionais será aqui representado por *I*, mas alguns autores empregam a notação $\mathbb{Q}$ ' (Figura 4).

Figura 4 – Teorema de Pitágoras



$a^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Fonte: elaborada pelo autor.

A representação decimal de um número irracional não é periódica e descreve uma sucessão de infinitas casas decimais, por isso mesmo tal representação comumente é indicada sob a forma *aproximada* com o uso do símbolo $\cong$.

Acredita-se que o primeiro número irracional a ser descoberto tenha sido $\sqrt{2} \cong 1,4142135624$, em decorrência da aplicação do Teorema de Pitágoras (Figura 4). Posteriormente, com o avanço da matemática, foram descobertos muitos outros números irracionais de destaque:

$$\pi \cong 3,14159265358;\ e \cong 2,71828182846;\ \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618034;\ \sqrt{3} \cong 1,732050808.$$

O número π (*pi*) corresponde à razão entre a medida do comprimento de uma circunferência qualquer e o seu respectivo diâmetro, o número de Euler e representa a base do sistema natural de logaritmos ($\ln x$) e ϕ (*phi*) é o número de ouro, associado à beleza e às artes, que também aparece em diversos elementos da natureza.

Tal qual os números racionais, o conjunto dos irracionais também é *denso* e sua grandeza impressiona, como a adição entre um número racional e outro irracional gera um número irracional, percebeu-se que os números irracionais são infinitos, uma vez que o conjunto dos racionais é infinito, e estão por toda a parte.

Para ter melhor ideia, colocados juntos os números racionais e os irracionais sobre uma reta orientada, a probabilidade de que seja escolhido aleatoriamente um ponto da reta que represente um racional é praticamente nula! A união dos números racionais com os irracionais gera o importantíssimo conjunto dos *números reais* que será apresentado a seguir.

OS NÚMEROS REAIS

O conjunto dos *números reais*, comumente representado por $\mathbb{R}$, corresponde à união dos números racionais e dos irracionais.

Assim $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$, o que permite estabelecer a seguinte relação de inclusão:

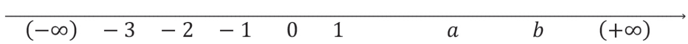
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ e } \mathrm{I} \subset \mathbb{R}.$$

Os números reais constituem o mais amplo conjunto numérico até o momento visto e têm relevante papel no estudo das funções, sendo o conjunto universo de referência.

Representação geométrica dos números reais

Os números reais constituem um conjunto denso e preenchem totalmente a reta, ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta, de modo que a cada ponto corresponda um único número real e recíproco. A *reta real* ou *reta numérica* aponta sempre no sentido dos números positivos (Figura 5).

Figura 5 – Reta real



Fonte: elaborada pelo autor.

Na *reta real* se o número ***a*** está à esquerda do número ***b***, então ***a*** < ***b*** e ***b*** - ***a*** > ***0***. O *zero,* por separar os reais positivos dos negativos, é chamado de *origem*.

Intervalos

Alguns subconjuntos de são especialmente importantes no estudo de *funções*. Dentre eles destacam-se os *intervalos*, que serão amplamente explorados nessa seção. Para as definições subsequentes considere dois números reais ***a*** e ***b***, com ***a*** < ***b***.

i) Intervalo aberto de extremos ***a*** e ***b***: ***] a, b [= { x ∈ R; a < x < b}.***

Representação geométrica (Figura 6):

Figura 6 – Intervalo aberto de extremos **a** e **b**

Fonte: elaborada pelo autor.

ii) Intervalo fechado de extremos ***a*** e ***b***: ***[a, b] = { x ∈ R; a ≤ x ≤ b }.***

Representação geométrica (Figura 7):

Figura 7 – Intervalo fechado de extremos **a** e **b**

Fonte: elaborada pelo autor.

As representações geométricas de um intervalo sobre a reta real adotam a convenção da "bolinha vazia" (Figura 6) para indicar que o extremo não pertence ao intervalo (aberto em relação ao extremo) e a "bolinha cheia" (Figura 7) para indicar a presença do extremo no intervalo (fechado em relação ao extremo). Analogamente são definidos *intervalos semiabertos* (ou semifechados) e *intervalos infinitos*, cuja representação geométrica são semirretas abertas ou fechadas em sua origem (extremo):

i) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$ (intervalo fechado à esquerda)

ii) $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ (intervalo fechado à

iii) $[\boldsymbol{a}, +\infty[= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$ (semirreta fechada à esquerda)

iv) $]\boldsymbol{a}, +\infty[= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}\}$ (semirreta $aberta$ à $esquerda$)

v) $]-\infty, \boldsymbol{a}] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}\}$ (semirreta $fechada$ à $direita$)

vi) $]-\infty, \boldsymbol{a}[= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}\}$ (semirreta $aberta$ à $direita$)

vii) $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (reta real)

Exemplo 7:

a) $\mathbb{R}_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = [\boldsymbol{0}, +\infty[$ (conjunto dos reais não negativos)

b) $\mathbb{R}_+^* = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\} =]\boldsymbol{0}, +\infty[$ (conjunto dos reais positivos)

c) $\mathbb{R}_- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}\} =]-\infty, \boldsymbol{0}]$ (conjunto dos reais não positivos)

d) $\mathbb{R}_-^* = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}\} =]-\infty, \boldsymbol{0}[$ (conjunto dos reais negativos)

e) $\mathbb{R}^* = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\} =]-\infty, \boldsymbol{0}[\cup]\boldsymbol{0}, +\infty[$ (conjunto dos reais não nulos)

f) $\mathbb{R} - [-\mathbf{1}, \mathbf{1}] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} < -\mathbf{1} \text{ ou } \boldsymbol{x} > \mathbf{1}\}$

g) $\mathbb{R}_+^* \cap]-\mathbf{5}, \mathbf{5}] =]\mathbf{0}, \mathbf{5}] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{0} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{5}\}$

h) $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Dado um número real qualquer $\boldsymbol{x}$, o *módulo* ou *valor absoluto* de $\boldsymbol{x}$, indicado por $|\boldsymbol{x}|$, é assim definido:

$$|x| = \begin{cases} \boldsymbol{x} \textbf{ se } \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{x} \textbf{ se } \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \end{cases}$$

Exemplo 8:

a) $|-\sqrt{\mathbf{5}}| = -(-\sqrt{\mathbf{5}}) = \sqrt{\mathbf{5}}$

b) $|\mathbf{17}| = \mathbf{17}$

c) $|\mathbf{0}| = \mathbf{0}$

Decorre dessa definição que $|\ \boldsymbol{x}\ | \geq \boldsymbol{0}$, portanto geometricamente o módulo de $\boldsymbol{x}$ pode ser interpretado como sendo a distância de $\boldsymbol{x}$ à origem *0* (zero) na reta real. De forma mais geral $|\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\ |$ representa a distância entre os números (pontos) $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ na reta real, logo escreve-se $|\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\ | = \boldsymbol{d}\ (\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\ )$.
Algumas propriedades

i. $|\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{0}$ e $|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

ii. $|\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}|.|\boldsymbol{y}|, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$

iii. $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = |y - \boldsymbol{x}|, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$

iv. $\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right| = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{y}|}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ e $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^*$

v. $|\boldsymbol{x}| = a \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ou $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^*$

vi. $|\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{a} \Leftrightarrow -\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ e $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

vii. $|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < -\boldsymbol{a}$ ou $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ e $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

viii. $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ (desigualdade triangular)

Exemplo 9:

a) $|x| = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{7}{3}$ ou $x = -\frac{7}{3}$

b) $|\boldsymbol{x}| < \sqrt[3]{10} \Leftrightarrow -\sqrt[3]{10} < \boldsymbol{x} < \sqrt[3]{10} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \left]-\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{10}\right[$

c) $|\boldsymbol{x}| > 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < -2$ ou $x > 2 \Rightarrow \boldsymbol{x} \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

d) $|x - 1| = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - 1 = 5$ ou $x - 1 = -5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 6$ ou $x = -4$

e) $|5 - \boldsymbol{x}| < 7 \Leftrightarrow |x - 5| < 7 \Leftrightarrow -7 < x - 5 < 7 \Leftrightarrow -2 < x < 12$

f) $|-3x| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow |3x| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{1}{3}$ ou $3x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ ou $x = -\frac{1}{9}$

g) $|x + 0{,}55555\ldots| = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left|x + \frac{5}{9}\right| = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x + \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ ou $x + \frac{5}{9} = -\frac{4}{9} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{4}{9} - \frac{5}{9}$ ou $x = -\frac{4}{9} - \frac{5}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{9}$ ou $x = -1$

Nesse exemplo, a fração geratriz (y) da dízima periódica pode ser obtida por um simples recurso algébrico ($\boldsymbol{y = 0{,}5555\ldots \Rightarrow 10y = 5{,}5555\ldots}$) e tem-se a equação $\boldsymbol{10y - y = 5{,}555\ldots - 0{,}555\ldots}$, que resulta em $\boldsymbol{9y = 5{,}000\ldots \Rightarrow y = \frac{5}{9}}$.

Vizinhança numérica de um número real

O conceito de *vizinhança numérica* é um importante recurso da teoria do *cálculo* diferencial e integral, presente nos currículos de vários cursos superiores como Engenharia, Física, Matemática, Economia, Geologia, Química, entre outros.

Seja $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, chama-se *vizinhança numérica* de *a*, indicada por *V(a)*, qualquer intervalo aberto que contenha o ponto .

$$\underline{\quad (\quad \boldsymbol{a} \quad) \quad}$$

Se for o centro da vizinhança, que corresponde ao ponto médio do intervalo, diz-se que a vizinhança é *simétrica* de *centro* . A distância do ponto a qualquer dos extremos do intervalo é comumente representada por $\boldsymbol{\delta}$ (delta) e é também chamada de *raio* da vizinhança simétrica. Notação: ***V(a,δ)***. Como a palavra vizinhança sugere proximidade, em geral as medidas de raio de vizinhanças simétricas são infinitesimais (muito pequenas).

Quando retiramos o ponto da vizinhança, ela passa a ser chamada de vizinhança reduzida de Notação: ***V*(a)***. Portanto, ***V*(a) = V(a) – {a}***.

Exemplo 10:

a) Determine o conjunto de todos os $x \in R$ próximos de *2*, mas com distância inferior a *0,01*.

Solução: $x \in V(2, \delta = 0{,}01) \Leftrightarrow |x - 2| <$

$0{,}01 \Leftrightarrow -0{,}01 < x - 2 < 0{,}01$

$\Leftrightarrow 2 - 0{,}01 < x < 2 + 0{,}01 \Leftrightarrow 1{,}99 < x <$

$2{,}01 \Leftrightarrow x \in \,]1{,}99, 2{,}01[.$

b) Qual o significado de $x \in V^*(a, \delta)$?

Solução: significa que x está numa vizinhança simétrica e reduzida de a, ou seja,

$$x \in V^*(a, \delta) \Leftrightarrow x \in]a - \delta, a + \delta[- \{a\} \Leftrightarrow x \in]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[\Leftrightarrow 0 < |x - a| < \delta$$

c) Um ponto a é interior ao intervalo I se existe $V(a) \subset I$. Quais são os pontos interiores do intervalo $[-1, 5]$?

Solução: $]-1, 5[$.

Propriedades de potências e radicais em $\mathbb{R}$

Para facilitar a resolução dos exercícios que serão propostos, na sequência são apresentadas propriedades conhecidas da potenciação e da radiciação com números reais.

i) $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^*$ (a expressão 0^0 é considerada indeterminada, sem sentido)

ii) $a^1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$

iii) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (excluindo-se situações que levem à expressão 0^0)

iv) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (com $a \neq 0$)

v) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (excluindo-se situações que levem à expressão 0^0)

vi) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (com $a \neq 0$)

vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (com $b \neq 0$)

viii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ (com $a \cdot b \neq 0$)

ix) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$ (desde que $\sqrt[n]{a^m} \in \mathbb{R}$)

x) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ (desde que $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$)

xi) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (desde que $\sqrt[n]{a} \in R$ e $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}^*$)

Exemplo 11:

a) $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2 \times 2^4} = \sqrt{2} \times \sqrt{2^4} = 4\sqrt{2}$

b) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

c) $(-2)^3 - 2^2 + (-2)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -8 - 4 + 16 - \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4 - 4 = 0$

d) $(-1)^{-1} + 5^{2^3} \div 5^{3^2} = \frac{1}{(-1)^1} + \frac{5^8}{5^9} = -1 + \frac{1}{5} = \frac{-5+1}{5} = -\frac{4}{5}$

e) $0{,}999 \ldots - (\pi + e)^0 = 1 - 1 = 0$

Note que 0,999… é uma “falsa dízima” pois não admite uma fração geratriz, com efeito, façamos y = 0,999… $\Longrightarrow$ 10y = 9,999… $\Longrightarrow$ 10y – y = 9,999…– 0,999…, logo 9y = 9 $\Longrightarrow$ y = 1.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) A matemática também está presente na área da Saúde. Por exemplo, verificou-se em um estudo de laboratório de análises clínicas que a população (*P*) de bactérias de uma cultura, decorridas *h* horas após seu início, pode ser estimada pela equação $P = 25.000.(1,6)^{0,25h}$. Obtenha uma estimativa da população da cultura bactérias, decorridas 8 horas do seu início.

Solução comentada:

De acordo com a fórmula $P = 25.000.(1,6)^{0,25h}$, *decorridas 8 horas do início da cultura, a população (P) estimada de bactérias será* $P = 25.000.(1,6)^{0,25h} = 25.000.(1,6)^2 \Longrightarrow P = 25.000 \times 2,56 \Longrightarrow P = 64.000 => P = 6,4 \times 10^4$

Resposta: $6,4 \times 10^4$

2) Obtenha a quantidade de números pares de três algarismos que podem ser representados ou formados com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5.

Solução comentada:

A correta interpretação da questão nos leva a conclusão de que os algarismos podem ser repetidos (não há qualquer restrição no texto). Portanto, para o algarismo das unidades, temos duas possibilidades (2 e 4), afinal o número é par. Para o algarismo das dezenas temos cinco possibilidades (1, 2, 3, 4 e 5) e para o algarismo das centenas temos cinco possibilidades (1, 2, 3, 4 e 5). Pelo princípio multiplicativo de contagem, tem-se o total de $5 \times 5 \times 2 = 50$.

Resposta: 50 possibilidades.

3) Encontre a fração geratriz da dízima periódica 0,833333… empregando o cálculo de uma série (soma infinita) geométrica.

Solução comentada:

Inicialmente, deve-se elaborar a dízima como uma soma infinita (série), ou seja, 0,83333… = 0,8 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 +... Por outro lado, a soma dos termos da série geométrica 0,03 + 0,003 + 0,0003 +... pode ser calculada através da conhecida fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com $|q| < 1$, *isto é,* $S = \dfrac{a_1}{(1-q)}$, *em que* $a_1 = 0{,}03$ *e* $q = 0{,}1$. *No caso tem-se:*

$$S = \frac{0{,}03}{1-0{,}1} = \frac{3/100}{9/10} = \frac{3}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{30}.$$

Logo, $0{,}83333\ldots = 0{,}8 + \frac{1}{30} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30} = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$

Resposta: $\frac{5}{6}$

4) Determine os possíveis valores de com a condição de que a equação $\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = m$, com $0 < a \neq 1$. Admita solução no universo dos números reais.

Solução comentada:

A questão exige conhecimentos de álgebra elementar.

$$\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = m \Rightarrow \frac{a^{-x}(a^{2x}-1)}{a^{-x}(a^{2x}+1)} = m \Rightarrow \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} = m$$

Seja $a^{2x} = y$, logo $\frac{y-1}{y+1} = m \Rightarrow y - 1 = m(y+1) \Rightarrow y - 1 = my + m \Rightarrow$

Portanto $y = \frac{m+1}{1-m}$. *Como* $y > 0$, *pois* $a^{2x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *então.*
A solução pode ser interpretada no quadro a seguir, através do estudo da variação do sinal das expressões $m + 1$ *e* $1 - m$*:*

$-1 \quad 1$

–	+	+	$m+1$
+	+	–	$1-m$
–	+	–	y

Resposta: . $-1 < m < 1$

5) Encontre o conjunto solução da inequação $|\,2x - 6\,| > x + 2$ no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Solução comentada:

Como o valor absoluto de um número real é sempre não negativo, deve-se impor a sua condição de existência $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$. *Por outro lado, temos:*

$$|2x-6| > x+2 \Leftrightarrow 2x-6 > x+2 \text{ ou } 2x-6 < -(x+2) \Leftrightarrow$$

$$2x - x > 6+2 \text{ ou } 2x + x < 6-2 \Leftrightarrow x > 8 \text{ ou } 3x < 4 \Leftrightarrow x > 8 \text{ ou } x < \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$x \in \left]8, +\infty\right[\cup \left]-\infty, \tfrac{4}{3}\right[.$$

Considerando a condição de existência $\boldsymbol{x \geq -2}$, *que impõe a interseção entre os conjuntos* $\boldsymbol{[-2, +\infty[}$ ***e*** $\boldsymbol{]8, +\infty[\, U\,]-\infty, \frac{4}{3}[}$, *obtém-se a solução* $V = \boldsymbol{[-2, \frac{4}{3}[\, U\,]8, +\infty[}$ *(conjunto verdade).*

Resposta: $\boldsymbol{V} = [\,-2, \frac{4}{3}\,[\text{U}]\,8, +\infty\,[$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcular o valor das seguintes expressões numéricas.

a. $5 \times 3 + 36 \div 9$

b. $7^0 - 7^1 \times (-2)^1$

c. $0^2 - (-1)^3 + 2^4 \div 2^0$

d. $10 \times 5^{-1} - 3^2 + (-2)^2 \times 5$

e. $-2^{-2} + (-2)^{-2} \div 2^{-0}$

f. $(-1)^{-201} + (-1)^{10^3} + 2^{3^2} \div 2^{2^3}$

g. $-2^2 + (-1)^3 + 2^4 \times 5$

h. $(-2^{-2} - (-1)^{-3} + 2^{-4} \div 2^{-6}) \times 64^{\frac{1}{2}}$

i. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5}$

j. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 0,5 \times \left(\sqrt{2}\right)^0$

k. $\left(\frac{4}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) \times \sqrt{8} - \left(\frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} + 1\right)$

l. $[(0,25)^{-2} \times (0,1)^{-2}]^{0,5}$

m. $(10^{-1})^3 \div (10^2)^{-2}$

n. $2 \times 3^5 - 5 \times 3^2 + 6 \times 9^{0,5} - 7 \times \pi^0$

o. $\frac{1}{\sqrt{9}}\left(\sqrt[3]{-8} + 5\sqrt[5]{-32}\right)$

Gabarito

Item	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Resposta	19	15	17	13	0	2	75	38	52	1	3	40	10	452	–4

2) Substitua pelo valor indicado e calcule o correspondente valor numérico da expressão algébrica em cada caso.

a. $y = \frac{4}{3}(1 - x^3)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2; x = -\frac{1}{2}$

b. $y = \frac{4x^3 - 2x + 1}{3x - 2}; x = -2$

c. $y = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{2x}{x-3}\right)^3 + 1; x = 2$

d. $y = \frac{(4+x)^3 - 4^3}{x-4}; x = -2$

e. $y = 1 - \frac{x^2 + 4x - 1}{1 - x} - x^3; x = -1$

f. $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}; x = -5$

g. $y = x^2 - 40x + 400; x = 21$

h. $y = \frac{x^2 - \sqrt[5]{x} + \sqrt{7x}}{x - e}; x = 0$

i. $y = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x} - 2} - \sqrt{x}; x = 8$

j. $y = \frac{\sqrt{x + 0{,}61} - \sqrt{x}}{0{,}1}; x = 9$

k. $y = x^1 + x^0 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \cdots; x = 3$

l. $y = x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 + \cdots + x + 20; x = 21^{-1}$

Gabarito

Item	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Resposta	45/16	27/8	- 62	28/3	4	0	1	0	4	1	9/3	211

3) Encontre o valor da expressão algébrica para $x^2 - 3x - y^2$ para x=-1 e y = $2^{(-1)}$.
Gabarito: 3,75

4) Simplifique a expressão numérica $\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}-1}$.
Gabarito: $-\sqrt[3]{2}$

5) Quanto vale a metade de 2^{20}multiplicada por 32?
Gabarito: 2^{24}

6) Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
I) Existe o menor número racional positivo.
II) Existe o maior número real não positivo.
III) Existe o menor número inteiro positivo.
IV) Existe o menor número irracional não negativo.
Gabarito**:** II e III

7) As idades de Jorge e Marcelo são, respectivamente, 36 e 22 anos. Há quantos anos atrás Jorge tinha o triplo da idade de Marcelo?
Gabarito: 15 anos

8) Simplificando-se $\frac{100^2 - 98^2}{6}$ obtém-se que valor?
Gabarito: 66

9) Se $a = 2^{-1} - \frac{5}{2}$, então $(-a^9)$ é igual a qual valor?
Gabarito: 512

10) Em certa divisão, o divisor é igual a 51, o quociente é 22 e o resto é 7. Nessas condições, qual o valor do dividendo?
Gabarito: 1.129

11) Se $\boldsymbol{y = 2^{3^0} + 3^{2^0} + 2^{0^3} + 3^{0^2}}$, então calcule o valor de 300% de y.
Gabarito: 21

12) Reduzindo-se a expressão $2\sqrt{5} - \frac{8}{\sqrt{5}-1} - 1^4$, obtém-se que valor?
Gabarito: -3

13) Admitindo-se que *x, y, a, b* e *c* são números reais quaisquer, procure reduzir as seguintes expressões algébricas por meio das propriedades operatórias:

a. $(x-y)(x+y)(xy)^{-2}$

b. $(3xy^2)^3 \div (3xy^3)^2$

c. $(4x^2y^3)(2xy^3)^{-1} + (x-1)^2$

d. $4x(y^2-2y) \div 12xy$

e. $((3xy)^{-1} \div 4x^2y).(6xy)^2$

f. $(2x^{-4}+1)(2x^{-4}-1) - \frac{4}{x^8} + 1$

g. $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(x+1)(x^2+1)$

h. $\left(\frac{4}{3-\sqrt{x}}\right)\left(\frac{9-x}{3+\sqrt{x}}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$

i. $(a+b+c)(a-b-c) + (b+c)^2$

Gabarito

Item	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Resposta	$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$	3x	$x^2 + 1$	$\frac{y-2}{3}$	$\frac{3}{x}$	0	$x^4 - 1$	$(2x-1)^2$	a^2

14) Resolver as equações a seguir no domínio dos números reais:

a. $3x = 12$

b. $\frac{x}{2} - 5 = 0$

c. $-5x - 10 = 0$

d. $x^2 = 9$

e. $x^3 = 64$

f. $x^2 + 1 = 0$

g. $\frac{x-1}{2} = \frac{2x+7}{5}$

h. $\frac{3x-2}{2} = \frac{2x-1}{8} + \frac{5}{4}$

i. $2x - x^2 = 0$

j. $x^2 - \frac{1}{4} = 0$

k. $2x^2 + 9x - 5 = 0$

l. $x^3 - 4x = 0$

m. $x^4 - x^2 = 0$

n. $\sqrt{x^2 + 11} = x + 1$

o. $|x| - 7 = 0$

p. $|2x + 6| + x = 0$

q. $|x - 1| = |3x + 5|$

r. $|x^2 + 1| - 5 = 0$

Gabarito

Item	A	B	C	D	E	F	G
Resposta	V = {4}	V = {10}	V = {-2}	V = {±3}	V = {4}	V = φ	V = {19}

Item	H	I	J	K	L	M	N
Resposta	$V=\left\{\frac{17}{10}\right\}$	V = {2,0}	$V=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$	$V=\left\{\frac{1}{2},-5\right\}$	V = {±2,0}	V = {4}	V = {5}

Item	O	P	Q	R
Resposta	V = {±7}	V = {-2,-6}	V = {-3,-1}	V = {±2}

15) Calcule o maior número real que verifica a equação $1x^2 - \frac{103}{99} - 1{,}232323\ldots = 0$

Gabarito: 0,454545…

CURIOSIDADES

• Pitágoras (571-490 a.C.)

Filósofo e matemático grego que viveu por volta do século V a.C., Pitágoras nasceu em Samos (571-490 a.C.), pequena ilha grega ao leste do mar Egeu, mas o pouco que se sabe sobre ele mistura mito e realidade.

Ele e os pitagóricos (como eram chamados seus alunos e seguidores) supervalorizavam o poder dos números. Entendiam que o mundo era governado pelos números e que todas as coisas eram números. Como a ordem que ele fundou era comunitária, é melhor não falar na obra de Pitágoras, mas considerar seu conhecimento como contribuições dos pitagóricos, pois na antiguidade era usual dar todo o crédito ao mestre (BOYER, 2010).

Os pitagóricos deixaram muitas contribuições: foram os primeiros a estabelecer a demonstração com base num raciocínio dedutivo, a eles se deve também a palavra Matemática.

O famoso teorema que leva o nome de Pitágoras e é estudado em todo o mundo já estava em *Os elementos*, de Euclides. Isso leva os historiadores a entenderem que deveria ser um conhecimento comum na época de Pitágoras (BOYER, 2010). Ou seja, os egípcios e babilônicos já conheciam as relações em um triângulo retângulo, bem antes dos gregos. No entanto, a primeira demonstração é creditada a Pitágoras.

Destaque-se que a força desse teorema pode ser percebida, por exemplo, na quantidade de demonstrações diferentes elaboradas em todo o mundo. Já se contabilizou um total de mais de 370 provas analíticas e geométricas (BARBOSA, 1993).

- Júlio César de Mello e Souza (1895-1974)

Ao falar de Matemática no Brasil, não se pode esquecer da rica história do professor Júlio César de Mello e Souza. Nascido em 6 de maio de 1895 no Rio de Janeiro, ele foi professor em escolas de educação básica e ensino médio de alto prestígio do Rio de Janeiro e na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Além disso, escreveu livros sobre didática e ensino de Matemática.

Criou o personagem Malba Tahan, com o qual narrou soluções matemáticas para problemas apresentados na forma de histórias de *As mil e uma noites*. Sua obra mais célebre, *O homem que calculava*, foi publicada pela primeira vez em 1938 e já chegou à 80ª edição (até 2019) (O HOMEM…, 2019).

Em 2013, o governo do Brasil instituiu, em homenagem a Mello e Souza, o Dia Nacional da Matemática, na data de seu nascimento. Provavelmente, seu maior mérito é ter popularizado a Matemática e, em suas aulas, proporcionado a inúmeros estudantes o prazer de aprendê-la.

Sempre inovador e carismático, o professor não dava zero ou reprovava seus alunos com baixo desempenho. Em entrevista ao Museu da Imagem e do Som, questionou o hábito de alguns professores acostumados a essa prática, chamando-a de atitude tola.

> "Por que dar zero, se há tantos números? Dar zero é uma tolice". O professor encarregava os melhores da turma de ajudar os mais fracos. [E, segundo ele] Em junho, julho, estavam todos na média. (PEREIRA, 2013).

• Elon Lages Lima (1929-2017)

Alagoano de nascença e professor brilhante. Dedicou-se mais ao ensino do que à pesquisa acadêmica. Formou centenas de professores nos cursos de aperfeiçoamento que criou no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, situado na cidade do Rio de Janeiro, onde trabalhou até se aposentar.

Além disso, escreveu dezenas de livros-texto voltados para o ensino de Cálculo e análise real, a exemplo de: *Meu professor de Matemática e outras histórias* (LIMA, 2006) e *Um curso de Análise.* O primeiro contém histórias vivenciadas pelo autor e o último é de cunho teórico-didático. Lima transmitia com perspicácia e elegância professoral os assuntos que ministrava (REVISTA…, 2017).

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Rui Madsen. *Descobrindo padrões pitagóricos*: geométricos e numéricos. São Paulo: Atual, 1993. 93 p.

BOYER, Carl B. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 496 p.

LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 256 p.

O HOMEM que calculava. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. [São Francisco: Wikimedia Foundation], 2019. Disponível em: https://bit.ly/2BZ1S9e. Acesso em: 7 dez. 2019.

PEREIRA, J. B. Júlio César de Mello e Souza é o famoso Malba Tahan. *In*: RECANTO das Letras. [*S. l.*: *s. n.*], 2013. Disponível em: https://bit.ly/2Xw8hAn. Acesso em: 7 jan. 2020.

REVISTA Piauí faz obituário de Elon Lages Lima. *Notícias*: Impa, Rio de Janeiro, 14 jun. 2017. Disponível em: https://bit.ly/30vonfG. Acesso em: 6 jan. 2020.

FUNÇÕES

Maria Cristina Elyote Marques Santos

É impossível ser matemático sem ser um poeta da alma.
Sofia Kovalévskaya (1850-1891)

Os sinais + e – modificam a quantidade diante da qual são colocados como o adjetivo modifica o substantivo.
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.
René Descartes (1596-1650)

O estudo de Funções tem extrema importância para diversas áreas da Matemática e merece destaque, tendo em vista o grande número de estudiosos que se dedicaram ao seu desenvolvimento.

Esse conceito, que remonta à Antiguidade, ganhou métodos analíticos a partir dos séculos XVI e XVII (BOTELHO; REZENDE, 2007; MOL, 2013), quando serviu de base para os estudos empreendidos por Leibniz e Newton no desenvolvimento do Cálculo, devendo-se ao primeiro o uso da palavra função, mas não no sentido moderno, no ano de 1692.

> Mais tarde, em 1694, Jakob Bernoulli usou a palavra no sentido leibniziano. E no apêndice de uma carta a Leibniz, datada de 5 de julho de 1698, John Bernoulli usou a palavra com um significado mais próximo do uso moderno. (CAJORI, 2007, p. 289).

Historiadores da Matemática atribuem a definição formal de função a Dirichlet (1805-1859), o primeiro que estabeleceu o conceito de função como uma relação entre variáveis. Ele fez tal formulação em termos de correspondência numérica, dissociando a função da representação analítica e fazendo com que ela fosse vista apenas como uma lei entre duas variáveis.

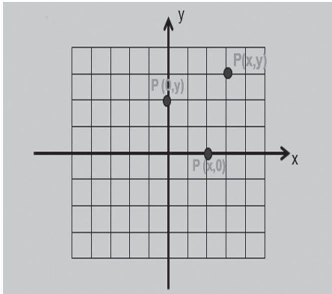
É preciso destacar que a forma como estudamos atualmente as funções não segue a cronologia em que esta teoria foi desenvolvida, pois é fruto da contribuição de diversos estudiosos. Entre eles Euler, Napier, Pierre de Fermat, René Descartes, Leibniz, a família Bernoulli, entre outros.

PLANO CARTESIANO

Antes de tratar de produto cartesiano, considere X e Y dois conjuntos em R. Chamaremos de par ordenado a todo par do tipo (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$.

Pensado pelo matemático francês René Descartes, o plano cartesiano é traçado por meio de um eixo horizontal e um vertical, dispostos formando o ângulo de 90°. Enquanto o eixo horizontal recebe o nome de eixo das abcissas ou eixo x, o outro é denominado de eixo das ordenadas ou eixo y (Figura 1).

Figura 1 – P (x,y): ponto no plano cartesiano



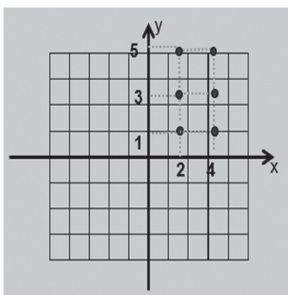
Fonte: elaborada pela autora.

Exemplo 1: considere o conjunto A = {2, 4} e B = {1, 3, 5}.

Represente A × B enumerando, um a um, seus elementos e por um gráfico cartesiano.

Resolvendo o que o exemplo propõe, temos que
A × B = {(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4, 5)}.
Sua representação no plano cartesiano é ilustrada na Figura 2.

Figura 2 – Representação A × B



Fonte: elaborada pela autora.

Considere dois conjuntos, X e Y. Chamamos *produto cartesiano* (ou *produto direto*) dos dois conjuntos (escrito como X × Y) o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro termo pertence a X e o segundo a Y.

Assim, o produto cartesiano é um conjunto formado por pares ordenados, nos quais o primeiro elemento pertence ao conjunto X e o segundo elemento ao conjunto Y. O conjunto X é chamado conjunto de partida e o Y é chamado conjunto de chegada.

Vejamos o exemplo:

Exemplo 2: A = {2, 3, 4, 10} e B = {1, 4, 5}, então:

i) A × B (lido como A cartesiano B) e será representado por: A × B = {(2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 4), (4, 5), (10, 1), (10, 4), (10, 5)}.

ii) B x A (lido como B cartesiano A) e será representado por: B x A = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 10), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 10), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 10)}

Relação

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma relação de A em B é todo subconjunto do produto cartesiano A × B.

Exemplo 3: sejam A = {1, 5, 6} e B = {2, 3} e os subconjuntos de A × B:

R_1= {(5, 2), (6, 3)}
R_2 = {(1, 2), (5, 3), (6, 3)}
R_3 = {(1,2), (5, 3), (6, 2), (6, 3)}
É possível verificar que todas são relações de A em B.

Algumas vezes, o produto cartesiano pode ser representado por uma sentença. Vejamos:

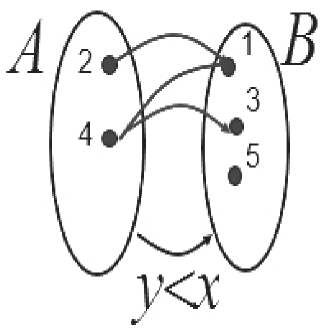
Exemplo 4: considere A = {1, 3, 5} e B = {2, 5, 9} e a sentença "x é menor ou igual a $y - 1$".

Assim, o produto cartesiano é formado pelo primeiro elemento de cada par ordenado do conjunto A e pelo segundo elemento de cada par ordenado do conjunto B. Daí, tomando a sentença "*x* é menor ou igual a *y* – 1", formaremos A × B, sabendo que *x* pertence a A e *y* pertence a B: A × B = {(1, 2), (1,5), (1,9), (3,5), (3,9), (5,9)}.

Exemplo 5: com os mesmos conjuntos A e B do Exemplo 4 e a sentença "H: *x* é menor que *y*", A × B = {(1, 2), (1, 5), (1, 9), (3, 5), (3, 9), (5, 9)}.

Exemplo 6: considere o Exemplo 1 e a relação binária h = {(x, y)| y < x}, ou seja, h = {(2;1), (4;1), (4,3)}. Então:
A representação de *h*, utilizando o diagrama de Venn (Figura 3).[1]

Figura 3 – Relação binária *h* no diagrama de Venn

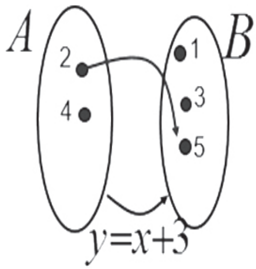


Fonte: elaborada pela autora.

A relação binária g = {(x;y)| y = x + 3} tem como representação em um diagrama de Venn (Figura 4).

[1] São diagramas que visam simbolizar graficamente conjuntos, propriedades e resultados em geral da matemática e áreas afins. Seu nome é devido ao matemático e filósofo inglês John Venn, que viveu entre 1834 e 1923.

Figura 4 – Relação binária g no diagrama de Venn

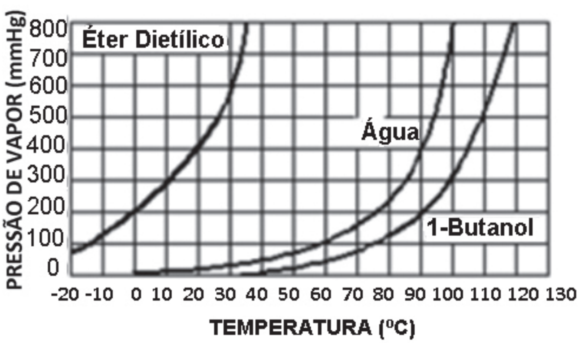


Fonte: elaborada pela autora.

FUNÇÕES

Há muitas situações em que grandezas se relacionam, como a relação entre a densidade do líquido, a pressão atmosférica e a temperatura (Figura 5); o número de horas trabalhadas e o salário que um trabalhador horista recebe; o tamanho de uma bandeja e o comprimento da lateral (Figura 6) etc.

Figura 5 – Pressão de vapor e temperatura



Fonte: Saber Enem: química e física (2018).[2]

[2] Disponível em:http://saberenemquimicaefisica.com.br/wp/pressao-de-vapor.

Figura 6 – Bandejas retangulares em diferentes tamanhos

Fonte: Embalagens Dona Beja (2017).[3]

Uma função tem no mínimo duas variáveis, uma dependente e uma independente. Os nomes são sugestivos, pois indicam o tipo de relação entre elas. Antes de defini-las, veremos alguns exemplos para entender melhor o assunto.

Podemos então pensar que o volume ocupado por um vasilhame depende de seu tamanho e que o momento em que um líquido inicia a fervura depende da pressão atmosférica e da densidade desse líquido. Além disso, um trabalhador horista vai ganhar mais se trabalhar mais horas.

Vejamos outras grandezas que mantêm entre si uma relação:

- O valor a ser pago pela quantidade de alimento posta no prato num restaurante por peso é função do valor cobrado por quilo de comida;

- O consumo de combustível de automóvel é função (entre outros fatores) da velocidade;

- O valor a ser pago numa corrida de táxi é função da distância percorrida;

- O gasto para produzir certa quantidade de sapatos é função do valor do quilograma do couro (matéria prima do sapato);

[3] Disponível em: https://embalagensdonabeja.com.br/produto/bandeja-laminada.

- O comprimento da sombra de um prédio é função da altura do prédio.

Essas grandezas (dependentes e independentes) são chamadas de variáveis. Nas situações descritas, podemos identificar as variáveis que dependem e as que causam dependência (Quadro 1).

Quadro 1 – Variáveis independentes e dependentes

Independentes	Dependentes
Densidade do líquido e pressão atmosférica	Tempo de início da fervura
Horas trabalhadas	Salário do trabalhador horista
Tamanho do vasilhame	Volume ocupado por um vasilhame
Valor cobrado por quilo de comida	Valor pago pela quantidade de alimento posta no prato em um restaurante a peso
Velocidade	Consumo de combustível de um automóvel
Distância percorrida	Valor a ser pago em uma corrida de táxi
Preço do quilograma do couro	Valor gasto para produzir uma certa quantidade de sapatos
Altura do prédio	Comprimento da sombra de um prédio

Fonte: elaborado pela autora.

Consideremos que as variáveis independentes pertencem ao conjunto de partida e as dependentes ao conjunto de chegada de cada uma dessas relações.

Exemplo 7: suponha que o salário fixo mensal de um segurança seja de R$ 1.500,00. Desejoso de aumentar sua renda, ele resolve fazer plantões. Em cada plantão que faz ele ganha R$ 200,00. Identifique as variáveis envolvidas e determine qual é a variável dependente e qual é independente.

Neste exemplo, as variáveis envolvidas são salário e número de plantões, pois o salário final será o resultado da soma da renda fixa e do que consegue com os plantões. Assim, seu salário total depende da quantidade de plantões. Portanto, a quantidade de plantões é a variável independente (x) e o salário total é a variável dependente (y).

Exemplo 8: Mariana costuma separar uma parte do seu salário mensal para seu lazer preferido: ir à praia aos domingos. Para isso, ela gasta R$ 10,00 de transporte para ir e voltar. Identifique as variáveis envolvidas no exemplo e determine qual é a variável dependente e qual é independente.

Há duas variáveis envolvidas: o gasto em reais e o número de vezes em que Mariana vai à praia. A primeira é a variável dependente (y) e a segunda a independente (x).

Exemplo 9: para publicar certo livro, há um investimento inicial de R$ 200.000,00 e depois um gasto de R$ 5,00 por exemplar. Calcular o custo por exemplar, respectivamente, numa tiragem de 4.000 exemplares e numa tiragem de 16.000 exemplares.

O custo total por exemplar é a variável dependente, pois depende da quantidade de exemplares a ser publicada, que é a variável independente.

Voltando aos exemplos já apresentados, se for considerado o caso da variável horas trabalhadas por um trabalhador horista e seu salário, vejamos a seguinte situação:

Exemplo 10: imagine que João, Maria, Antônio e José são vendedores em uma feira de moda e beleza. Todos trabalham no estande Beleza e Cia. e recebem R$ 10,00 por hora de trabalho. Considere o quadro de horas trabalhadas em um dia pelos quatro vendedores (Quadro 2).

Quadro 2 – Quadro de horas

Trabalhador	Horas Trabalhadas
Antônio	8
João	5
José	6
Maria	7

Fonte: elaborado pela autora.

Calculemos quanto cada um irá receber ao final do tempo trabalhado:

Para saber o salário de cada um devemos fazer o número de horas trabalhadas multiplicado pelo salário recebido por hora (Quadro 3).

Quadro 3 – Quadro de horas e salário

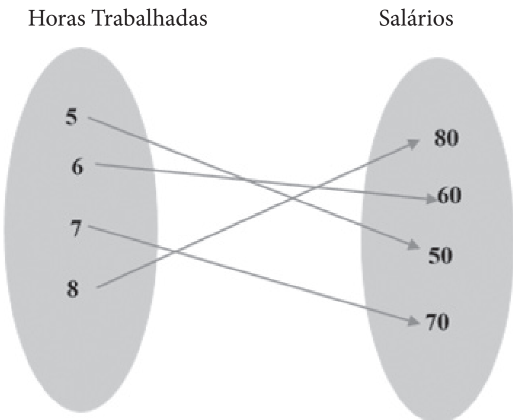
Trabalhador	Horas Trabalhadas	Salário
Antônio	8	$8 \times 10 = 80$
João	5	$5 \times 10 = 50$
José	6	$6 \times 10 = 60$
Maria	7	$7 \times 10 = 70$

Fonte: elaborado pela autora.

Podemos facilmente observar que quanto maior o número de horas trabalhadas maior o salário, tendo em vista que o valor por hora trabalhada é o mesmo para todos os vendedores do exemplo.

Vamos agora, representar os valores das horas trabalhadas e os salários recebidos com diagramas de Venn (Figura 7).

Figura 7 – Horas trabalhadas e respectivos salários.



Fonte: elaborada pela autora.

No Exemplo 10, o conjunto de partida é formado pelas horas trabalhadas por cada vendedor e o conjunto de chegada é formado pelos salários correspondentes.

O conceito de função é uma forma generalizada da noção comum de fórmula matemática. As funções descrevem relações matemáticas entre seus elementos. Esse conceito, também, pode ser definido como uma lei que determina que para cada valor x corresponde um elemento y, também denotado por $f(x)$.

Existem inúmeros tipos de funções matemáticas especiais entre dois elementos. Intuitivamente, uma função é uma maneira de associar a cada valor do argumento x (às vezes denominado variável independente) um único valor da função $f(x)$ (também conhecido como variável dependente).

Isso pode ser feito através de uma equação, um relacionamento gráfico, diagramas representando os dois conjuntos, uma regra de associação, uma tabela de correspondência. Cada par de elementos relacionados pela função determina um ponto na representação e a restrição de unicidade da imagem implica um único ponto da função em cada linha chamada do valor independente *x*.

Portanto, chamamos de função toda e qualquer relação na qual cada elemento do conjunto de partida se relaciona com um só elemento do conjunto de chegada. Ou seja, um elemento da partida só pode se relacionar com um único elemento da chegada. No entanto, um elemento da chegada pode estar relacionado a mais de um elemento da partida.

Assim, a função f determina uma lei ou regra que associa os elementos de dois conjuntos, X e Y, sempre que para cada valor de x em X, temos um único valor de *f*(x) em Y. Dessa forma, se X e Y são dois conjuntos não vazios e dados e , dizemos que, se f é uma função de X em Y, então f: X → Y, onde *f*(x) = y, com x elemento de X e y elemento de Y.

Observação 1: normalmente são utilizadas as letras minúsculas do alfabeto para representar as funções: f, g, h, etc.

Observação 2: os conjuntos de partida e de chegada *não podem ser conjuntos vazios*!

Observação 3: Nos exemplos anteriores podemos identificar que:

- Há (pelo menos) duas variáveis envolvidas;

- Há uma relação entre uma variável independente e uma variável dependente;

- Para cada valor de variável independente está associado um único valor de variável dependente;

- Todas as relações estabelecidas entre duas variáveis que obedecem às características (1, 2 e 3) da Observação 3, são chamadas de funções.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 11: a relação do Exemplo 6 não é função.

Exemplo 12: considere que a relação $\mathbb{R}$, definida pela sentença $x \leq y$, baseada nos conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, não é um função. Não é função, pois a sentença dada, construída nos conjuntos A e B resulta no produto cartesiano $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2,3), (2,4), (2, 5)\}$ que não é função.

Notação: a notação $f: A \to B$ é utilizada para representar uma função de A em B, onde A e B são dois conjuntos não vazios.

Observação 4: em outras palavras, uma função $f: A \to B$ é uma regra segundo a qual cada elemento de A faz correspondência com um único elemento de B.

$$f: \mathbf{A} \to \mathbf{B} \qquad\qquad f: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$$

ou

$$x \to f(x) \qquad\qquad \mathbf{x} \to y = f(x)$$

Definição formal de função

Utilizaremos a definição de Lima (2013, p. 41):

> Dados os conjuntos X, Y , uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y ") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um ÚNICO elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se "y igual a f de x"). O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contra-domínio da função, f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f transforma (ou leva) x em f(x).

Para Lima *et al.* (2006), a natureza da regra que determina como obter f(x) quando se dá x é inteiramente arbitraria. Essa regra ou lei está sujeita a apenas duas condições:

a) A fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for $x \in X$ dado.

b) A cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y.

$$f: X \rightarrow Y$$

Diz-se que a função f de X em Y que relaciona cada elemento x em X, um único elemento:

$$y = f(x) \text{ em } Y$$

Outra maneira de definir uma função é afirmar que f é uma relação binária entre os dois conjuntos tal que:

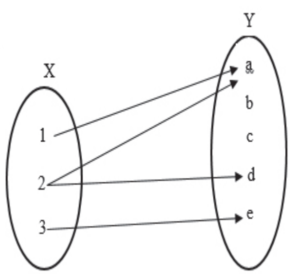
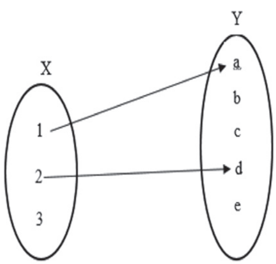
1) f é unívoca: se $y = f(x)$ e $z = f(x)$, então $y = z$;

2) f é total: para todos x em X, existe um y em Y tal que $y = f(x)$.

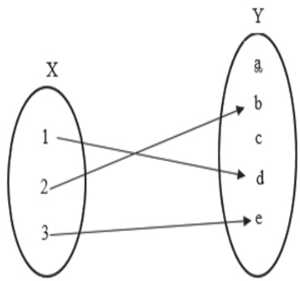
Considere as três relações seguintes (Quadro 4):

Quadro 4 – Exemplos de relações entre conjuntos.

(Continua)

	*Esta não é uma função*, pois o elemento 2 em X é associado a dois elementos (*a* e *d*) em Y. Apesar de não ser uma função, representa uma relação multivalorada.
	Esta não é uma função, pois o elemento 3 em X não é associado a nenhum elemento em Y.

(Conclusão)

	Esta é uma função (no caso, uma função discreta). Ela pode ser definida explicitamente pela expressão: $f(x)= \begin{cases} d, \text{se } x=1 \\ b, \text{se } x=2 \\ e, \text{se } x=3 \end{cases}$

Fonte: elaborado pela autora.

Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Toda função possui uma lei de formação algébrica que relaciona dois ou mais conjuntos por meio de cálculos matemáticos. Assim, considera-se que uma função é formada por três elementos: (1) um conjunto no qual está a variável independente, (2) um conjunto no qual está a variável dependente e (3) a lei que relaciona os elementos destes dois conjuntos.

Dessa forma, temos um conjunto de “partida”, no qual estão os valores da variável independente (x), e o conjunto de “chegada”, no qual estão os valores da variável dependente (y). Por isso dizemos que para toda função temos um conjunto denominado domínio (vulgarmente chamado conjunto de “partida”) e o contradomínio (conjunto de “chegada”).

Exemplo 13: considere o preço do litro do combustível e a quantidade de litros usados no abastecimento de um carro. Suponhamos que o preço do litro de gasolina seja R$ 3,70, dessa forma podemos estabelecer a seguinte função $y = 3{,}70.x$, que determina o preço a pagar y em decorrência da quantidade x de litros (Tabela 1).

Tabela 1 – Consumo (em reais) *versus* quantidade de gasolina (em litros)

x (litros)	y = 3,70 . x	y (reais)	x (litros)	y = 3,70 . x	y (reais)
1	y = 3,70 . 1	3,70	6	y = 3,70 . 6	22,20
2	y = 3,70 . 2	7,40	7	y = 3,70 . 7	25,90
3	y = 3,70 . 3	11,10	8	y = 3,70 . 8	29,60
4	y = 3,70 . 4	14,80	9	y = 3,70 . 9	33,30
5	y = 3,70 . 5	18,50	10	y = 3,70 . 10	37,00

Fonte: elaborada pela autora.

Para cada quantidade de gasolina na primeira coluna há um valor em reais corresponde a ser pago (Tabela 1). Se comprarmos cinco litros de gasolina pelo preço indicado, pagaremos R$ 18,50. Assim, o valor de $x = 5$ pertence ao conjunto de partida e o resultado $y = 18{,}50$ pertence ao conjunto de chegada.

Os números que aparecem na primeira coluna formam o que se chama em Matemática de domínio da função e os que aparecem na última coluna da mesma tabela compõem o que chamamos de conjunto imagem, ou imagem da função. Em termos matemáticos:

> D(f) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 10} e Im(f) = {3,70; 7,40; 11,10; 14,80; 18,50; 22,20; 25,90; 29,60; 33,30; 37,00}.

Numa viagem, suponha que um automóvel manteve velocidade constante de 60 km/h e, com o passar do tempo, percorrerá determinada distância. Podemos determinar a distância percorrida pelo veículo relacionando a velocidade média e o tempo do movimento por meio da expressão matemática D = V.t, onde D: distância, V: velocidade média e t: tempo. Observe a tabela de valores para essa função (Tabela 2):

Tabela 2 – Distância = velocidade × tempo

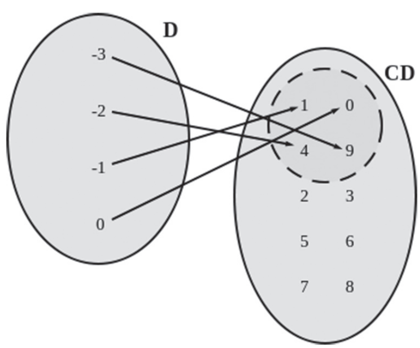
t (horas)	V (km/h)	D = V . t	t (horas)	V (km/h)	D = V . t
1	60	60	6	60	360
2	60	120	7	60	420
3	60	180	8	60	480
4	60	240	9	60	540
5	60	300	10	60	600

Fonte: elaborada pela autora.

Chamamos de domínio de uma função os valores que pertencem ao conjunto de partida. O contradomínio é formado pelos elementos do conjunto de chegada. Já a imagem de uma função é o conjunto de elementos do contradomínio que se relacionam com pelo menos um dos elementos do domínio.

Exemplo 14: considere a função $f(x) = x^2$ definida para $\{-3, -2, -1, 0\}$. Observar o conjunto domínio (D), contradomínio (CD) e imagem (em destaque) (Figura 7).

Figura 8 – Domínio, contradomínio e imagem.



Fonte: elaborada pela autora.

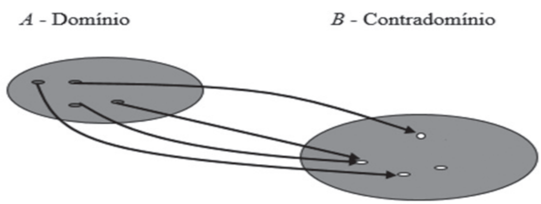
Observação 5: dada uma função f: X →Y, tal que *f(x) = y*, para calcular o valor de f no ponto a ∈ X, substituímos a por x na expressão da função f. Ou seja, calculamos f(a), que é a imagem de a pela função f.

Observação 6: nem sempre o contradomínio coincide com o conjunto imagem, ou seja, nem sempre CD(f) = Im(f)

Exemplo 15: considere os conjuntos A = {1, 4, 5, 6} e B = {3, 7, 8}, o produto cartesiano A × B = {(1, 3), (4,7), (5, 8), (6, 7)} é uma função de A em B.

Exemplo 16: *f: A → B (é função)* (Figura 8)

Figura 9 – Diagrama de Venn de uma função *f: A → B* dos conjuntos não vazios A e B



Fonte: elaborada pela autora.

Valor da função no ponto

Dada uma função *f: X →Y*, tal que *f(x) = y*, para calcular o valor da função no ponto a ∈ *X* , substituímos *a* por *x* na expressão da função . Ou seja, calculamos *f(a)*, que é a imagem de a pela função f.

Exemplo 17: dada a função $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$, calcule para:

a) a = 1;

b) a = $\sqrt{2}$;

c) a = -1;

d) a = 0.

Para calcular , dada a função $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$, basta substituir a variável pelo valor de a nos itens anteriores. Assim, vejamos:

a) $f(1) = 3 \times 1^2 + 4 \times 1 - 2 = 5$. Então, $f(1) = 5$;

b) $f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 + 4 \times \sqrt{2} - 2 = 4 + 4\sqrt{2}$. Então, $f(\sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2}$;

c) $f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) - 2 = -3$. Então, $f(-1) = -3$;

d) $f(0) = 3 \times (0)^2 + 4 \times (0) - 2 = -2$. Então, $f(0) = -2$.

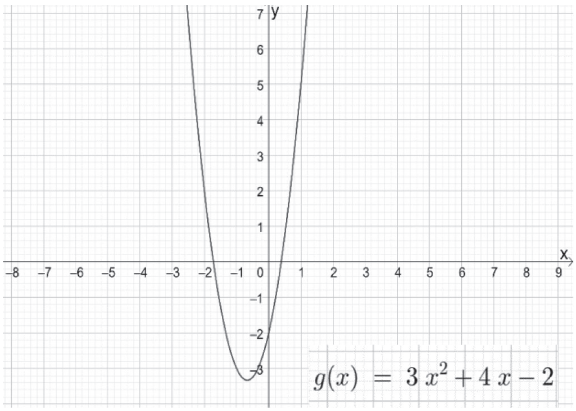
Gráfico de função

Podemos representar a função por meio do diagrama de Venn e do plano cartesiano. O gráfico de uma função f: X → Y é o conjunto de pares ordenados no plano cartesiano que satisfazem à condição y = f(x). Ou seja, o gráfico de uma função é o conjunto de todos os pontos do plano da forma (x, f(x)), com x variando no domínio de f.

Dados os conjuntos não vazios A e B e f em uma função de A em B, o gráfico da função f é, por definição, o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) tais que x ∈ A e y ∈ B.

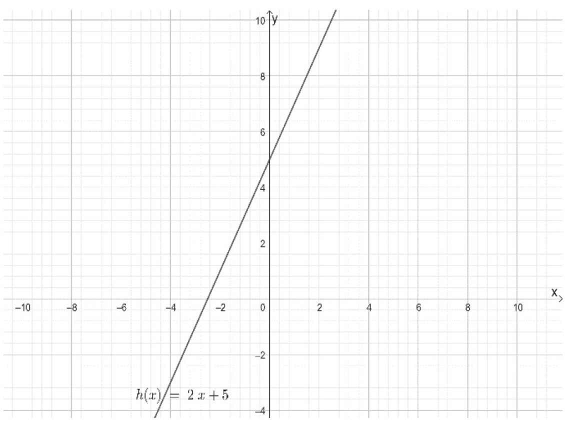
Exemplo 18: a seguir, os gráficos das funções $g(x) = 3x^2 + 4x - 2$ (Figura 10) e $h(x) = 2x + 5$ (Figura 11).

Figura 8 – Gráfico da função $g(x) = 3x^2 + 4x - 2$



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 9 – Gráfico da função $h(x) = 2x + 5$



Fonte: elaborada pela autora.

Classificação de funções por propriedade

Conhecer as propriedades das funções pode facilitar na construção de gráficos, antecipar comportamento delas perante as variáveis e ajudar na discussão dos zeros da função, bem como em estudos de máximos e mínimos etc. A seguir, apresentam-se alguns tipos de função!

Função injetora

Dizemos que uma função $f: X \to Y$ é injetora (injetiva) quando, para quaisquer elementos x_1 e x_2 de X, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Em outras palavras, quando $x_1 \neq x2$, em X, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Função sobrejetora

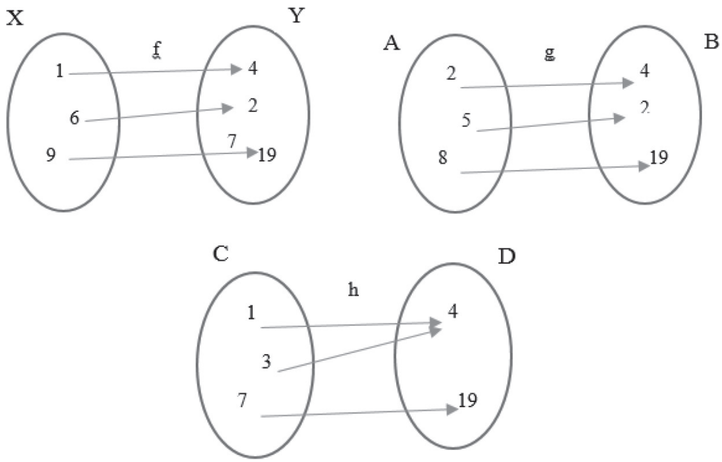
Dizemos que uma função f: X → Y sobrejetora (sobrejetiva) quando para todo y ∈ Y, existe pelo menos um x ∈ X tal que f(x) = y.

Função bijetora

Uma função f: X → Y chama-se bijetora (ou bijetiva) quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Exemplo 19: sejam as funções definidas pelos diagramas a seguir (Figura 12):

Figura 12 – Funções definidas por diagramas



Fonte: elaborada pela autora.

Apenas *f* e *g* são funções injetoras. A função *h* é tal que h(1) = h(3), logo não é injetora. Apenas as funções *g* e *h* são sobrejetoras.

Função par

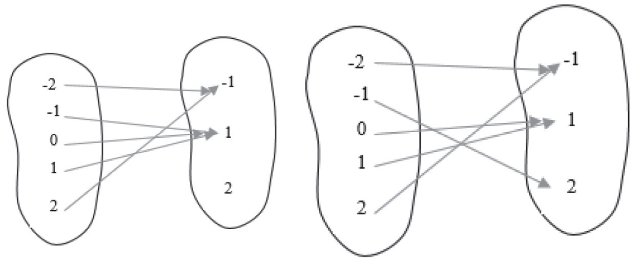
Dada uma função f: A → B, dizemos que *f* é par se, e somente se, f(x) = f(–x) para todo x ∈ A. Ou seja, os valores simétricos possuem a mesma imagem.

Função ímpar

Dada uma função f: A → B, dizemos que *f* é ímpar se, e somente se, f(x)= - f(–x) para todo x ∈ A. Ou seja, os valores simétricos possuem imagens simétricas.

Exemplo 20: analisando os diagramas a seguir, percebe-se que no primeiro caso temos uma função par e no segundo uma função que não é par nem ímpar (Figura 13).

Figura 13– Diagramas de funções



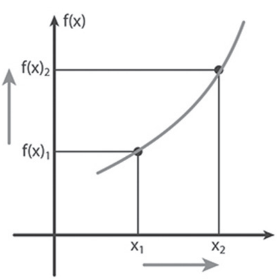
Fonte: elaborada pela autora.

Função crescente

Uma função $f{:}X \rightarrow Y$ é dita crescente em um conjunto $A \subset X$, se e somente se, para quaisquer x_1 e $x_2 \in X$, com $x_1 < x_2$ implicar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Na Figura 14, é possível verificar que o gráfico representa uma função crescente, pois quando os valores do domínio crescem, os respectivos valores das imagens também crescem.

Figura 14 – Gráfico de função crescente



Fonte: elaborada pela autora.

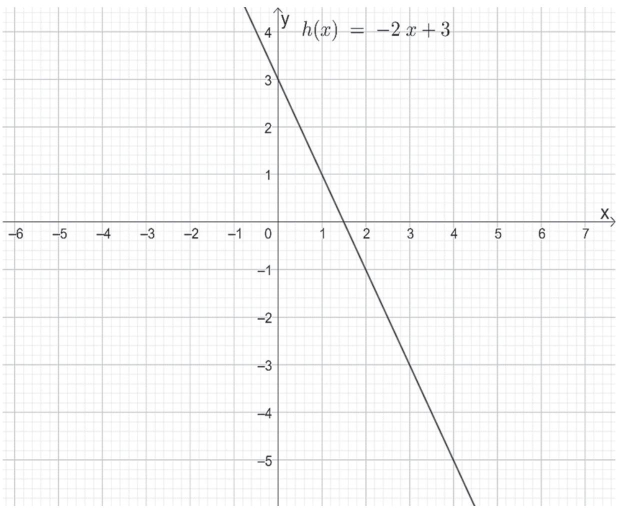
Função decrescente

Uma função $f: X \rightarrow Y$ é dita decrescente em um conjunto $A \subset X$, se e somente se, para quaisquer x_1 e $x_2 \in X$, com $x_1 < x_2$ implicar que $f(x_1) > f(x_2)$. Em outras palavras, quando os valores do domínio crescem, seus respectivos valores de imagens decrescem.

Exemplo 21: gráfico de função decrescente.

A função $h(x) = -2x + 3$ tem seu comportamento representado na Figura 15. Nele é possível perceber que se trata de uma função decrescente, pois à medida que avançamos para a direita no eixo x, em valores da variável ali representada, os respectivos valores de f(x) diminuem.

Figura 15 – Gráfico de função decrescente

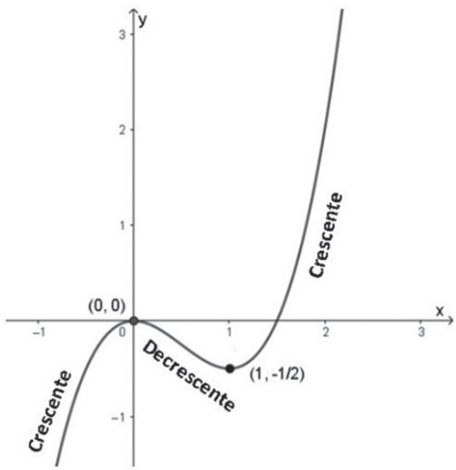


Fonte: elaborada pela autora.

Exemplo 22:

Uma função pode ter trechos crescentes e trechos decrescentes como é o caso da função representada na Figura 16.

Figura 16 – Gráfico de função decrescente



Fonte: elaborada pela autora.

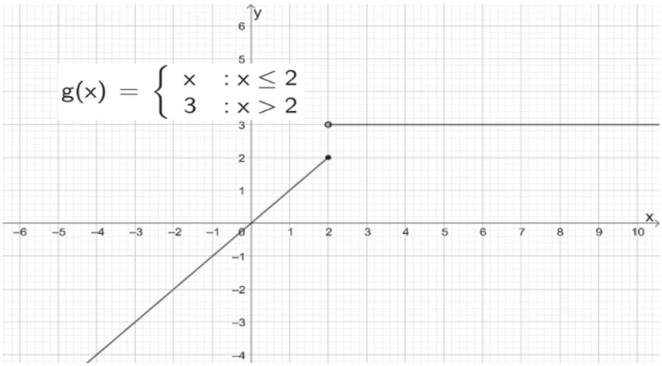
Função definida por várias sentenças

Uma função $f: X \rightarrow Y$ é definida por mais de uma sentença quando cada uma das sentenças está associada a um subconjunto $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de X, de tal forma que A_i (com i = 1, 2, …, n) é um subdomínio e a união desses n subconjuntos forma domínio da função original $f: X \rightarrow Y$.

Exemplo 23: são exemplos de funções definidas por mais de uma sentença as funções g e f reais (Figuras 17 e 18), tais que

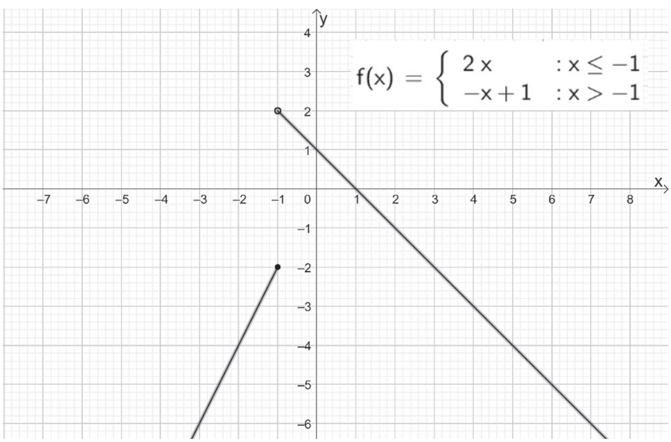
$$g(x)=\begin{cases} x, se\ x \leq 2 \\ 3, se\ x\ > 2 \end{cases} \text{ e } f(x) = \begin{cases} 2x, se\ x \leq -1 \\ -x+1, se\ x > -1 \end{cases}$$

Figura 17– Gráfico da função g



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 18 – Gráfico da função f



Fonte: elaborada pela autora.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Suponha que temos a função real *h(x)* = 2x – $\sqrt{20}$. Calcule o valor x tal que f(x) = 0.

Solução comentada:

Desenvolvendo a questão, queremos calcular a equação 2x – $\sqrt{20}$= *0, ou seja, encontrar o valor de x, dado que f(x) = 0. Assim, teremos que* 2x – $\sqrt{20}$. *Isso resulta que queremos saber a solução da fração* $\frac{\sqrt{20}}{2}$.

Para resolver essa questão devemos nos lembrar de algumas propriedades de fração, de potência e do radical de um número. Vejamos:

$$\frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2^2}} = \sqrt{\frac{20}{2^2}} = \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5}$$

Resposta: x = $\sqrt{5}$.

2) Seja a função *f* definida por *f*(x) = 2x – 5, determine o valor de f(–1) + f(0):

Solução comentada:

Para resolver essa questão, devemos calcular o valor da função f(x) = 2x – 5 quando x assume os valores – 1 e 0. Vejamos:
Sendo f(x) = 2x – 5, então f(-1) = 2.(–1) – 5 = –7
e f(0) = 2.(0) – 5 = –5.
Assim, f(–1) + f(0) = – 7 + (–5) = – 12
Resposta: – 12.

3) Determine os zeros das funções a seguir:

a) y = 4x + 2;

b) y = – 5x;

c) y = $\frac{x}{2}$ + 3;

Solução comentada:

Para resolver essa questão, devemos saber que o zero de uma função $y = f(x)$ é o valor de x que, ao ser substituído, faz com que $f(x)$ se anule. Ou seja, se x é um zero da função, $y = f(x)$, então $y = 0$. Iniciamos com $y = 0$ e calculamos o(s) valor(es) de x na equação que se forma:

Vejamos:

a) $y = 0 \Longrightarrow 4x + 2 = 0 \Longrightarrow 4x = -2 \Longrightarrow x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

Resposta: $x = -\frac{1}{2}$

b) $-5x = 0 \Longrightarrow x = 0$

Resposta: $x = 0$

c) $\frac{3}{2}x + 3 = 0 \Longrightarrow \frac{3}{2}x = -3 \Longrightarrow 3x = -3 \times 2 \Longrightarrow 3x =$
$\Longrightarrow x = -\frac{6}{3} = -2$

Resposta: $x = -2$

4) Sejam $A = \{1, 5, 6\}$ e $B = \{2, 3\}$ e os subconjuntos de $A \times B$:

$R_1 = \{(5, 2), (6, 3)\}$;
$R_2 = \{(1, 2), (5, 3), (6, 3)\}$;
$R_3 = \{(1,2), (5, 3), (6, 2), (6, 3)\}$.

Todos são funções de A em B?

Solução comentada:

Pela definição de relação entre dois conjuntos, temos que R_1, R_2 e R_3 são relações entre A e B, mas apenas R_2 é função de A e B.

$A \times B = \{(1,2), (1,3), (5,2), (5,3), (6,2), (6,3)\}$

Resposta: $A \times B = \{(1,2), (1,3), (5,2), (5,3), (6,2), (6,3)\}$

5) Mariana costuma separar uma parte do seu salário mensal para seu lazer preferido: ir à praia aos domingos. Para isso, gasta R$ 10,00 de transporte para ir e voltar. Ela sempre usa o transporte. Identifique as variáveis envolvidas no exemplo e determine qual é a variável dependente e qual é independente.

Solução comentada:

Há duas variáveis envolvidas: o gasto em reais e o número de vezes em que Mariana vai à praia. A primeira é a variável a dependente (y) e a segunda a independente (x), pois quanto mais ela usa o transporte mais ela gasta. Ou seja, se ela for duas vezes à praia, ela gastará R$ 20,00. Se for cinco vezes, gastará R$ 50,00, conforme resumimos no quadro a seguir:

Número de vezes que Mariana vai à praia	Gasto com o transporte (R$)
1	10,00
2	20,00
3	30,00
4	40,00
5	50,00

6) Para publicar certo livro, há um investimento inicial de R$ 200.000,00 e depois um gasto de R$ 5,00 por exemplar. Calcular o custo por exemplar, respectivamente, numa tiragem de 4.000 exemplares e numa tiragem de 16.000 exemplares.

Solução comentada:

Considere C, o custo total, e x o número de exemplares impressos. Sabemos que há um custo fixo inicial de R$ 200.000,00 mais o gasto de R$ 5,00 que depende do número de exemplares impressos. Assim, $C(x) = 200.000,00 + 5,00x$.

Se o número de exemplares for 4.000, o custo total será de $C(16.000) = 200.000 + 5 \times 16000 = 280.000,00$. Isso implica que o custo por exemplar será de $\frac{220.000}{4.000} = 55$.

Cada exemplar sairá ao custo de R$55,00.
Se o número de exemplares for 16.000, o custo total será de $C(16.000) = 200.000 + 5 \times 16.000 = 280.000,00$. Isso implica que o custo por exemplar será de $\frac{200.000}{16.000} = 17,50$.

Resposta: O custo por exemplar será R$ 17,50.

7) Imagine que quatro amigos resolvem vender as figurinhas do álbum de seus times preferidos. Amaral, Marta, Neymar e Daniel têm quantidades diferentes de figurinhas conforme se apresentam na tabela a seguir. Todos concordam em vender suas figurinhas por R$ 5 a unidade.

Amigos	Figurinhas à venda
Amaral	4
Neymar	10
Daniel	25
Marta	12

Calcule quanto cada um irá receber ao vender todas suas figurinhas.

Solução comentada:

Para saber quanto cada um irá receber ao final devemos fazer o número de figuras vendidas por cada um multiplicado pelo valor recebido por cada figurinha vendida, conforme tabela a seguir:

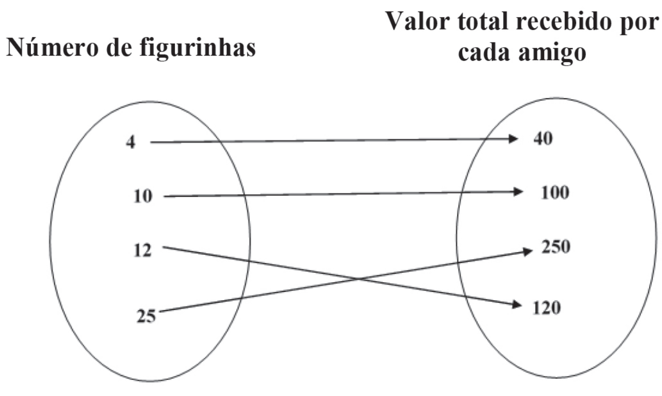
(Continua)

Amigos	Figurinhas à venda	Valor total
Amaral	4	$4 \times 10 = 40$
Neymar	10	$10 \times 10 = 100$

(Conclusão)

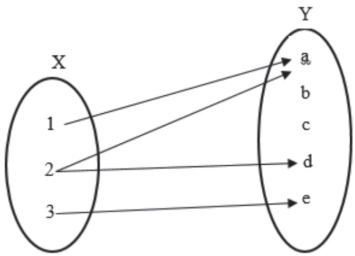
Amigos	Figurinhas à venda	Valor total
Marta	12	$12 \times 10 = 120$
Daniel	25	$25 \times 10 = 250$

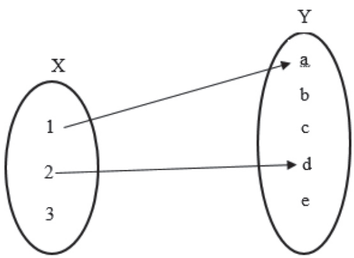
Podemos facilmente observar que quanto maior o número de figurinhas, maior será o valor final a receber, tendo em vista que o valor por figurinha é o mesmo para todos os amigos do exemplo.
Vamos agora representar o número de figurinhas e os valores que cada amigo recebeu pelo seu total de figurinhas vendidas com diagramas de Venn:

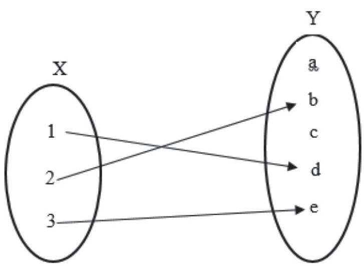


Então, o conjunto de partida é formado pelo número de figurinhas que cada amigo possui e o conjunto de chegada é formado pelos correspondentes valores recebidos.
Resposta: Amaral receberá R$ 40,00; Neymar receberá R$ 100,00; Marta receberá R$ 120,00; Daniel receberá R$ 250,00.

8) Considere os diagramas de Venn a seguir e indique qual deles representa uma função de X em Y:

a) 

b) 

c) 

Solução comentada:

*a) Não é uma função, pois o elemento 2 em X é associado com dois elementos (*a *e* d*) em Y. Apesar de não ser uma função, representa uma relação multivalorada.*

b) Não é uma função, pois o elemento 3 em X não é associado com nenhum elemento em Y.
c) É uma função (no caso, uma função discreta). Ela pode ser definida explicitamente pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} d, se\ x = 1 \\ b, se\ x = 2 \\ e, se\ x = 3 \end{cases}$$

9) Considere o preço do quilograma do alimento e a quantidade de quilogramas consumidos por cada frequentador de um restaurante (foram 10 clientes ao todo, durante o período observado). Suponhamos que o preço do quilograma do alimento seja R$ 37,00, dessa forma, podemos determinar a seguinte função *y = 37,00.x*, que determina o preço a pagar y em decorrência da quantidade *x* de quilogramas consumido de alimento, conforme tabela a seguir.

Ordem	x (quilogramas)	y = 37,00 . x	y (reais)
1	0,400	37,00 . 0,400	14,80
2	0,450	37,00 . 0,450	16,65
3	0,340	37,00 . 0,340	12,58
4	0,496	37,00 . 0,496	18,35
5	0,475	37,00 . 0,475	17,58
6	0,586	37,00 . 0,586	21,68
7	0,478	37,00 . 0,478	17,69
8	0,508	37,00 . 0,508	18,80
9	0,469	37,00 . 0,469	17,35
10	0,510	37,00 . 0,510	18,87

Solução comentada:

É possível observar na tabela que, para cada quantidade de alimento consumido x, *corresponde um valor* y *em reais a ser pago. Se consumirmos 0,450 kg de alimento, pelo preço indicado, pagaremos R$ 16,65. Assim, o valor de* x = *0,450 pertence ao conjunto de partida e o resultado* y = *16,65 pertence ao conjunto de chegada.*
Os números que aparecem na primeira coluna formam o que se chama em Matemática de "o domínio da função" e os que aparecem na terceira coluna compõem o que chamamos de "conjunto imagem", ou imagem da função. Em outras palavras, o

D(f) = {0,340; 0,400; 0,450; 0,469; 0,475; 0,478; 0,496; 0,508; 0,510; 0,586} e
Im(f) = {12,58; 14,80; 16,65; 17,35; 17,58; 17,69; 18,35; 18,80; 18,87; 21,68}.

10) Numa viagem, suponha que um automóvel manteve velocidade constante de 60 km/h, com o passar do tempo, esse veículo irá percorrer uma determinada distância. Podemos determinar a distância percorrida pelo veículo relacionando a velocidade média e o tempo do movimento por meio da expressão matemática D = V.t, onde D: distância, V: velocidade média e t: tempo. Observe a tabela de valores para essa função e responda o que se pede:

t (horas)	V (km/h)	D = V. t
1	60	60
2	60	120
3	60	180
4	60	240
5	60	300
6	60	360
7	60	420
8	60	480
9	60	540
10	60	600

Indique o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função.

Solução comentada:

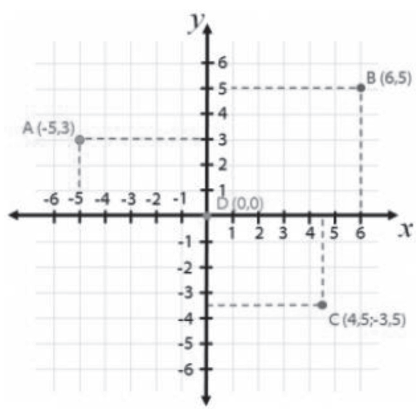
O domínio é D(f) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, contradomínio CD(f) = {60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600} = Im(f).

11) Como representar os pontos A(–5, 3), B(6, 5), C(4,5; –3,5) e D(0, 0), que são os pares ordenados A, B, C e D, no plano cartesiano?

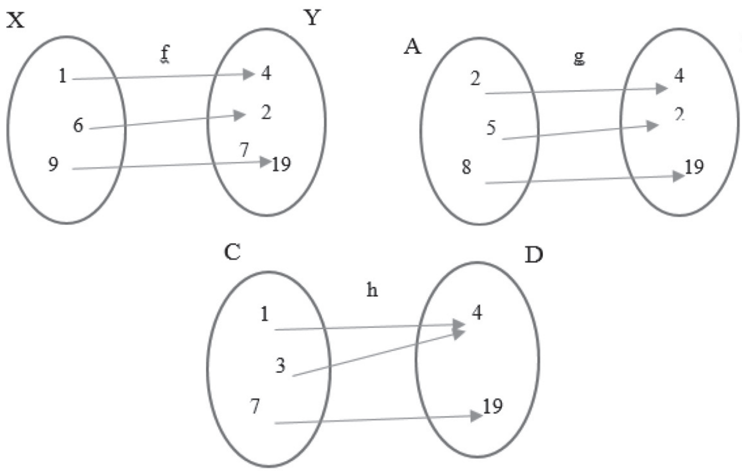
Solução comentada:

Devemos traçar duas retas que se encruzam em um ângulo reto (90 graus), uma na posição horizontal, cujo sentido de crescimento acontece da esquerda para a direita, outra na vertical com sentido de crescimento de valores de baixo para cima. Após essa etapa, devemos tracejar cada uma em intervalos do mesmo tamanho, de forma que cada dois traços contíguos representem pontos consecutivos sobre a reta.

Para traçar cada ponto, tomamos o primeiro elemento sobre a reta horizontal e o segundo sobre a reta vertical. Devemos, então, traçar retas paralelas aos dois eixos e o ponto de encontro delas será o ponto procurado. O resultado da questão encontra-se na figura a seguir:



12) Sejam as funções *f*, *g* e *h* definidas pelos diagramas, a seguir. Qual(is) é(são) injetora(s), sobrejetora(s) e bijetora(s)?



Solução comentada:

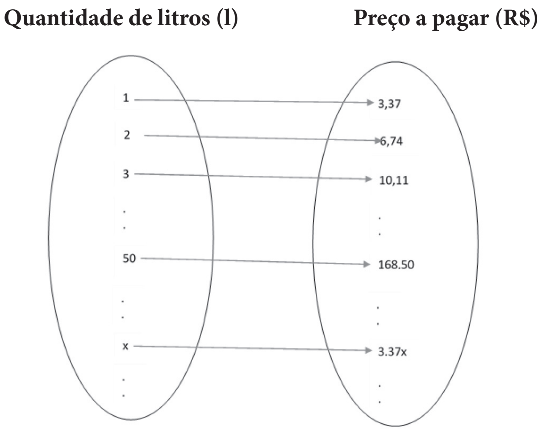
De antemão, observamos que todos os diagramas representam funções. Feito isso, devemos considerar quando uma função é dita injetora, sobrejetora e bijetora.

Para que uma função seja considerada injetora, elementos diferentes do domínio devem ter imagens diferentes. Assim, apenas f *e* g *são funções injetoras. A função* h *é tal que h(1) = h(3), logo não é injetora, então não é bijetora.*

Uma função é sobrejetora quando o contradomínio é igual à imagem da função. Assim, g *e* h *são funções sobrejetoras.*

Resposta: a função *f* é injetora, mas não é sobrejetora. A função *h* não é injetora, mas é sobrejetora. A função *g* é a única que tanto é injetora quanto sobrejetora, sendo, portanto, bijetora.

13) O diagrama a seguir considera a quantidade de litros de gasolina e os seus respectivos preços a pagar em um posto de combustível numa determinada cidade brasileira:



O preço (p) a pagar é dado por R$ 3,37 vezes o número de litros (x) comprados, isto é, p = 3,37.x (lei da função ou fórmula matemática da função).

O preço a pagar é dado em função da quantidade de litros que se coloca no tanque, ou seja, o preço depende do número de litros comprados.

a) Qual é o preço de 10 litros de gasolina?

b) Quantos litros de gasolina podem ser comprados com R$ 43,81?

Solução comentada:

Para calcular o preço de 10 litros de gasolina, devemos multiplicar esse valor por 3,37:

$p = 3{,}37 \cdot 10 =$ R\$ 33,70 = R\$ 33,70

Sabemos que um litro de combustível custa R$ 3,37. Esse é um fator de multiplicação que nos permite calcular quantos reais serão pagos y *para cada* x *quantidade de litros de gasolina.*
Assim, se de forma genérica $y = 3{,}37.x$ *e* $y = 43{,}81$*, teremos que* $43{,}81 = 3{,}37.x$*.*

$$\frac{43{,}81}{3{,}37} = \frac{3{,}37x}{3{,}37}$$

Fazendo a divisão dos dois lados da última equação por 3,37, teremos que o resultado desta última equação é $13 = x$
Resposta: a) *R$ 33,70; b) Podem ser comprados 13 litros de gasolina com R$ 43,81.*

14) A tabela a seguir relaciona as medidas dos lados de um terreno retangular, em metros, e o seu perímetro (P), também em metros.
a) Qual o perímetro de um terreno retangular cuja medida do lado menor é 3 m e o lado maior é 6 m?
b) Qual a medida do lado maior do terreno retangular cujo perímetro é de 22 m, sabendo que o lado menor é de 4 m?

Medida do lado menor (c)	Medida do lado maior (C)	Perímetro (P) $P = 2(c + C)$
1	2	6
2	4	12
2,5	5	15
3	6	18
4,1	8,2	24,6
c	$C = 2c$	$P = 2(c + C)$

Solução comentada:

Observe que o perímetro do retângulo é dado em função das medidas dos lados, isto é, o perímetro depende das medidas do lado menor e do lado maior. A cada valor dado para as medidas dos lados, corresponde um único valor para o perímetro.

Sabemos que o perímetro P é dado pelo dobro da medida do lado maior somado ao dobro da medida do lado menor. Ou seja, se o lado menor for representado pela letra c e o lado maior pela letra C, temos que o perímetro será calculado pela expressão:

$P = 2.c + 2.C = 2(c + C)$.

Como o perímetro depende da medida do lado, ele é a variável dependente e a medida do lado é a chamada variável independente.

Para calcular o perímetro de um terreno retangular cuja medida do lado menor é 3 m e a do lado maior é 6 m, seguimos a seguinte regra: $P = 2(3 + 6) = 18$ *m.*

Para calcular a medida do lado maior do terreno retangular cujo perímetro é de 22 m, sabendo que o lado menor é de 4 m, devemos fazer o cálculo a seguir:

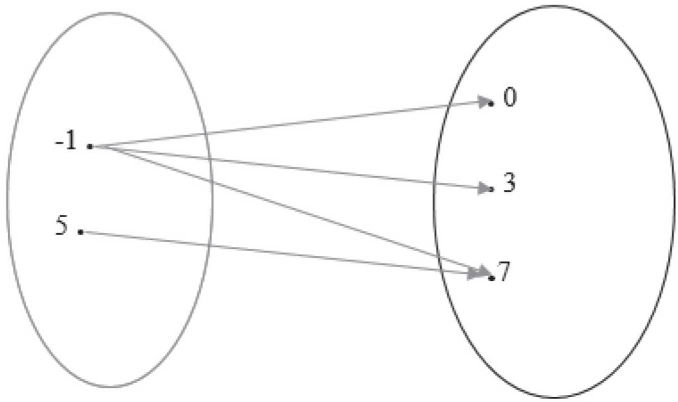
$P = 2(c + C) \Rightarrow 22 = 2(4 + C) \Rightarrow \frac{22}{2} = 4 + C \Rightarrow 11 = 4 + C$

$\Rightarrow 11 - 4 = C$

$\Rightarrow 7 = C.$

Resposta: a) o perímetro mede 18 m; b) o lado maior tem comprimento igual a 7 m.

15) Dados A = {−1, 5} e B = {0, 3, 7}, relacionamos A e B da seguinte forma: cada elemento de A é menor do que um elemento de B:



Essa relação é uma função de A em B?

Solução comentada:

Para ser uma função, nenhum elemento do domínio pode se relacionar com mais de um elemento do contradomínio. Logo, essa relação não é uma função de A em B.

Resposta: Essa relação não é uma função de A em B.

16) Classifique as funções a seguir em pares, ímpares ou sem paridade (nem par e nem ímpar):

a) $f(x) = -3x$;

b) $g(x) = x^2$;

c) $h(x) = x^2 - 3x + 4$.

Solução comentada:

Temos que verificar a paridade das funções f, g *e* h. *Vejamos:*

$f(-x) = -3(-x) = 3x \;\; f(-x) = -f(x)$, portanto f é ímpar.

$g(-x) = (-x)^2 = x^2 \;\; g(x) = (-x)$, portanto g é par.

$h(x) = x^2 - 3x+4 \; (-x) = (-x)^2 - 3(-x)+4 = x^2+3x+4$

Como $h(x) \neq h(-x)$, então h *não é par. Temos também que $-h(x) \neq h(-x)$, logo h não é ímpar.*

Assim, concluímos que $h(x) = x^2 - 3x + 4$ é função sem paridade. Ou seja, não é par nem ímpar.

Resposta: a) a função f é ímpar; b) a função h(x) não é par nem é ímpar.

17) Dadas as funções f: A B definida por $f(x) = 2x + 5$ e g: B → C definida por $g(y) = y^2$, considere que A = {–3, –2, –1, 0, 3}, B = {–1, 1, 3, 5, 11} e C = {0, 1, 9, 25, 121}. Verifique a função fog e a função gof, caso seja possível.

Solução comentada:

Dados A e B, *o cálculo f(x) para todo $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 3\}$ é:*

$f(-3) = 2.(-3) + 5 = -1$

$f(-2) = 2.(-2) + 5 = 1$

$f(-1) = 2.(-1) + 5 = 3$

$f(0) = 2.(0) + 5 = 5$

$f(3) = 2.(3) + 5 = 11$

Dados os conjuntos B e C, o cálculo g(y) para todo $y \in B = \{-1, 1, 3, 5, 11\}$ é:

$g(-1) = 1$

$g(1) = 1$

$g(3) = 9$

$g(5) = 25$

$g(11) = 121$

Trabalhando com a composta gof, ou seja, com

g(f(x)) = g(2x +5) = (2x +5)2, teremos:

g(2.(–3) + 5) = (2.(–3) + 5)2 = (–1)2 = 1

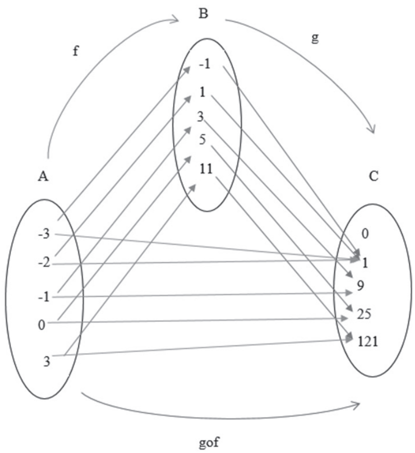
g(2.(–2) + 5) = (2.(–2) + 5)2 = 12 = 1

g(2.(–1) + 5) = (2.(–1) + 5)2 = 32 = 9

g(2.(0) + 5) = (2.(0) + 5)2 = 52 = 25

g(2.(3) + 5) = (2.(3) + 5)2 = 112 = 121

Esses cálculos estão resumidos no diagrama a seguir:



Nesse exemplo, a função fog não pode ser construída. Vemos que fog é gerada de C para A. Como podemos verificar no gráfico anterior, sobraria um elemento do conjunto C (o número 0) e teríamos um elemento do conjunto C associado a dois elementos do conjunto A, o que não caracteriza uma função de C para A.

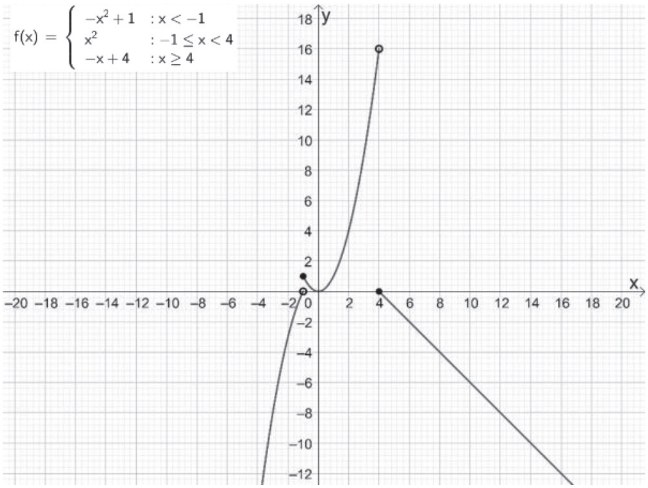
18) Esboce o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, se\ x < -1 \\ x^2, se - 1 \leq x < 4 \\ -x + 4, se\ x \geq 4 \end{cases}$$

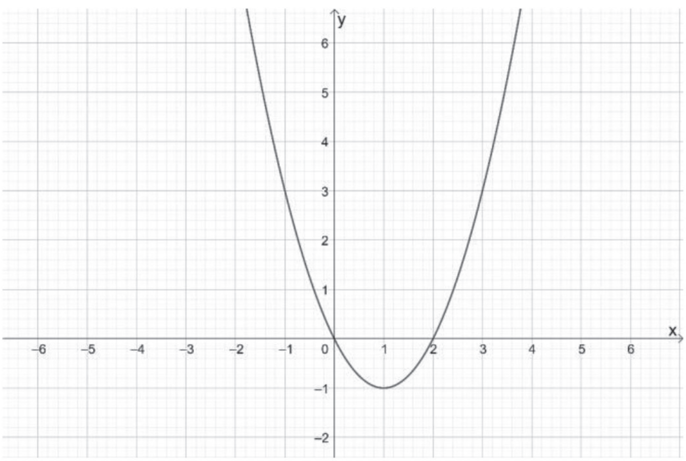
Solução comentada:

A função f *é definida por várias sentenças. Cada sentença está associada a um subdomínio de* f.

Resposta:



19) A função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ está esboçada no gráfico a seguir:



Qual é o valor do intercepto da função com o eixo Oy?

Existem raízes reais? Em caso afirmativo, quais seus valores?
Com os valores obtidos em a) e em b) é possível determinar a função quadrática. Determine algebricamente a função esboçada anteriormente.

Solução comentada:

Para encontrar a intersecção do eixo Oy com a função, basta que olhemos o gráfico acima. Os pontos do gráfico da função que tocam o eixo Oy são aqueles nos quais x assume o valor zero. Ou seja, basta calcular o $f(0) = a.0^2 + b.0 + c$, o que implica que $f(0) = c$. No caso dado, $c = 0$, pois o gráfico corta o eixo Oy exatamente em (0,0).
Para responder se uma função quadrática tem raízes reais ou não e, em caso afirmativo, quais são, a partir da análise do gráfico, basta que olhemos se o gráfico intercepta o eixo Ox. No caso específico, como o gráfico corta o eixo Ox em dois pontos, podemos dizer que há duas raízes diferentes. Os pontos são (0, 0) e (2, 0).
Para determinar algebricamente a função a partir das raízes, podemos resolver de duas formas:

$$f(x) = (x -)(x -) = (x - 0)(x - 2) = x(x - 2) = x^2 - 2x$$

$$\frac{b}{a} = -(x^1 + x^2) \quad e \quad \frac{c}{a} = x^1 \cdot x^2$$

Como $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 2$, *temos que* $\frac{b}{a} = -(0+2) = -2$ *e*

$\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = 0 \cdot 2 = 0$. *Então* $c = 0$ *e* $b = -2a$

Considerando $a = 1$, *temos que* $f(x) = x^2 - 2x$.

20) Construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, com x e y IR.

Solução comentada:

1º passo: determinar os zeros da função por meio da equação $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Seguindo a fórmula de Bhaskara, com a *= 1, b = – 6 e* c *= 8, temos:*

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 = 36 - 32 \;\; \Delta = 4$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2.1} \left\langle \begin{array}{l} x' = 4 \\ x'' = 2 \end{array} \right.$$

2º passo: estudo da concavidade

a = +1 concavidade para cima

3º passo: determinar o vértice da parábola

$$V_x = \frac{x' + x''}{2}$$

$$V_x = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

$\Longrightarrow V_y = 3^2 - 6.3 + 8 = 9 - 18 + 8 \;\; V_y = -1$

$V = (3, -1)$

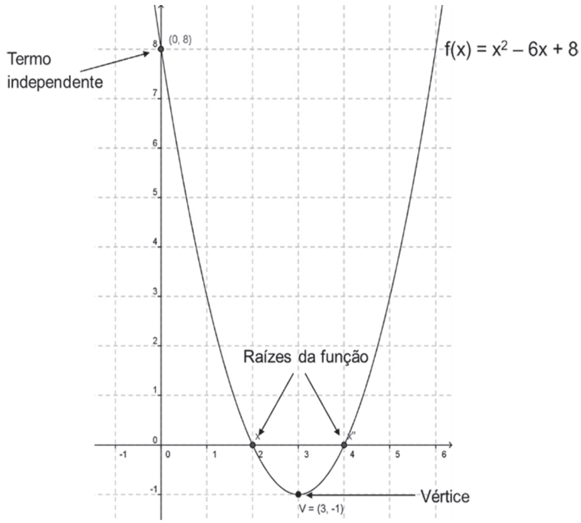
4º passo: ponto de intersecção da função com o eixo y (quando x = 0)

$f(x) = x^2 - 6x + 8 \Longrightarrow f(0) = 0^2 - 6.0 + 8 \Longrightarrow f(0) = 8$

Temos então o ponto (0,8)

5º passo: esboço do gráfico

Resposta:



21) Um motorista de táxi cobra R$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). Determine o valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 km.

Solução comentada:

Para calcular o valor total a ser pago pela corrida de táxi, devemos levar em consideração um valor fixo, chamado de bandeirada, e um valor variável, que depende da quantidade de quilômetros percorridos.

Assim, se chamarmos de Vt o valor total da corrida, Vf o valor fixo e Vv o valor variável a ser pago, temos:

Vt = Vf + Vv e como Vf = 3,50 e o Vv = 0,70 × 18 (número de km rodados) = 12,60

Vt = 3,50 + 12,60 = 16,10

Resposta: o valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 km *é R$ 16,10*.

22) O preço de venda de um livro é de R$ 25,00 a unidade. Sabendo que o custo de cada livro corresponde a um valor fixo de R$ 4,00 mais R$ 6,00 por unidade, construa uma função capaz de determinar o lucro líquido (valor descontado das despesas) na venda de *x* livros, e o lucro obtido na venda de 500 livros.

Solução comentada:

Considere P_v o preço de venda, C_t o custo total, C_f a parte fixa do custo e C_v a parte variável do custo.

$P_v = 25$, $C_t = C_f + x \times C_v$, $C_f = 4$ $C_v = 6$ *(x é a quantidade de livros vendidos)*

Por outro lado, sabe-se que o lucro líquido é calculado a partir de $L = R - C_t$, onde R é a receita, cujo cálculo é definido por $R = x \times P_v$ e $C_t = C_f + x \times C_v$.

Assim, sabendo que $L = R - C_t = x \times P_v - (C_f + x \times C_v)$, a função lucro líquido resulta em:

$L = x\,(P_v - C_v) - C_f$

Pelos valores dados, temos:

$R = 500 \times 25 = 12.500$

$C_t = 4 + 6 \times 500 = 3.004$

Assim, o lucro líquido obtido na venda de 500 livros é:

$L = R - C_t = 12.500 - 3.004 = 9.496$

Resposta: A função lucro é

$L = x(P_v - C_v) - C_f$.

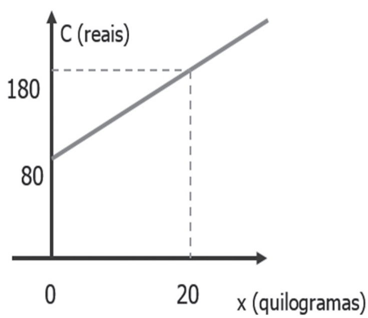
e *o lucro líquido obtido na venda de 500 livros é 9.496 reais.*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) (UCSal) Sejam *f* e *g* funções de R em R, sendo R o conjunto dos números reais, dadas por $f(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = -4x + 1$. Nestas condições, $g(-1)$ é igual a:
   a) –5
   b) –4
   c) 0
   d) 4
   e) 5

2) Dada a função $f(x) = ax + b$ e sabendo que $f(3) = 5$ e $f(-2) = -15$, calcule $f(1/2)$.

3) A semirreta representada no gráfico a seguir expressa o custo de produção C, em reais, de *x* quilos de certo produto.



Se o fabricante vender esse produto a R$ 102,00 o quilo, a sua porcentagem de lucro em cada venda será?

4) O salário de um vendedor é composto de uma parte fixa no valor de R$ 800,00, mais uma parte variável de 12% sobre o valor de

suas vendas no mês. Caso ele consiga vender R$ 450.000,00, calcule o valor de seu salário.

5) Dada a função do 1º grau $h(x) = 1 - x$, determine:
 a) h(0)
 b) h(1/5)

6) Considere a função do 1º grau $g(x) = -7x + 0{,}2$. Determine os valores de x para que se tenha:
 a) g(x) = 0;
 b) g(x) = 11;
 c) g(x) = -1/2.

7) Dada a função $f(x) = ax + 2$, determine o valor de a para que se tenha $f(4) = 22$.

8) Representar graficamente as retas dadas por:
 a) y = 2x – 4
 b) y = 6
 c) y = 10 – 2x
 d) y = 6 + 2x

9) Considere a função real definida por f: R→R definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3, se -1 \geq x \\ x^2, se -1 < x < 2 \\ 2x - 1, se\ x \geq 2 \end{cases}$$

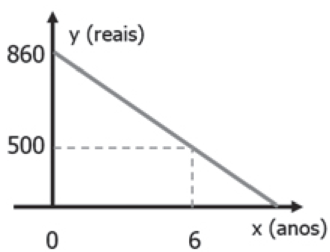
Construa o gráfico da função f no plano cartesiano;
Calcule o que se pede a seguir:
i. f(−1)=
ii. f(0)=
iii. f(1)=
iv. f(3)=

10) Considere que a tabela a seguir mostra a evolução da temperatura de um líquido em um forno industrial, em função do tempo de permanência.

Tempo (min)	0	10	20	30	40	50
Temperatura (°C)	0	2	4	6	8	10

Admitindo que a temperatura tem variação linear, qual deve ser a temperatura esperada para o tempo de 80 minutos?

11) (UEL) Um camponês adquire um moinho ao preço de R$ 860,00. Com o passar do tempo, ocorre uma depreciação linear no preço desse equipamento. Considere que, em 6 anos, o preço do moinho será de R$ 500,00, conforme o gráfico a seguir. Com base nessas informações, é correto afirmar:



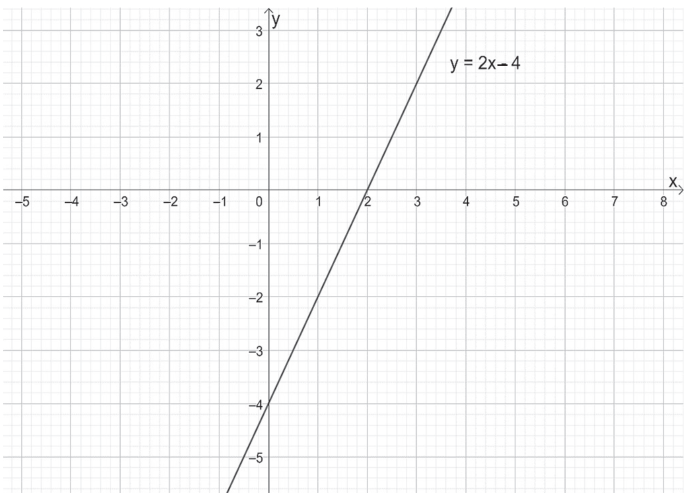
a) Em três anos, o moinho valerá 50% do preço de compra.
b) Em nove anos, o preço do moinho será um múltiplo de nove.
c) É necessário um investimento maior que R$ 450,00 para comprar esse equipamento após sete anos.
d) Serão necessários 10 anos para que o valor desse equipamento seja inferior a R$ 200,00.
e) O moinho terá valor de venda ainda que tenha decorrido 13 anos.

Gabarito

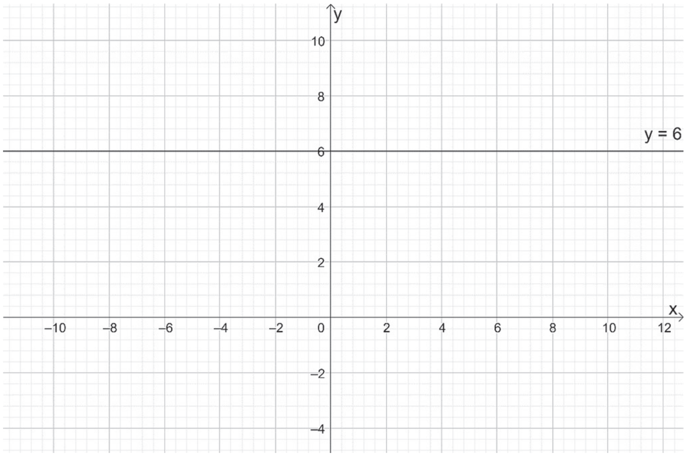
Questão	1	2	3	4	5	6
Resposta	D	0	20%	R$ 54.800,00	A. 0 B. 4/5	A. 1/35 B. – 54/35 C. −7/10
Questão	7	8	9		10	11
Resposta	5	Abaixo	Abaixo		16	E

8.

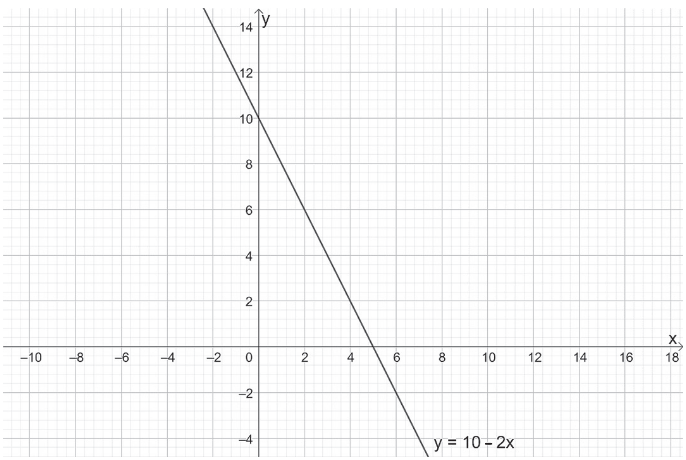
a)



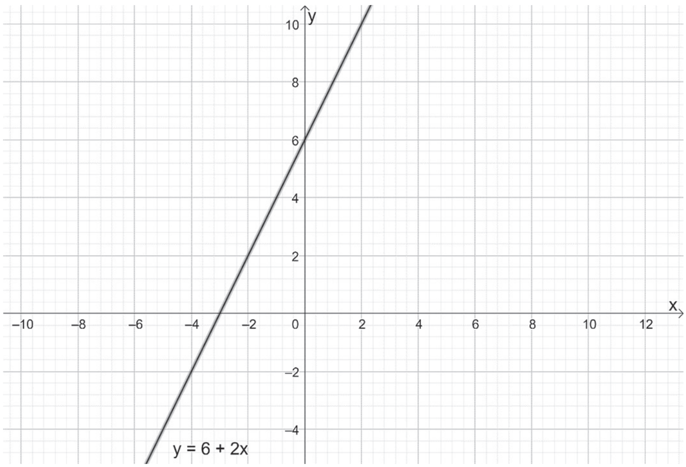
b)


y
10
8
y = 6
6
4
2
x
–10
–8
–6
–4
–2
0
2
4
6
8
10
12
–2
–4

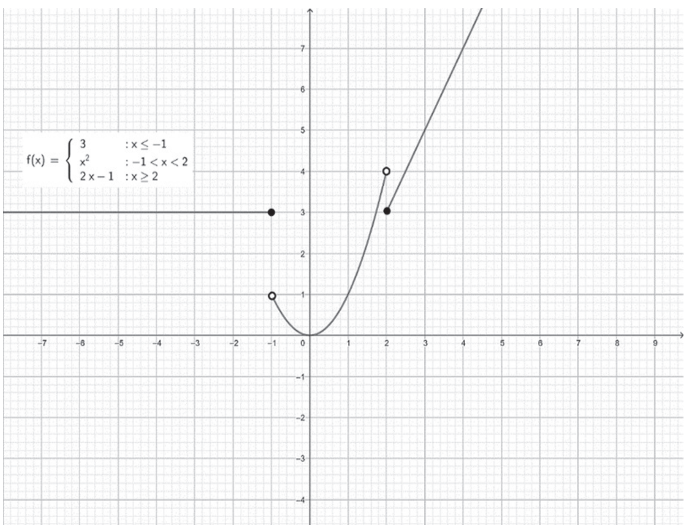
c)


y
14
12
10
8
6
4
2
x
–10
–8
–6
–4
–2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
–2
–4
y = 10 – 2x

d)



9.



CURIOSIDADES

• Sofia Kovalévskaya (1850-1891)

Nascida em Moscou, na Rússia, Sofia Kovalévskaya era matemática, escritora e defensora dos direitos da mulher. Karl Weierstrass, seu tutor e amigo, acreditava em sua prodigiosa inteligência. Ela foi do conselho editorial da revista *Acta Mathematica* e a primeira mulher a ganhar o Prêmio Bordin de matemática por ter apresentado a solução das famosas equações de Euler (SOFIA..., 2018).

• Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Nasceu em Paris em meio à Revolução Francesa. Teve forte influência de Laplace e Lagrange em sua educação. São muitas as contribuições de Cauchy ao Cálculo e diversos termos levam o seu nome: o teorema da integral de Cauchy, a teoria de funções complexas, o teorema de existência de Cauchy-Kovalévskaya, as equações de Cauchy-Riemman e as sequências de Cauchy. Sua produção é considerada extraordinária, pois ele publicou 789 trabalhos de Matemática e uma coleção com seus trabalhos foi publicada em 27 volumes (O'CONNOR; ROBERTSON, 1997).

• René Descartes (1596-1650)

Nascido na cidade La Hayne, que passou a ser chamada Descartes na década de 1980, Descartes foi filósofo, físico e matemático francês. A ele é atribuída a famosa frase "Penso, logo existo". Suas ideias hoje são classificadas como o pensamento cartesiano, um sistema filosófico que deu origem à Filosofia Moderna (FRAZÃO, 2019).

REFERÊNCIAS

BOTELHO, Leila; REZENDE, Wanderley. Um breve histórico do conceito de função. *Caderno Dá-Licença*, Niterói, v. 6, p. 64-75, 2007.

CAJORI, Florian. *Uma história da matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

FRAZÃO, Dilva. *René Descartes*. *In*: EBIOGRAFIA. Matosinhos: 7Graus, 2019. Disponível em: https://bit.ly/3i9fXR6. Acesso em: 9 dez. 2019.

LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MOL, Rogério Santos. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: Caed/UFMG, 2013.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund. Augustin Louis Cauchy. *In*: ROBERTSON, Edmund; O'CONNOR, John. *MacTutor*: history of mathematics archive. St. Andrews: University of St. Andrews, 1997. Disponível em: https://bit.ly/2DEjffV. Acesso em: 9 dez. 2019.

SOFIA Kovalévskaya. *In*: HISTORIA y Biografía. [*S. l.*: *s. n.*], 2018. Disponível em: https://bit.ly/2Pra6u6. Acesso em: 5 dez. 2019.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Vânia Gonçalves de Brito dos Santos

Por uma questão de brevidade, nós sempre representaremos o número 2.718281828459… pela letra e.
Leonhard Paul Euler (1707-1783)

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.
Nikolai Lobachevsky (1792-1856)

O cálculo é a gramática das ciências.
Diogo Soares (1684-1748)

Calcular logaritmos ou potências é um processo relativamente simples, tendo em vista as tecnologias que estão ao nosso alcance, como calculadoras e computadores. No entanto, não era o que Napier possuía no século XVI, quando propôs transformar multiplicações e divisões em operações mais simples, respectivamente, soma e subtração.

Os procedimentos propostos por Napier simplificaram os cálculos de números muito grandes, como os que definem as distâncias entre galáxias ou astros planetários. Mas vale frisar que, cronologicamente, a ideia de logaritmo surgiu antes mesmo do conceito de função. Além disso, apesar do conceito de função exponencial, que depende do conceito de potência, estar ligado ao de logaritmo, esses dois conceitos surgiram e se desenvolveram em tempos, lugares e por mãos independentes.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Antes de apresentarmos a definição de função exponencial, vamos relembrar as propriedades de potência.

Definição de potência

Dado um número real *a* e um número natural *n*, define a *n*-ésima potência de *a* como sendo o número real a seguir.

$$a^n = \begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1}.a;\ n \geq 1 \end{cases}$$

Dessa definição decorre:

$a^1 = a^0.a = 1.a = a;$

$a^2 = a^1.a = a.a;$

$a^3 = a^2.a = (a.a).a = a.a.a\ ;$

De modo geral, para p natural e $p \geq 2$, a^p, é um produto de p fatores iguais a.

$$a^p = \underbrace{a.a.a \ldots a}_{p\ vezes}.$$

Em $a^p = b$, identificamos os seguintes elementos:

b é a potência (resultado)
a é a base da potência
p é o expoente da potência

Exemplo 1:

$2^3 = 2.2.2 = 8$;

Base: 2 Expoente: 3 Potência: 8

Consequência da definição: $a^1 = a$.
Consequência por propriedade: $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$.

Propriedades

Devemos lembrar que para quaisquer números reais *a*, *b* (com $b \neq 0$) e *m, n* também reais, tem-se:

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{nm}$
- $(a \times b)^n = a^n \Leftrightarrow b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n : b^n$
- $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$
- se $a > 1$; $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$
- se $0 < a < 1$; $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$

Assim, é possível entender melhor o seguinte fato: $a^0 = 1$, observe que podemos escrever $0 = 1 - 1$, então: $a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$.

Exemplo 2:

a) $2^2.2^3 = 25$

b) $3^5 : 3^3 = 3^2$

c) $(4^3)^5 = 4^{15}$

Quando o expoente é *negativo*, define-se: $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{(n)} = \frac{1}{a^n}$, onde 1/a é o inverso multiplicativo de *a*.

Exemplo 3:

a) $8^{-3} = \frac{1}{8^3}$

b) $5^{-10} = \frac{1}{5^{10}}$

Expoente racional: quando o expoente é fracionário, com n, m $\in$ Z e m $\neq$ 0, define-se: $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Exemplo 4:

a) $8^{1/2} = \sqrt{8}$

b) $81^{1/3} = \sqrt[3]{81}$

c) $32^{1/5} = \sqrt[5]{32} = 2$

Expoente irracional: os números irracionais, em particular, são números reais e todo o número real é o *limite de pelo menos uma sucessão de números racionais*.

Exemplo 5:

a) O racional 1⁄3 é o limite da sucessão de números racionais 0, 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333…

b) O irracional π é o limite da sucessão 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159…

Para definir uma potência com expoente irracional, utilizam-se essas sequências.

Por exemplo: $3^{\sqrt{2}}$ é o limite da sucessão: 3^1, $3^{1.4}$, $3^{1.41}$, $3^{1.414}$, $3^{1.4142}$, …

Assim, para ter um valor aproximado da potência, usa-se um termo qualquer dessa sucessão, por exemplo $3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1.4142}$.

Para facilitar os cálculos, podemos usar uma calculadora e verificar que $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665144$, $2^1 = 2$, $2^{1.4} = 2.639015$, $2^{1.41} = 2.657371$ e $2^{1.414} = 2.664749$, …

Observação:

Quanto melhor a aproximação do expoente, melhor a aproximação da potência, ou seja, quanto mais o expoente se aproxima de $\sqrt{2}$ mais a potência se aproxima do valor desejado!

A base não precisa ser um número racional!

Por exemplo:

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é o limite da sucessão: 1^1, $1.4^{1.4}$, $1.41^{1.41}$, $1.414^{1.414}$, $1.4142^{1.4142}$,…

Conclusão: dessa forma obtemos por aproximação de racionais a potência a^n, com n irracional e a um número real positivo.

Observe o seguinte problema inicial:

Em estudos recentes descobriu-se que o mosquito transmissor da dengue, o Aedes aegypti*, multiplica-se exponencialmente, dificultando, assim, a erradicação da doença. A proliferação do mosquito em ambientes favoráveis (água parada em pneus, reservatórios abertos etc.) pode ser estimada pela função:*

$f(x) = 55.000^{\frac{x}{8}}$, *onde* x *é dado em dias.*

Como ajudar os cientistas a interpretar esta função? Como usá-la para estimar a população de mosquitos?

Esse problema é um caso de aplicação de função exponencial.

Definição de função exponencial

Sendo a um número real, tal que $0 < a \neq 1$, chamamos de função exponencial de base a, a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

Domínio de f: $\mathbb{R}$ e imagem de f: $\mathbb{R}_+^*$, dessa forma f é injetora e sobrejetora, logo é bijetora.

Vejamos:

1. Se tomarmos dois números reais diferentes x_1 e x_2, sendo a um número real, de modo que $0 < a \neq 1$, $f(x_1) = a^{x1}$ e $f(x_2) = a^{x2}$, decorre que $a^{x1} \neq a^{x2}$. Assim, concluímos que a função exponencial é injetora.

2. Como $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, concluímos que a função f é sobrejetora.

3. De 1. e 2. pode-se concluir que a função f exponencial é bijetora.

$0 < a \neq 1$. Por quê?

Para $a = 0$ e x negativo, não existiria a^x; logo não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$.

Para $a < 0$ e $x = 1/2$, por exemplo, não poderíamos encontrar a^x, logo também não haveria uma função definida em $\mathbb{R}$.

Para $a = 1$, teríamos a função constante $a^x = 1$, para qualquer valor de x.

Exemplo 6: funções exponenciais:

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^{2x}$

d) $f(x) = (0{,}5)^{-x}$

e) $f(x) = e^x$

Gráfico da função exponencial

Vamos traçar inicialmente o gráfico da função $f(x) = 3^x$ (Figura 1). Os gráficos a seguir foram gerados no software Geogebra (ggb).

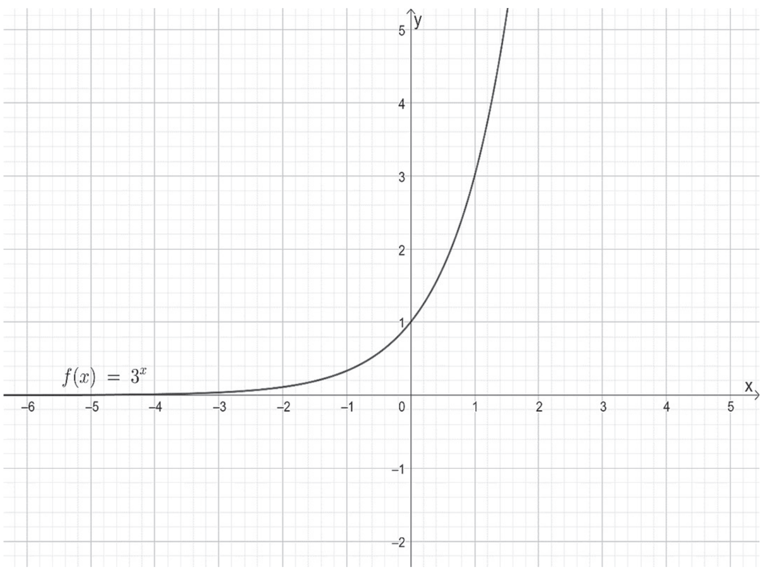
É interessante construir uma tabela (Tabela 1) para obter os pares ordenados. Nesse caso, observe que o valor da base é $a > 1$, o que leva a característica de uma função exponencial crescente.

Tabela 1 – Pares ordenados da função $f(x) = 3^x$

x	$y = 3^x$	(x, y)
-2	$3^{-2} = 1/9$	(-2, 1/9)
-1	$3^{-1} = 1/3$	(-1, 1/3)
0	$3^0 = 1$	(0, 1)
1	$3^1 = 3$	(1, 3)
2	$3^2 = 9$	(2, 9)

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 1– Gráfico da função $f(x) = 3^x$



Fonte: elaborada pela autora.

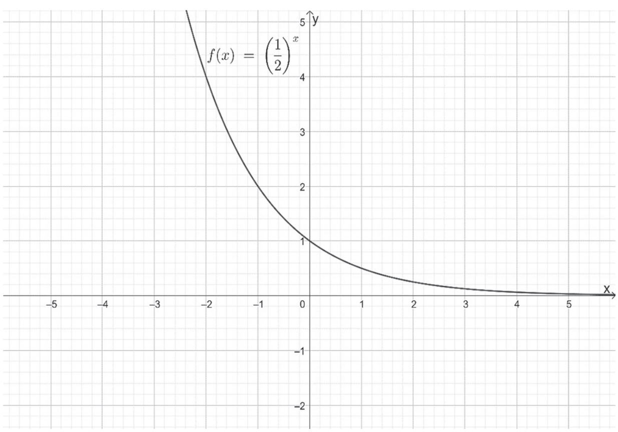
Vamos traçar o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (Figura 2), construindo também uma tabela (Tabela 2) para obter os pares ordenados. Observe que o valor da base é $0 < a < 1$, característica de uma função exponencial decrescente:

Tabela 2 – Pares ordenados da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	(-2, 4)
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	(-1, 2)
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	(0, 1)
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$(1, \frac{1}{2})$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$	$(2, \frac{1}{4})$

Fonte: elaborada pela autora.

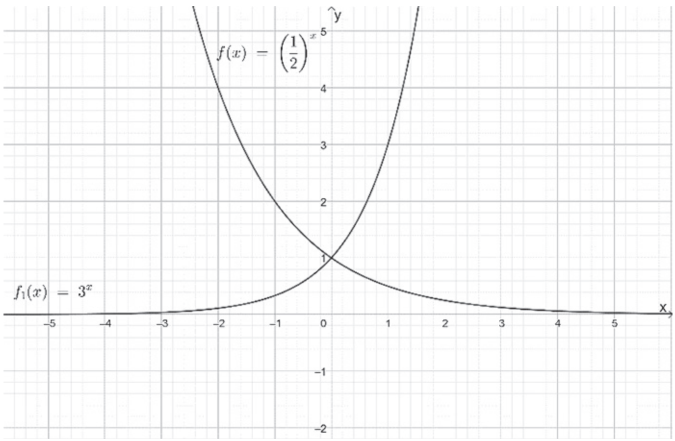
Figura 2 – Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fonte: elaborada pela autora.

Para melhor visualização veja os dois gráficos plotados num mesmo plano cartesiano (Figura 3):

Figura 3 – Gráficos plotados no mesmo plano cartesiano



Fonte: elaborada pela autora.

Da análise desses gráficos, pode-se observar algumas características do gráfico de uma função $y = a^x$:

- Corta o eixo dos y no ponto (0, 1), pois $a^0 = 1$, para todo a.

- Não corta o eixo dos x, pois $a > 0$, $a^x \neq 0$ para qualquer x, ou seja, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função exponencial.

- É crescente quando $a > 1$, como no caso em que $f(x) = 3^x$.

- É decrescente quando $0 < a < 1$, como no caso em que $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Veja agora alguns exemplos aplicativos de função exponencial.

Exercícios resolvidos

1) Determine a solução real da equação: $4^{x-4} - \frac{3^x}{81} = 0$.

Solução comentada:

O primeiro passo numa resolução de uma equação exponencial é separar os termos de acordo com as bases distintas. Como existe a base 4 e a base 3, então:

$$4^{x-4} = \frac{3^x}{81} \Rightarrow 4^{x-4} = \frac{3^x}{3^4} \Rightarrow 4^{x-4} = 3^{x-4}$$

Precisamos de uma comparação de potências de mesma base, porém as bases 3 e 4 são diferentes. A única maneira de obtermos a mesma base é dividir toda a expressão por um dos termos, por exemplo, podemos dividir por 3^{x-4}, então fica $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-4} = 1$, que é igual a $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{0}$. Agora podemos igualar os expoentes $x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$.

Resposta: $x = 4$.

2) A lei que representa o crescimento de bactérias é dada por $N(t) = a2^{bt}$, onde $N(t)$ representa o número de bactérias no instante *t*, enquanto *a* e *b* são constantes reais. Sabendo que no início da observação havia 3.000 bactérias e que, após duas horas de observação, havia 48.000, determine:

a) Os valores de *a* e *b*.

b) O número de bactérias existentes após meia hora de observação.

Solução comentada:

Para determinar os valores de a e b precisamos usar a informação do tempo; em t = 0 havia 3.000 bactérias, então:

a) $N(0) = a.2^{b.0} = a.2^0 = a = 3000$

$N(2) = 3000.2^{b.2} = 3000.2^{2b} = 48000$

$2^{2b} = 16 = 2^4$
$2b = 4$, logo
$b = 2$

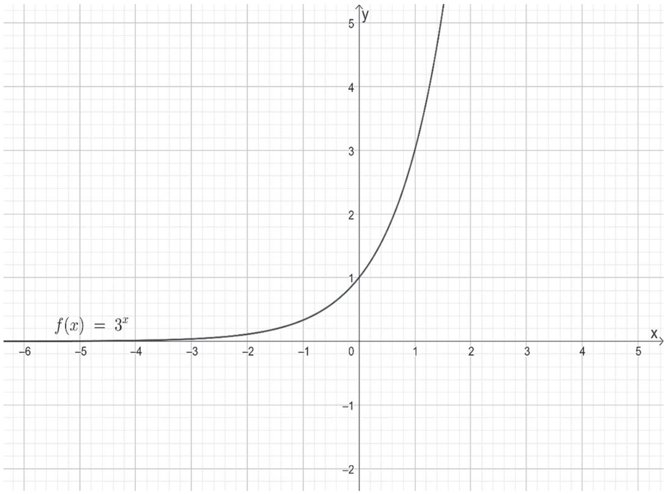
b) Como já temos a informação da equação completa, basta substituir o tempo nessa:
$t\ \ 0{,}5\ h$
$N(t) = 3000.2^{2t}$
$N(0{,}5) = 3000.^{22.0,5} = 3000.2^1 = 6000$
Resposta: a) a = 3000 e b = 2; b) 6.000 bactérias

3) Construa os gráficos das funções dadas:
a) $f(x) = 2^x$
b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Solução comentada:
a) Para começar, vamos construir uma tabela, depois marcar os pontos do gráfico:

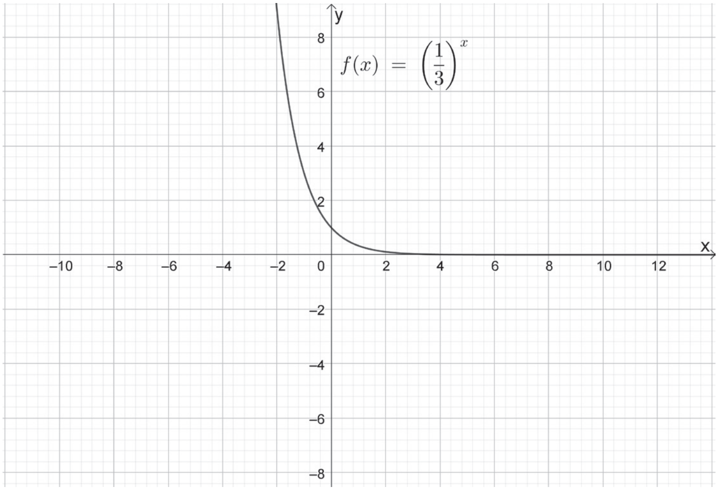
b)

x	$y = 2^x$	(x, y)
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	(-2, 1/4)
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	(-1, 1/2)
0	$2^0 = 1$	(0, 1)
1	$2^1 = 2$	(1, 2)
2	$2^2 = 4$	(2, 4)



c) Agora repetimos o processo para essa função g:

x	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	(x, y)
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$	(-2, 9)
-1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$	(-1, 3)
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$	(0, 1)
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$	$(1, \frac{1}{3})$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$	$(2, \frac{1}{9})$



4) Encontre a solução real da equação: $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2.$

Solução comentada:

Nesse caso, a ideia é simplificar a expressão, de forma a obtermos termos independentes, para isso dividimos ambos os termos da fração por 3^{-x}*:*

$$\frac{3^{-x}(3^{2x} + 1)}{3^{-x}(3^{2x} - 1)} = 2 \Rightarrow 3^{2x} + 1 = 2(3^{2x} - 1)$$

$$3^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Resposta: $x = \frac{1}{2}$.

5) Em uma população com P habitantes, a partir do instante $t = 0$, quando surge um boato sobre um ato de corrupção no governo, o número de pessoas que ouviram o boato até o instante t horas é dado por $Q(t) = P - P.2^{\frac{-t}{5}}$. Dessa forma, o tempo t, em horas, para que 3/4 da população saiba do boato é igual a:
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

Solução comentada:

Para resolver esse problema basta usar a informação 3/4 da população P na quantidade de pessoas que ouviram o boato Q(t), então:

$$P - P.2^{\frac{-t}{5}} = \frac{3}{4}P$$

$$P.2^{\frac{-t}{5}} = P - \frac{3}{4}P$$

$$P.2^{\frac{-t}{5}} = \frac{1}{4}P \Rightarrow 2^{\frac{-t}{5}} = \frac{1}{4} \Rightarrow= 2^{-2}$$

$$\frac{-t}{5} = -2 \Rightarrow t = 10$$

Resposta: t = 10; alternativa c.

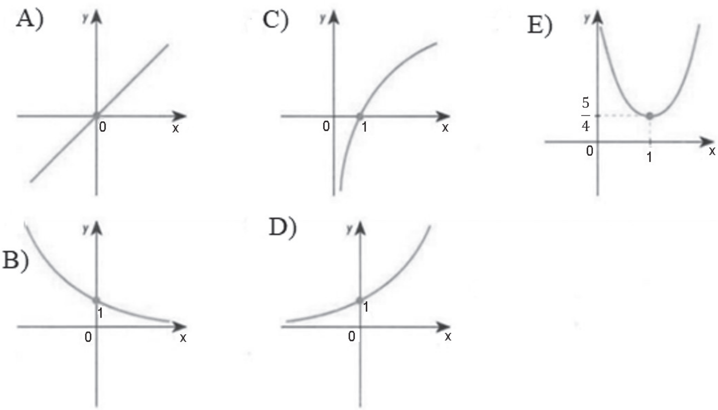
Exercícios propostos

1) (UEFS) Considere a função *f*, de R em R, definida por $f(x) = 50 - ka^{-bx}$. Sabendo que $f(0) = 30$ e $f(2) = 40$ pode-se afirmar que o valor de $f(4)$ é:
a) 35
b) 38
c) 40
d) 45
e) 48

2) (UCSal) Durante um surto de dengue em certo estado, notou-se que o número de pessoas infectadas, em $P(t)$ dias após a primeira observação ($t = 0$), poderia ser obtido pela expressão $P(t) = 500.2^{\frac{t}{4}}$. Quantos dias, no mínimo, serão necessários, até que o número de pessoas infectadas ultrapasse 32.000?
a) 6
b) 8
c) 12
d) 24
e) 25

3) (PUC-SP) Se $3^{x2-3x} = \frac{1}{9}$, então os valores de x são:
a) 1 e 3
b) 2 e 3
c) 1 e 2
d) 1 e 4
e) 2 e 4

4) (Unifor) Das figuras a seguir, a que melhor representa o gráfico da função f de R em R, definida por $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ é:



5) (Unifor) Mensalmente a produção em toneladas de certa indústria é dada pela expressão $y = 100 - 100.4^{-0,05x}$, na qual x é o número de meses contados a partir de certa data. Após quantos meses a produção atingirá a marca de 50 toneladas?

6) (E. E. Mauá-SP) Resolva o sistema $\begin{cases} 5^{2x+3y} = 5 \\ 3^{x+y} = 1 \end{cases}$.

7) Um imóvel deprecia exponencialmente de tal forma que seu valor V (em reais), após t anos de uso, é dado por $V(t) = 254.800 - (0,885)^t$. Qual será o seu valor daqui a 4 anos e 3 meses? Após quanto tempo o seu valor alcançará R$ 122.421,88?

8) (UEBA) Uma população de bactérias no instante t é definida pela função $f(t) = C.4^{kt}$, em que t é dado em minutos. Se depois de 1 minuto a população era de 64 bactérias e depois de 3 minutos de 256 bactérias, conclui-se que a população inicial era de:

a) 32 bactérias
b) 16 bactérias
c) 8 bactérias

d) 2 bactérias
e) 1 bactéria

9) (UEL) A função real definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$:
a) Assume valores positivos somente se $x > 0$.
b) Só assume valores positivos.
c) Assume valores negativos para $x < 0$.
d) É crescente para $0 < a < 1$.
e) É decrescente para $a > 1$.

10) (Unesp) Uma instituição bancária oferece um rendimento cuja capitalização é de 15% ao ano, para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente desse banco deposita R$ 1.000,00 nessa aplicação. Ao final de *n* anos, o valor do capital que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, é:
a) 1000 + 0,15n
b) 1000.0,15n
c) $1000.0{,}15^n$
d) $1000 + 1{,}15^n$
e) $1000.1{,}15^n$

Gabarito

1. D	2. E	3. C	4. D	5. 10
6. S{(-1, 1)}	7. V = 151.603,18; t = 6 anos	8. A	9. B	10. E

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Na seção anterior estudamos a função exponencial $y = a^x$, definida de forma a ser injetora e sobrejetora, logo bijetora. Essa função tem uma forma inversa, que é justamente a logarítmica.

Alguns problemas são resolvidos por meio de logaritmos, como por exemplo:

Um capital de R$ 12.000,00 é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, encontre o capital acumulado após dois anos.

Antes de detalharmos a função logarítmica, devemos rever alguns conceitos preliminares importantes.

Definição de logaritmo

Dado um número real positivo b e um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, define-se o logaritmo de b na base a como sendo o expoente a que se deve elevar o número a para obter b.

Notação: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

Em $\log_a b = c$ identificamos os seguintes elementos: b é o logaritmando, a é a base do logaritmo[4], c é o logaritmo

Em outras palavras, um número real y é o logaritmo de um *número real positivo x*, na *base a,* sendo $0 < a \neq 1$, se, e somente se, $a^y = x$.

Notações

- Se $a = 10$, o logaritmo é chamado de *decimal* e, nesse caso, escreve-se log x sem destacar a base.

- Se a base $a = e = 2{,}718\ldots$, o logaritmo é chamado de *natural* ou *neperiano* e o usual neste caso é usar $\ln x$ para indicar $\log_e x$.

[4] b também é chamado de antilogaritmo.

Exemplo 7:

$10^3 = 1000 \Leftrightarrow log\,1000 = 3$

$10^{-1} = 0{,}1 \Leftrightarrow log\,0{,}1 = -1$

$10^{2{,}30103} = 200 \Leftrightarrow log\,200 = 2{,}30103$

$2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$

$e^{-2} = 0{,}135363 \Leftrightarrow ln\,0{,}135363 = -2$

$\log_2 8 = \mathrm{x} \Leftrightarrow 2^{\mathrm{x}} = 8 \Leftrightarrow 2^{\mathrm{x}} = 2^3 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 3.$

$\log_x 32 = 5 \Leftrightarrow x^5 = 32 \Leftrightarrow x^5 = 2^5 \Leftrightarrow x = 2.$

Propriedades do logarítimo

Para quaisquer números reais a, b (com b > 0, c > 0 e 0 < a ≠ 1) e n, tem-se que:

i) $log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c$

ii) $a^{log_a b} = b$

iii) $log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$

iv) $log_a(b^n) = n \cdot log_a b$

v) $log_a(b{:}c) = log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c.$

Mudança de base

Em algumas situações surgem logaritmos em bases diferentes, contudo as propriedades logarítmicas só têm validade para logaritmos numa mesma base. Portanto, é necessária a conversão dos logaritmos a uma mesma base conveniente.

A esta conversão dá-se a denominação de mudança de base.

Regra prática: $log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}$.

Justificativa da regra prática: suponha que $log_a x = y$ e que precisamos descobrir quanto vale $log_b x$. Para tanto, devemos fazer a mudança da base *a* para a base *b*.

Vejamos:
$log_a x = y \Longrightarrow x = a^y$. (I)
Fazendo $log_b x = z$, concluímos que $x = b^z$. (II)
Substituindo (II) em (I), obtemos $b^z = a^y$.
Logo:

$$log_b x = z \Rightarrow z = log_b a^y \Rightarrow z = y \cdot log_b a$$

$$log_b x = log_a x \cdot log_b a \Rightarrow log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$$

Exemplo 8:
Transformar $log_3 5$ para logaritmo na base 2.

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \Rightarrow \log_2 5 = \log_2 3 \,.\, log_3 5$$

Transformar $log_5 8$ para logaritmo decimal.

$$\log_5 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 5} \Rightarrow \log 8 = \log 5 \,.\, log_5 8$$

Função logarítmica

Sendo inversa da função exponencial, a função logarítmica tem o seu gráfico obtido pela reflexão do gráfico da função exponencial em relação à identidade dada pela reta $y = x$.

Veja que ele passa no ponto (1, 0).

Além disso, para $f : \mathbb{R}+^* \to \mathbb{R}$, tem-se: $x \to y = log_a x$

Domínio de f, $D(f) = \mathbb{R}+^*$, e imagem de f, $Im(f) = \mathbb{R}$.

A função logarítmica f é injetora, pois é estritamente crescente para $a > 1$ ou estritamente decrescente para $0 < a < 1$, mas também é sobrejetora, pois, se tomarmos um número real qualquer y, existe

x real não negativo, tal que $x = a^y$, ou seja, tal que $y = log_a x$. Logo, a função logarítmica é bijetora.

Seja x_1 em D(f), então não pertence a D(f). Em outras palavras, não podemos calcular $f(-x_1)$, pois não existe logaritmo de número negativo. Dessa forma, não teremos $f(x_1) = f(-x_1)$, para todo $x_1 \in$ D(f). Conclusão, a função logarítmica não é uma função par.

Mas a função logarítmica é ímpar? Sabemos que para uma função ser ímpar é preciso que para todo $x_1 \in$ D(f) exista $f(x_1) = -f(-x_1)$. No entanto, pelo que foi descrito, não podemos calcular $f(-x_1)$. Daí decorre que não teremos $f(x_1) = -f(-x_1)$, qualquer que seja $x_1 \in$ D(f). Conclusão, a função logarítmica não é ímpar.

Observações:

i) O gráfico nunca toca o eixo y, pois para isso acontecer seria necessário que x fosse zero. No entanto, $D(f) = \mathbb{R}_+^*$. Também não ocupa pontos dos quadrantes II e III, pois nesses quadrantes temos $x < 0$ e pelo mesmo motivo não é possível;

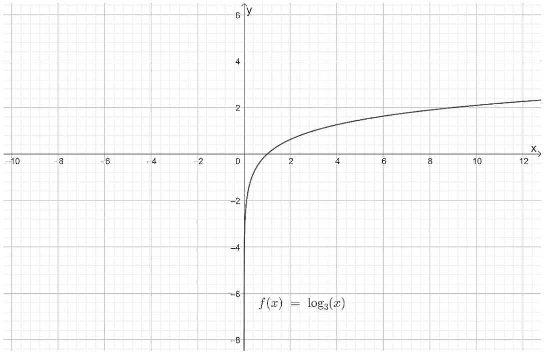
ii) Quando $a > 1$, a função logarítmica é crescente (se $x_1 > x_2$ então $\log_a x_1 > \log_a x_2$).

iii) Quando $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente (se $x_1 > x_2$ então $\log_a x_1 < \log_a x_2$).

Vejamos dois exemplos gráficos de função logarítmica:

Exemplo 9: $f(x) = \log_3 x$. Como a base é 3, portanto maior que 1, temos uma função crescente (Figura 4).

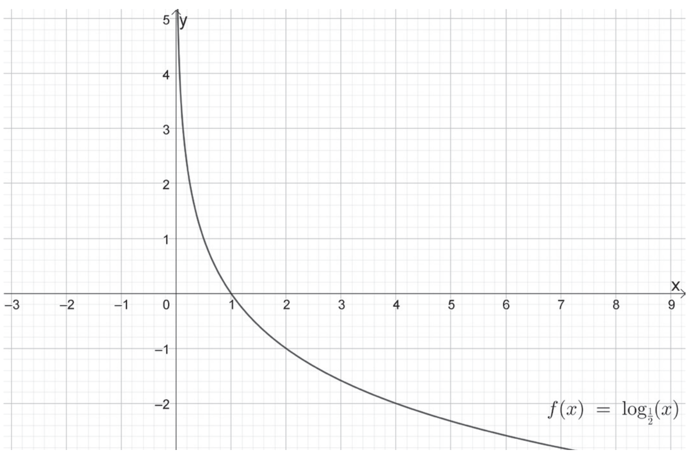
Figura 4 – Gráfico da função $f(x) = \log_3 x$



Fonte: elaborada pela autora.

Exemplo 10: $g(x) = \log_{1/2} x$. Como a base é 1/2, portanto maior que 0 e menor que 1, temos uma função decrescente (Figura 5).

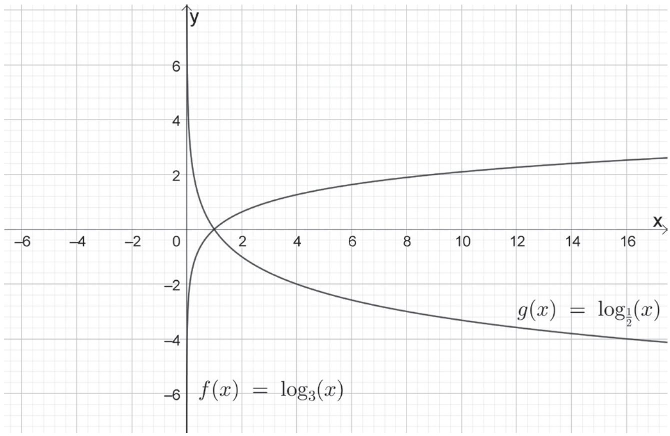
Figura 5 – Gráfico da função $g(x) = \log_{½} x$



Fonte: elaborada pela autora.

Visualizando ambos os gráficos num mesmo plano cartesiano, observamos o ponto comum (1, 0) (Figura 6).

Figura 6 – Gráfico das funções f(x) = $\log_3 x$ e g(x) = $\log^{1/2} x$

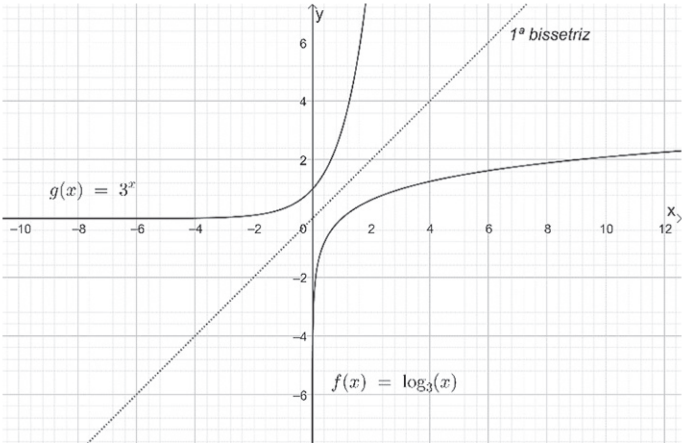


Fonte: elaborada pela autora.

COMPARANDO OS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Usando a mesma base em ambas funções, observamos que elas são funções inversas, pela simetria em relação à primeira bissetriz (Figura 7).

Figura 7 – Gráfico das funções f(x) = $\log_3 x$ e g(x) = 3^x



Fonte: elaborada pela autora.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Estabeleça o domínio das funções a seguir:

a) $y = \log_3 (x - ½)$

Solução comentada:

Como por definição o logaritmando deve ser maior que 0, então $x - \frac{1}{2} > 0 \Longrightarrow x > \frac{1}{2}$ *, e esse é o domínio dessa função:*

Resposta: domínio da função y: $D(y) = \{x \in \mathbb{R};\ x > \frac{1}{2}\}$.

b) $y = log_{(x-1)}(-3x+9)$

Solução comentada:

Temos duas condições para analisar e fazer a interseção delas. Primeiro temos a base (x – 1) que por definição deve ser:

$0 < x - 1 \neq 1 \Longrightarrow x \neq 2$ *e* $x > 1$

Segundo, temos o logaritmando que também deve obedecer sua condição:

$-3x + 9 > 0 \Longrightarrow x < 3$

Então, fazendo a interseção dessas duas condições, temos:

$x \neq 2$ *e* $x > 1$ *e* $x < 3$*, obtemos o conjunto:*

$D(y) = \{= x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$ *ou ainda* $D(y) =]1, 3[- \{2\}$.

Resposta: $D(y) = \{= x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$.

2) O anúncio de um produto aparece diariamente em certo horário na televisão. Após t dias do início da exposição (t exposições diárias), o número de pessoas (y) que ficam conhecendo o produto é dado por $y = 3 - 3.(0,95)^t$, em que y é dado em milhões de pessoas.

Para quais valores de t teremos pelo menos 1,2 milhão de pessoas conhecendo o produto?

Solução comentada:

Basta usar o valor $y = 1,2$ *na equação dada:*

$1,2 = 3 - 3.(0,95)^t \Longrightarrow -1,8 = -3.(0,95)^t \Longrightarrow 0,6 = (0,95)^t$

Agora temos uma equação exponencial. Para resolvê-la, precisamos aplicar a função logarítmica, pois assim poderemos linearizar a equação através da propriedade $\log_a(b^n) = n \,.\, \log_a b$:

$$-0,221848749 = t.(-0,02227639) \Rightarrow t =$$

$$\frac{-0,221848749}{-0,02227639} = 9,9589\ dias.$$

Resposta: em até aproximadamente 10 dias 1,2 milhão de pessoas terão visto o anúncio.

3) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o

seguinte modelo matemático: $h(t) = 1,5 + \log_3(t+1)$, com $h(t)$ em metros e t em anos.

Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, qual o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o corte?

Solução comentada:

Basta substituir o valor e h(t) por 3,5 para achar t:

$3,5 = 1,5 + \log_3(t+1) \Longrightarrow 2 = \log_3(t+1) \Longrightarrow 3^2 = t + 1 \Longrightarrow t = 8$

Resposta: o tempo transcorrido até o corte é de 8 anos.

4) Um juiz determinou o pagamento de uma indenização até certa data. Determinou também que, caso o pagamento não fosse feito, seria cobrada uma multa de R$ 2,00, que dobraria a cada dia de atraso. Em quantos dias de atraso essa multa seria de R$ 1 milhão, se considerarmos log2 = 0,30.

Solução comentada:

Nesse caso, precisamos primeiro equacionar o problema.

Como a multa dobra a cada dia de atraso, temos uma potência de 2 onde o tempo t em dias seria o expoente 2^t. Basta então comparar o valor de R$ 1.000.000 para achar o tempo:

$2^t = 1000000 \Longrightarrow 2^t = 10^6$

Agora temos uma equação exponencial. Para resolvê-la precisamos aplicar o logaritmo para linearizar a equação:

$\log 2^t = \log 10^6$

$t.\log 2 = 6.\log 10 \Longrightarrow t.0,30 = 6 \Longrightarrow t = 20$ *dias*

Resposta: seriam necessários 20 dias de atraso para a multa alcançar R$ 1.000.000.

5) Prove que, se $\log_{a-c}(a+c).\log_b(a-c) + \log_b(a-c) = 2$, então a e b são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo e a, a medida da hipotenusa do mesmo triângulo.

Solução comentada:

A fim simplificar essa expressão, precisamos mudar a base, para trabalharmos com mesma base. Por exemplo, o primeiro termo está numa base (a – c) e o segundo na base b, vamos mudar então essa base mais complicada (a – c) para a base b:

$log_{a-c}(a+c) = \frac{log_b(a+c)}{log_b\, a-c}$,

Daí poderemos substituir na equação:

$$\frac{log_b(a+c)}{log_b\, a-c}.log_b(a-c) + log_b(a-c) = 2$$

$$\Rightarrow log_b(a+c) + log_b(a-c) = 2$$

$$log_b(a\ +c)(a-c) = 2 \Rightarrow log_b(a^2-c^2) = 2$$

Aplicando a propriedade básica de logaritmo, obteremos
$b^2 = a^2 - c^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Após estudar o tempo (*t* em minutos) que um determinado analgésico leva para fazer efeito em pacientes com idades entre 10 e 20 anos, um laboratório obteve a fórmula:

$$t = \log_{10}\left(10^{0,8}.\sqrt{k}\right)$$

A idade em anos dos pacientes é indicada por *k*. Pela fórmula, em quanto tempo começará a fazer efeito um analgésico tomado por um paciente com 10 anos de idade?

a) 1 minuto e 30 segundos

b) 1 minuto e 18 segundos

c) 1 minuto e 48 segundos
d) 40 segundos

2) Um criador de peixes construiu um lago para criar peixes, no qual inicialmente colocou 1.000 tilápias e, por descuido, 8 lambaris. Se os crescimentos das duas populações seguem as funções $L(t) = L_0 10^t$, para os lambaris, e $T(t) = T_0 2^t$, para as tilápias, após quanto tempo as populações serão iguais
L_0 é o número inicial de lambaris, T_0 o de tilápias e t o tempo, medido em anos.
a) 12
b) 6
c) 3
d) 18

3) (Ibmec) Próxima da superfície terrestre, a pressão atmosférica (P), dada em atm, varia aproximadamente conforme o modelo matemático a seguir:
$P = P_0(0,9)^h$, onde $P_0 = 1$ (atm) e h é altura dada em quilômetros. Então, a altura de uma montanha onde a pressão atmosférica no seu topo é de 0,3 (atm) tem valor igual a: (Dado: log3 = 0,48).
a) 11 (km)
b) 14 (km)
c) 12 (km)
d) 15 (km)
e) 13 (km)

4) (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log[H^+]$, em que indica a concentração, em mol/1, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de Hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 . 10^{-8}$mol/l.

Para calcular o *pH* dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log2, e de 0,48, para log3.
Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:
a) 7,26
b) 7,32
c) 7,58
d) 7,74

5) (Unesp) A expectativa de vida em anos em uma região, de uma pessoa que nasceu a partir de 1900 no ano x ($x > 1900$), é dada por L(x) = 12.(199.logx – 651) Considerando log2 = 0,3, uma pessoa dessa região que nasceu no ano 2000 tem expectativa de viver quantos anos?
a) 48,7 anos
b) 54,6 anos
c) 64,5 anos
d) 68,4 anos
e) 72,3 anos

6) Se log5 = x e log3 = y, então qual a expressão para o valor de log375?

7) O primeiro termo de uma progressão geométrica (PG) é 4, o número de termos é 1.000 e o último termo é o número cujo logaritmo decimal é 999 + log4. Calcule a soma dos 100 primeiros termos da PG.

8) Determine o valor da expressão:

$$\log_{\frac{1}{2}} 32 + \log 0{,}001 - \log_{\frac{1}{10}} 10\sqrt{10}$$

9) Em uma pesquisa constatou-se que a população *P* de determinada bactéria cresce segundo a expressão *P(t)* = 25.2*t*, onde t é medido em horas. O tempo em que essa população atinge 400 bactérias é de:

a) 3 horas
b) 4 horas
c) 6 horas
d) 8 horas

10) (PUC) Um laboratório iniciou a produção de certo tipo de vacina com um lote de *x* doses. Se o planejado é que o número de doses produzidas dobre a cada ano, após quanto tempo esse número passará a ser igual a 10 vezes o inicial? (Use: log2 = 0,30).
a) 1 ano e 8 meses
b) 2 anos e 3 meses
c) 2 anos e 6 meses
d) 3 anos e 2 meses
e) 3 anos e 4 meses

Gabarito

1. B	2. C	3. E	4. A	5. D
6. y + 3x	7. $S_{100} = \frac{4}{9}(10^{100} - 1)$	8. $-\frac{13}{2}$	9. B	10. E

CURIOSIDADES

• Leonhard Paul Euler (1707-1783)

Nasceu em Basileia, na Suíça, e é considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII. Entrou na universidade aos 13 anos para fazer Teologia e aos 16 anos havia recebido o grau de mestre com dissertação que comparava os sistemas de Filosofia Natural de Newton e Descartes.

Entre suas muitas contribuições para a ciência moderna Euler criou a função gama, muito usada em Estatística. Também trouxe grandes contribuições ao Cálculo, com a analogia entre o cálculo infinitesimal e o cálculo das diferenças finitas.

Primeiro matemático a trabalhar com as funções seno e cosseno, em 1760, Euler iniciou o estudo das linhas de curvatura e começou a desenvolver um novo ramo da Matemática, denominado Geometria Diferencial. A importantíssima constante matemática e = 2,718… leva o nome de constante de Euler em sua homenagem, por ele ter sido um dos primeiros a estudar as propriedades desse número (FRAZÃO, 2020).

O número $\boldsymbol{e}$ é um número irracional e positivo, assim definido: $\boldsymbol{e} = \exp(1)$, a notação $\exp(x)$ deve ser entendida como o valor da "[…] função exponencial natural em x […]" (LEITHOLD, 1994, p. 455). Em função da definição da função exponencial, tem-se que: $\ln(e) = \log_e e = 1$.

• Nikolai Lobachevsky (1792-1856)

Matemático russo nascido em Nijni Novgorod, Lobachevsky ingressou na Universidade de Kazan em 1807, onde foi professor por muitos anos e reitor de 1827 a 1846. Ministrou cursos de teoria dos números, Aritmética, Álgebra, Trigonometria, Cálculo Integral e Diferencial, Geometria Plana e Esférica, Mecânica, Física e Astronomia.

Foi considerado o "Copérnico da Geometria", em virtude de suas descobertas relacionadas com as chamadas geometrias não euclidianas, a partir do ensaio no qual discute o teorema das paralelas ou quinto postulado de Euclides (axioma) em linhas paralelas ou uma versão inicial de sua geometria não euclidiana (NIKOLAY…, 2019).

• Diogo Soares (1684-1748)

Nasceu em Lisboa e formou-se em Filosofia, Matemática e Teologia na Universidade de Coimbra, Portugal. Foi cartógrafo e padre jesuíta. Trabalhou para a Coroa Portuguesa e foi responsável pelo primeiro levantamento das latitudes e longitudes de boa parte do território brasileiro (ALMEIDA, 2018; DIOGO…, 2020).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, André Ferrand. Os mapas do Brasil desenhados pelos padres matemáticos no século XVIII. *Público*, Lisboa, 16 jul. 2018. Disponível em https://bit.ly/2Xw9k3h. Acesso em: 9 jan. 2020.

DIOGO Soares (cartógrafo). *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. [São Francisco: Wikimedia Foundation], 2020. Disponível em: https://bit.ly/3idSf6h. Acesso em: 5 fev. 2020.

FRAZÃO, Dilva. *Leonhard Euler*: matemático e cientista suíço. *In*: EBIOGRAFIA. Matosinhos: 7Graus, 2020. Disponível em: https://bit.ly/3fx20ug. Acesso em 5 ago. 2020.

LEITHOLD, Louis. *O cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

NIKOLAY Lobachevsky. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. [São Francisco: Wikimedia Foundation], 2019. Disponível em: https://bit.ly/2Ptl3LD. Acesso em: 9 dez. 2019.

FUNÇÕES ESPECIAIS

Hélcio Moreira Perin

Isto, portanto, é a Matemática: ela faz lembrar a forma invisível da alma, ela dá vida às suas próprias descobertas; ela desperta a mente e purifica o intelecto; ela traz luz às nossas ideias intrínsecas; ela elimina o vazio e a ignorância com que nascemos.
Proclo (410-485)

A Matemática é a honra do espírito humano.
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.
Isaac Newton (1643-1727)

No intuito de ampliar o aprendizado dos nossos estudantes, faremos aqui uma continuação do estudo de algumas funções especiais, tendo em vista sua aplicabilidade nos cursos de Cálculo.

Assuntos como limites laterais e continuidade de funções exigem o conhecimento de funções definidas por partes, notadamente o domínio do comportamento do gráfico nos extremos dos intervalos de definição. Além disso, funções racionais e com radicais são frequentemente abordadas na maioria dos assuntos relacionados ao cálculo diferencial e integral, tais como derivadas, integrais e suas diversas aplicações.

FUNÇÕES POLINOMIAIS

São funções do tipo $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$, onde a_0, a_1, a_2, ...a_{n-1} e a_n são os coeficientes e n o grau da função. Funções de primeiro e de segundo grau são exemplos de funções polinomiais, com $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente. Os coeficientes podem ser nulos (exceto a_0) ou qualquer número real.

Para esse tipo de função, o domínio e a imagem são o conjunto dos números reais, ou seja, $D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$.

Exemplo 1:

a) $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ é uma função polinomial de grau 3, $D = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 3 - \frac{2x}{3} + \sqrt{3}x^3 - \frac{5x^5}{4}$ é uma função polinomial de grau 5, $D = \mathbb{R}$.

c) $f(t) = \frac{5t^7 - 7t^3 - 3}{2}$ é uma função polinomial de grau 7, $D = \mathbb{R}$.

FUNÇÕES RACIONAIS

São funções do tipo *f(x)* = p(x) / q(x), em que aparece a variável independente no denominador (no numerador a função pode ser constante). Nesses casos, o domínio é definido por meio de *q(x)* ≠ 0.

Exemplo 2: $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

Função racional com *p(x)* = x e *q(x)* =*1-x*.

Por meio de *q(x)* ≠ 0, temos que x deve ser diferente de 1, ou seja, $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

FUNÇÕES COM RADICAIS

São funções do tipo $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, em que aparece a variável independente sob um radical. Nesses casos, o domínio é definido com *q(x)* ≠ 0, se *n* for par. Se *n* for ímpar, $D = \mathbb{R}$.

Exemplo 3: $f(x) = \sqrt{x-1}$

Função com raiz, onde *p(x)* = x – 1 e *n* = 2.

A partir de *p(x)* ≥ 0, temos que *x* deve ser maior ou igual a 1, ou seja, $D = [1, +\infty[$.

FUNÇÕES RACIONAIS COM RADICAIS

São funções com variável independente no denominador de uma fração sob um radical. Podem ser dos seguintes tipos:

1) $f(x) = \dfrac{p(x)}{\sqrt[n]{q(x)}}$

Nesse caso o domínio é definido por meio de *q(x)* > 0, se *n* for par ou *q(x)* ≠ 0 se *n* for ímpar.

Exemplo 4: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

Função racional com raiz, onde $n = 2$, p(x) = x e q(x) = 1 – x.

Por meio de q(x) > 0, temos que x deve ser maior que 1, ou seja, $D =]1, +\infty[$.

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)}$.

Nesse caso o domínio é definido com $p(x) \geq 0$ e $q(x) \neq 0$, se n for par ou simplesmente $q(x) \neq 0$ se n for ímpar.

Exemplo 5: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$

Função racional com raiz, onde $n = 2$, $p(x)$ = x e $q(x) \neq 1 - x$.

Com $p(x) \geq 0$ e $q(x) \neq 0$, temos que x deve ser maior ou igual a 0 e diferente de 1, ou seja, $D = [0, +\infty[- \{1\}$.

3) $f(x) = \sqrt[n]{\dfrac{p(x)}{q(x)}}$.

Nesse caso o domínio é definido com $p(x) \geq 0$ e $q(x) > 0$ ou $p(x) \leq 0$ e $q(x) < 0$, se n for par ou simplesmente $q(x) \neq 0$ se n for ímpar.

Exemplo 6: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

Função racional com raiz, onde $n = 2$, $p(x)$ = x e $q(x)$ = 1 – x.

Com $p(x) \geq 0$ e $q(x) > 0$, temos que x deve ser maior ou igual a 0 e menor que 1, ou seja, $D = [0, 1[$.

Nota: nos casos 2 e 3, obtemos um conjunto real do numerador e outro do denominador. A interseção desses conjuntos é o domínio da função.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1) Encontre o domínio da função $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$.

Solução comentada:

Para calcular o domínio, resolvemos:

$x^2 - 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 2$. *Logo, D =* $\mathbb{R} - \{-2.2\}$.

Observe que o domínio seria o mesmo para qualquer outra função polinomial p(x) no numerador.

Resposta*: D =* $\mathbb{R} - \{-2.2\}$.

2) Encontre o domínio da função $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

Solução comentada:

Para calcular o domínio, resolvemos:

$2x + 3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -3 \Rightarrow x \geq -\dfrac{3}{2}$. *Logo,* $D = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

Resposta: $D = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

3) Encontre o domínio da função $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.

Solução comentada:

Para calcular o domínio, fazemos: $x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$.

Logo, $D = \left]1, +\infty\right[$.

Resposta: $D = \left]1, +\infty\right[$.

4) Encontre o domínio da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

Solução comentada:

Nesse caso, devemos determinar os valores que a variável independente pode assumir, tanto no numerador quanto no denominador. Então:

$x + 2 > 0 \Longrightarrow x \geq -2$ *e* $x - 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 1$.

Logo, $D = \left[-2, +\infty\right[- \{1\}$.

Resposta: $D = \left[-2, +\infty\right[- \{1\}$.

5) Encontre o domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$.

Solução comentada:

Nesse caso calculamos: $x + 2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -2$ e $x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$. Como o numerador e o denominador podem ser negativos, também devemos resolver $x + 2 \geq 0 \Longrightarrow x \leq -2$ e $x - 1 < 0 \Longrightarrow x < 1$

$x + 2 \leq 0 \Longrightarrow x \leq -2$ e $x - 1 < 0 \Longrightarrow x < 1$.

Logo, $D = \left]-\infty, -2\right] \cup \left]1, +\infty\right[$.

Reposta: $D = \left]-\infty, -2\right] \cup \left]1, +\infty\right[$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Encontre o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 7}{x^2 + x - 6}$

c) $h(x) = \sqrt{7 - 3x}$

d) $f(t) = \sqrt[4]{t^2 - 6t}$

e) $p(x) = \dfrac{3}{x+4}$

f) $g(t) = \dfrac{t+2}{\sqrt{4-t^2}}$

g) $q(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$

h) $f(r) = \dfrac{\sqrt{r^2-4}}{4-r^2}$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x+2}}$

j) $f(y) = \sqrt{\dfrac{9-y^2}{y+1}}$

Gabarito

a) $D = \mathbb{R}-\{-1,1\}$	b) $D = \mathbb{R}-\{-3,2\}$	c) $D =]-\infty,7/3]$	d) $D = [6,+\infty[$	e) $D =]-4,+\infty[$
f) $D =]-2,2[$	g) $D =]-2,+\infty[-\{2\}$	h) $D =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$	i) $D =]-2,5]$	j) $D =]-\infty,-3] \cup]-1,3]$.

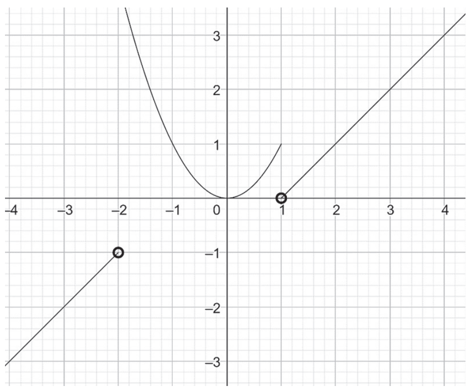
FUNÇÕES DEFINIDAS POR MAIS DE UMA SENTENÇA

São funções definidas por mais de uma sentença matemática. Cada sentença comporta-se como uma função em um determinado intervalo real. Nesse caso, o gráfico é dividido em partes, conforme cada sentença matemática em seu respectivo intervalo. As sentenças podem ser de qualquer tipo: polinomial, modular, racional, raízes, exponencial, logarítmica, trigonométrica etc. O domínio desse tipo de função deve ser analisado dentro de cada intervalo, conforme a sentença e particularmente nos extremos desses intervalos.

Exemplo 7: $f(x) = \begin{cases} x+1 \quad se \quad x < -2 \\ x^2 \quad se \quad -2 \leq x \leq 1 \\ x-1 \quad se \quad x > 1 \end{cases}$

Função definida por três sentenças. Como as sentenças são polinomiais e, portanto, definidas em todos os intervalos reais, podemos dizer que o domínio de *f(x)* é *D* = $\mathbb{R}$ (Figura 1).

Figura 1 – Representação gráfica da função do Exemplo 7



Fonte: elaborada pelo autor.

Nota: a familiarização com a representação gráfica é de suma importância para o cálculo abordado no ensino superior. Assuntos como limites laterais, continuidade de funções, derivadas no esboço de gráficos etc. exigem o conhecimento do comportamento gráfico de vários tipos de funções. Um exercício interessante é fazer o caminho inverso, ou seja, estimar a função a partir do seu gráfico, como será visto na seção seguinte.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine o domínio e esboce o gráfico da função.

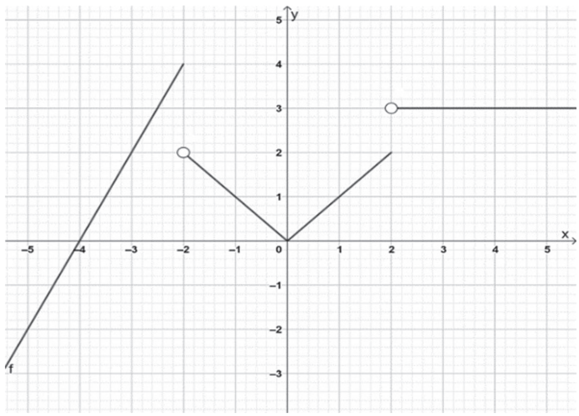
Solução comentada: $f(x) = \begin{cases} 2x+8 & se \quad x \leq -2 \\ |x| & se \quad -2 < x \leq 2 \\ 3 & se \quad x > 2 \end{cases}$

A função y = 2x + 8 *é definida para qualquer valor de x no intervalo*]– ∞ , – 2]*(x ≤ –2). O mesmo ocorre para* y = | x | *em*]– 2, – 2] *e para a função constante* y = 3 *em* [2 , – ∞[. *Assim, f(x) é definida para qualquer valor real de* x, *ou seja, D =* ℝ.
Podemos observar que o gráfico apresenta três partes, cujos intervalos reais são]– ∞, – 2],]– 2, 2[e [2 , + ∞[.
Observe que os pontos em destaque nas tabelas são colocados como referência e aparecem no gráfico como pontos "vazios".

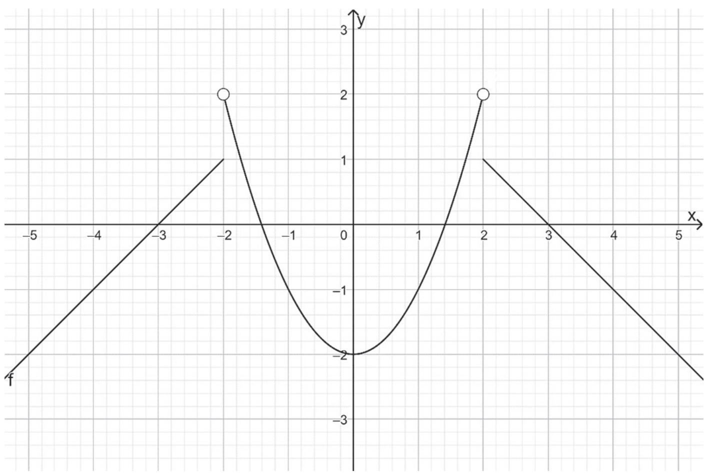
$y = 2x + 8$	
X	y
-4	0
-2	4

$y = \|x\|$	
x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

$y = 3$	
x	y
2	3
3	3



2) A partir do gráfico seguinte, determine a função e seu domínio.



Solução comentada:

Podemos observar que o gráfico apresenta três partes, cujos intervalos reais são]–∞, –2],]–2, 2[e [2, +∞[. *O colchete para fora (ou parênteses) está representado, no gráfico, por um ponto "vazio", indicando que o extremo não pertence ao intervalo.*

No primeiro e no último *intervalo temos retas representadas por funções polinomiais do primeiro grau, do tipo* y = m.x + b, *onde m representa a inclinação da reta e b a interseção com o eixo* y. *Tomando dois pontos quaisquer* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *no gráfico, determina-se m fazendo-se* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. *O valor de b é obtido fazendo-se o prolongamento da semirreta até o eixo y. Dessa forma, para o intervalo*]–∞, –2]*temos que y = x+3 e para o intervalo* [2, +∞], *temos que* y = – x + *3 ou* y = 3 – x.

No segundo intervalo temos uma parábola representando uma função polinomial do segundo grau do tipo $y = ax^2 + bx + c$. *Nesse caso o gráfico intercepta o eixo x em suas raízes* reais. *Observando cuidadosamente o gráfico, verificamos que esses pontos são, aproximadamente, – 1,41 e 1,41, ou seja,* $-\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{2}$, *que são os valores de* x *para os quais* y = *0. Logo, podemos obter a função nesse intervalo a partir das raízes, fazendo* $y = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$, *o que nos dá* $y = x^2 - 2$, *sendo* a = *1,* b = *0 e* c = *– 2.*

Para concluir, colocamos as três sentenças matemáticas conforme seus respectivos intervalos, preferencialmente na ordem da esquerda para a direita:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & se \quad x \le -2 \\ x^2 - 2 & se \quad -2 < x < 2 \\ -x+3 & se \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Resposta: O domínio é D = ℝ.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Encontre o domínio e esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & se \quad x \neq 2 \\ 1 \quad se \quad x = 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & se \quad x \leq 0 \\ 3 \quad se \quad x > 0 \end{cases}$

c) $g(t) = \begin{cases} 3-t & se \quad t < 0 \\ 5 \quad se \quad t = 0 \\ 5t - t^2 & se \quad t > 0 \end{cases}$

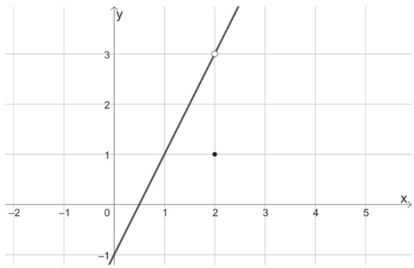
d) $f(x) = \begin{cases} -1 & se\, x \leq -3 \\ \dfrac{3}{x} & se -3 < x < 2 \\ 5-2x & se\, x \geq 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2^x & se \quad 0 < x < 2 \\ \dfrac{4}{x} & se \quad -2 < x \leq 0 \\ 1 \quad se \quad 2 \leq x \\ 2x+8 & se \quad x \leq -2 \end{cases}$

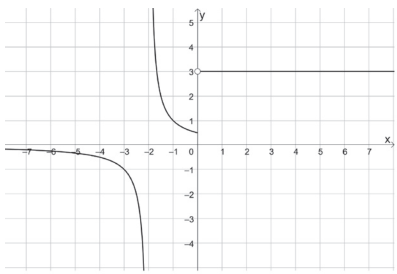
f) $f(x) = \begin{cases} \ln x & se \quad -1 < x \leq 2 \\ 4-2x & se\, x > 2 \\ \dfrac{4}{x} & se \quad -4 < x \leq -1 \\ e \quad se\, x \leq -4 \end{cases}$

Gabarito

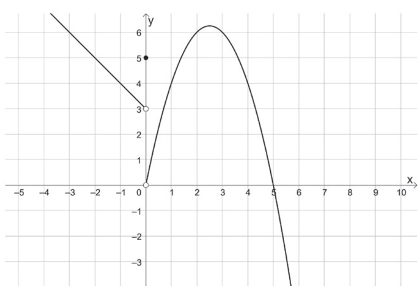
a) $D = \mathbb{R}$



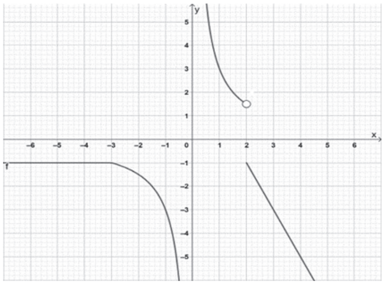
b) $D = \ - \{-2\}$



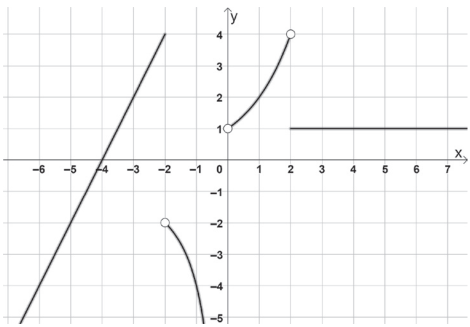
c) $D = \mathbb{R}$



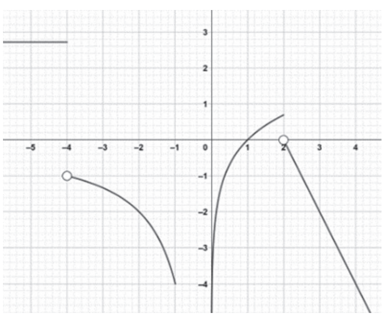
d) D = – {0}



e) $D = - \{0\}$



f) $D =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$



CURIOSIDADES

• Proclo (410-485)

Filósofo neoplatônico grego do século V. Estudou Retórica, Filosofia e Matemática em Alexandria. Era culto, fascinado pela ciência e tinha muito interesse pela astronomia. Autor da obra *Hypotyposis*, que trata de maneira introdutória as teorias astronômicas de Hiparco e Ptolomeu. Nessa obra, ele descreve a teoria matemática dos planetas, baseando-se nos epiciclos e nos excêntricos (PROCLO, 2019; PROCLUS, 2010).

• Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Filósofo alemão cujo vasto conhecimento em diversas áreas lhe confere o status de figura central na história da Matemática e da Filosofia. Além disso, tem trabalhos que versam sobre Filosofia, Política, Direito, Ética, Teologia e História.

Atualmente, seus estudos têm aplicações em Biologia, Física, Filosofia, Teoria das Probabilidades, Medicina, Geologia, Psicologia, Linguística e Informática. Essa vastidão de conhecimentos ainda não foi toda traduzida para a língua inglesa ou portuguesa (GOTTFRIED..., 2020).

• Isaac Newton (1643-1727)

Físico, matemático e astrônomo inglês. Fez muitas descobertas em óptica, movimento dos corpos e matemática. Sua principal obra, intitulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, contém informações sobre quase todos os conceitos essenciais da física, exceto energia, ajudando-o finalmente a explicar as leis do movimento e a teoria da gravidade.

Em 1668, ele construiu um telescópio refletor que utilizou para estudar óptica e ajudar a provar sua teoria da luz e da cor. Como professor na Universidade de Cambridge deu aulas de Óptica (ISAAC..., 2020).

REFERÊNCIAS

PROCLO. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. [São Francisco: Wikimedia Foundation], 2019. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Proclo. Acesso em: 9 dez. 2019.

PROCLUS. Illustratus, *[s. l.]*, 21 jan. 2010. Disponível em: https://bit.ly/2XvgQeW. Acesso em: 9 dez. 2019.

GOTTFRIED Wilhelm Leibniz. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. [São Francisco: Wikimedia Foundation], 2020. Disponível em: https://bit.ly/33uOULF. Acesso em: 9 jan. 2020.

ISAAC Newton. *In*: WIKIPÉDIA: the free encyclopedia. [San Francisco: Wikimedia Foundation], 2020. Disponível em: https://bit.ly/30sBRsg. Acesso em: 5 ago. 2020.

SOBRE OS AUTORES

Daniel de Cerqueira Góes

Graduado em Matemática pela Universidade Católica do Salvador (1982) e mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2002). Professor concursado da Universidade do Estado da Bahia (UNEB) desde 1987. Atualmente é Pró-Reitor de Administração UNEB. Tem experiência nas áreas de Matemática, Educação Matemática e desenvolve projetos educativos de inserção do jogo de xadrez como ferramenta pedagógica.
Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/7851114530282852
email: dgoes@uneb.br

Hélcio Moreira Perin

Possui graduação em Engenharia de Minas na UFBA (1998), mestrado em Geoquímica e Meio Ambiente na UFBA (2001) e doutorado em Geofísica Aplicada na UFBA (2014). Atua como professor adjunto na UNEB nas áreas de Matemática; Cálculo; Equações Diferenciais e Matemática Aplicada. Trabalha com pesquisa e extensão na área de novas tecnologias aplicadas **à** Educação Matemática, especificamente com o Programa de Winplot. Atuou como professor/ formador de Matemática no curso de Química na modalidade a distância da

Universidade Aberta do Brasil (UAB). Atualmente trabalha com pesquisa na linha de matemática aplicada à geofísica. Temas mais trabalhados: parametrização de campo de velocidades; modelagem sísmica e métodos de inversão de dados. Tese disponível em: http://www.pggeofisica.ufba.br/publicacoes/detalhe/302
Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/4123080248349497
email: hperin@uneb.br

Formato:	150 mm x 210 mm
Tipografia:	Minion Pro, Myriade Pro e Akzidenz Grotesk CE Roman
Papel:	Pólen Soft, 80 g/m² (miolo)
	Cartão Supremo, 300 g/m² (capa)
Impressão:	Novembro / 2020
Gráfica:	ImpressãoBigraf

A história da evolução das ideias matemáticas, suas teorias e conceitos, revela que nenhum pressuposto matemático se desenvolveu de maneira linear, ao acaso crescente, pois a matemática é baseada numa construção de conhecimentos oriunda da contribuição de muitos estudiosos. Assim é o Cálculo, seus fundamentos e conceitos prévios, que envolvem algumas concepções abstratas que têm gerado inúmeras dificuldades para sua compreensão. Os autores deste livro apresentam o estudo de funções elementares distribuído em quatro textos, os quais tratam dos conjuntos numéricos, do plano cartesiano, das relações e dos conceitos gerais de funções, englobando classificação de funções por propriedades e funções especiais, funções de primeiro e segundo grau, função exponencial e função logarítmica. Cada parte foi trabalhada com conteúdo resumido e exemplos, exercícios resolvidos com solução comentada e exercícios propostos com gabarito.

https://portal.uneb.br/eduneb

ISBN: 978-65-88211-22-9

9 786588 211229