



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO – DEDC I
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GESTÃO E
TECNOLOGIA APLICADAS À EDUCAÇÃO – GESTEC



ALCINÉIA LIMA SANTOS

**A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA EM SITUAÇÕES
DIDÁTICAS PARA A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS**

**SALVADOR
2018**

ALCINÉIA LIMA SANTOS

**A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA EM SITUAÇÕES
DIDÁTICAS PARA A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Gestão e Tecnologia Aplicadas à Educação – GESTEC, da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, como requisito final para a obtenção do grau de Mestra em Gestão e Tecnologia Aplicadas à Educação.

Orientador: Prof. Dr. André Ricardo Magalhães.

**SALVADOR
2018**

FICHA CATALOGRÁFICA
Sistema de Bibliotecas da UNEB
Dados fornecidos pelo autor

L732a

Lima, Alcinéia Santos

A Utilização do GeoGebra em Situações Didáticas para a Aprendizagem de Funções Trigonométricas / Alcinéia Santos Lima.-- Salvador, 2019.

216 fls : il.

Orientador(a): Prof. Dr. André Ricardo Magalhães .

Inclui Referências

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Educação. Programa de Pós-Graduação em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação - GESTEC, Câmpus I. 2019.

1.Teoria das Situações Didáticas . 2.GeoGebra .
3.Funções Trigonométricas .

CDD: 512

FOLHA DE APROVAÇÃO

“A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA EM SITUAÇÕES DIDÁTICAS PARA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS”

ALCINÉIA LIMA SANTOS

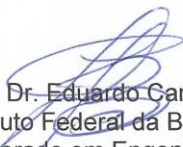
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação (*Scripto Sensu*) Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação, Área de Concentração II - Processos Tecnológicos e Redes Sociais, em 03 de maio de 2019, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação, pela Universidade do Estado da Bahia, composta pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. André Ricardo Magalhães
Universidade do Estado da Bahia - UNEB
Doutorado em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC



Profª. Drª. Erica Valeria Alves
Universidade do Estado da Bahia - UNEB
Doutorado em Educação
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP



Prof. Dr. Eduardo Cambuzzi
Instituto Federal da Bahia
Doutorado em Engenharia de Automação e Sistemas
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Dedico este trabalho a Tereza Francisca dos Santos, minha mãe, *in memoriam*, minha maior admiradora e incentivadora, a quem devo tudo o que sou. Aos meus queridos alunos que participaram desta pesquisa, pela colaboração, empenho e aprendizagem que compartilhamos durante as sessões de trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, o autor e consumidor da minha fé, que me fortaleceu em momentos difíceis ocorridos dentro desse processo e capacitou-me para a realização desta conquista.

À minha família, pela compreensão e pelo apoio durante todo o curso, em especial à minha mãe, *in memoriam*, pelo amor incondicional e todo o sacrifício que fez para que eu pudesse estudar.

Ao meu orientador, o professor Dr. André Magalhães, por ter acreditado em mim, dando-me a oportunidade de ingressar no Gestec, por todo o carinho e apoio durante o curso e, em especial, no período do falecimento de minha mãe.

Aos professores Dra. Érica Valeria Alves e Dr. Eduardo Cambuzzi, participantes da banca examinadora, pelas ricas sugestões durante o exame de qualificação que contribuíram para a finalização deste trabalho.

Aos professores do Gestec, pelas valiosas discussões em aula, que muito colaboraram para o meu crescimento profissional.

Ao amigo e professor Dr. Luiz Marcio, que, mesmo não tendo um compromisso formal com este trabalho, auxiliou-me com seus conhecimentos em todas as vezes que eu necessitei.

Ao amigo Dalvisson Vilar, pelas valiosas colaborações no GeoGebra.

Aos colegas de curso, que se tornaram meus amigos durante esta trajetória: Elizangela, Ivana, Osvaldo e Peterson, pelo apoio, companheirismo e bons momentos que passamos juntos.

Aos meus colegas do Colégio Odorico Tavares, em especial à profa. Luciana Senna, pelo apoio e pela colaboração para a aplicação do experimento; ao estagiário da secretaria, Marcus Vinícius, que, durante o processo, tornou-se monitor das oficinas; à profa. Iraíldes, pelo trabalho inicial de correção ortográfica.

Aos meus queridos alunos que participaram desta pesquisa, pela dedicação e empenho em realizar as atividades.

Aos meus amigos, pelo apoio contínuo, em especial Adriana Gomes, que tem sido uma incentivadora desde o processo de seleção para o ingresso na instituição em pauta.

E a todos que, de forma direta ou indireta, influenciaram na realização deste estudo.

“aprender matemática significa conquistar a
atitude para um comportamento matemático.”

Hans Freudenthal, 1969

RESUMO

Nesta pesquisa, objetivou-se desenvolver uma sequência didática digital, baseada no uso do *software* GeoGebra, que potencializasse a aprendizagem de funções trigonométricas, no sentido de oferecer um conjunto de situações de ensino apropriadas de modo a proporcionar a autonomia do aluno sobre a construção do conhecimento referido. Assim, na investigação pretendeu-se responder à seguinte questão: “Quais as potencialidades de uma sequência didática digital construída no ambiente GeoGebra para a abordagem de funções trigonométricas?”. Para tanto, escolhemos como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau (1986), e a Teoria dos Registros de Representação e Semiótica, descrita por Duval (2009). Como referencial metodológico, utilizamos os pressupostos da Engenharia Didática, de Artigue (1988). As análises da coleta de dados colhidos através dos protocolos dos grupos e transcrição dos áudios demonstraram que os estudantes vivenciaram as fases didáticas propostas na teoria das situações didáticas, evidenciando que a aplicação da sequência didática utilizando o *software* GeoGebra favoreceu a compreensão da articulação dos registros de representação algébrica e gráfica e o aprofundamento dos conhecimentos relacionados às funções trigonométricas.

Palavras-chave: Teoria das Situações Didáticas. GeoGebra. Funções Trigonométricas.

ABSTRACT

This research objective to develop digital didactic sequences based in the use of GeoGebra software that encrease the learning of trigonometric functions, It's offering a set of good teaching situations, in order to improve student autonomy in the construction of this knowledge. That way, the investigation objective to answer the following question: What are the potentialities of a digital didactic sequence built in the GeoGebra environment for the trigonometric functions approach? For this, we have chosen as a theoretical contribution the Theory of Situations Didactics of Guy Brousseau (1986) and the Theory of Representation and Semiotic Registers described by Duval (2009). As a methodological reference, we used the assumptions of Artigue's Didactic Engineering (1988). The analysis of the collected data in the experiment demonstrated that the students experienced the didactic phases proposed in the theory of situations and evidenced that the application of the didactic sequence using the software GeoGebra, favored the understanding of the articulation of the algebraic and graphic representation registers and the deepening knowledge related to trigonometric functions.

Keywords: Theory of Situations Didactics. GeoGebra. Trigonometric Functions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Triângulo Didático	24
Figura 2 - Fase da ação	27
Figura 3 - Fase da formulação	28
Figura 4 - Fase da Validação	30
Figura 5 - Fases da Teoria da Situação Didática	30
Figura 6 - Soma da função seno com a função cosseno no registro gráfico.	35
Figura 7 - Conversão do registro algébrico para o gráfico	36
Figura 8 - Coordenação entre os Registros da Função Seno	38
Figura 9 - Arco de circunferência	40
Figura 10 - Comprimento do arco AB	40
Figura 11 - Ângulo Central	41
Figura 12 - Medida do arco AB = medida do ângulo AOB	41
Figura 13 - Radianos	42
Figura 14 - Circunferência Trigonométrica	43
Figura 15 - Arco Nulo	44
Figura 16 - Arco AP	44
Figura 17 - Simetria em relação ao eixo vertical	45
Figura 18 - Simetria em relação ao eixo horizontal	46
Figura 19 - Simetria em relação ao centro da circunferência	46
Figura 20 - Seno	47
Figura 21 - Gráfico de uma Função Real de Variável Real	49
Figura 22 - Função par	50
Figura 23 - Função ímpar	50
Figura 24 - Função periódica	51
Figura 25 - Função Dente de Serra	52
Figura 26 - Seno	52
Figura 27 - Gráfico da função seno em um período	53

Figura 28 - Função seno	54
Figura 29 - Cosseno	54
Figura 30 - Gráfico da função cosseno em período	55
Figura 31 - Função cosseno	56
Figura 32 - Instituto Internacional GeoGebra	62
Figura 33 - Interface do GeoGebra classic 5	63
Figura 34 - Menus e as Barras de Ferramentas	63
Figura 35 - Campo de Entrada	63
Figura 36 - Interface da versão online	64
Figura 37 - Interface da versão online com os menus	65
Figuras 38 e 39 - Comparação entre as janelas de álgebra	65
Figura 40 - Janela de álgebra	66
Figura 41 - Janela de álgebra online	67
Figura 42 - Razões Trigonométricas	68
Figura 43 - Ferramenta controle deslizante	68
Figura 44 - Configuração do controle deslizante	69
Figura 45 - Atividade Função Seno	70
Figura 46 - Largura da calçada	70
Figura 47 - Múltiplas representações da função seno	71
Figura 48 - Foto da oficina do GeoGebra	74
Figura 49 - Foto do Experimento	77
Figura 50 - Entrega de certificados	77
Figura 51 - Atividade 1	84
Figura 52 - grupo 1	87
Figura 53 - grupo 2	87
Figura 54 - grupo 3	87
Figura 55 - grupo 1	88
Figura 56 - grupo 2	88
Figura 57 - grupo 3	88

Figura 58 - grupo 1	88
Figura 59 - grupo 2	89
Figura 60 - grupo 3	89
Figura 61 - grupo 1	89
Figura 62 - grupo 2	90
Figura 63 - grupo 3	90
Figura 64 - grupo 1	90
Figura 65 - grupo 2	91
Figura 66 - grupo 3	91
Figura 67 - grupo 1	91
Figura 68 - grupo 2	92
Figura 69 - grupo 3	92
Figura 70 - grupo 1	93
Figura 71 - grupo 2	93
Figura 72 - grupo 3	93
Figura 73 - grupo 1	95
Figura 74 - grupo 2	95
Figura 75 - grupo 3	95
Figura 76 - grupo 1	96
Figura 77 - grupo 2	96
Figura 78 - grupo 3	96
Figura 79 - grupo 1	101
Figura 80 - grupo 2	102
Figura 81 - grupo 3	102
Figura 82 - Atividade 3 e 4	107
Figura 83 - grupo 3	108
Figura 84 - grupo 1	109
Figura 85 - grupo 2	109
Figura 86 - grupos 1	110

Figura 87 - grupo 2	110
Figura 88 - grupo 3	111
Figura 89 - grupo 1	112
Figura 90 - grupo 2	112
Figura 91 - grupo 3	113
Figura 92 - grupo 1	114
Figura 93 - grupo 2	114
Figura 94 - grupo 3.....	115
Figura 95 - Função seno	121
Figura 96 - Função cosseno	122
Figura 97 - grupo 3	126
Figura 98 - grupo 1	126
Figura 99 - grupo 2	126
Figura 100 - grupo 2	127
Figura 101 - grupo 1.....	127
Figura 102 - grupo 3	127
Figura 103 - grupo 1	131
Figura 104 - grupo 2	131
Figura 105 - grupo 3	132
Figura 106 - Atividade Roda-Gigante	133
Figura 107 - grupo 1	133
Figura 108 - grupo 2	134
Figura 109 - grupo 3	134
Figura 110 - grupo 1	135
Figura 111 - grupo 2	136
Figura 112 - grupo 3	136
Figura 113 - grupo 1	137
Figura 114 - grupo 2	137
Figura 115 - grupo 3	137

Figura 116 - grupo 1	138
Figura 117 - grupo 2	139
Figura 118 - grupo 3	140
Figura 119 - grupo 3	141
Figura 120 - grupo 1	141
Figura 121 - grupo 2	142
Figura 122 - Questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 2.....	146
Figura 123 - Resposta da avaliação final do aluno A1do grupo 2.....	147
Figura 124 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 1.	147
Figura 125 - Resposta da avaliação final do aluno A1do grupo1.....	148
Figura 126 – Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 3	142
Figura 127 - Resposta da avaliação final A1do grupo 3.....	149
Figura 128 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 2	149
Figura 129 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do grupo 2.....	149
Figura 130 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 1	150
Figura 131 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do grupo 1	150
Figura 132 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 3.	151
Figura 133 – Resposta da avaliação final Aluno A1 do grupo 3.....	151
Figura 134 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 2.	152
Figura 135 –Resposta da avaliação final do aluno do aluno A1 do grupo 2.	152
Figura 136 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 1.	152
Figura 135 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo	152
Figura 136 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo .	152
Figura 137 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do grupo 1	153
Figura 138 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 3.	153
Figura 139 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do grupo 1	154
Figura 140 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 2.	154
Figura 141 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do grupo 2	155
Figura 142 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 2.	156

Figura 143 - Resposta da Avaliação final do aluno A1 do grupo 1	156
Figura 144 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 3.	157
Figura 145 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do grupo 3	157
Figura 146 - grupo 1	159
Figura 147 - grupo 2	159
Figura 148 - grupo 3	160
Figura 149 - grupo 1	160
Figura 150 - grupo 2	161
Figura 151 - grupo 3	161
Figura 152 - grupo 1	162
Figura 153 - grupo 2	162
Figura 154 - grupo 3	162
Figura 155 - grupo 1	163
Figura 156 - grupo 2	163
Figura 157 - grupo 3	163
Figura 158 - grupo 1	164
Figura 159 - grupo 2	164
Figura 160 - grupo 3	164
Figura 161 - grupo 1	165
Figura 162 - grupo 2	165
Figura 163 - grupo 3	165
Figura 164 - Questionário final	169
Figura 165 - Razões Trigonométricas	170

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Cronograma da Oficina	74
Quadro 2 - Cronograma do Experimento	77

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 MINHA TRAJETÓRIA E MOTIVAÇÕES	16
1.2 PESQUISA	19
2.1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	22
2.1.1 A Apresentação da Teoria das Situações	23
2.1.2. Dialética da Ação	27
2.1.3 Dialética da Formulação	27
2.1.4 Dialética da Validação	28
2.1.5 Dialética da institucionalização	29
2.2 NOÇÃO DE REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	31
3.1 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	38
3.1.1 Breve recorte do ensino de funções trigonométricas e os documentos oficiais	38
3.1.2 Definições preliminares	39
3.1.2.1 Trigonometria na circunferência	39
3.1.2.2 Noções Básicas de Função	48
3.1.3 Função Seno	52
3.1.3 Função Cosseno	54
4 A TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA	56
4.1 O USO DA TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO	56
4.2 AS FASES DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	59
4.3 O GEOGEBRA NO ENSINO DE MATEMÁTICA	61
5 O EXPERIMENTO	72
5.1 DESCRIÇÃO DO AMBIENTE DE PESQUISA	72
5.2 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO	73
5.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	78

5.4 DESCRIÇÃO DO SUJEITO DA PESQUISA	78
5.5 ENGENHARIA DIDÁTICA	79
5.6 ANÁLISES PRELIMINARES DAS ATIVIDADES.....	82
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	166
APÊNDICE A – MODELO QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO.....	176
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO	181
APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO INICIAL.....	183
APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO FINAL	185
APÊNDICE E – AVALIAÇÃO FINAL.....	186
APÊNDICE F – GOEGEBRA.....	188
APÊNDICE G – SEQUÊNCIA DIDÁTICA DIGITAL	204

1 INTRODUÇÃO

1.1 MINHA TRAJETÓRIA E MOTIVAÇÕES

A minha motivação para a elaboração deste estudo é oriunda da trajetória relacionada ao ensino da matemática, que há muitos anos vem sendo uma disciplina que chega em sala de aula pronta e acabada, provocando com isso a falta de interesse de muitos estudantes pela área em questão.

Assim, no intuito de tentarmos mudar essa concepção, precisamos abalar algumas crenças que temos a respeito da disciplina citada, frisando que isso não ocorrerá sem antes passarmos pelo desejo do professor em reavaliar a visão que tem sobre a matemática.

A Matemática tende a ser vista como conhecimento acabado, perfeito, situado num plano completamente abstrato [...] Ela tem como consequência um modelo de ensino autoritário e dogmático – o professor, que domina esse conhecimento, transmite-o ao aluno que, por sua vez, o deve procurar tal como lhe é apresentado (PONTE, 2006, p. 6).

O pensamento aludido na citação acima vem sendo atualmente desconstruído, pois é notório que nem todos os alunos aprendem nas mesmas circunstâncias ou seguem as mesmas instruções e que a insistência do educador em continuar ensinando de igual maneira, ainda que os assuntos possuam características diferentes, a exemplo da álgebra, geometria ou probabilidade, não tem trazido o sucesso desejado pelo professor.

O docente dispõe da opção de reproduzir em seu cotidiano profissional o mesmo cenário da sala de aula tradicional, em que todos os professores de matemática vivenciaram e têm seu valor e sua importância. Contudo, se o professor não está conseguindo alcançar seus alunos, percebe-se que há uma necessidade de refletir sobre o fazer pedagógico com o uso de novas metodologias que levem em consideração condições que possam favorecer o aprendizado dos discentes.

Ao fazer essas reflexões, fui constatando que estava reproduzindo a prática dos meus professores, em especial da graduação, cuja preocupação estava centrada em familiarizar os estudantes com as definições matemáticas e habilitá-los para os mecanismos de cálculo, a saber: resolver equações e manipular fórmulas.

Na busca por novos caminhos, rotas que me permitissem alcançar um número maior de estudantes, resolvi fazer uma Especialização em Educação Matemática, na Universidade Católica do Salvador – UCSAL. Durante o curso, fui me ambientando com as linhas teóricas da Educação Matemática.¹ O referencial apreendido no transcorrer das leituras e as vivências propiciadas pelas aulas contribuíram para que eu refletisse sobre minha prática pedagógica e repensasse o encaminhamento do meu trabalho em sala de aula.

Ainda no período da Especialização, participei de alguns eventos, dentre eles a I Brazilian Conference Of GeoGebra, na cidade de Mossoró, no Rio Grande do Norte, promovido por um dos núcleos dos Institutos Internacionais de GeoGebra (IGI). Nessa conferência ocorreram palestras interativas com o GeoGebra, o que me causou um grande encantamento pela potencialidade de recursos apresentados e pelas vastas possibilidades de utilização do conteúdo em pauta no ensino de Matemática, seja no nível fundamental, médio ou superior, contemplando desde conteúdos geométricos até algébricos.

Apesar do encantamento pelo GeoGebra, conheci apenas algumas ferramentas básicas, com o desejo de aprofundar meu conhecimento. Em 2017, participei então da 13ª edição do curso GeoGebra. O curso é totalmente on-line e gratuito, promovido pela Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, campo Apucarana, com a duração de 2,5 meses distribuídos em 8 módulos. Em 2018 participei da 14ª edição do mesmo curso. Com isso, o fascínio pelo GeoGebra só aumentou. No decorrer desses 5 meses, trabalhamos com várias ferramentas do GeoGebra, entre elas: a janela CAS (Computer Algebra System, que, em português, significa Sistema de Computação Algébrica); a janela de visualização 3D; a versão do GeoGebra para smartphone e sua versão on-line. Com os conhecimentos adquiridos, consegui desenvolver as atividades propostas neste estudo, pois as tarefas do curso não são fechadas, cada cursista pode realizar suas tarefas voltadas para seu interesse de estudo, desde que esteja fazendo o uso das ferramentas abordadas em cada módulo. Em 2019 fui convidada a ser moderadora do referido curso, cujo objetivo é fazer o acompanhamento de um pequeno grupo de

¹ “[...] a Educação Matemática é uma área de conhecimento das ciências sociais ou humanas, que estuda o ensino e a aprendizagem da matemática. De modo geral, poderíamos dizer que a EM caracteriza-se como uma *práxis* que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 5).

cursistas, e também auxiliá-los nas realizações das atividades do curso, o que aceitei com grande alegria.

Baseada no conjunto de literatura para elaboração do TCC da minha segunda Especialização – Matemática e Novas Tecnologias (UCSAL), cujo alicerce teórico foi fundamentado na Didática da Matemática,² e com a pesquisa resultante dessa Especialização, elaborei um pré-projeto com o título: “A utilização do GeoGebra em situações didáticas para o ensino de Geometria Analítica: distância entre dois pontos”, para ser submetido à seleção do Programa de Pós-Graduação Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação – GESTEC (UNEB), onde já tinha cursado uma disciplina como aluna especial.

Na condição de aluna regular do Mestrado, sob a orientação do professor doutor André Ricardo Magalhães, amadureci discussões sobre a proposta do pré-projeto nas disciplinas curriculares e no Grupo de Pesquisa TECH-MAT (Tecnologias Inteligentes Aplicadas à Educação). Baseando-nos nas leituras de trabalhos acadêmicos na mesma linha de pesquisa e no aprofundamento das leituras sobre Teoria das Situações Didáticas, Representações Semióticas e Tecnologias, pudemos delimitar o caminho a ser trilhado nesta pesquisa.

Uma das mudanças em relação ao pré-projeto refere-se ao objeto matemático, desta vez, Funções Trigonométricas, um conteúdo considerado difícil pelos discentes, mas que sempre gostei muito de estudar e ensinar. Minha empatia pela trigonometria aconteceu no Ensino Médio: amava identificar os senos e cossenos dos ângulos na circunferência trigonométrica, e as questões de aplicação sempre me estimularam, tanto as mais simples, envolvendo as razões trigonométricas, quanto as que envolvem cálculos de menor ângulo formados pelos ponteiros dos relógios, juntamente às aplicações de funções trigonométricas que modelam os fenômenos periódicos, além da parte histórica.

No ano de 2018, novamente lecionei no segundo ano do Ensino Médio, só que na modalidade Integral. Por conta do alinhamento de conteúdo, trabalhei com a trigonometria na primeira unidade, e mais uma vez percebi que muitas lacunas ficaram no aprendizado das funções trigonométricas, entre elas a falta de compreensão da circunferência trigonométrica e das características das mesmas

² Segundo Almouloud (2010, p. 17), “a Didática da Matemática é vista como uma ciência que tem por objetivo investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos”.

funções (trigonométricas). Em virtude dessas dificuldades, decidi retomar o conteúdo de funções trigonométricas com uma abordagem metodológica diferente, fazendo uso de uma sequência didática digital construída e aplicada com o *software* GeoGebra.

O GeoGebra apresenta recursos que podem suprir algumas limitações do quadro e piloto, fornecendo condições de elaborar atividades que favorecem a aprendizagem dos alunos. Sendo assim, busquei na Teoria das Situações Didáticas a estruturação necessária para montar uma sequência de atividades que visa sanar algumas das lacunas deixadas no aprendizado das funções trigonométricas.

A sequência didática empregada no estudo é planejada para o ato do ensino, porém o que pretendo observar é qual o impacto para a aprendizagem dos estudantes, já que estes passarão pelo processo de análise e construção dos objetos matemáticos. Nesse contexto, o aluno não precisará memorizar qual o sentido de um arco sobre a circunferência trigonométrica, pois ele fará a construção da circunferência e, em vez de precisar ligar pontos para traçar o gráfico da função seno, por exemplo, estará visualizando não apenas o rastro de um ponto que descreve o gráfico, como também o fato de que esse ponto é o extremo de um dado arco na circunferência trigonométrica.

1.2 PESQUISA

Mesmo com as dificuldades no aprendizado das funções trigonométricas seno e cosseno, meu objeto de estudo, identifiquei que os alunos conseguem construir, partindo das representações algébricas, tabelas com os valores dos senos e cossenos e seus respectivos ângulos, traçando os gráficos da senoide e cossenoide, embora o façam de forma mecânica, sem estabelecer as relações e as conversões necessárias para a apreensão do conteúdo citado.

Dessa maneira, nesta pesquisa tenho como objetivo geral desenvolver uma sequência didática digital, baseada no uso do *software* GeoGebra, que potencialize a aprendizagem de funções trigonométricas.

Para atingir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram traçados:

- Identificar as variáveis didáticas para o ensino de Funções Trigonométricas;
- Construir e utilizar um ambiente investigativo de aprendizagem sobre Funções Trigonométricas;
- Modelar as produções dos estudantes, considerando a Teoria das Situações Didáticas.

Pretendemos responder à questão “Quais as potencialidades de uma sequência didática digital construída no ambiente GeoGebra para a abordagem de funções trigonométricas? ”, baseando-nos na Teoria das Situações Didáticas (TSD), modelo teórico desenvolvido na França, proposto por Guy Brousseau (1986), que tem como finalidade modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, correlacionando professor, estudante e objeto de pesquisa. Brousseau (1986) estuda experimentalmente a aprendizagem e o ensino de matemática; para tanto, considera as condições em que os discentes fazem a matemática, aprendem ou resolvem questões matemáticas.

Embora não seja o objeto desta investigação, como estou trabalhando com Funções Trigonométricas, cujo estudo é dado pela integração entre as representações algébricas e as geométricas, recorrerei à Teoria de Registro de Representações Semióticas, formulada pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Durval (1999), que leva em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Segundo Durval (2011 apud SILVA; BIANCHINI, 2013), para o aprendizado das Funções Trigonométricas é preciso que as diferentes formas de representação sejam estudadas profundamente e que as relações existentes entre elas sejam estabelecidas. Sendo assim, iremos utilizar a análise *a posteriori* em algumas questões, cujos modos de representação estejam mais evidentes no processo de resolução da atividade.

Utilizaremos como abordagem metodológica elementos da Engenharia Didática de Artigue (1996), que, segundo Almouloud (2010), caracteriza-se como um esquema experimental com base na construção, na realização e na análise de sequências de ensino. Na parte da experimentação, trabalharemos com os alunos do segundo ano do Ensino Médio integral de uma escola pública do estado da Bahia, na cidade de Salvador, e, para coleta de dados, empregarei as sequências de atividades, gravação em vídeos, questionários e fichas de observação.

Diante do exposto, apresentamos a estrutura desta dissertação, subdividida em quatro capítulos e acrescida desta introdução e das considerações finais. No primeiro capítulo, cujo título é "Referencial Teórico", abordaremos o suporte crítico que referencia este estudo, a saber, a Teoria das Situações Didáticas e o Registro das Representações Semióticas.

No segundo capítulo, denominado "Estudos Preliminares", delinearemos os estudos preliminares e apresentaremos o objeto matemático em pauta: Funções Trigonométricas.

No terceiro capítulo, intitulado "As tecnologias no Ensino de Matemática", trataremos do Uso da Tecnologia da Informação e Comunicação no Ensino de Matemática, abordando definições sobre o conceito de tecnologia, além de traçar uma discussão sobre a inserção e a integração da tecnologia na prática pedagógica e apresentar o *software* GeoGebra.

No quarto e último capítulo, denominado "O Experimento", apresentaremos os aspectos metodológicos referentes à aplicabilidade da pesquisa proposta neste estudo, caracterizando o ambiente escolar e os sujeitos. Descreveremos as sequências das atividades com suas análises prévias e posteriores.

Em seguida, exporemos as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo abordaremos o referencial teórico que apoia nossa pesquisa: a Teoria da Situação Didática e a Teoria das Representações Semióticas, que dialogam entre si por serem modelos teóricos da corrente da Didática Matemática, que investiga o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, cuja pesquisa tem origem na França, no final da década de 1960, sob a influência da reforma da matemática.

2.1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A teoria das Situações Didáticas, modelo teórico desenvolvido na França por Guy Brousseau (1996), que teve como influência os estudos do construtivismo, originados na teoria da epistemologia genética de Piaget, trata, de acordo com Freitas (2008), das formas de apresentação, aos alunos, do conteúdo matemático, possibilitando uma melhor compreensão do fenômeno da aprendizagem matemática.

Brousseau foi um dos pesquisadores do IREM (Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática), criado no final da década de 1960, sob a influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM).³ Uma das contribuições de Brousseau ao IREM foi o desenvolvimento da teoria das Situações Didáticas.

Em seus primórdios, segundo Pommer (2013), o IREM fomentava a criação de recursos e meios para aprimorar o trabalho do professor de matemática em sala de aula, tais como desenvolvimento de jogos, brinquedos, problemas, exercícios e experimentos, evoluindo posteriormente para a estruturação em um quadro teórico mais amplo.

Nesse período, desenvolveu-se a Didática da Matemática, que, segundo Almouloud (2010), pode ser considerada uma ciência que estuda os fatores que influenciam o processo de ensino e aprendizagem da matemática e o estudo das condições que favorecem sua aquisição pelos alunos. Na Didática da Matemática, conforme D'Amore (2007), apud Pommer (2013), a 'arte' do professor tem raiz na

³ O Movimento da Matemática Moderna foi um movimento internacional ocorrido no Brasil nas décadas de 1970 e 1980 que promoveu reformulação e renovação curricular do ensino da matemática na escola primária e secundária. De acordo com Almouloud (2010), o fracasso desse movimento levou os pesquisadores franceses a se interessarem pelo estudo e pela investigação de problemas relativos ao ensino e à aprendizagem, bem como a proporem ações fundamentadas para resolvê-los.

concepção etimológica latina *ars*, termo que abrange a concepção de ‘arte’ e ‘artesanato’, mostrando que o ato da criação pelo professor se funde com a confecção, a aplicação e a análise de situações de ensino.

A didática da matemática é a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito (que pode ser qualquer organismo envolvido nessa atividade: uma pessoa, uma instituição, um sistema, até mesmo um animal). Aqui é preciso entender que a aprendizagem como um conjunto de modificações de comportamentos (portanto de realizações de tarefas solicitadas) (D’AMORE, 2007, p. 6).

A Didática da Matemática, além de investigar os problemas relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática, propõe ações fundamentadas para resolver tais problemas, levando em consideração o saber, o professor e o aluno. Seus teóricos defendem que cada disciplina deve pensar em sua própria didática, reconhecendo que não deve haver um único método de ensino que atenda às características específicas de todas as matérias.

Na perspectiva de Brousseau (1996), segundo Pommer (2013), a Didática da Matemática, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber, deveria centrar-se nas atividades didáticas que têm como objetivo o ensino naquilo que tem de específico: os saberes matemáticos.

2.1.1 A Apresentação da Teoria das Situações

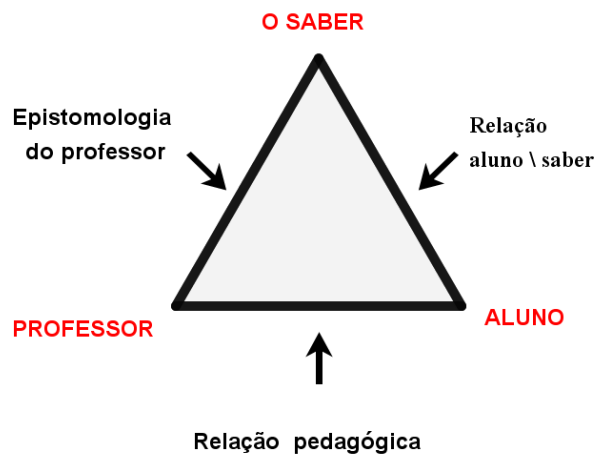
Para Almouloud (2010), o objeto central da teoria das situações didáticas é a situação didática definida como:

O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo *milieu* (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978 apud ALMOULOUUD 2010, p. 33).

Para modelar a Teoria das Situações, Brousseau (1996) propõe o sistema didático *stricto sensu* ou triângulo didático (Figura 1), composto por três elementos – o aluno,

o professor e o saber –, que leva em consideração as interações entre professor e aluno, mediadas pelo saber a ser ensinado ou aprendido.

Figura 1 - Triângulo Didático.



Fonte: Adaptado de Almouloud (2010).

De acordo com Freitas (2008), o conjunto de regras que estabelecem as bases das relações que os professores e que os alunos mantêm com o saber constitui o chamado contrato didático, definido por Brousseau (1986):

Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamento dos alunos que são esperados pelos professores [...]. Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou outra ele terá de prestar conta perante o outro. (BROUSSEAU, 1986 apud SILVA, 2008, p. 50)

De acordo com Freitas (2008), Brousseau (1986) desenvolveu um tratamento científico do trabalho didático, tendo como bases a problematização matemática e a hipótese segundo a qual se aprende por adaptação a um meio (*milieu*), ao se produzirem contradições e desequilíbrios.

Milieu é um termo francês cuja tradução para o português é a palavra “meio”, que, na teoria das Situações Didáticas, segundo Pommer (2008), indica o meio adidático, um sistema antagonista, sem intenção didática explícita e exterior ao

aluno, que pode abranger, dentre outros, situações-problema, jogos, os conhecimentos dos colegas e o professor. De acordo Almouloud (2010), o *milieu* diz-se antagonista se é capaz de produzir retroações sobre o conhecimento do sujeito. Para Brousseau (1996a, apud POMMER 2008), o “*milieu*” deve possibilitar a interação autônoma do aluno em relação às situações com que interagem e em relação ao professor.

Em situações mais complexas, Perrin-Glorian (1998) distingue no *milieu* três componentes importantes: material, cognitivo e social.

O componente material, constituído de dados objetivos, materiais ou não, inclusive instrumentos. O componente cognitivo, constituído de saberes e conhecimentos disponíveis necessários à resolução de um problema e que não são necessariamente institucionalizados. O componente social, constituído de outros atores que podem intervir na resolução de um problema: parceiros, outros alunos e professor (PERRIN-GLORIAN, 1998 apud ALMOULOU, 2010, p. 45).

Almouloud (2010), acrescenta que este *milieu*, quando não é estruturado com intenção didática, não consegue promover a aprendizagem dos conceitos matemáticos; dessa forma, compete ao professor criar situações favoráveis para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos.

O professor deve evitar a apresentação precoce de resultados gerais envolvendo conteúdos formalizados e, sempre que possível, deve promover a simulação de um ambiente científico de pesquisa que permita aos alunos vivenciarem momentos de investigação em sala de aula, para que possam “refazer” alguns passos dos cientistas (FREITAS, 2008, p. 83).

Nesse processo, o aluno deve ter um papel ativo diante da situação proposta, de certo modo, semelhante ao trabalho de um matemático diante de sua pesquisa, pois o aluno precisará testar, conjecturar, formular hipótese, usar o mecanismo de provar e tentar padronizar os resultados para socializar. O professor assume, assim, uma dupla função: propor situações que estimulem aos alunos superar algumas etapas que conduzem ao raciocínio na direção da sua aprendizagem e ajudar a tornar as produções feitas pelos alunos universais e reutilizáveis.

De acordo com Magalhães (2009), o ensino que se espera do professor é que este provoque transformações nos alunos, pautadas nas atividades desenvolvidas. Nesse sentido, cabe inicialmente ao professor escolher um “bom problema”, que

seria o desencadeador para a construção de um novo conhecimento. Tal problema, ao ser aceito pelo aluno, deve fazer com que ele atue, fale, reflita e evolua por iniciativa própria. Brousseau (2008) diz que, a partir do momento em que o aluno aceita o problema e consegue resolver o problema, o professor não deve intervir, fornecendo conhecimentos que deseja ver surgir.

O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é interinamente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo (BROUSSEAU, 2008, p. 49).

As etapas em que os alunos trabalham de forma mais livre, são chamadas de situações adidáticas, que, segundo Almouloud (2010), configuram uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, tendo sido, no entanto, imaginada, planejada e construída pelo professor, de modo que este proporcione àquele as condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar. O pesquisador da Didática Matemática ainda acrescenta que:

O processo de ensino e aprendizagem apoia-se na noção de devolução, definida como o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema aceitando as consequências dessa transferência (ALMOULOU, 2010, p. 35).

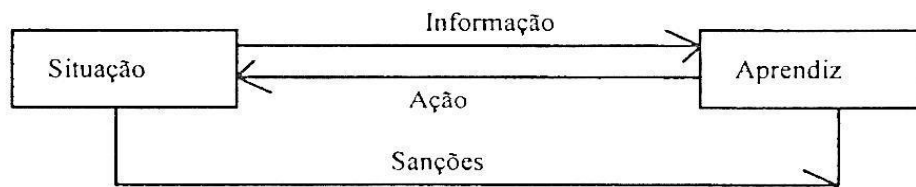
Para Brousseau (2008, p. 32), cada situação pode fazer com que o sujeito progrida e por isso também pode progredir de tal modo que a gênese de um conhecimento pode ser o fruto de uma sucessão (espontânea, ou não) de novas perguntas e respostas, em um processo que chamou de “dialética”.

Segundo a Teoria das Situações Didáticas, o processo de aprendizagem se decompõe em quatro fases ou situações diferentes: ação, formulação, validação e institucionalização. As três primeiras situações são classificadas como adidáticas, nas quais os alunos trabalham de forma mais livre, sem a interferência direta do professor, o que, de acordo com Almouloud (2010), é um processo no qual a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar as condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar.

2.1.2. Dialética da Ação

Na fase da ação, os alunos realizam tarefas mais imediatas, que produzem conhecimento de natureza mais operacional, sem se preocupar com a explicação teórica da sua resposta. Segundo Pommer (2008), elege-se um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação através da interação com o *milieu*, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema. De forma sucinta, podemos dizer que o aluno deve agir sobre a situação e esta deve retornar para ele com informações sobre sua ação, conforme descrito na figura abaixo:

Figura 2 - Fase da ação.

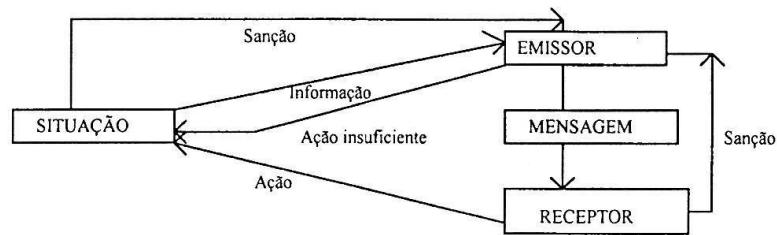


Fonte: Almouloud (2010, p. 37).

2.1.3 Dialética da Formulação

Na fase da formulação, o aluno já está envolvido na atividade proposta e precisa comunicar-se através de mensagens orais ou escritas com uma ou várias pessoas, utilizando uma linguagem mais adequada, sem obrigatoriedade de uma linguagem matemática formal, de modo a transformar o conhecimento implícito em explicitado. Segundo Magalhães (2009), conforme ilustrado na figura 3, essa fase exigirá uma comunicação entre o emissor e o receptor por meio de mensagens que atuem como uma ação sobre a situação.

Figura 3 - Fase da formulação.

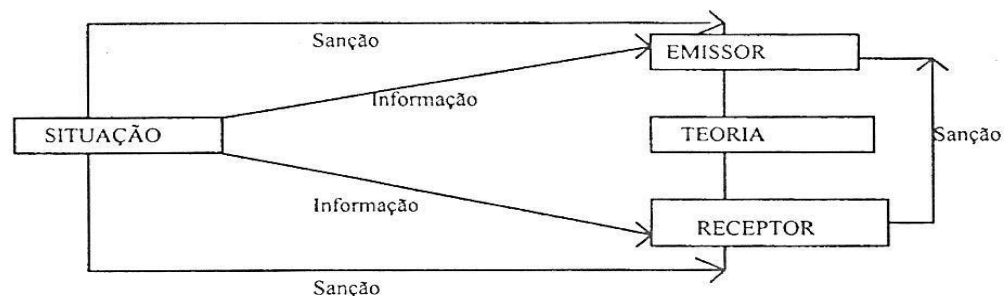


Fonte: Almouloud (2010, p. 37).

2.1.4 Dialética da Validação

Já na fase da validação, o aluno precisa utilizar os mecanismos de prova, na tentativa de validar o modelo por ele construído nas etapas anteriores. Essa prova não é necessariamente uma demonstração matemática, senão uma aceitação geral por uma comunidade dada. Conforme se observa na figura 4, o interlocutor ou receptor pode aceitar, pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não foram entendidas ou discordar, desde que justifique a sua recusa.

Figura 4 - Fase da Validação.



Fonte: Almouloud (2010, p. 39).

Para melhor precisar os conceitos associados à validação, Balacheff (1990) propõe uma distinção entre explicação, prova e demonstração:

A explicação da validade de uma proposição está associada ao plano estrito da compreensão individual, enquanto uma prova se caracteriza como um procedimento de validação que se estende ao nível de um controle social, como é o caso da sala de aula. Finalmente, a demonstração é uma validação do conhecimento, cujas regras passam pelo crivo da comunidade científica (BALACHEFF, 1990 apud PAIS, 2001, p. 73).

2.1.5 Dialética da institucionalização

Por último, ocorre a fase de institucionalização, em que a situação passa a ser somente didática e não mais adidática. Segundo Freitas (2010, p. 102), nessa fase o professor tem um papel ativo, visando fazer as correções de possíveis equívocos, como definições erradas, por exemplo, que possam ter ocorrido nas fases anteriores. Cabe ao professor selecionar os pontos essenciais que devem passar a ser um conhecimento formal, reutilizável em outras ocasiões.

Em relação ao momento da institucionalização, Almouloud (2010, p. 40) propõe que:

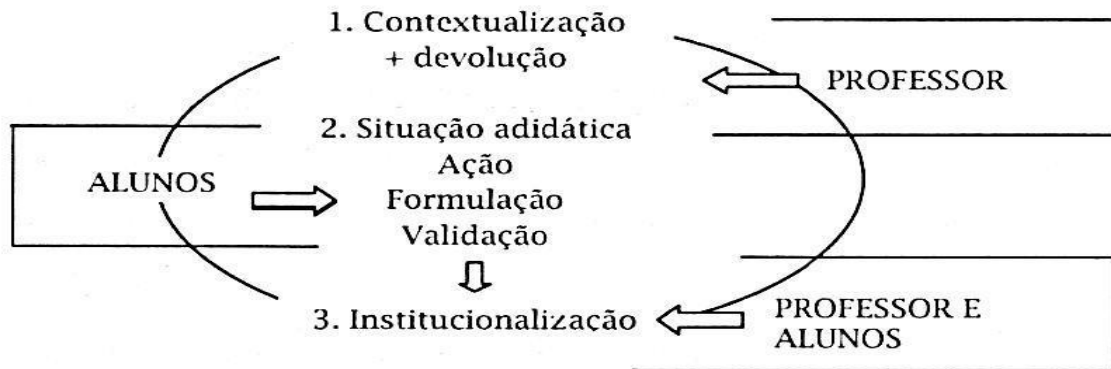
- Se feita muito cedo, interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos;
- Quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificultando as aplicações;
- É negociada numa dialética.

E segundo Pommer (2008), Brousseau pondera que o papel da institucionalização é prover o sentido de um conhecimento que pode ser encontrado pelos alunos nas seguintes fases:

- Fase da ação: trama de raciocínios e de reformulações;
- Fase de formulação: modelos implícitos associados a ele e das relações mais ou menos assumidas entre estes componentes;
- Fase de validação: da trama de provas e de formalizações;
- Fase de institucionalização: o saber é identificado, sistematizado e reconhecido.

O esquema ilustrativo a seguir contém uma síntese das principais fases da Teoria da Situação Didática, em que professores e alunos dialogam sobre o conhecimento matemático construído, referente ao problema abordado.

Figura 5 - Fases da Teoria da Situação Didática.



Fonte: Freitas (2008, p. 103).

Percebemos que, nos momentos de contextualização e devolução, cabe ao professor conversar com os alunos através de uma proposta atrativa, com o intuito de resolver a atividade proposta. Foi com esse propósito que escolhemos trabalhar com o *software* GeoGebra, por meio do qual os estudantes poderão criar arquivos dinâmicos e coloridos, bem como utilizar ou modificar arquivos já construídos. Nas atividades propostas, os alunos realizaram essas três ações, como será descrito nas análises *a priori*.

As atividades foram escolhidas com o intuito de que os alunos adquirissem um conhecimento novo em cada uma delas, contemplando desde a definição de circunferência trigonométrica, até a definição da função seno e da função cosseno, além de também explorar razões trigonométricas, arcos côngruos, domínio, imagem e período das funções seno e cosseno. Nesse processo de construção e manipulação dos arquivos para resolver as atividades propostas, os alunos estarão vivenciando as fases adidáticas, pois precisarão tomar decisões, criar conjecturas e validar a hipótese levantada. Ao final dessas atividades, dialogaremos com os alunos sobre as conclusões encontradas em cada grupo. Nessa fase, classificada como institucionalização, o professor tem o objetivo de fazer confirmações, correções e formalizações das definições matemáticas envolvidas. Caso o professor sinta necessidade, pode retomar algum conteúdo e refazer uma sistematização geral ou em cada grupo.

2.2 NOÇÃO DE REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Teoria de Representações Semióticas (TRS), desenvolvida por Duval (1995), tem sido vastamente utilizada nas pesquisas voltadas para o conhecimento matemático e a organização de situações de aprendizagem. Em sua obra *Semioses et Pensée Humaine*, Duval fez a apresentação sistematizada da sua teoria. De acordo com Machado (2013), essa obra é fruto das vindas ao Brasil para apresentação da sua teoria nos cursos de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC de São Paulo.

Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação, também foi um dos membros no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM), onde desenvolveu estudos relativos à Psicologia Cognitiva. Segundo Machado (2013), o estudo realizado por Duval trata principalmente do funcionamento cognitivo, implicando, sobretudo, nas atividades matemáticas e nos problemas de tal aprendizagem.

Na matemática, os objetos a serem estudados são definições, conceitos, propriedades, como por exemplo: um número, um conjunto, uma função, que podem ser representados por uma escrita, uma notação, um símbolo. Segundo Duval (2013, p. 23), não devemos confundir um objeto matemático com sua representação. Por exemplo, no momento em que se escreve “10”, tem-se uma representação do numeral dez, cuja definição é conceitual, embora a existência desse numeral seja apenas mental.

Quando um indivíduo pensa em um objeto (ideia, noção, conceito, etc.), apenas ele tem acesso a esse objeto naquele instante, pois pensar é faculdade do sistema mental. Tornar tal objeto acessível aos outros indivíduos implica evocá-lo, externá-lo por “gestos” ou por meio da sua representação em um registro. (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 468)

Segundo Duval (2009, p. 29), não é possível estudar os fenômenos dos conhecimentos sem recorrer à noção de representação. Para tanto o autor citado estabeleceu, conforme Dann (2008, p. 171), três aproximações da noção de representação, sendo que cada uma delas depende da natureza do fenômeno designado.

A primeira refere-se à representação como representação **mental**, focalizando

as crenças e as explicações das crianças. Os primeiros estudos sobre representação mental foram realizados por Piaget em sua obra “A representação do mundo na Infância”, no período de 1924-1926. Para caracterizar a novidade do último dos estágios da inteligência sensorial-motora, o teórico suíço recorreu à noção de representação como **evocação dos objetos ausentes** (PIAGET, 1937 apud DUVAL, 2009, p. 30, grifos do autor). De acordo com Duval (2008), o método aplicado para o estudo das representações mentais é o de conversão, no qual o que pode parecer como erro é considerado como indício de outra visão das coisas ou de outras lógicas.

A segunda refere-se à representação como interna ou computacional. Essa representação foi estudada inicialmente entre os anos de 1955-1960, juntamente com as teorias que privilegiam o tratamento, por um sistema de informação recebida de modo a produzir uma resposta adaptada. Nesse sentido, a noção de representação passa a ser vista como uma forma de informação a ser construída como sistema de codificação **da informação**. Um dos iniciadores dessa perspectiva pode ter sido Broadbent (1958 apud DUVAL, 2009, p. 31, grifos do autor).

A terceira, e a mais recente, é a representação como semiótica. Esta surgiu, de acordo com Dann (2008, p. 173), com um problema de modelização de linguagem e teve sua discussão ampliada por Benveniste com a introdução dos sistemas semióticos. Posteriormente, tais sistemas também aparecem nos estudos sobre aquisição do conhecimento matemático e os problemas de aprendizagem relativos a esse conhecimento.

A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidos em representações “equivalentes” em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza [...] Traçar a curva correspondente a uma equação do segundo grau, ou passar do enunciado de uma relação à escrita literal dessa relação consistirá em mudar **“mudar a forma pelo qual o conhecimento é representado”** (DUVAL, 2009, p. 32, grifos do autor).

De acordo com Dann (2008), as representações mentais, as representações computacionais e as representações semióticas não são espécies diferentes de representações, senão representações que realizam funções diferentes. Enquanto as representações mentais têm a função de objetivação, a representação computacional tem a função de tratamento e as representações semióticas realizam

as duas funções, sendo que o tratamento é intencional e não automático.

Um dos obstáculos na compreensão de conceitos matemáticos está na confusão que se faz entre o objeto matemático em si e sua representação, o que é compreensível, já que os objetos a serem estudados não são acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente. Eles só podem ser acessíveis através de suas representações semióticas (DUVAL, 2013, p. 21):

Representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótica e de outro lado, pela referência do objeto representado (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 467).

De acordo com Dann (2008, p. 175), as representações semióticas têm dois aspectos: sua forma (ou representante) e seu conteúdo (o representado). Um gráfico, uma figura geométrica, um diagrama, uma fórmula algébrica ou um enunciado em língua natural, por exemplo, são representações semióticas, que revelam sistemas semióticos diferentes. Para designar os diferentes tipos de representações semióticas, Duval (2013) classifica como registro de representação semiótica, e o define da seguinte forma:

Os sistemas semióticos devem permitir realizar as três atividades cognitivas inerentes a qualquer representação. Em primeiro lugar, constituir um traço ou um conjunto de vestígios perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de algo num sistema determinado. Em seguida, transformar as representações pelas únicas regras próprias ao sistema, de maneira a obter outras representações que podem constituir uma correspondência de conhecimentos em relação às representações iniciais. Por último, converter as representações produzidas num sistema de representações para outro sistema, de tal maneira que este último permita esclarecer outros significados relativos ao que é representado. Não são todos os sistemas semióticos que permitem essas três atividades cognitivas fundamentais..., mas as línguas naturais, as línguas simbólicas, as representações gráficas, as figuras geométricas, etc., permitem-no. Falamos então de **registro de representação semiótica** (DUVAL, 2013, p. 37, grifos do autor).

Em nosso estudo, tratamos do objeto matemático “função seno”, cuja representação é dada por quatro registros de representação semiótica: registros das fórmulas algébricas, das tabelas, gráfico e língua natural.

Para Duval (2009, p. 15), em Matemática, as representações semióticas, além

de indispensáveis para a comunicação, são necessárias para a realização de atividades matemáticas. Essas atividades dependem das funções cognitivas do pensamento humano: a semiósis (a apreensão ou a produção de uma representação semiótica) e a noésis (atos cognitivos como apreensão conceitual de um objeto).

Duval (2009, p. 17) ainda afirma que “não há noésis sem semiósis”; é a semiósis que determina as condições de possibilidade e de exercício da noésis. Dann ainda acrescenta que, “para a apreensão de um objeto matemático, é necessário que a noésis ocorra através de significativas semiósis” (2008, p. 177).

Duval (2013, p. 14) classifica o registro de representação semiótica em multifuncionais e monofuncionais. Os registros multifuncionais admitem várias formas de tratamento, mas não podem ser algoritmizáveis, como é caso da língua natural e a configuração de figuras geométricas. E também é o caso dos registros monofuncionais, cujos tratamentos são principalmente algoritmos, como, por exemplo, os sistemas numéricos e os registros simbólicos.

Duval (2013, p. 16) aponta que há dois tipos de transformações de registros de representações semióticas, que são totalmente diferentes: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são conversões internas, ou seja, realizadas dentro de um mesmo registro. Por exemplo, as estruturas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico), que são os tratamentos algoritmizáveis.

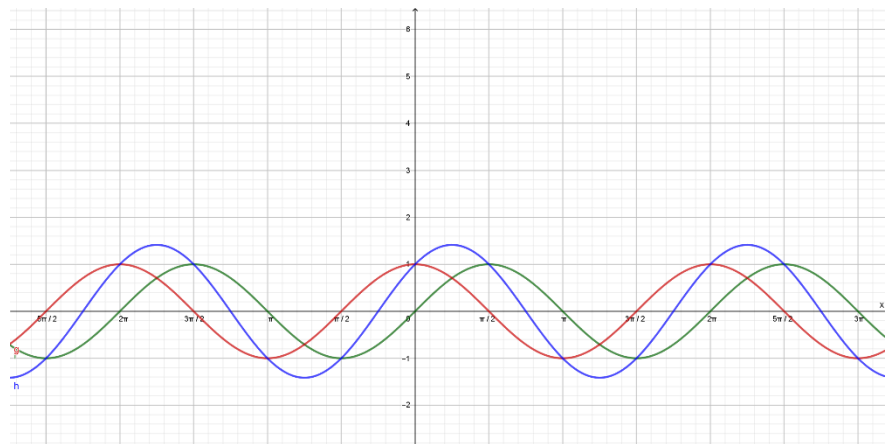
Dann (2008, p. 1600) ressalta que os tratamentos são ligados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático, trazendo como exemplo a adição de números racionais.

a) $0,25 + 0,25 = 0,5$ (representação decimal, envolvendo um tratamento decimal).

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (representação fracionária, envolvendo um tratamento fracionário).

Em nosso estudo, faremos também os tratamentos considerados não algoritmizáveis, os tratamentos figurais, pois vamos trabalhar com translação, redução, ampliação e composição dos gráficos das funções trigonométricas. Na figura abaixo, o gráfico em verde representa a função seno; o gráfico em vermelho, a função cosseno; o gráfico em azul, a soma da função seno com a função cosseno.

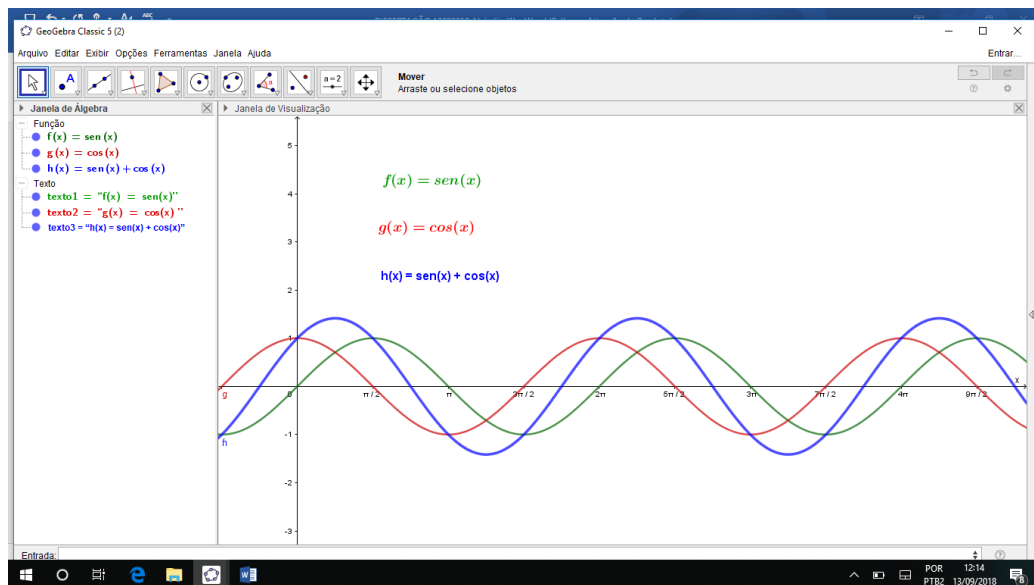
Figura 6 - Soma da função seno com a função cosseno no registro gráfico.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

As conversões, segundo Duval (2013, p. 16), são transformações de representações que consistem em mudar de registro, conservando os mesmos objetos denotados. Por exemplo, a expressão “triângulo retângulo” pode ser convertida na figura de um triângulo retângulo, o que denota a conversão entre registros, já que se parte de uma representação do objeto matemático em língua natural para um registro figural. Outro exemplo de conversão é passar de uma escrita algébrica para sua representação gráfica, conforme mostra a figura 7.

Figura 7 - Conversão do registro algébrico para o gráfico.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

O GeoGebra, além de fazer a conversão entre as representações, nos permite efetuar o tratamento simultâneo das representações algébricas (janela de álgebra) e geométricas (janela de visualização).

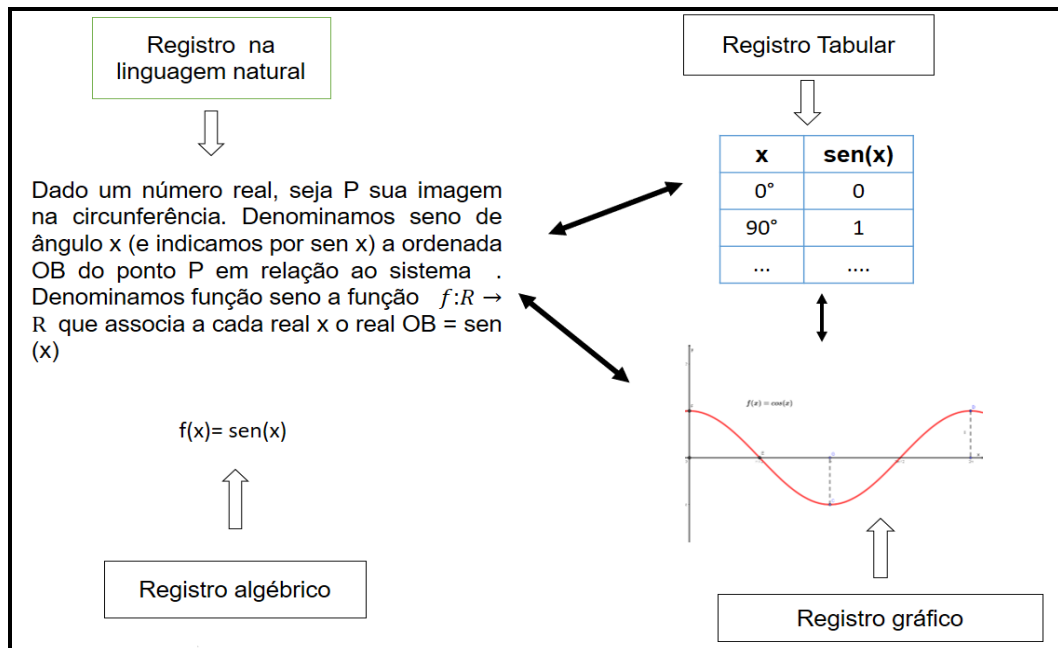
Segundo Duval (2013), um mesmo objeto matemático pode ser representado de diferentes formas. Para o aprendizado desse objeto matemático, é preciso que essas diferentes formas de representação sejam estudadas profundamente e que as relações existentes entre elas sejam estabelecidas.

A compreensão em matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. [...] é articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática (DUVAL, 2013, p. 22).

No caso das funções trigonométricas, acredita-se que, para haver uma melhor compreensão do conceito de função trigonométrica, é necessário que o aluno conheça ao menos sua representação algébrica e gráfica e consiga fazer a correspondência entre elas. Nas atividades selecionadas, procuramos explorar diferentes formas de registros (linguagem natural, linguagem algébrica, tabelas e gráficos), efetuar os tratamentos em alguns desses registros, fazer a conversão

entre essas representações, com objetivo de que, ao realizar essas atividades, o aluno conseguisse estabelecer a coordenação entre o registro, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 8 - Coordenação entre os Registros da Função Seno.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

A escolha de um registro de representação adequado favorece os tratamentos dos objetos matemáticos; contudo, não é suficiente. É necessário que os alunos consigam fazer a coordenação entre esses diferentes registros.

Em nossa abordagem metodológica, levamos em consideração a pluralidade de registro das funções trigonométricas, por acreditar, assim como Duval (2013, p. 30), que a articulação desse registro é condição para a compreensão em Matemática. Nesse sentido, procuramos elaborar atividades que permitam ao aluno passar pelo registro da língua materna para o registro figural. Trabalhamos também com o registro tabular e efetuamos o tratamento no registro algébrico, como mostra o detalhamento das atividades.

3 ESTUDOS PRELIMINARES

Este capítulo traz um breve recorte sobre as orientações dos parâmetros curriculares para o seu ensino de Funções Trigonométricas e apresenta as definições do objeto em questão e de outros de outros objetos matemáticos que entendemos como necessários para a compreensão da definição das funções seno e cosseno, e que serão abordadas nas atividades, tendo como base os livros *Matemática: ciência e aplicação*, 2 - Ensino Médio / Gelson Iezzi... [et al, 6 ed. São Paulo. Editora Saraiva, 2010. *Trigonometria, Números Complexos* Coleção do Professor de Matemática, M,P do CARMO, A, C MORGADO, E. WAGNER, Rio de Janeiro, SBM, 2005 *Trigonometria: 2º grau.* / Aref Antar Neto... [et al.]. 1 ed São Paulo Ed Moderna 1978, *Conjuntos e Funções: 2º grau* / Aref Antar Neto... [et al.]. 1 ed São Paulo Ed Moderna 1978 Ed Moderna, *Matemática Paiva* / Manuel Paiva 2.ed. São Paulo. Editora Moderna, 2013, e o livro-texto, adotado na escola, *Matemática: contexto e aplicação - Ensino Médio* / Luiz Roberto Dante. 3 ed. São Paulo, Editora Ática, 2016

3.1 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

3.1.1 Breve recorte do ensino de funções trigonométricas e os documentos oficiais

De acordo com o PCN+ Ensino Médio (2002), uma parte importante da trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e a seus gráficos. Os Parâmetros Curriculares (1999) acrescentam que se devem evitar os investimentos excessivos no cálculo algébrico das identidades e das equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seu gráfico.

No entanto, percebemos que os alunos possuem grande dificuldade em compreender o conceito de função trigonométrica. Eles até conseguem identificar e traçar os gráficos das funções seno e cosseno, mas o fazem de forma mecânica, sem entender claramente a correlação entre a expressão algébrica que define a função e sua representação geométrica. Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2008, p. 74):

Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve $f(x) = \text{sen}(x)$, usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associados aos fenômenos que apresentam comportamentos periódicos. O estudo das demais funções trigonométricas podem e devem ser colocadas em segundo plano.

Percebemos ainda que a noção de função, assim como as demais funções, aparece exclusivamente como atribuição de valores numéricos à variável independente “ x ” e que os conceitos, denominados nesse estudo de “definições preliminares”, são estudados de forma independente, sem a associação posterior com as definições das funções seno e cosseno.

É preciso atenção à transição do seno e cosseno, no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus) para o seno e cosseno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos (BRASIL, 2008, p. 74).

Desejamos, com este estudo, através das sequências de ensino, trabalhar com essas definições preliminares, para construir a partir destas definições o conceito de funções seno e cosseno.

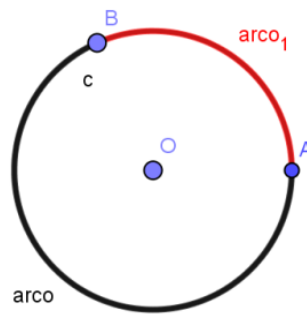
3.1.2 Definições preliminares

3.1.2.1 Trigonometria na circunferência

Arco de circunferência

Se dois pontos A e B, distintos, são tomados sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes denominadas arcos de circunferência, ou simplesmente arco. Os pontos A e B são as extremidades do arco.

Figura 9 - Arco de circunferência.

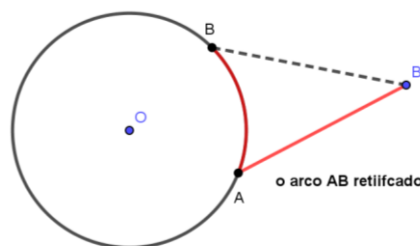


Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Em particular, se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto (denominado arco nulo) e o outro é a circunferência (denominado arco de uma volta).

Considerando um ponto A sobre a circunferência de raio r e centro O . Deslocando-se o ponto A sobre a circunferência, ele percorre uma distância l ao mesmo tempo em que gira um ângulo α em torno do centro O . Esse movimento do ponto A descreve um arco de circunferência de medida angular α e medida de comprimento l ou medida linear l . Entendemos como comprimento de arco AB, o comprimento do segmento AB' que seria obtido se fosse possível “esticar”, ou retificar o arco AB.

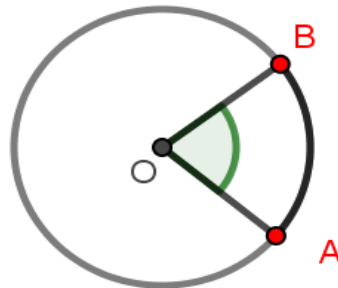
Figura 10 - Comprimento do arco AB.



Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Dado dois pontos A e B sobre uma circunferência de centro O , o ângulo $\hat{A}OB$ é chamado de **ângulo central** (porque tem o vértice no centro da circunferência), e define-se que o arco menor AB subtende o ângulo central $\hat{A}OB$.

Figura 11 - Ângulo Central.



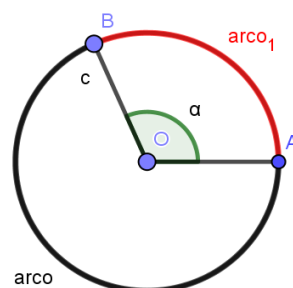
Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Medida de ângulos e arcos

Entre as unidades que podem ser utilizadas para medir ângulo, duas se destacam: o grau ($^{\circ}$) e o radiano (rad.). O grau é uma unidade de medida para ângulos. É obtido dividindo-se uma circunferência em 360 partes iguais. O ângulo corresponde a uma dessas partes e é chamado de ângulo de 1 grau (1°).

Define-se que a medida angular em graus do arco menor AB é a medida do ângulo central $A\hat{O}B$, tomada em graus.

Figura 12 - Medida do arco AB = medida do ângulo AOB.



$$\text{medida do arco } AB = \text{medida do ângulo } AOB = \alpha$$

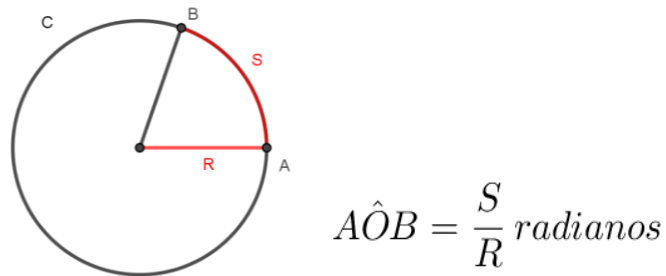
Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Radianos

Considera-se um ângulo central $A\hat{O}B$ em uma circunferência de raio R , que subtende o arco AB de comprimento S . Define-se a medida em radianos do ângulo

$\widehat{AÔB}$ como sendo a razão entre o comprimento S do arco AB e o seu raio R . Quando $R = S = 1$, diremos que o ângulo $\widehat{AÔB}$ mede exatamente 1 radiano.

Figura 13 – Radianos.



$$\widehat{AÔB} = \frac{S}{R} \text{ radianos}$$

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Sabendo que o comprimento de uma semicircunferência de raio R é dado por

$$C = \pi R, \text{ temos que } 180^\circ = \frac{\pi R}{R} = \pi \text{ radianos. Daí, temos que um radiano} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ.$$

Circunferência trigonométrica

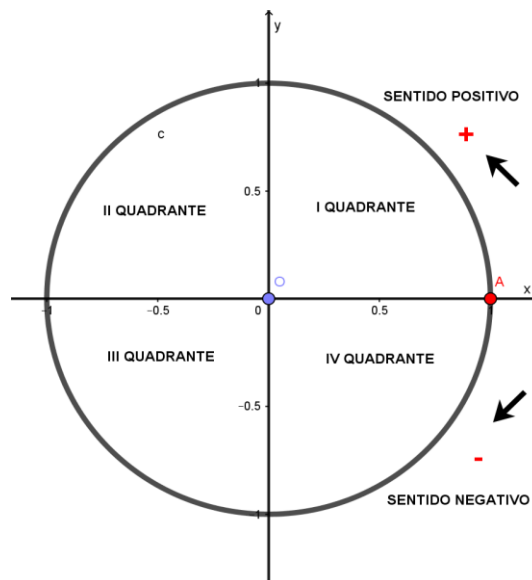
Uma circunferência pode ser percorrida em dois sentidos. Quando um deles é escolhido e denominado positivo, dizemos que a circunferência está orientada. Por conversão escolhemos o sentido anti-horário como positivo.

Consideremos no sistema de coordenadas cartesianas a circunferência com centro $(0,0)$ e raio 1 também chamada de circunferência unitária. Fixaremos na circunferência unitária o ponto A de coordenadas $(1,0)$, que será chamado de origem dos arcos.

A circunferência definida acima será chamada de **circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico**.

O sistema de eixos cartesianos divide a circunferência trigonométrica em quatro partes, chamadas quadrantes.

Figura 14 - Circunferência Trigonométrica.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

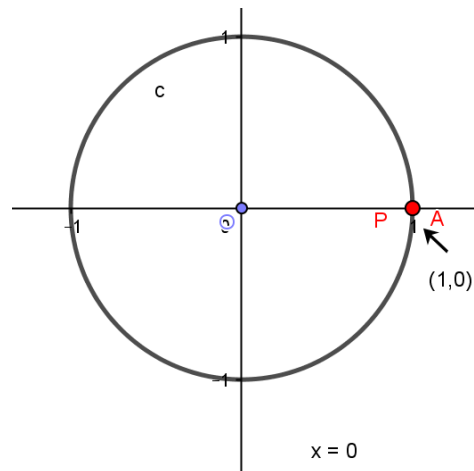
Na circunferência trigonométrica, podemos associar cada ponto P a um arco correspondente AP, denominado arco trigonométrico (uma das partes delimitada por dois pontos da circunferência, incluindo-os). Definiremos a medida algébrica de um arco AB desta circunferência como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário, e negativo, em caso contrário.

Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

A todo número real x , $0 \leq x \leq 2\pi$ está associado um único ponto P da circunferência trigonométrica, de modo que:

Se $x = 0$, o ponto P coincide com o ponto $A = (1,0)$, conforme a figura 15.

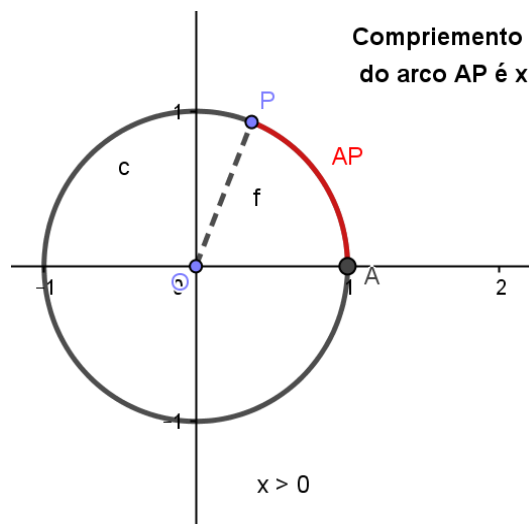
Figura 15 - Arco Nulo.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Se $x > 0$, descrevemos a seguir, no sentido anti-horário, um arco de comprimento x , cuja extremidade final é P , conforme a figura 16.

Figura 16 - Arco AP.



Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Arcos Côngruos

Um ponto P sobre a circunferência trigonométrica é a extremidade de uma infinidade de arcos. Por exemplo, todos os arcos $\left(\dots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \right)$ têm origem no ponto A e a extremidade, no ponto P . Aos arcos de mesma extremidade damos o

nome de “arcos cômruos”. Assim, todos esses arcos são chamados de arcos cômruos. Se dois arcos de medidas α_1 e α_2 , radianos, são cômruos, então $\alpha_1 - \alpha_2 = k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

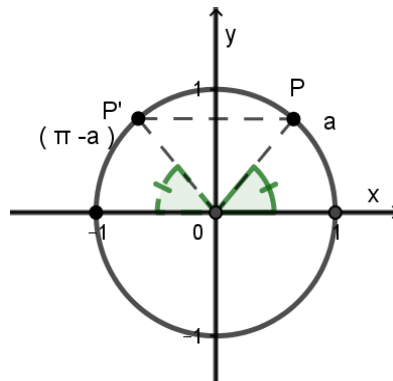
Simetrias

No ciclo trigonométrico destacamos três tipos de simétrica: em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro. Para o estudo de cada uma delas, tomaremos um arco de a radianos, do 1º quadrante, correspondente ao número real a .

Simetria em relação ao eixo vertical

Seja P a imagem do número real a . O simétrico de P em relação ao eixo vertical é o ponto P' , imagem do número real $\pi - a$, visto que os ângulos centrais assinalados na figura são congruentes.

Figura 17 –. Simetria em relação ao eixo vertical.

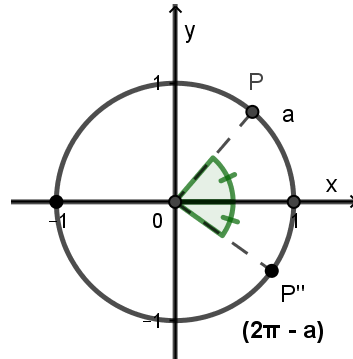


Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Simetria em relação ao eixo horizontal

Levando em conta a congruência entre os ângulos centrais assinalados na figura, podemos afirmar que o número real que possui imagem simétrica à imagem de a é o número $2\pi - a$.

Figura 18 – Simetria em relação ao eixo horizontal.

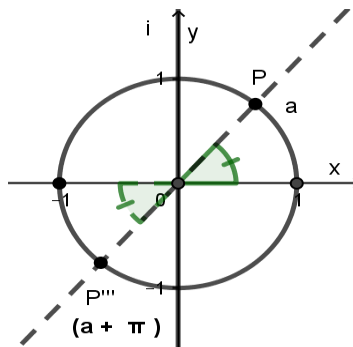


Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Simetria em relação ao centro da circunferência

Quando dois pontos são extremidades opostas de um diâmetro, como P e P' da figura, a diferença entre os números correspondem a π .

Figura 19 - Simetria em relação ao centro da circunferência.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

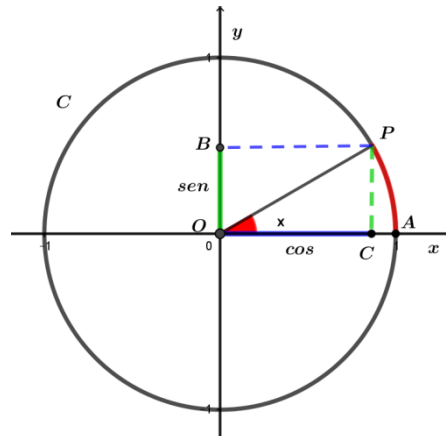
Razões trigonométricas na Circunferência

Seno

Dado um número real $x \in [0, \pi]$, seja P sua imagem na circunferência trigonométrica. Denominamos seno de ângulo α (e indicamos por $\sin x$) a ordenada

OB do ponto P em relação ao sistema xOy . De forma análoga, denominamos cosseno do ângulo x (e indicamos por $\cos x$) a abscissa OC do ponto P em relação ao eixo xOy .

Figura 20 – Seno.



Fonte: elaborado pela autora (2019).

Considere o triângulo retângulo OCP, sabendo que $OP = 1$, temos:

$$\text{sen}(x) = \frac{CP}{OP} = \frac{OB}{OP} = \frac{OB}{1} = OB$$

$$\text{cos}(x) = \frac{OC}{OP} = \frac{OC}{1} = OC$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OCP, temos:

$$(OB)^2 + (OC)^2 = (OP)^2 \Rightarrow (\text{sen } x)^2 + (\text{cos } x)^2 = 1$$

Daí, concluímos que: $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$.

Para estudarmos as razões trigonométricas do ponto de vista da teoria das funções, apresentamos alguns conceitos básicos sobre essa teoria.

3.1.2.2 Noções Básicas de Função

Dados dois conjuntos A e B, diferentes do vazio, uma função f, de A em B, é uma correspondência que associa a cada elemento de A um único elemento de B.

Conceito de Domínio e Imagem de uma função

O conjunto A é denominado domínio de f; o conjunto B é denominado contradomínio de f ; se x é um elemento qualquer de A, então o único y de B, associado a x, é denominado imagem de x pela função f e é indicado por $y = f(x)$.

O conjunto de todos os elementos de B que serão imagem de algum elemento de A é denominado conjunto – imagem de f e é indicado por $I(f)$.

Função Real de Variável Real

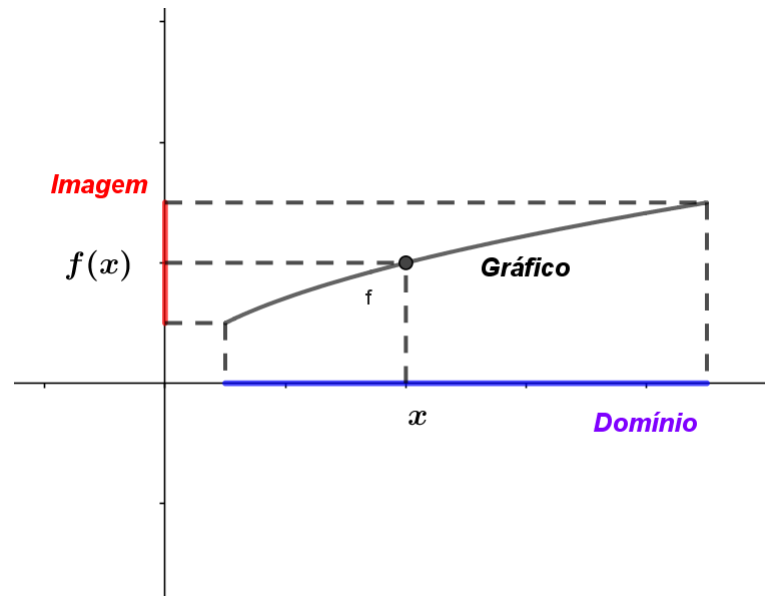
Uma função f, de A em B, diz-se função real de variável real, se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.

Gráfico de uma Função Real de Variável Real

Considere uma função f, real de variável real: $f : A \rightarrow B$.

Fixando um sistema de coordenadas xOy , o conjunto G de todos os pontos $(x, f(x))$ com $x \in A$, é o gráfico de f .

Figura 21 - Gráfico de uma Função Real de Variável Real.



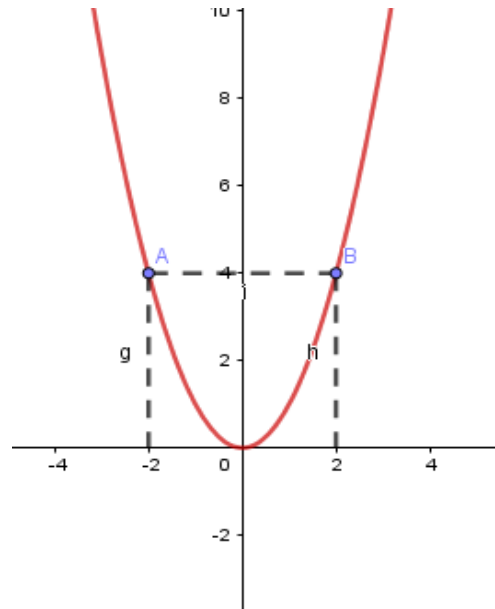
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Função Par e Função Ímpar

Se uma função f satisfaz $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, então f é chamada em função par. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par, pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

O significado geométrico de uma função ser par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y .

Figura 22 – Função par.

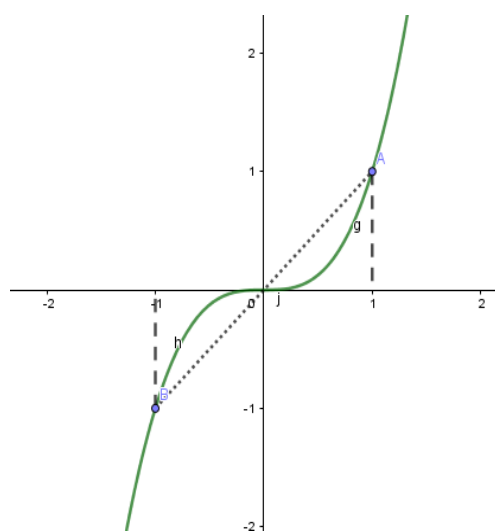


Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em seu domínio, então f é chamada em função ímpar. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Figura 23 - Função ímpar.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Função periódica

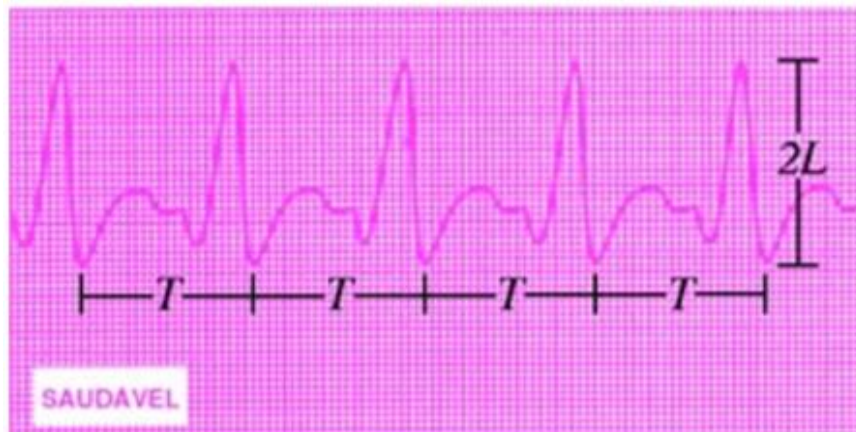
Uma função $f: A \rightarrow B$ é periódica se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição $f(x + p) = f(x), \forall x \in A$.

O Menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado período de f .

Exemplos:

Consideremos a função f do gráfico mostrado na figura abaixo, que corresponde ao eletrocardiograma de uma pessoa saudável. Neste exemplo, o padrão de repetição pode ocorrer em um intervalo de comprimento T e não ocorrer em nenhum intervalo de comprimento menor. Assim, a função f é uma função periódica de período T .

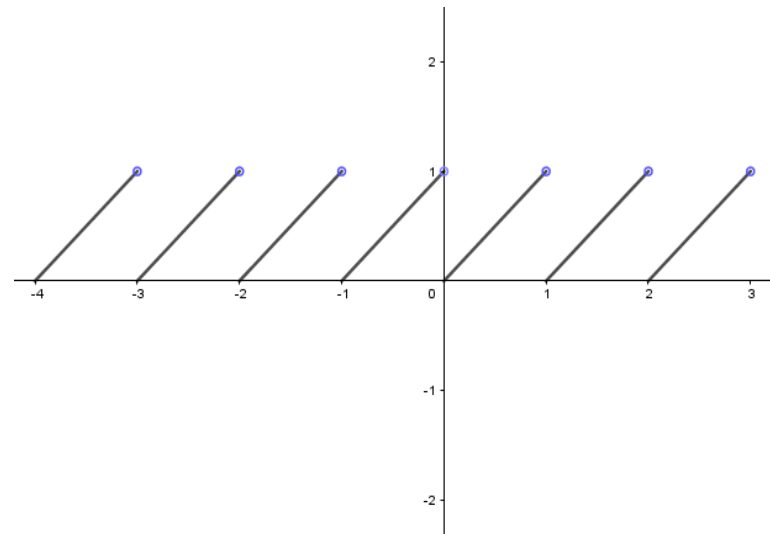
Figura 24 - Função periódica.



Fonte: CEDERJ (p. 161)

Exemplo 2: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dente de serra, assim definida: $f(k) = 0$ se $k \in \mathbb{Z}$ e $f(k + \alpha) = \alpha$ quando $0 \leq \alpha < 1$ e $k \in \mathbb{Z}$. A função f é periódica, com período 1, mas não é nem par nem ímpar.

Figura 25 - Função Dente de Serra.

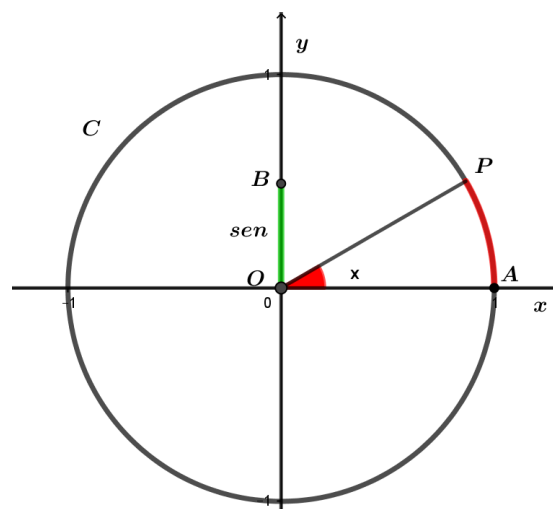


Fonte: Elaborado pela autora (2019)

3.1.3 Função Seno

Dado um número real, seja P sua imagem na circunferência. Denominamos seno de ângulo x (e indicamos por $\text{sen } x$) a ordenada OB do ponto P em relação ao sistema xOy . Denominamos função seno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OB = \text{sen } x$, isto é: $f(x) = \text{sen } x$, conforme a figura 26.

Figura 26 – Seno.



Fonte: Elaborado pela autora (2019)

A função seno é periódica e seu período é 2π . De fato, os números reais x e

$x + k \cdot 2\pi$, para k inteiro, têm a mesma imagem no ciclo e, portanto, $\text{sen } x = \text{sen } (x + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, f é periódica e seu período p corresponde ao menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, que é 2π .

O domínio e o contradomínio de f são iguais a \mathbb{R} . No entanto, o conjunto imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.

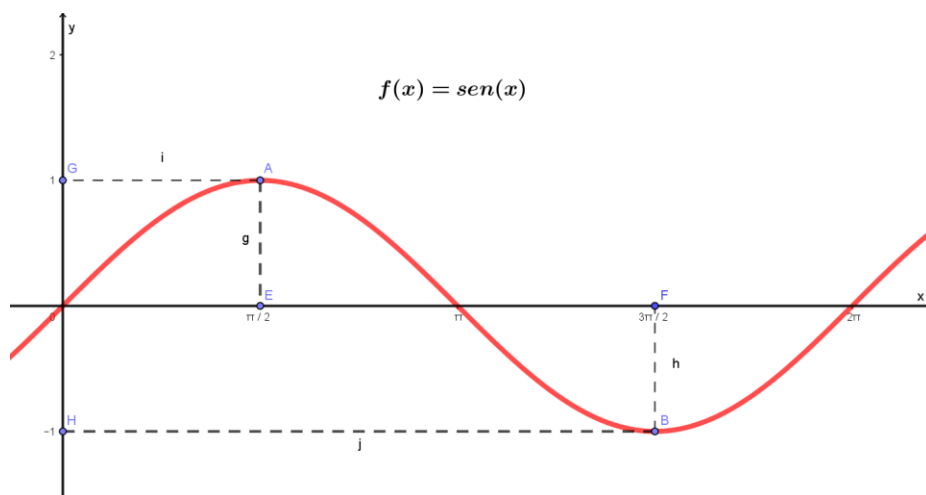
f é uma função ímpar, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{sen } (-x) = -\text{sen } (x)$.

O sinal da função seno é positivo quando x pertence ao 1º e 2º quadrantes; e é negativo quando pertence ao 3º e 4º quadrantes.

A função seno é crescente no 1º e 4º quadrante e decrescente no 2º e 3º quadrante.

Levando em consideração todas as informações que obtivemos sobre a função seno, construímos o gráfico de f , isto é, o conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(x, \text{sen } x)$, que recebe o nome de senoide

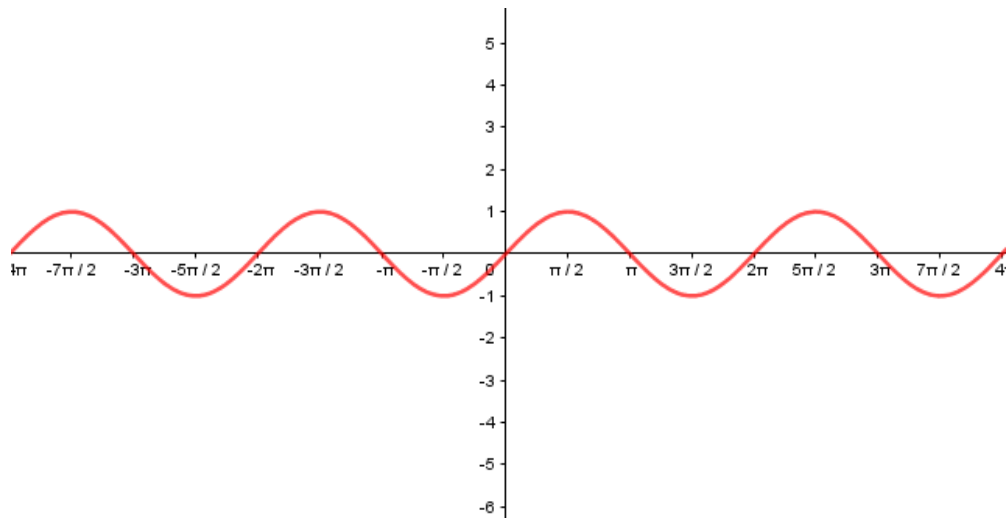
Figura 27 - Gráfico da função seno em um período.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Para obtermos o gráfico completo da função seno, repetimos o gráfico da função anterior uma infinidade de vezes. No nosso caso, repetimos quatro vezes, como se pode ver na figura a seguir:

Figura 28 - Função seno.

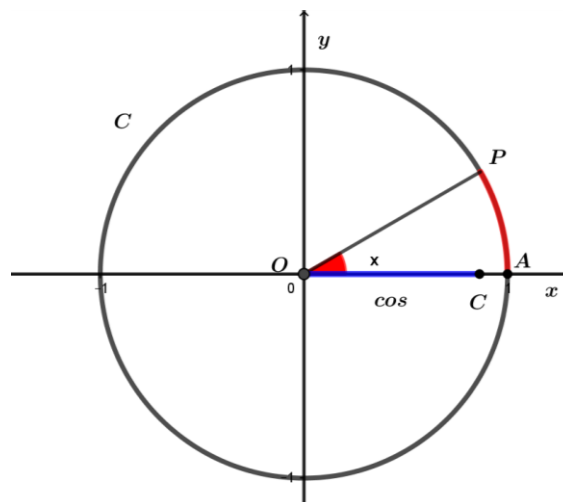


Fonte: elaborado pela autora (2019).

3.1.3 Função Cosseno

Dado um número real, seja P sua imagem na circunferência. Denominamos cosseno de ângulo x (e indicamos por $\cos x$) a abscissa OC do ponto P em relação ao sistema xOy . Denominamos função cosseno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OC = \cos x$, isto é: $f(x) = \cos x$, conforme a figura 29.

Figura 29 – Cosseno.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

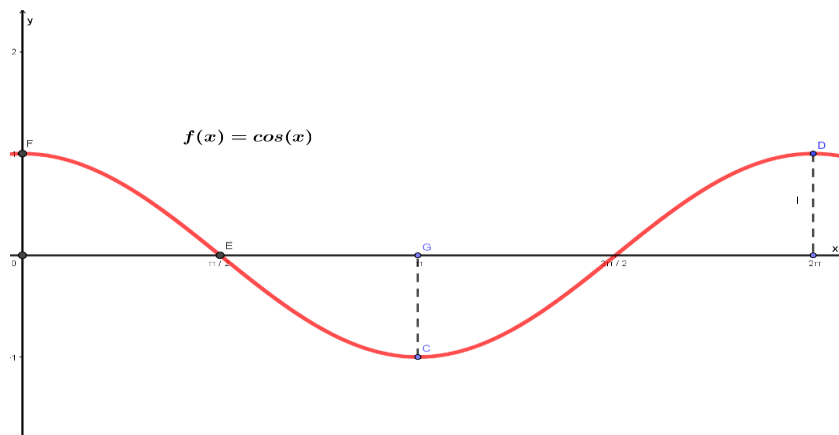
A função cosseno é periódica e seu período é 2π . De fato, os números reais x e $x+k.2\pi$, para k inteiro, têm a mesma imagem no ciclo e, portanto, $\cos x = \cos(x+k.2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, f é periódica e seu período p corresponde ao menor valor positivo de $k.2\pi$, que é $.2\pi$.

O domínio e o contradomínio de f são iguais a \mathbb{R} . No entanto, o conjunto imagem da função cosseno é o intervalo $[-1,1]$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que $-1 \leq \cos x \leq 1$.

f é uma função par, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.

Com as considerações anteriores, traçamos o gráfico de um período da função f , definida por $f(x) = \cos x$.

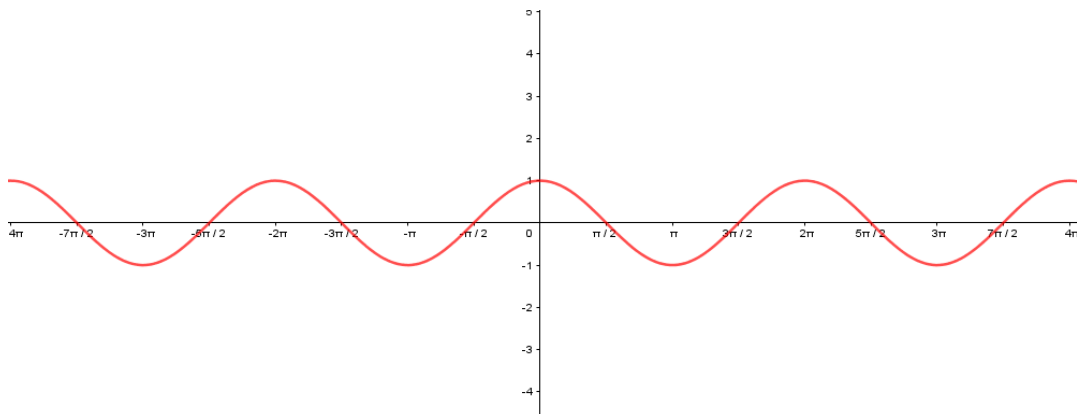
Figura 30 - Gráfico da função cosseno em período.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

De forma análoga, para obtermos o gráfico da função cosseno repetimos o gráfico da função anterior uma infinidade de vezes. Em nosso caso, repetimos quatro vezes, como se pode ver na figura seguinte:

Figura 31 - Função cosseno.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

4 A TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, faremos uma discussão sobre o Uso das Tecnologias na Educação, levando em consideração os aspectos históricos e as dificuldades para sua inserção na sala de aula. Abordaremos as fases das tecnologias digitais no Ensino de Matemática e apresentaremos como proposta de recurso tecnológico o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra.

4.1 O USO DA TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO

O uso dos computadores na Educação, de acordo com Valente, surgiu quando começaram a ser comercializados os primeiros computadores, na década de 50. Nessa época esses equipamentos tinham a função de armazenar informação e transmiti-la ao aprendiz, sendo comparados com a máquina de ensinar idealizada por Skinner:

O ensino através da informática tem suas raízes no ensino através das máquinas. Esta ideia foi usada por Dr. Sidney Pressey em 1924 que inventou uma máquina para corrigir testes de múltipla escolha. Isso foi posteriormente elaborado por B.F. Skinner que no início de 1950, como professor de Harvard, propôs uma máquina para ensinar, usando o conceito de instrução programada (VALENTE, 1993, p. 5).

E como pensar o uso dessas tecnologias hoje? Devemos compreender o computador não como máquina de ensinar e sim como um instrumento pelo qual o

aluno desenvolve algo e ocorre o aprendizado. Nesse contexto, o professor de hoje não pode ser apenas um transmissor de conhecimentos. Essa função já pode ser desempenhada pelo próprio computador. O profissional de educação deve ter a capacidade de pensar melhores formas e estratégias que potencializem a aprendizagem do aluno.

Segundo Ramal (2003), existem duas formas de usar a máquina na sala de aula:

Uma é como se ela fosse simplesmente um caderno mais prático, ou um quadro-negro mais moderno: por exemplo, colocar os alunos para copiar textos no *Word*, ou dar aula com apresentações no *PowerPoint*. Isso não é novidade, é apenas incrementar a aula tradicional com elementos atraentes. A segunda maneira é tornar o computador um novo ambiente cognitivo, ou seja, compreender que no contexto digital mudam as nossas formas de pensar e, portanto, de aprender (RAMAL, 2003, p. 6).

Valente (1993, p. 6) sinaliza que “para a implantação do computador na educação são necessários basicamente quatro ingredientes: o computador, o software educativo, o professor capacitado para usar o computador como meio educacional e o aluno”. Porém, para Sousa (2011), o preparo dos docentes brasileiros para a utilização de mídias e objetos digitais como materiais didático-pedagógicos ainda é incipiente e a rapidez das inovações tecnológicas nem sempre correspondem à capacitação dos professores para a sua utilização e aplicação, o que, muitas vezes, resulta no uso inadequado ou na falta de criatividade diante dos recursos tecnológicos disponíveis.

As discussões sobre o uso da tecnologia na educação, em sua grande maioria, concentram-se nos aspectos externos da questão (políticas públicas, dificuldades institucionais etc.), sem priorizar os fatores internos ao sujeito (suas motivações, vontades, interesses, limitações). Segundo Magalhães (2009), os fatores internos são os aspectos mais complexos, pois envolvem o processo de adaptação dos professores à tecnologia e o estabelecimento de novos métodos que se adéquem ao contexto tecnológico.

Segundo Lima Jr. (2005), um dos entraves para a utilização das ferramentas tecnológicas perpassa pela concepção que os professores têm sobre a tecnologia. Muitas vezes essa concepção não leva em consideração a perspectiva histórica e antropológica da tecnologia, criando, dessa forma, resistência e distorções ao ponto

de alguns educadores considerarem as novas tecnologias como suas concorrentes.

Dentro do processo de inserção do professor com esses recursos tecnológicos, devemos não apenas lidar com os conhecimentos operacionais, mas também levar em consideração a subjetividade do sujeito. Nesse sentido, acreditamos que a visão histórica possa contribuir para diminuir o distanciamento entre o professor e os recursos informáticos (computadores, *software*, etc.), a partir do momento em que considera a tecnologia como um ato humano e criativo, e esses recursos como produto desta tecnologia, que tem como finalidade agregar e contribuir para soluções de problemas, no nosso caso, educacionais.

A Tecnologia tem uma gênese histórica e, como tal, é inerente ao ser humano que a cria dentro de complexo humano – coisa – instituições – sociedade, não se restringe aos suportes materiais nem aos métodos (formas) de consecução de finalidades e objetivos produtivos (...), podemos dizer que consiste em: um processo criativo através do qual o ser humano utiliza-se de recursos materiais e imateriais, ou cria a partir do que está disponível na natureza e no seu contexto vivencial, a fim de encontrar respostas para o problema de seu contexto, superando-os (LIMA JR. 2005, p. 15).

Além das questões anteriormente levantadas como entraves para o uso das tecnologias, Bittar (2010) faz alusão a outro questionamento, trazendo a diferenciação entre integração e inserção da tecnologia da Educação. Segundo a pesquisadora supracitada, o que tem ocorrido na maioria da escola é a inserção: coloca-se um computador nas escolas, os professores usam, sem que isso provoque uma aprendizagem diferente do que se fazia antes. Ainda para Bittar, integrar um *software*, por exemplo, à prática pedagógica do professor, significa que a tecnologia poderá ser usada em diferentes momentos do processo de ensino. E acrescenta:

Não podemos correr o risco de usar a informática como um “apêndice” do curso habitual, ou seja, o professor dá a aula da maneira como está habituado, na maioria das vezes somente no ambiente papel e lápis, e, quando leva os alunos ao laboratório, as atividades realizadas não contribuem com a compreensão dos conceitos estudados (2010, p. 239).

Entendemos que integrar um novo instrumento tecnológico na prática pedagógica do professor perpassa por mudanças de concepções pedagógicas e

metodológicas. Sendo assim, o professor que deseja fazer o uso apropriado do recurso tecnológico, no ensino de matemática, precisa ter o conhecimento do objeto em estudo (conteúdo que deseja trabalhar), conhecimento sobre a ferramenta tecnológica escolhida (conhecimento tecnológico), a metodologia aplicada (conhecimento pedagógico) e o modo como vai elaborar atividade, na qual possa inserir os recursos desejados para explorar os conceitos do conteúdo escolhido.

4.2 AS FASES DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

As discussões em torno das tecnologias, que, utilizadas no processo de ensino e aprendizagem, passaram, de acordo com Borba (2018), por algumas fases, classificadas em Tecnologia Informática (TI), Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC) e Tecnologias Digitais (TD). Tecnologia no conceito educacional, conforme Lima Jr. (2005), está ligada à ideia de processo criativo e transformativo. Para Kenski (2007, p. 24), “engloba a totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas aplicações”.

De acordo com Borba (2018), a primeira fase, denominada de Tecnologia de Informação (TI), teve início nos anos de 1980 com a utilização de calculadoras simples e científicas e dos computadores. Borba (2018) ainda acrescenta que a grande preocupação nessa fase se concentrava na criação de laboratórios de informática nas escolas e na formação dos professores para fazer o uso dos computadores, tendo menos ênfase sobre os conteúdos de ensino-aprendizagem. A utilização do software LOGO,⁴ que teve como base para seu desenvolvimento a teoria de Piaget e algumas ideias da Inteligência Artificial de Parpet, 1980, foi o exemplo mais marcante nessa fase.

Ainda nomeada como Tecnologia de Informação (TI), a segunda fase teve início por volta da metade dos anos 90. Com a popularização dos computadores e das calculadoras gráficas, teve destaque nessa fase o uso dos softwares educacionais, dentre eles o Winplot, voltado para múltiplas representações de

⁴ Cada comando LOGO determina um procedimento a ser executado por uma tartaruga (virtual). Os movimentos da tartaruga, como passos e giros, possibilitam a construção de objetos geométricos como segmentos de retas e ângulos. A natureza investigativa do LOGO diz respeito à construção de sequências de comandos (um algoritmo) que determina um conjunto ordenado, ou sequencial, de ações que constitui uma figura geométrica.

funções, e o Cabri Géomètre, de Geometria Dinâmica (GD).

Segundo Brandão (2008), a GD pode ser entendida como a implementação computacional da “régua e compasso”. Silva (2012) diz que um ambiente de geometria dinâmica pode ser definido como um *software* cuja característica principal incide na possibilidade de “arrastar” as construções geométricas com o *mouse*, ao mesmo tempo em que suas medidas são atualizadas. As vantagens de se utilizar um *software* de Geometria Dinâmica é que o mesmo prevê a interação entre os usuários, no caso os alunos, e os objetos estudados. Brandão (2008) diz ainda que “A grande novidade trazida pela Geometria Dinâmica (GD) é agilizar o exame de uma construção em diferentes instâncias permitindo que isto seja feito de modo interativo e com boa resposta gráfica”.

Segundo Borba (2018), a expressão Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC) surge na terceira fase por volta de 1999, com o advento da internet, favorecendo a disseminação da informação e da comunicação entre alunos e professores. As TICs podem ser definidas como um conjunto de recursos tecnológicos (computadores, *data show smartphones*, celulares, *tablets*, calculadoras, *software*), utilizados de forma integrada, com um objetivo comum, que, segundo Souza (2015), estão atreladas às tecnologias disponíveis para a população, sendo elas no meio informal, de trabalho ou escola. No campo educacional, um fator marcante nessa fase é a realização de curso on-line para formação de professores.

Atualmente, de acordo com Borba (2018), estamos vivenciando a quarta fase, em relação à qual se tornou comum o termo “tecnologias digitais” (TD), que teve início em meados de 2004, com o advento da internet rápida. Essa fase é caracterizada por diversos aspectos, como a utilização de celulares inteligentes, *tablets*, *laptops*, redes sociais, ambientes virtuais de aprendizagens, internet rápida e o desenvolvimento dos *softwares* de geométrica dinâmica, entre eles o GeoGebra, cuja potencialidade tem marcado crescente utilização nas pesquisas em Educação Matemática.

Nesse novo cenário, o professor deve estar aberto para novas aprendizagens e saber para além da sua disciplina. Nesse sentido, propomos a utilização do GeoGebra e desejamos que o professor possa fundamentar o saber matemático presente na literatura, usufruindo dos recursos apresentados no *software*.

4.3 O GEOGEBRA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Entendemos que o uso do computador como recurso pedagógico feito de forma bem planejada pode auxiliar no ensino e potencializar a aprendizagem. No que diz respeito ao ensino de Funções Trigonométricas, escolhemos, para desenvolver o trabalho, o *software* GeoGebra. Segundo o International GeoGebra Institute, o GeoGebra é um *software* de Geometria Dinâmica que combina conceitos de Geometria e Álgebra. Foi criado por Markus Hohenwater, da Universidade de Salzburg, Áustria, com o propósito de ser um recurso didático, principalmente para o ensino e a aprendizagem de matemática, em todos os níveis, do fundamental ao superior. Desde então, o programa segue em processo de desenvolvimento e aprimoramento.

Os desenvolvedores do GeoGebra permitem que ele seja baixado do site oficial (www.geogebra.org) e instalado em computadores ou em dispositivos móveis com sistemas operacionais diversos, como o Windows, o Linux ou o Mac OS. Apresenta uma interface considerada amigável, com comandos relativamente simples, disponível em vários idiomas, inclusive o português brasileiro, e é facilmente encontrado na internet. Além dos aspectos didáticos, é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais a serem usadas no *Word*, no *Open Office* ou no *LaTeX*.

Segundo o instituto São Paulo GeoGebra, devido à ampla divulgação e ao uso desse *software*, foram criados os Institutos Internacionais de GeoGebra (IGI), organizações sem fins lucrativos, onde professores e investigadores de todo o mundo trabalham em conjunto para promover o uso do GeoGebra como recurso de ensino e aprendizagem da matemática. Conforme ilustra a figura abaixo, várias filiais foram fundadas em todos os continentes.

Figura 32 - Instituto Internacional GeoGebra.



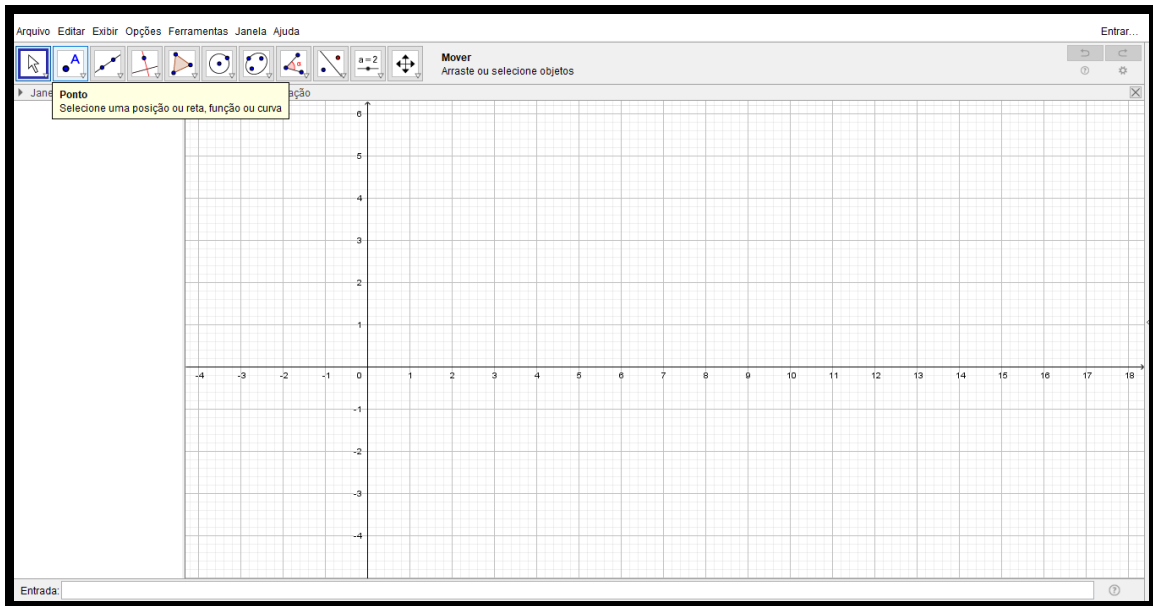
Fonte: https://www.pucsp.br/geogebra/img/mapa_sobre-instituto.jpg

Além de desenvolver materiais e promover oficinas para professores e futuros formadores de GeoGebra, os investigadores e educadores do Instituto coordenam e fazem apresentações em congressos nacionais e internacionais.

CONHECENDO UM POUCO DO GEOGEBRA:

A interface padrão do GeoGebra instalado em um computador, ao ser carregada apresenta a seguinte configuração:

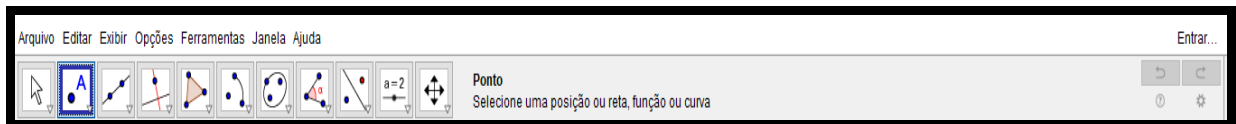
Figura 33 - Interface do GeoGebra classic 5.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Na parte superior da tela encontramos os Menus e as Barras de Ferramentas:





Figura 34 - Menus e as Barras de Ferramentas.



Fonte: elaborada pela autora (2019)

Nos menus, temos as opções de Abrir/Salvar arquivos, modificar configurações relacionadas ao GeoGebra, dentre outras opções.

Na barra de ferramentas iremos encontrar as ferramentas necessárias para fazer as construções.

Ao lado direito da barra de ferramentas, temos os botões:  (Desfazer, que desfaz a última coisa que fizemos),  (Refazer, que refaz algo que tenhamos desfeito com o botão Desfazer),  (Ajuda, que fornece uma ajuda sobre alguma ferramenta) e , que mostra um menu com algumas configurações sobre a interface do GeoGebra.

Repare que, ao lado direito da barra de Menus, temos o comando “Entrar”. Essa é a opção que devemos utilizar para acessar a plataforma do GeoGebra Tube.


Na parte inferior do programa encontramos o Campo de Entrada, com o qual podemos dar comandos para criar/modificar objetos.

Figura 35 - Campo de Entrada.



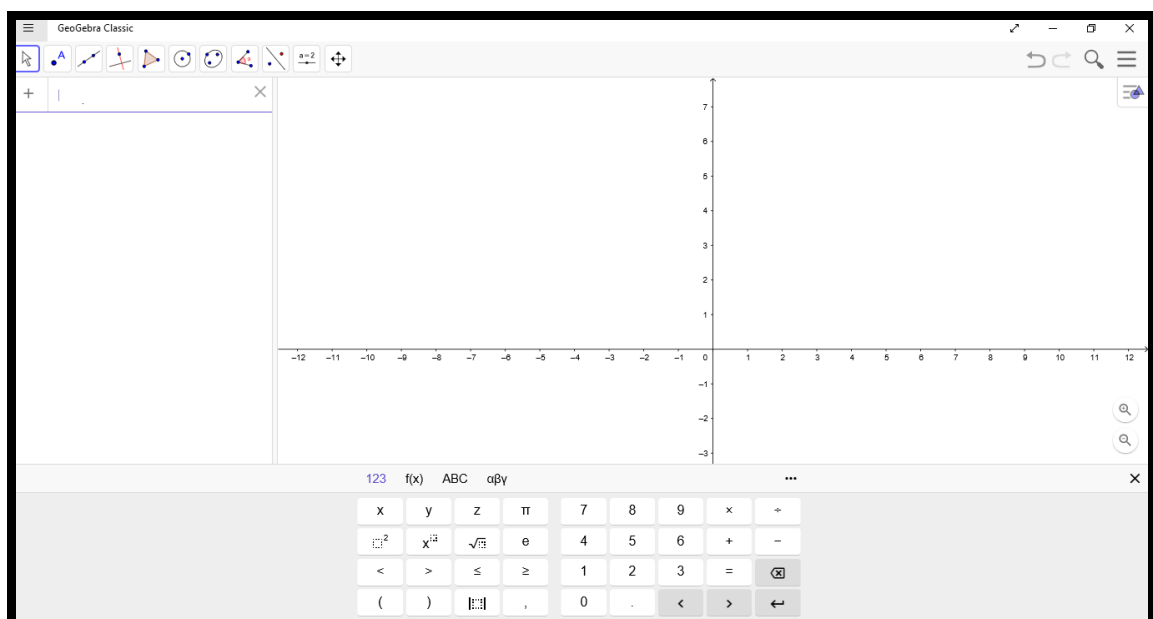
Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Podemos usar a seta que fica ao lado direito do campo “Entrada” para ajuda acerca dos comandos do GeoGebra.

A versão on-line do GeoGebra possui alguns detalhes diferentes, mas mantém as mesmas ferramentas. As principais diferenças estão à disposição da caixa de entrada e a barra de múnus. Outra diferença está no acesso a plataforma do GeoGebra: para acessá-la na versão on-line, clicamos 

A caixa de entrada aparece do lado superior esquerdo e aparece também um teclado. Podemos inserir os comandos tanto na caixa de entrada como no teclado. Podemos usar o sinal de + ao lado esquerdo do campo Entrada para ajuda acerca dos comandos do GeoGebra.

Figura 36 - Interface da versão online.



Fonte: Elaborada pela autora (2019) .


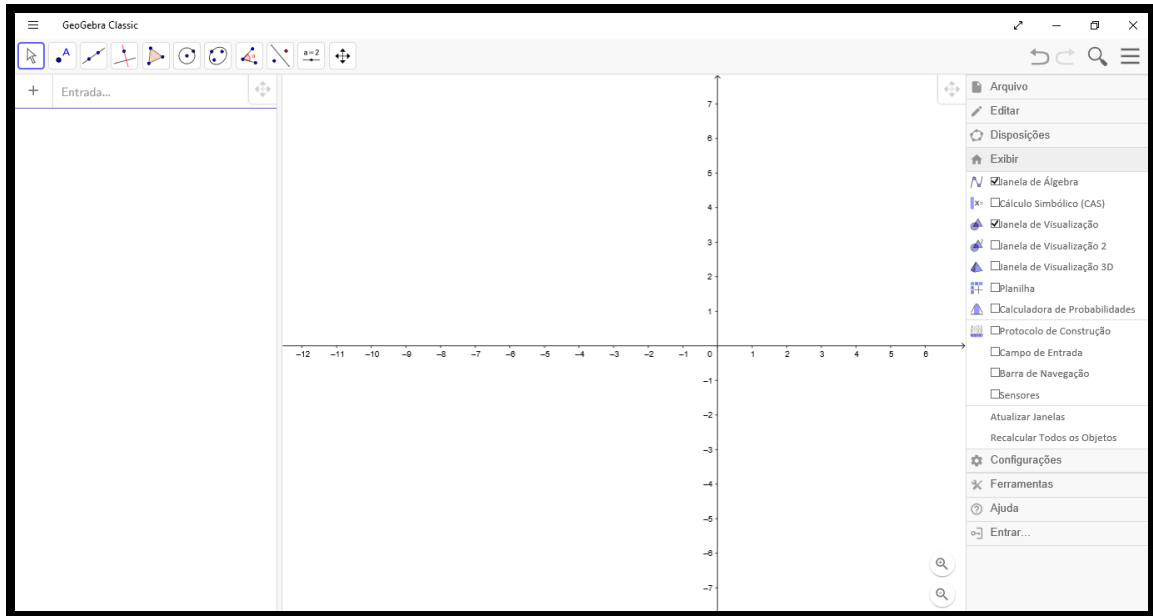
Outra diferença é em relação à barra de múnus, que para ser acessada, precisamos clicar em 

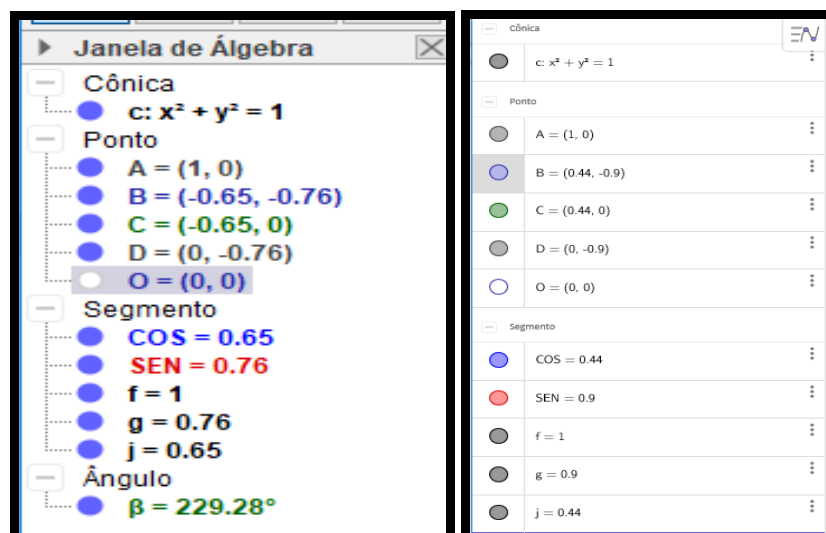
Figura 37 - Interface da versão on-line com os menus.



Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Vamos observar a janela de Álgebra nas duas versões, a segunda figura corresponde à versão on-line.

Figura 38 e 39 Comparação entre as janelas de álgebra



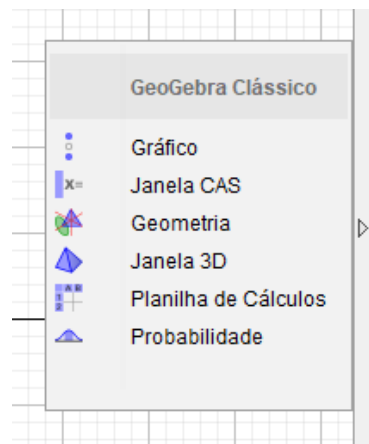
Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Observemos que a janela de álgebra separa os itens por categorias. Podemos perceber que temos 1 cônica, 5 pontos, 5 segmentos e 1 ângulo.

A informação, passada ao lado da cônica, corresponde a sua equação algébrica; a informação ao lado dos pontos diz respeito às coordenadas no plano cartesiano. A informação passada ao segmento diz respeito ao comprimento do segmento e a informação referente ao ângulo correspondente a sua medida. Repare também que o ponto O está com a bolinha branca, o que significa que ele não está sendo exibido na Janela de Visualização. Para mostrar/ocultar um item, você pode clicar na bolinha para que o programa alterne entre visível e não-visível.

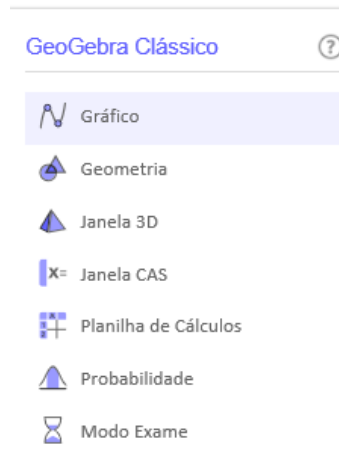
Ao lado direito do GeoGebra, temos uma pequena setinha que, quando clicada, mostra diversas opções para escolher com o que podemos trabalhar. Na versão on-line aparece logo no início quando abrimos o software.

Figura 40 - Janela de álgebra.



Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Figura 41 - Janela de álgebra online.

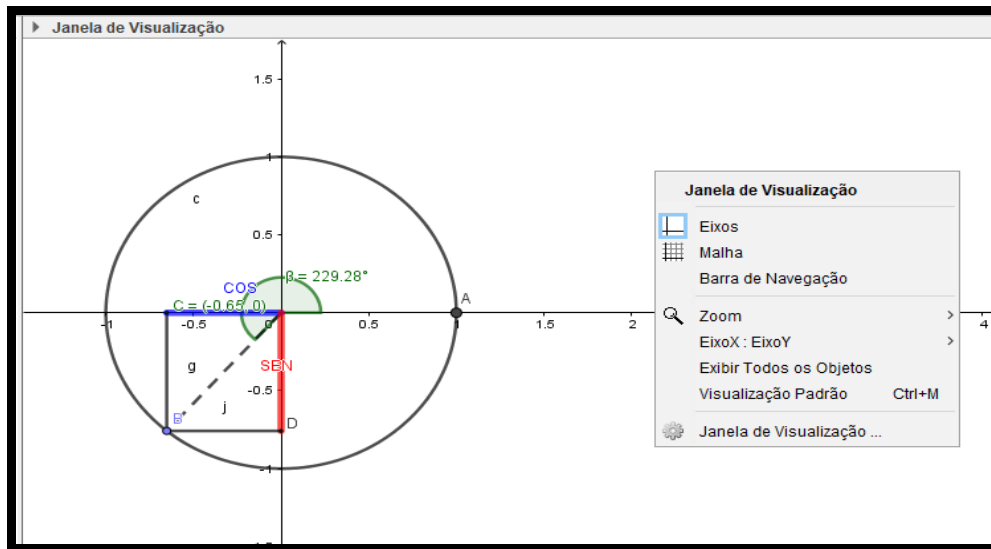


Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Após clicarmos a Janela de Álgebra, surgem 6 opções para escolher; na versão on-line, temos 7 opções. Álgebra (padrão quando o GeoGebra é aberto), Geometria (utilizado para Geometria Plana), Planilha de Cálculos (permite que construamos uma planilha e criemos a representação gráfica dos dados), Janela CAS (permite que sejam feitas operações através de comandos), Janela 3D (Geometria Espacial e funções de duas ou mais variáveis) e Probabilidade (Probabilidade e estatística). O Modo Exame permite que seus alunos usem o GeoGebra durante as avaliações sem poder acessar a Internet ou outro *software* instalado no computador.

A janela de visualização é comum para as duas versões. Nela vão aparecer as construções. Podemos fazer algumas modificações, como escala, zoom, exibição de eixos e malha, clicando com o botão direito sobre a janela de visualização enquanto nenhum objeto estiver selecionado.

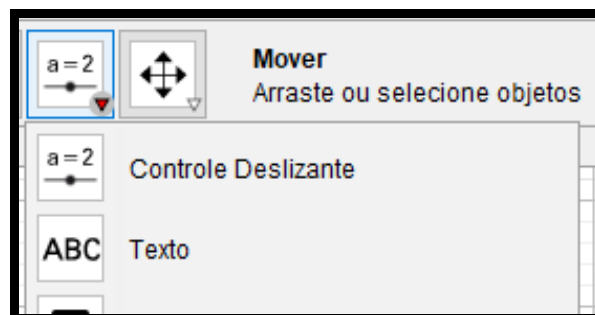
Figura 42 - Razões Trigonômétricas.



Fonte: Elaborada pela autora (2019)

O GeoGebra possui uma ferramenta que torna as construções dinâmicas, chamada controle deslizante. Essa ferramenta foi muito explorada neste trabalho, como veremos nas descrições das atividades.

Figura 43 - Ferramenta controle deslizante.



Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Para criar um controle deslizante faremos o seguinte: com a ferramenta selecionada, clicar sobre a região onde desejamos inserir o controle deslizante. Então, surgirá a seguinte janela:

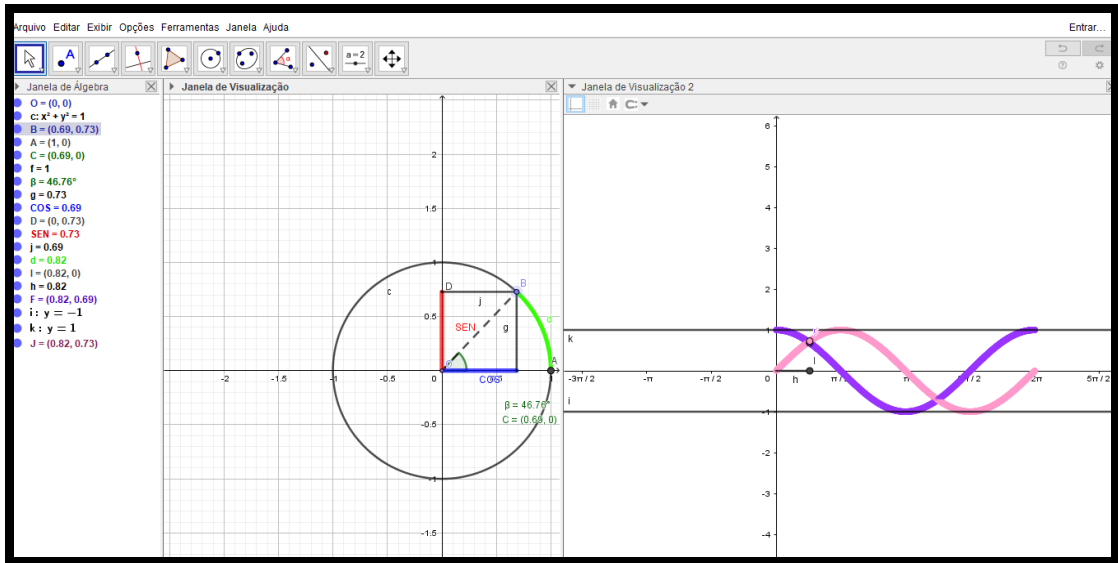
Figura 44 - Configuração do controle deslizante.

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Na parte superior esquerda da janela definimos se a variável será um número qualquer, um ângulo ou ainda um número inteiro. Ainda na parte superior, definimos o nome da nossa variável. Na parte inferior, temos 3 abas. A primeira aba trata do intervalo à qual sua variável será limitada e do incremento que ela receberá. Se não definirmos um incremento, o valor padrão será aplicado. A segunda aba trata acerca do controle deslizante que aparecerá na tela, onde podemos definir entre: fixo, horizontal ou vertical e definirá a largura/altura em pixels. As demais ferramentas apresentaremos em anexo, com informações também disponíveis em www.geogebra.org sob o título “introdução ao GeoGebra”.

Outra característica importante do GeoGebra é o fato de podermos estar trabalhando simultaneamente com duas janelas de visualizações que podem estar interligadas. Em uma das nossas atividades fizemos o uso desse recurso. Enquanto um ponto B correspondente à extremidade de um arco da circunferência percorria a circunferência trigonométrica na janela de visualização 1, na janela de visualização 2 eram construídos simultaneamente os gráficos das funções seno e cosseno, conforme se pode ver na figura abaixo.

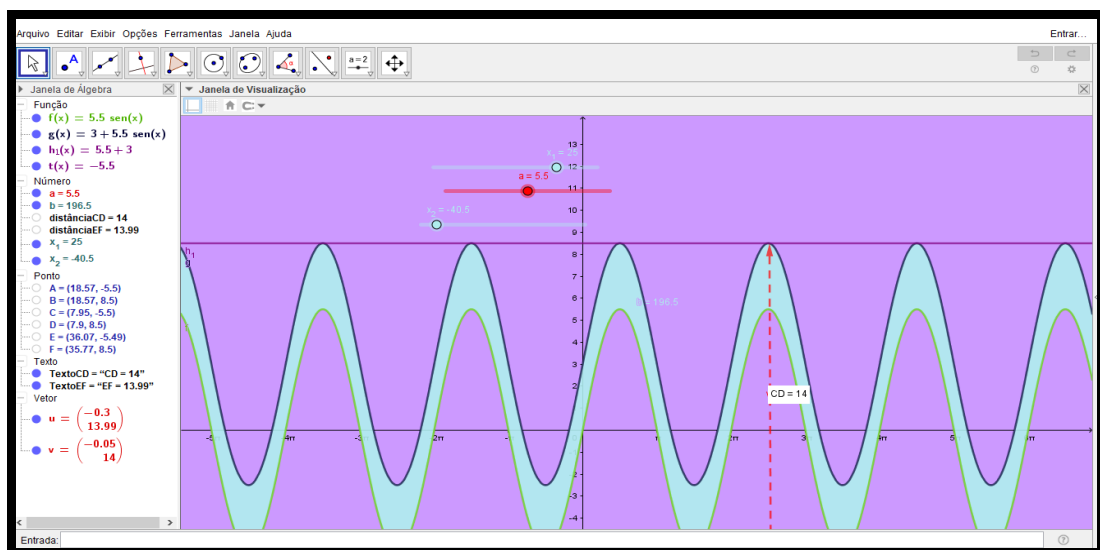
Figura 45 - Atividade Função Seno.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Para níveis mais avançados, o GeoGebra permite obter derivadas e integrais de funções. Em uma das atividades propostas utilizamos o comando integrar para apontar a região compreendida entre duas funções.

Figura 46 – Largura da calçada.

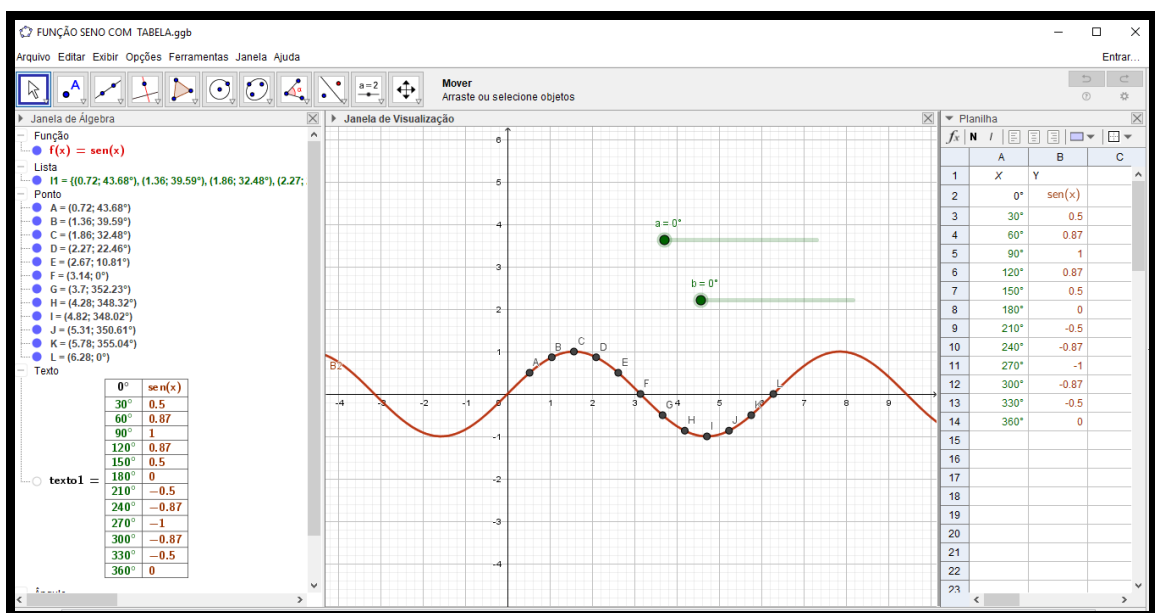


Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Um dos diferenciais do GeoGebra em relação aos demais softwares de

geometria dinâmica consiste em nos permitir visualizar um mesmo objeto em três formas diferentes: graficamente (e.g., pontos, gráficos de funções), algebricamente (e.g., coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Sendo assim, independentemente da maneira como esses objetos foram criados inicialmente, eles estão ligados dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em quaisquer dessas representações. Trata-se, portanto, de uma característica muito importante para o nosso estudo, já que temos como uma das bases teóricas o Registro de Representação Semiótica e, de acordo com as teorias do uso das diferentes formas de representação, são atividades cognitivas necessárias para o aprendizado em matemática.

Figura 47 – Múltiplas representações da função seno.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

5 O EXPERIMENTO

Neste capítulo, faremos a descrição de todo o experimento. Começaremos pela descrição do ambiente da pesquisa, da aplicação da pesquisa, das atividades propostas e dos sujeitos da pesquisa. Apresentaremos os pressupostos da engenharia didática como metodologia de pesquisa, a análise preliminar das atividades. Em seguida, apresentaremos as atividades com suas análises *a priori* e *a posteriori*.

5.1 DESCRIÇÃO DO AMBIENTE DE PESQUISA

A pesquisa foi realizada no Colégio Estadual Odorico Tavares (CEOT), localizado à Avenida Sete de Setembro, Corredor da Vitória, bairro nobre da cidade de Salvador/Bahia. Os alunos desse referido colégio advêm dos diversos bairros periféricos de Salvador e região metropolitana.

A nossa escolha pelo Colégio para a execução do projeto se deu pelo acesso livre ao local, pois, em sendo docente da unidade escolar em duas turmas do segundo ano tempo médio integral e uma turma do terceiro ano regular, poderíamos contar com a parceria de funcionários e docentes da instituição, com os quais já estabelecíamos uma relação profissional.

O Colégio Estadual Odorico Tavares, inaugurado no dia 11 de abril de 1994, teve esse nome em homenagem ao jornalista, escritor, poeta e colecionador de artes pernambucano, que fixou residência em Salvador, no ano de 1942, tendo conquistado os títulos de cidadania, na Academia de Letras e Ordem ao Mérito Estadual.

Em seus primórdios, a escola já foi considerada modelo, agregando alunos de escolas particulares e públicas com bom rendimento escolar. Apesar de ser uma unidade escolar de grande porte, com trinta salas de aulas distribuídas em seis andares, havia uma demanda maior que a oferta de vagas, sendo seus estudantes escolhidos por meio de sorteio eletrônico ou indicação. A escola oferecia Ensino Médio, tendo as opções de Formação Geral ou Formação Profissional em Computação, que resultaram não prevalecendo na unidade escolar.

No decorrer desses anos, a escola foi tendo seus espaços sublocados e sucateados. No ano de 2010, teve o turno noturno fechado pela Secretaria de

Educação e restrição de vagas para o turno vespertino, com fechamento posterior desse turno. No ano de 2017, foi implementado o Ensino Médio Tempo Integral para apenas os alunos do primeiro ano e estendido em 2018 também para os do segundo ano, permanecendo apenas o terceiro ano com o Ensino Médio Regular. Ao final do ano de 2019 o colégio sofre a iminência de fechamento e por muita resistência de um pequeno grupo de professores (do qual tenho orgulho de ter feito parte), conseguimos permanecer em funcionamento com ampla redução de turmas e retornando ao Ensino Médio Regular. Apesar dessas mudanças ocorridas na unidade escolar, ainda temos um perfil de estudantes diferenciados, com grande aprovação nos vestibulares.

5.2 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO

Com a implementação do Tempo Médio Integral, ocorreu a ampliação da carga horária da disciplina de matemática na unidade escolar e um incentivo a inclusão de atividades pedagógicas diferenciadas, como oficinas (de artes, esporte, literatura etc.) no turno vespertino, o que favoreceu a aplicação do experimento. A participação em duas oficinas por dia era obrigatória, mas a escolha era opcional dentre as oficinas ofertadas em cada unidade. Dentre as ofertas, tínhamos: oficinas de esporte (futebol, vôlei, rúgbi, handebol, baleado), preparação para o Enem, jogos africanos, relatividade, redação, francês, espanhol, dança, teatro, atualidades, entre outras. Já pensando na aplicação do experimento, ofereci a oficina do GeoGebra.

A participação na oficina do GeoGebra não foi obrigatória. Além disso, os alunos podiam escolher o dia em que gostariam de participar. Para contemplar as minhas duas turmas do 2º ano, as oficinas ocorreram nas quartas e sextas-feiras, das 13:30 às 15:30, no período de 15 de agosto a 6 de outubro. Devido a algumas particularidades no calendário escolar, totalizamos 6 encontros dentro desse período para cada turma. As atividades foram realizadas na sala da coordenação com a utilização de 10 Chromebook, pois a escola não possuía nem laboratório de informática nem uma sala especial. Outrossim, apesar de o prédio escolar dispor de wi-fi, não havia roteador. Sendo assim, limitamos a participação de 10 alunos em cada turma, pois as atividades foram realizadas individualmente. Como alguns alunos desejaram participar nos dois dias, tivemos um grupo com 16 alunos.

Figura 48 - Foto da oficina do GeoGebra.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Nosso primeiro desafio na oficina do GeoGebra foi aprender a usar o Chromebook, (notebooks criados para serem usados enquanto estiverem ligados à internet). Em vez de instalarmos a versão tradicional do GeoGebra, adicionamos a versão on-line a partir da Chrome Web Store. Ademais, foi necessário que os alunos criassem e-mails e senha para sua utilização, processo para o qual contamos com ajuda de um funcionário da secretaria, que nos auxiliou em todos os encontros. Durante os demais encontros, os estudantes aprenderam a fazer construções geométricas simples e a construir gráficos da função do primeiro e segundo grau. Abaixo, faremos uma síntese do que abordamos em cada encontro.

Quadro 1 - Cronograma da Oficina.

1º encontro	Utilização do Chromebook
2º encontro	Apresentação das principais ferramentas do GeoGebra e Construção livre
3º encontro	Construção de ângulos e triângulos e quadriláteros
4º encontro	Construção de triângulo retângulo e circunferência
5º encontro	Construção do gráfico de função 1º e 2º grau
6º encontro	Construção do gráfico do 2º grau com controle deslizante

Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Nesse momento o foco das atividades centrava-se na apropriação do GeoGebra e não tinha um caráter investigativo, pois o objetivo era familiarizar os alunos com as ferramentas do GeoGebra, que posteriormente seriam utilizadas nas atividades do experimento. Além de fazer as construções, eles aprenderam também a configurá-las: mudar cor e estilo de traço, inserir texto, mudar a malha, configurar os eixos, gravar e compartilhar os arquivos. Para auxiliar nas construções os alunos contavam com material de apoio impresso.

Dos alunos que finalizaram a oficina do GeoGebra, 12 aceitaram o convite da professora para participar do experimento. Nesse momento explicamos como seriam as atividades, a necessidade a frequência (pois alguns alunos tiveram frequência irregular na oficina), a necessidade de fazer alguns registros dessas aulas, através de captação de áudio e registros fotográficos. Também informamos que eles precisariam da autorização dos pais ou responsáveis e que deveriam se sentir à vontade para participar ou não do experimento.

Dos 12 que desejaram participar do experimento, uma aluna desistiu participar logo na segunda atividade. Ficamos, então, com uma dupla e três trios, para análise *a posteriori* e para análise do perfil do sujeito apenas 3 grupos serão estudados. Embora tenhamos observados os quatro grupos envolvidos nas atividades, escolhemos apenas estes três, totalizando 8 alunos. Alguns fatores nos levaram a essa decisão: para que a análise fosse a mais completa possível, os alunos deveriam ter participado de todos os encontros, fato este que não ocorreu no quarto grupo. Além disso, os estudantes do quarto grupo brincavam durante as atividades e não realizaram as gravações do diálogo, apesar da orientação nesse sentido.

Assim, os 3 grupos cujas atividades analisaremos ficaram constituídos da seguinte forma:

Grupo 1 - Adriana e Ruth

Grupo 2 - Luciana, Beth e Jorge

Grupo 3 – Luiz, Elane e Carol

Substituímos seus nomes por pseudônimos, preservando, dessa maneira, suas identidades. Na transcrição dos áudios, referimo-nos a esses alunos da seguinte forma:

Grupo 1: Adriana (A¹) e Ruth (A²)

Grupo 2: Luciana (A¹), Beth (A²) e Jorge (A³)

Grupo 3: Luiz (A¹), Elane (A²) e Carol (A³)

Figura 49 - Foto do Experimento.



Fonte: Elaborada autora (2019).

O experimento ocorreu ao longo de 10 encontros no período de 20 de outubro a 13 de dezembro. As atividades foram programadas para as sextas-feiras das 13:30h às 16:00h. Por conta de alguns imprevistos e feriados, utilizamos uma quarta-feira no turno vespertino e duas quintas-feiras no turno matutino. Em uma dessas quintas-feiras, foi bastante complicada a realização da atividade “largura da calçada”, pois tivemos muitas interrupções com entrada e saída de professores e alunos na sala da coordenação.

Quadro 2 - Cronograma do Experimento.

1º encontro	Atividade diagnóstica e questionário inicial
2º encontro	Razões Trigonométricas
3º encontro	Arcos côngruos
4º encontro	Funções Trigonométricas
5º encontro	Domínio da função trigonométrica
6º encontro	Parâmetros da função trigonométrica
7º encontro	Largura da Calçada
8º encontro	Roda-Gigante
9º encontro	Questionário Final e Avaliação final
10º encontro	Confraternização e entrega de certificados

Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Figura 50 - Entrega de certificados.



Fonte: elaborado pela a autora (2019)

5.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

A Sequência Didática é composta por 7 atividades elaboradas com os objetivos de sequencialmente permitir aos alunos construir os principais conhecimentos sobre funções trigonométricas que serão explorados na atividade final denominada Roda-Gigante. A resolução da atividade Roda-Gigante exigiu do aluno a compreensão dos conceitos: circunferência trigonométrica, domínio, imagem, período da função e gráfico da função seno. Sendo assim, embora também tenhamos trabalhado com arcos cômputos, parâmetros da função e uma outra questão contextualizada, denominada largura da calçada, escolhemos para analisar apenas as atividades que contemplassem tais definições, por também entendermos que o volume de análises que seriam produzidas com todas as atividades, incluindo as atividades diagnósticas e os questionários, poderia tornar este estudo exaustivo.

5.4 DESCRIÇÃO DO SUJEITO DA PESQUISA

Com o objetivo de descrever melhor perfil desses estudantes, elaboramos um pequeno questionário que colocaremos em anexo, através do qual colhemos algumas informações descritas abaixo.

Com a faixa etária entre 15 a 17 anos, todos os alunos cursam o 1º ano do Ensino Médio na própria escola ou em outra escola pública. Desses alunos apenas um cursou todo o Ensino Fundamental em instituição particular, e um aluno fez os anos iniciais do Ensino Fundamental na escola particular e os anos finais na escola pública.

Ao serem perguntados se gostam de estudar matemática, um disse que sim e sete alunos disseram que depende do conteúdo abordado. Dentre as dificuldades destacadas por eles na aprendizagem dos conteúdos matemáticos, quatro disseram que têm dificuldade em realizar cálculo algébrico; dois, em compreender os conceitos; um, que tem dificuldades em realizar os cálculos e compreender os conceitos; um aluno disse que não tem dificuldades. Desse grupo, quatro alunos já fizeram recuperação em matemática no Ensino Fundamental.

Ao ser questionado em relação ao que pretende fazer ao terminar o Ensino Médio, sete alunos manifestaram a vontade de continuar estudando; apenas um aluno deseja buscar um emprego; três querem ingressar em um curso superior e

trabalhar; quatro desejam apenas estudar. Em relação à instituição em que desejam ingressar, sete alunos têm o desejo de ingressar em Universidade Pública, pela credibilidade da universidade, por motivos financeiros e manifestaram que têm direito ao ensino público de qualidade. O aluno que pretende ingressar na instituição particular justificou sua escolha por ser mais fácil, nesse caso, conciliar o estudo com o trabalho. Em relação aos cursos pretendidos, citaram: Medicina, Medicina Veterinária, Estatística, Computação, Enfermagem, Física, Direito, Engenharia Química e Biomedicina.

5.5 ENGENHARIA DIDÁTICA

Pelos aspectos envolvidos nesta pesquisa, adotaremos como metodologia a Engenharia Didática de Artigue (1995), que estuda as relações entre a pesquisa e ação pedagógica, interligando o plano teórico ao território experimental da prática educativa.

De acordo com Pais (2005), a ideia de engenharia traz implícita uma analogia entre os trabalhos do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, no que diz respeito à concepção, ao planejamento e à execução de um projeto.

A noção de engenharia didática surgiu na didática da matemática no início dos anos oitenta. Foi nomeado com este termo para uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto específico, é baseado no conhecimento científico de seu domínio e aceita submeter-se a um controle de tipo científico. No entanto, ao mesmo tempo, ele é forçado a trabalhar com objetos que são muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência (ARTIGUE, 1995, p. 33).

A Engenharia Didática preocupa-se com a concepção, a realização, a observação e a análise da sequência de ensino. Seu método de pesquisa é caracterizado por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula. Como campo metodológico, sua contribuição, segundo Pammer (2013), diz respeito à possibilidade de prover a fundamentação teórica para que o professor conheça os significados e amplie o leque de opções, de forma a conseguir estabelecer vínculo entre a teoria e a sala de aula.

A Engenharia Didática é uma modalidade de pesquisa que se enquadra numa perspectiva qualitativa, por possuir as seguintes características definidas por Ludke

e André (1996 apud POMMER, 2013, p. 21): coleta de dados descritivos, obtidos diretamente na fonte (ambiente), através do contato com o pesquisador com a situação pesquisada, preocupando-se mais com o processo do que com o produto, de modo a retratar as perspectivas dos participantes.

A depender dessas realizações didáticas, é classificada, segundo Artigue (1995), em dois níveis: microengenharia, que tem por objetivo estudar um objeto de estudo de maneira local, e a macroengenharia, a investigação didática que permite levar em conta a complexidade dos fenômenos didáticos da sala, tais como a duração das realizações entre o ensino e aprendizagem, considerando a distinção das diferentes formas de construção do conhecimento.

Como a macroengenharia apresenta dificuldades metodológicas e institucionais que não conseguiremos contemplar neste momento, caracterizamos o presente estudo em uma microengenharia, uma vez que está sendo desenvolvido em um tempo reduzido e com menor número de elementos.

Segundo Almouloud (2010), a pesquisa em Engenharia Didática também se classifica como experimental pelo registro dos estudos em questão e pela forma de validação, feita internamente sem a utilização de pré-teste ou pós-teste, baseada na comparação entre a análise *a priori*, que, por sua vez, se apoia no quadro teórico, e a análise *a posteriori*. Almouloud (2008, p. 177) argumenta que:

A análise *a posteriori* se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologia externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos de ensino.

O processo experimental da Engenharia Didática é constituído de quatro fases: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação, descritas resumidamente a seguir:

Na fase da análise preliminar, consideramos o referencial teórico, os conhecimentos didáticos previamente adquiridos pelos sujeitos da pesquisa, mas também é recomendável considerar os aspectos epistemológicos do conteúdo matemático escolhido, a análise do ensino atual e de seus efeitos, as restrições dentro da instituição. De acordo com Machado (2008), as análises preliminares são

feitas para embasar a concepção da engenharia e são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho. Escolhemos o referencial teórico e as recomendações para o ensino de funções trigonométricas em documentos oficiais.

A segunda fase da Engenharia Didática é a análise a priori, que, segundo Salazar (2009), constitui-se da elaboração e da análise das situações didáticas que contemplam a delimitação das variáveis didáticas, sejam elas macrodidáticas ou microdidáticas. As macrodidáticas, também consideradas globais, são relativas à organização global da engenharia. Em nosso estudo, podemos citar: a utilização do GeoGebra como recurso didático, escolha de atividades que contemplassem diferentes formas de registros, realização das atividades em grupos, maior valorização dos aspectos conceituais em detrimento dos algébricos, no processo de resolução das atividades. As variáveis microdidáticas, também consideradas variáveis locais, referem-se à organização de uma sessão ou de uma fase. De acordo com Pais (2005), quando se trata da dimensão microdidáticas, esta segunda diferenciação se torna mais evidente, pois podemos falar nas variáveis do problema em si e das variáveis associadas ao meio que estrutura o fenômeno. Neste estudo, abordamos as variáveis microdidáticas, referindo-se às variáveis do problema em si, para a elaboração de cada sequência de ensino.

A fase da Experimentação corresponde à realização da engenharia didática, ou seja, aplicação da sequência didática. Nela devemos explicitar os objetivos e as condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático, aplicar os instrumentos da pesquisa, fazer a coleta de dados e os registros das observações.

A última fase é da validação ou análise a posteriori, que se apoia sobre todos os dados coletados durante a experimentação, as observações realizadas durante as sessões de ensino e as produções dos estudantes. Caso necessário, esses dados são completados por dados obtidos por meio de questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos de ensino.

De acordo com Artigue (1998, apud ALMOULOU, 2007), cada uma dessas fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função da necessidade emergente, sempre havendo uma interação constante entre as diferentes fases.

5.6 ANÁLISES PRELIMINARES DAS ATIVIDADES

No estudo desenvolvido em sala de aula sobre funções trigonométricas apresentamos as definições da teoria, a resolução de exercícios e a construção de gráficos das funções seno e cosseno. No entanto, observamos, através da participação dos alunos e das avaliações escritas realizadas durante a unidade, que os alunos ainda apresentam dificuldades em compreender o conceito de seno e cosseno para arcos trigonométricos, a relação entre plano cartesiano e gráfico das funções trigonométricas, principalmente a noção de função trigonométrica, que aparece exclusivamente como atribuição de valores numéricos à variável independente X (sem estar associando essa variável X como sendo o comprimento de um dado arco na circunferência trigonométrica), dando o foco apenas na expressão algébrica que representa a função estudada.

Sentimos a necessidade de retornar ao conteúdo, fazendo uma abordagem diferenciada. Nesse sentido buscamos montar uma sequência de ensino baseada na teoria das Situações Didáticas, por acreditar que a limitação do lápis e papel não foram suficientes para sanar essas dificuldades, utilizando para a construção e aplicação das atividades o *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra.

5.7- ANÁLISE A POSTERIORI DAS ATIVIDADES

As análises serão feitas à luz da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria das Representações semióticas apenas em algumas das atividades, quando na resolução da questão for necessário fazer a transformação de representações. Conforme a questão, demos um enfoque maior no diálogo, para exemplificar as fases adidáticas da TSD, em outras questões valorizamos mais o protocolo de transcrição e alguns aspectos da Representação Semiótica.

5.8 – ATIVIDADES

5.8.1 Atividade – Razão trigonométrica na Circunferência Trigonométrica

Orientação para construção da atividade:

1. Insira o ponto $O = (0,0)$, (ferramenta ponto);
2. Insira o círculo de centro em O e raio igual a 1 (ferramenta círculo dado centro e raio);
3. Insira o ponto $A = (1,0)$ (digite na caixa de entrada $A = (1,0)$ e pressione enter);
4. Insira o ponto B sobre a circunferência (ferramenta ponto);
5. Ao animar o ponto B anote as observações:
 - a) Em que sentido o ponto B percorre a circunferência?
 - b) Ao percorrer toda a circunferência, o ponto B percorre quantos graus?
6. Clique na ferramenta ângulo e nos pontos A, O, B nessa ordem;
7. Na caixa de entrada insira o ponto o ponto $C = (x(B), 0)$;
8. Construa o segmento \overline{OC} (ferramenta segmento);
9. Personalize o segmento \overline{OC} (clique com o botão do lado direito do *mouse* e selecione propriedades);
10. Em que sentido percorre o segmento \overline{OC} ?
11. Na caixa de entrada insira o ponto o ponto $D = (0, y(B))$;
12. Personalize o segmento \overline{OD} , (clique com o botão do lado direito do *mouse* e selecione propriedades);
13. Em que sentido percorre o segmento \overline{OD} ?
14. Construa mais três segmentos: \overline{OB} , \overline{BC} e \overline{BD} ;
15. Desabilite a animação do ponto B e anote as observações:
16. Para cada ângulo da tabela abaixo, determine as coordenadas do ponto B

Ângulo	x	y	(x,y)
0°			
90°			
180°			
360°			

17. De que maneira podemos verificar que os triângulos ODB e OCB são retângulos
18. Posicione os triângulos OCB no primeiro quadrante, sabendo que $CB = OD$, identifique, justificando sua resposta, qual segmento representa:
 - a) Cateto oposto
 - b) Cateto adjacente
 - c) Hipotenusa

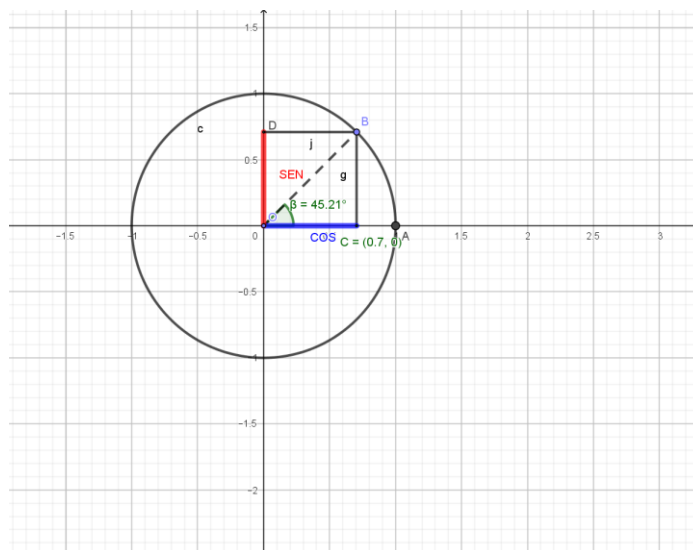
19. Movimente o ponto B e verifique o que ocorre com o comprimento do segmento \overline{OB} . É possível determinar seu valor numérico?
20. Lembrando que em um triângulo retângulo são válidas as razões trigonométricas $\text{sen}\beta = \frac{CO}{H}$ e $\text{cos}\beta = \frac{CA}{H}$, CO (cateto oposto), CA (cateto adjacente) e H (hipotenusa), o que podemos afirmar sobre os segmentos \overline{OC} e \overline{OD} ? (considere $CB=OD$)
21. Represente as coordenadas do ponto B em função do seno e cosseno.
22. Anime o ponto B (clique com o botão direito sobre o ponto, escolha a opção animar).

5.8.1.1 Análise a Priori

Esta atividade tem como objetivo que os alunos construam uma circunferência trigonométrica, analisem o comportamento de um ponto B sobre essa circunferência, construam um arco AB de medida β e extremidade em B sobre a circunferência e concluam que a abscissa desse ponto B é dada por $\text{cos}\beta$ e a ordenada é dada por $\text{sen}\beta$. Partindo da língua natural, desejamos que os alunos consigam fazer suas representações gráficas.

A construção esperada é a seguinte:

Figura 51 - Atividade 1.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

As variáveis didáticas envolvidas nesta atividade são:

- Os valores dos arcos trigonométricos, medidos em graus;
- Os valores dos senos para os arcos de 0° , 90° , 180° e 360° ;
- Os valores dos cossenos para os arcos de 0° , 90° , 180° e 360° ;
- Coordenadas do ponto B, quando este é extremidade dos arcos 0° , 90° , 180° e 360° ;
- Razão trigonométrica no triângulo retângulo: seno e cosseno.

A questão 1 centra-se na análise da movimentação de um ponto B construído sobre a circunferência. Nessa análise, espera-se que o discente perceba que o ponto B percorre a circunferência no sentido anti-horário, completa uma volta na circunferência em 360° , e suas coordenadas sobre os eixos são $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0, -1)$.

Na questão 2, o aluno deve desabilitar a animação do ponto B e clicar sobre o ponto B para realizar as observações da coordenada no ponto sobre os eixos. Esperamos que consiga concluir que em $0^\circ = (1,0)$, $90^\circ = (0,1)$, $180^\circ = (-1,0)$, $270^\circ = (0, -1)$, $360^\circ = (1,0)$.

As questões 3 e 4 centram-se na observação da construção dos triângulos ODB e OCB. Na questão 3 espera-se que o educando utilize a ferramenta ângulo para verificar se a medida dos ângulos com vértice em D e o ângulo com vértice em C são retos, observando o fato de que os eixos coordenados são perpendiculares e pelo processo de construção os triângulos são congruentes e retângulos. Na questão 4, acreditamos que os alunos já possuam conhecimentos prévios sobre triângulo retângulo e consigam identificar cateto adjacente \overline{OD} , cateto oposto \overline{OC} e hipotenusa segmento \overline{OB} , a mesma para os dois triângulos.

Na questão 5, esperamos que o discente perceba que o segmento \overline{OD} é o raio da circunferência e, portanto, tem comprimento 1.

Na questão 6, esperamos que faça a substituição $\overline{OB} = 1$ na expressão dada e conclua que $\text{sen}\beta = \overline{OC}$ e $\text{cos}\beta = \overline{OD}$, ou seja, deduzir que abcissa desse ponto = \overline{OD} chama-se seno do arco AB ou do ângulo $\widehat{CÔB}$ e a ordenada desse ponto = \overline{OC} chama-se cosseno do arco AB ou do ângulo $\widehat{CÔB}$, que representa a

formalização final da questão 7) $B = (\cos \beta, \sin \beta)$. Desejamos, assim, que o aluno consiga fazer a conversão entre o registro gráfico e a língua materna.

Acreditamos que a atividade proposta possibilita ao aluno passar pelas fases descritas na Teoria das Situações Didáticas. A fase da ação sempre ocorre com a interação entre o aluno e o GeoGebra. Na questão 1, 2, 3 e 4 sua ação é direta na manipulação do *software*, assim como na questão 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 18 e 19. Nessa atividade em especial, o aluno terá que fazer várias manipulações nas ferramentas do GeoGebra para a realização das construções solicitadas.

Após iniciar a interação com as ferramentas do GeoGebra, o aluno precisa refletir sobre as observações feitas durante o processo de construção, concatenando, dessa maneira, os elementos necessários à formulação da situação. É o que ocorre nas questões 5, 10, 13 e 16.

A fase da validação ocorre nas questões 17 e 18, pois o aluno precisará utilizar de algum mecanismo de prova para justificar se os triângulos são retângulos e classificar os lados desses triângulos. Essa validação ocorrerá por meio da expressão verbal ou escrita.

A institucionalização ocorrerá na questão 21 e 22 em que desejamos formalizar os conceitos de razões trigonométricas na circunferência trigonométrica. Contudo, é possível que os estudantes tenham dificuldade para expressar suas respostas utilizando a linguagem matemática adequada.

5.8.1.2 Análise a Posteriori

Para a análise, separamos a discussão por questão abordada na atividade.

A primeira parte da atividade (questão de 1 a 5) centra-se na análise da movimentação de um ponto B construído sobre a circunferência. Nessa análise, espera-se que o discente perceba que o ponto B percorre a circunferência no sentido anti-horário e completa uma volta na circunferência em 360° . Os três grupos conseguiram chegar a essa conclusão.

Figura 52 - Grupo 1.

a) Em que sentido o ponto B percorre a circunferência?

Em sentido Anti-horário

b) Ao percorre toda a circunferência, o ponto B percorre quantos graus?

360°

Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Figura 53 - Grupo 2.

a) Em que sentido o ponto B percorre a circunferência?

No sentido anti-horário

b) Ao percorre toda a circunferência, o ponto B percorre quantos graus?

360°

Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Figura 54 - Grupo 3.

a) Em que sentido o ponto B percorre a circunferência?

Percorre no sentido anti-horário.

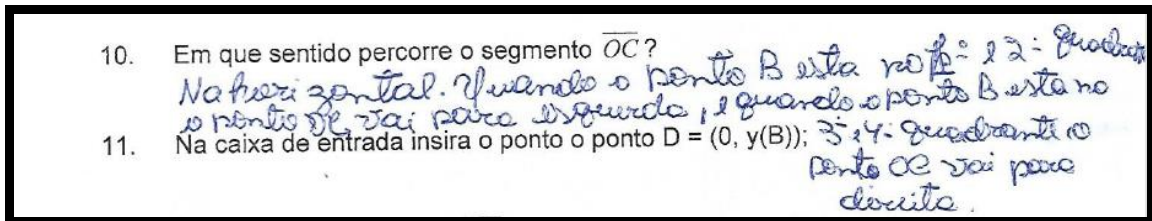
b) Ao percorre toda a circunferência, o ponto B percorre quantos graus?

Percorre 360° graus durante sua trajetória.

Fonte: Elaborada pela autora (2019)

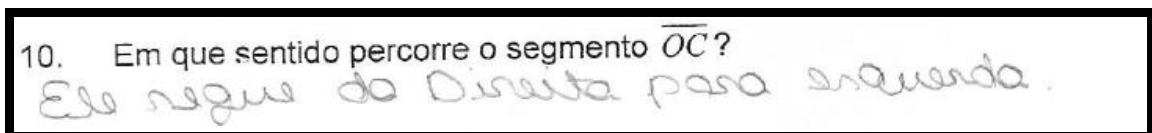
A segunda parte da atividade (questão 6 a 13) centra-se na construção e na observação dos segmentos OC e OD. Os três grupos conseguiram construir e encontrar os resultados esperados.

Figura 55 - Grupo 1.



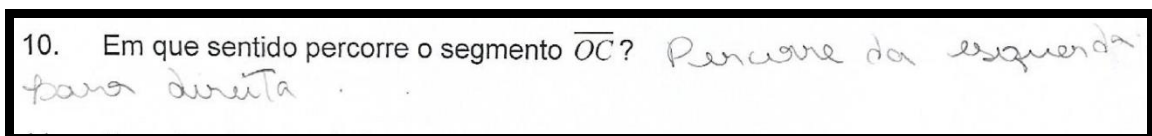
Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 56 - grupo 2.



Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Figura 57 – Grupo 3.



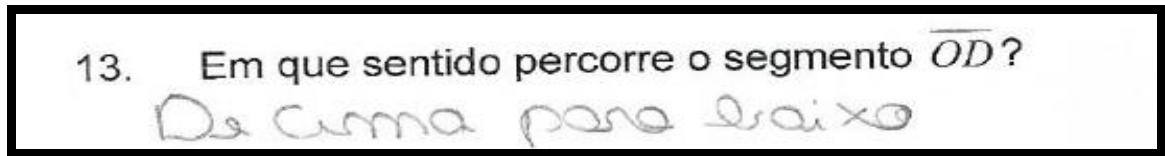
Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 58 - Grupo 1.



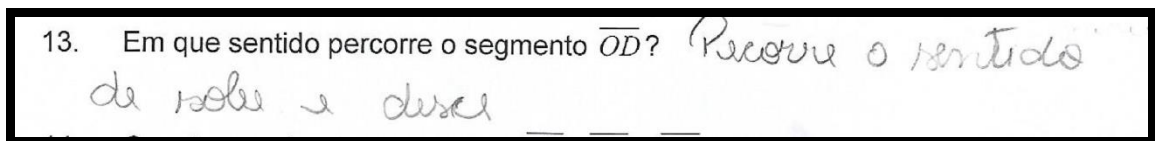
Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Figura 59 - Grupo 2.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 60 - grupo 3.



Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Na questão 14, solicitamos a construção de mais três segmentos \overline{BC} , \overline{BC} e \overline{BC} OB, BC e BD. Todos os grupos conseguiram realizar a construção. Na questão 15 desejávamos fazer a observação das coordenadas do ponto B sobre os eixos coordenados. Os três grupos conseguiram determinar essas coordenadas e, por erro de digitação, não foi solicitado o das coordenadas para o ângulo de 270° , embora alguns grupos tenham inserido esse valor.

Figura 61 - Grupo 1.

15. Para cada ângulo da tabela abaixo, determine as coordenadas do ponto B

Ângulo	x	y	(x,y)
0°	1	0	(1,0)
90°	0	1	(0,1)
180°	-1	0	(-1,0)
360°	1	0	(1,0)
270°	0	-1	(0,-1)

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 62 - Grupo 2.

15. Para cada ângulo da tabela abaixo, determine as coordenadas do ponto B

Ângulo	x	y	(x,y)
0°	1	0	(1,0)
90°	0	1	(0,1)
180°	-1	0	(-1,0)
360°	1	0	(1,0)

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 63 – Grupo 3.

15. Para cada ângulo da tabela abaixo, determine as coordenadas do ponto B

Ângulo	x	y	(x,y)
0°	1	0	(1,0)
90°	0	1	(0,1)
180°	1	0	(1,0)
360°	0	1	(0,1)

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

As questões de 16 a 18 referem-se às construções e às análises dos triângulos ODB e OCB. Como esperado na análise *a priori*, os alunos conseguiram

verificar que os triângulos são retângulos, identificar os lados desses triângulos OCB e determinar que a medida da hipotenusa é igual a 1.

Figura 64 - Grupo 1.

16. De que maneira podemos verificar que os triângulos ODB e OCB são retângulos?

Porque o ângulo dos dois triângulos tem um 90° graus.

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 65 - Grupo 2.

16. De que maneira podemos verificar que os triângulos ODB e OCB são retângulos?

Observando se possuem um ângulo com 90°

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 66 - Grupo 3.

16. De que maneira podemos verificar que os triângulos ODB e OCB são retângulos?

Ambos possuem ângulos de 90° Vitória

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 67 - Grupo 1.

17. Posicione os triângulos OCB no primeiro quadrante, sabendo que $CB = OD$, identifique justificando sua resposta qual o segmento representa:

a) Cateto oposto
Be

b) Cateto adjacente
Oe

c) Hipotenusa
Ob

Fonte: Elaborada pela autora (2019).


Figura 68 - Grupo 2.

17. Posicione os triângulos OCB no primeiro quadrante, sabendo que $CB = OD$, identifique justificando sua resposta qual o segmento representa:

a) Cateto oposto
 O segmento (CB), pois está oposto ao ângulo de 90° .

b) Cateto adjacente
 O segmento (OC), pois está próximo do ângulo de 90° .

c) Hipotenusa
 O segmento (OB), pois é o maior lado.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 69 - Grupo 3.

17. Posicione os triângulos OCB no primeiro quadrante, sabendo que $CB = OD$, identifique justificando sua resposta qual o segmento representa:

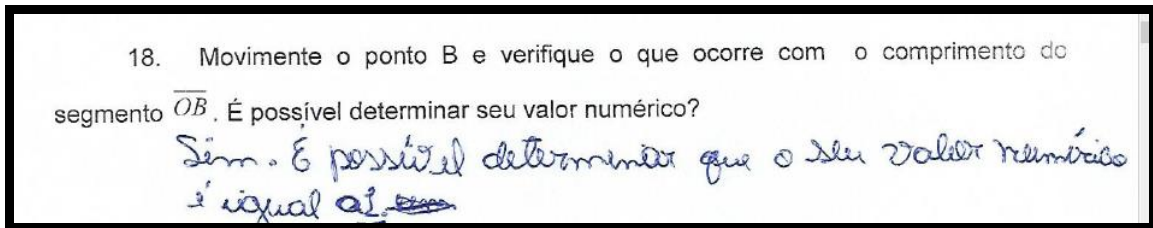
a) Cateto oposto
Be

b) Cateto adjacente
OC

c) Hipotenusa
OB

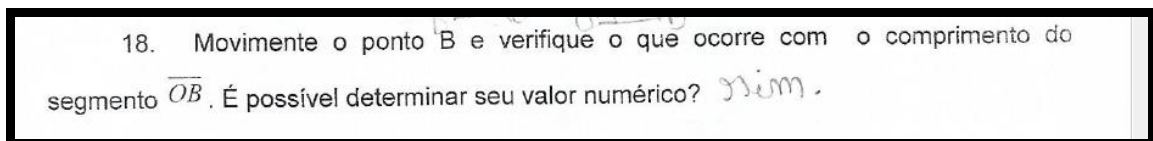
Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 70 - Grupo 1.



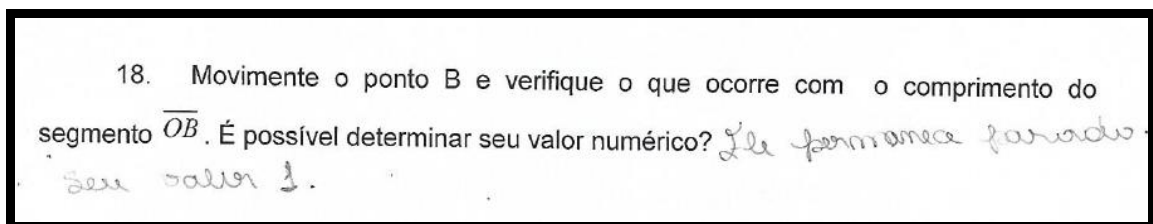
Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 71 - Grupo 2.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 72 - Grupo 3.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

As questões de 19 a 21 se referem à formalização do conteúdo. Como esperado, os alunos conseguiram fazer o tratamento algébrico, substituindo $\overline{OB} = 1$ na expressão dada. Entre as repostas dos três grupos, o grupo 1 conseguiu afirmar que o segmento OD corresponde ao seno e o segmento OC corresponde ao cosseno da forma genérica $\text{sen } \beta = OD$ e $\text{cos } \beta = OC$. O grupo 2 também conseguiu compreender que OD corresponde ao seno e o segmento OC corresponde ao cosseno e escolhe um ponto B na circunferência trigonométrica e apresenta as coordenadas desse ponto através dos valores numéricos dos segmentos OD e OC. E ainda justifica da seguinte maneira:

A²: O que podemos afirmar sobre o segmento OD e OC?

A¹: Nós podemos afirmar que o segmento OC sempre vai dar o valor numérico do cosseno. Perguntar a ela primeiro. Eu posso afirmar que ele sempre vai dar o valor numérico do cosseno porque sempre está nessa linha?

P: Gostei. Escreva isso.

A1: E o OD o do seno...

A1: Ela quer que você coloque o par ordenado e não clicando aleatoriamente na janela de visualização. É o par ordenado assim, ó: o x representa o cosseno e o y representa o seno.

A1: E partir disso você escolhe um número a.

Ou seja, deduzir que abcissa desse ponto = \overline{OC} , chama-se seno do arco AB ou do ângulo $\widehat{CÔB}$ e a ordenada desse ponto = \overline{OD} , chama-se cosseno do arco AB ou do ângulo $\widehat{CÔB}$, que representa a formalização final da questão 7) $B = (\cos \beta, \sin \beta)$.

Observe o diálogo do grupo 2:

B2: Porque eles ficam perto, e isso que eu não lembro cateto oposto, e isso aqui OD, OC, a gente pode afirmar que: 1 o segmento OC e oposto ao ângulo de 90° , e o OD e o adjacente.... Porque o que ele vai fazer: cateto oposto/hipotenusa e cateto adjacente/hipotenusa, entendeu?

B1: Entendi.

B2: Acho que é isso. Professora, só queria saber: representar as funções nesse triângulo OCB, o ponto B e esse, então (0,71 e 0,7).

Mostrando indícios de ter compreendido o que estive tentando justificar que o segmento é, o terceiro grupo faz a substituição, mas não conclui que $\sin \beta = \overline{OD}$ e $\cos \beta = \overline{OC}$, como era esperado na análise *a priori*, e finalizando a atividade, conforme desejado. Ou seja, deduzir que abcissa desse ponto = \overline{OC} , chama-se seno do arco AB ou do ângulo $\widehat{CÔB}$ e a ordenada desse ponto = \overline{OD} , chama-se cosseno do arco AB ou do ângulo $\widehat{CÔB}$, que representa a formalização final da questão 19) $B = (\cos \beta, \sin \beta)$.

Figura 73 - Grupo 1.

19. Lembrando que em um triângulo retângulo são validas as razões trigonométricas $\text{sen } \beta = \frac{CO}{H}$ e $\text{cos } \beta = \frac{CA}{H}$, CO (cateto oposto), CA (cateto adjacente) e H (hipotenusa), o que podemos afirmar sobre os segmentos \overline{OC} e \overline{OD} ? (considere CB=OD)

O segmento OC vai dar o valor do cosseno.
 O OD vai dar o valor do seno.

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 74 - Grupo 2.

19. Lembrando que em um triângulo retângulo são validas as razões trigonométricas $\text{sen } \beta = \frac{CO}{H}$ e $\text{cos } \beta = \frac{CA}{H}$, CO (cateto oposto), CA (cateto adjacente) e H (hipotenusa), o que podemos afirmar sobre os segmentos \overline{OC} e \overline{OD} ? (considere CB=OD)

O segmento OC é adjacente ao ângulo de 90° do triângulo COB, enquanto o segmento OD é oposto ao ângulo de 90° do triângulo DO.

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 75 - Grupo 3.

19. Lembrando que em um triângulo retângulo são validas as razões trigonométricas $\text{sen } \beta = \frac{CO}{H}$ e $\text{cos } \beta = \frac{CA}{H}$, CO (cateto oposto), CA (cateto adjacente) e H (hipotenusa), o que podemos afirmar sobre os segmentos \overline{OC} e \overline{OD} ? (considere CB=OD)

$\text{sen } \beta = \frac{OC}{H}$ $\text{cos } \beta = \frac{OD}{H}$

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 76 - Grupo 1.

20. Represente as coordenadas do ponto B em função do seno e cosseno.

$(1,0)$ $\text{sen} - \text{hipotenusa}$
 $\text{cos} - \text{cateto adjacente}$

$$\text{sen } \beta = \frac{BC}{1} \qquad \text{cos } \beta = \frac{OC}{1}$$

$$\text{sen } \beta = BC \qquad \text{cos } \beta = OC$$

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 77 - Grupo 2.

20. Represente as coordenadas do ponto B em função do seno e cosseno.

6 pontos B estão sendo o nome de OC B o cosseno de O B.

coordenado $(-0,71; 0,71)$ nome

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 78 - Grupo 3.

20. Represente as coordenadas do ponto B em função do seno e cosseno.

21. Anime o ponto B (clique com o botão direito sobre o ponto, escolha a opção animar).

$CB = 2$ $\frac{2}{1} = \boxed{2}$
 $OC = 4$ $\frac{4}{1} = \boxed{4}$

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Quanto às fases adidáticas propostas neste trabalho, entendemos que a atividade permitiu ao estudante passar pelas etapas de ação, formulação e validação, não necessariamente em ordem cronológica, sendo que em alguns momentos as etapas ocorreram simultaneamente, conforme veremos nos diálogos. Para exemplificar, apresentaremos parte de um diálogo produzido por um dos grupos.

Nesta atividade, os grupos não sentiram dificuldades para construir a

circunferência trigonométrica. Para fazer essa construção os alunos precisaram interagir com as ferramentas do GeoGebra. Depois eles precisaram tomar a decisão sobre em que local da circunferência deveriam inserir o ponto B, conforme se pode averiguar no diálogo abaixo:

A¹: Agora o quarto. Insira o ponto b sobre a circunferência.

A²: Eu já coloquei a letra a.

A¹: Sim, mas o ponto b é em qualquer lugar da circunferência?

A²: Professora?

A¹: Esse insira o ponto b é em qualquer lugar da circunferência?

P: Isso. Onde você quiser.

A¹: Dentro ou?

P: Sobre então é em cima.

A¹: Ah, sim!

Diálogo do grupo 3:

A¹: Quantidade do nome do ponto, eu acho?

A²: A gente errou onde?

A¹: Nos nomes dos pontos.

A²: Eu acho que sim. Não tem que mudar o nome, não? Tipo esse C tem que ser o O, e agora a gente cria um C.

A¹: Não, o A seria O.

A²: o A é o O, mas tá sendo A aqui, e a gente tem que criar um O, no caso o A é o A daqui, tem que criar um O e depois criar um C.

Ao longo da atividade, os alunos desenvolvem novas estratégias e tomam novas decisões.

A²: Então, vamos botar no outro lado para ver se ele muda.

A¹: Eh, vamos botar para ver se vai.

Diálogo do grupo 3:

P: O A é esse aqui!

A²: Tem que criar o O então, né?

P: O primeiro ponto que você cria, o GeoGebra chama de A, que ele vai na sequência, só que no seu caso, você não mudou isso, então você tem a opção de manter, levando em consideração isso ou você pode voltar e renomear os pontos.

A²: Se não mudar vai atrapalhar a gente depois! Porque aqui está escrito diferente. Pronto, agora o B vai ser A. Pronto, agora a gente cria o C, segmento OC, a gente vai construir o segmento do O para o C, ele diz “construa o segmento OC”, depende do lugar onde a gente botou, vamos apagar o ponto C e mudar de lugar.

Em vários momentos das atividades os alunos precisaram manipular as ferramentas do GeoGebra, realizando, assim, uma ação, mas de natureza mais experimental.

A¹: Construa o segmento OC. Ferramenta segmento. Será que o segmento é em qualquer lugar?

A²: A gente tem que ver pelas propriedades em que sentido percorre o segmento OC.

A¹: A gente vai animar o ponto de novo e ver.

Como foi pensado *a priori*, a fase adidática da ação sempre ocorrerá com a interação do aluno com software. Nessa atividade os alunos fizeram algumas construções. Dessa forma a fase da ação ocorrerá em vários momentos. No exemplo a seguir os grupos precisarão construir um segmento OC (a fase da ação não significa um momento único na atividade, ela pode ocorrer em vários momentos).

Podemos observar que os alunos estão envolvidos com a situação proposta, analisando e buscando explicação para o comportamento do segmento. Dessa forma, percebemos que ambos os interlocutores cooperam no controle do meio externo a fim de obter a formulação de um conhecimento em questão, caracterizando assim que os alunos estão vivenciando a fase da formulação.

A²: Agora está meio devagar, você percebeu?

A¹: Devagar?

A²: Não é impressão minha.

A¹: Em que sentido percorre o segmento OC.

A²: Não sei.

A¹: Ele percorre na horizontal.

A²: De um lado para o outro.

A¹: Ele vai se aproximando e o ponto b vai para as extremidades. É como se tivesse uma mola aqui. Enquanto ela vem para cá ele vai para lá. O negativo significa que ele está voltando e positivo estaria indo.

A²: Vamos falar que é de um lado ao outro.

É perceptível, através do diálogo, que uma aluna não concorda com a afirmação da outra, caracterizando o que Brousseau (2007) diz em relação à fase de validação: um emissor já não é um informante, mas um proponente; o receptor, um oponente. Nesse sentido um dos alunos não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro.

A²: Vamos falar que é de um lado ao outro.

A¹: Mas não é exatamente assim.

A²: É, sim.

A¹: Mas ele muda conforme o ponto B.

A²: Não está perguntando do ponto B, tá perguntando do OC, o ponto B não vem na questão.

A¹: Mas ele muda conforme o ponto B tá girando...

A²: Então, se o ponto B não tiver girando, tira o ponto B, pra vê.

A¹: Ó, o segmento para, tá vendo aí.

A¹: Vou animar de novo.

A²: Conforme o ponto B gira, ele percorre uma linha na horizontal, onde se encontra nas extremidades.

A¹: Quando o b está no primeiro e segundo quadrante ele vai para a direita e quando está no terceiro e quarto quadrante ele vai para esquerda. Pronto.

Como era esperado na análise *a priori* nas questões 17 e 18, os alunos precisariam utilizar de algum mecanismo de prova para justificar se os triângulos são retângulos e classificar os lados desses triângulos.

A¹: 1,0. De que maneira podemos verificar que os triângulos ODB e OCB são

retângulos? A gente pode verificar pelo ângulo. As junções dos dois triângulos formam um retângulo. Porque o triângulo é a metade de um retângulo e o ângulo formado pelos triângulos é 90° .

A²: Posicione os triângulos OCB no primeiro quadrante sabendo que OCB é igual à OD.

A¹: CB está igual à OD, né, professora?

P: Sim.

A¹: É cateto oposto relacionado a que ângulo?

P: O que você tá observando quando você movimenta o ponto b? Movimento o ponto b. Qual é o ângulo que você tá percebendo que tá moldando ele?

A¹: A origem. Então, no caso, o cateto oposto vai ser BC.

P: Isso.

A¹: Adjacente é OC. E hipotenusa é OB.

QUESTÃO 19

A²: Aumente o ponto b e verifique o que ocorre com o comprimento do segmento OB.

A¹: Ele vai ser sempre igual a 1. Porque o raio é 1. Ele nunca muda. É possível determinar o seu valor numérico sendo igual a 1, porque ele nunca muda.

Questão 20

A²: O que podemos afirmar sobre o segmento OD e OC?

A¹: Nós podemos afirmar que o segmento OC sempre vai dar o valor numérico do cosseno. Perguntar a ela primeiro. Eu posso afirmar que ele sempre vai dar o valor numérico do cosseno porque sempre está nessa linha?

P: Gostei. Escreva isso.

A¹: E o OD o do seno

Questão 21

A¹: Ela quer que você coloque o par ordenado e não clicando aleatoriamente na janela de visualização. É o par ordenado assim, ó: o x representa o cosseno e o y representa o seno.

A1: E a partir disso você escolhe um número a.

Depois de formularem e validarem as ideias principais seria necessária a institucionalização dos saberes referentes às razões trigonométricas na circunferência trigonométrica, momento em que a professora generalizou as relações encontradas nas questões 21 e 22.

Como esperamos na análise *a priori*, a institucionalização ocorreu na questão 21 e 22, em que desejamos formalizar os conceitos de razões trigonométricas na circunferência trigonométrica. Contudo, é possível que tenham dificuldade para expressar suas respostas, utilizando a linguagem matemática adequada.

Ao final de cada atividade a professora institucionalizava o conteúdo trabalhado.

A seguir, apresentaremos a síntese dos resultados obtidos pelos grupos.

Figura 79 - Grupo 1.

19. Lembrando que em um triângulo retângulo são validas as razões trigonométricas $\text{sen}\beta = \frac{CO}{H}$ e $\text{cos}\beta = \frac{CA}{H}$, CO (cateto oposto), CA (cateto adjacente) e H (hipotenusa), o que podemos afirmar sobre os segmentos \overline{OC} e \overline{OD} ? (considere CB=OD)

O segmento OC vai dar o valor do cosseno.
 O OD vai dar o valor do seno.

20. Represente as coordenadas do ponto B em função do seno e cosseno.

$(1,0)$ sen - hipotenusa
 cos - cateto adjacente

21. Anime o ponto B (clique com o botão direito sobre o ponto, escolha a opção animar).

$\text{sen } \beta = \frac{BC}{1}$ $\text{cos } \beta = \frac{OC}{1}$
 $\text{sen } \beta = BC$ $\text{cos } \beta = OC$

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 80 - Grupo 2.

19. Lembrando que em um triângulo retângulo são validas as razões trigonométricas $\text{sen } \beta = \frac{CO}{H}$ e $\text{cos } \beta = \frac{CA}{H}$, CO (cateto oposto), CA (cateto adjacente) e H (hipotenusa), o que podemos afirmar sobre os segmentos \overline{OC} e \overline{OD} ? (considere CB=OD)

Handwritten notes: $\text{sen } \beta = \frac{0,4}{1} = 0,4$, $\text{cos } \beta = \frac{0,71}{1} = 0,71$.
 O segmento OC é adjacente ao ângulo de 90° do triângulo COB, enquanto o segmento OD é oposto ao ângulo de 90° do triângulo DO.

20. Represente as coordenadas do ponto B em função do seno e cosseno.
Handwritten note: O ponto B está sendo o seno de OC B e cosseno de OD B.
 cosseno $\leftarrow (0,71; 0,4) \rightarrow$ seno

21. Anime o ponto B (clique com o botão direito sobre o ponto, escolha a opção animar).

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 81 - Grupo 3.

19. Lembrando que em um triângulo retângulo são validas as razões trigonométricas $\text{sen } \beta = \frac{CO}{H}$ e $\text{cos } \beta = \frac{CA}{H}$, CO (cateto oposto), CA (cateto adjacente) e H (hipotenusa), o que podemos afirmar sobre os segmentos \overline{OC} e \overline{OD} ? (considere CB=OD)

Handwritten notes: $\text{sen } \beta = \frac{3}{4}$, $\text{cos } \beta = \frac{4}{5}$

20. Represente as coordenadas do ponto B em função do seno e cosseno.

21. Anime o ponto B (clique com o botão direito sobre o ponto, escolha a opção animar).

Handwritten notes: CB=2, OC=4
 $\frac{2}{1} = 2$
 $\frac{4}{1} = 4$

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Nos diálogos, observa-se que os sujeitos se apropriaram do significado do conceito de razão trigonométrica na circunferência trigonométrica.

Assim, é possível afirmar, conforme esperado na análise *a priori*, que os grupos validaram seus conhecimentos com relação à função trigonométrica. Pois, de

acordo Almouloud (2007, p. 31), a Teoria das Situações Didáticas tem como objetivo caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reproduzíveis, que conduzem à modificação de comportamento dos alunos. Essa modificação é o que caracteriza que o conhecimento foi gerado, isto é, ocorreu uma aprendizagem com significado.

5.8.2 Atividade – Funções Trigonômicas: Seno e Cosseno

PARTE A: Função Cosseno

1. Abra o arquivo já construído do ciclo trigonométrico da atividade 1;
2. Construa um arco AB (ferramenta círculo);
3. Clique na ferramenta exibir e peça para exibir a janela 2 de visualização;
4. Clique na janela de visualização 2, vá em janela de visualização e personalize

os eixos coordenados, mude a distância do eixo ox para $\frac{\pi}{2}$, mude a distância do eixo ou para 1;

Com a janela de visualização 2 ativada:

5. Digite na caixa de entrada: $I = (k,0)$;
6. Digite na caixa de entrada: segmento $[O, I]$;
7. Clique na ferramenta copiar estilo visual, clique no arco AB e depois no segmento $[O, I]$;
8. Movimente o ponto B e faça a correspondência entre o arco descrito na janela de visualização 1 e o comprimento do segmento \overline{OI} na janela visualização 2.
9. Digite na caixa de entrada: $F = (d, x(C))$;
10. Anote as observações para os ângulos de 0° , 90° , 180° , 270° e 360° ;
11. Esconda o segmento \overline{OI} e faça a observação do ponto F na janela de visualização 2;
12. Posicione o ponto B para o ponto A;
13. Em que valor de y inicia a movimentação do ponto F? Em que valor de y termina?

14. Para quais valores de x o ponto F corta o eixo ox ?

15. Qual movimento é observado no deslocamento do ponto F nos seguintes intervalos:

a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

c) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

d) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

16. Construa duas retas paralelas ao eixo ox , $y = -1$ e $y = 1$ na janela de visualização 2.

17. Agora observe se a movimentação do ponto F toca nessas retas, ultrapassa a região compreendida por essas duas retas ou não consegue tocar nas duas retas.

18. Desenhe o percurso descrito pela movimentação do ponto F.

19. Na matemática você já observou algum gráfico semelhante ao percurso descrito pela movimentação desse ponto?

Parte B - Função seno

- 1) Utilizando o mesmo arquivo da atividade 3, desabilite o ponto F.
- 2) Digite na caixa de entrada: $J = (d, y(D))$.
- 3) Anote as observações para os ângulos de 0° , 90° , 180° , 270° e 360° .
- 4) Esconda o segmento \overline{OI} e faça a observação do ponto J na janela de visualização 2.
- 5) Posicione o ponto B para o ponto A.

6) Em que valor de y inicia a movimentação do ponto J? Em que valor de y termina?

7) Para quais valores de x o ponto J corta o eixo ox ?

8) Qual movimento é observado no deslocamento do ponto J nos seguintes intervalos:

a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

c) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

d) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

9) Construa duas retas paralelas ao eixo ox , $y = -1$ e $y = 1$ na janela de visualização 2.

10) Agora observe se a movimentação do ponto J toca nessas retas, ultrapassa a região compreendida por essas duas retas ou não consegue tocar nas duas retas.

11) Desenhe o percurso descrito pela movimentação do ponto J.

12) Na matemática você já observou algum gráfico semelhante ao percurso descrito por pela movimentação desse ponto?

5.8.2.1 Análise a Priori

Nestas atividades, temos como objetivo que o aluno consiga perceber que a medida angular de um arco descrito pela movimentação do ponto B na janela de visualização 1 descreve seu comprimento (medida linear) na janela de visualização 2. Espera-se que o aluno consiga observar inicialmente a relação entre a medida angular desse arco na janela de visualização 1 e seu comprimento (medida linear) na janela de visualização 2, estabelecendo a seguinte conversão entre os registros gráficos e tabela de valores:

Ângulo	\overline{OI}
0°	0
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3\pi}{2}$
360°	2π

Desejamos também que o aluno consiga perceber que ponto F inicia sua movimentação em $y=1$ e finaliza o movimento também em $y=1$ e que corta o eixo ox em π e 2π . E que também deduza que o ponto J inicia sua movimentação em $y=0$

e finaliza o movimento também em $y=0$ e que corta o eixo ox em $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

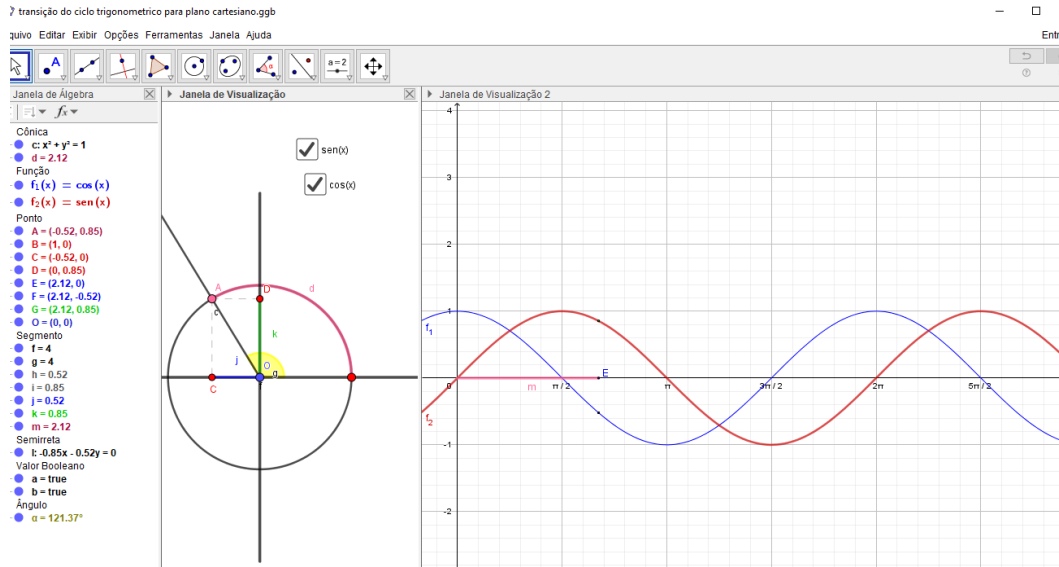
E ainda temos como objetivo que o estudante perceba em cada intervalo o seguinte:

a) inicia em $y=1$ e termina em $y=0$ ou que ponto desce b) inicia de $y=0$ e termina $y=-1$, ponto continua descendo, c) inicia em $y=-1$ e chega em $y=0$ ou ponto sobe e para d) inicia $y=0$ e termina em $y=1$ ou continua subindo.

Em relação ao ponto J, a) inicia de $y=0$ e chega em $y=1$ ou dizer que ponto sobe, b) inicia $y=1$ e chega em $y=0$, ou dizer que o ponto desce, na letra c) inicia de $y=0$ e vai para $y=-1$ ou dizer que ponto desce e na letra d) sai de $y=-1$ e vai até $y=0$.

Ainda se espera que o aluno perceba que os pontos F e J tocam as retas $y=1$ e $y=-1$ e seus desenhos deverão ser semelhantes aos gráficos das funções seno e cosseno. Espera-se que ele encontre a seguinte construção:

Figura 82 - Atividade 3 e 4.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Entendemos que a atividade permite que o aluno passe pelas etapas de ação, formulação e validação. Na fase da ação ocorre na interação do aluno com o GeoGebra, em todos os momentos que precisa manipular uma ferramenta para executar um comando; por exemplo, nas questões de 1 a 6. Após iniciar a construção com o GeoGebra, o aluno precisará analisar esses processos de construção, criando conjecturas sobre a situação apresentada, tentando validá-las por meio da explicação das observações realizadas. Na fase da institucionalização, a professora sintetizará o conhecimento abordado sobre o deslocamento desse ponto e a curva descrita por esse deslocamento como sendo as funções seno e cosseno.

As variáveis didáticas da parte A da questão 3:

- As abscissas do ponto que corta o eixo ox;
- Comprimento de um arco de medida angular 0° , 90° , 180° e 360° ;
- Intervalos de crescimento e decrescimento da função seno;
- Gráfico da Função seno.

As variáveis didáticas da parte B questão 3:

- As abscissas do ponto que corta o eixo ox;

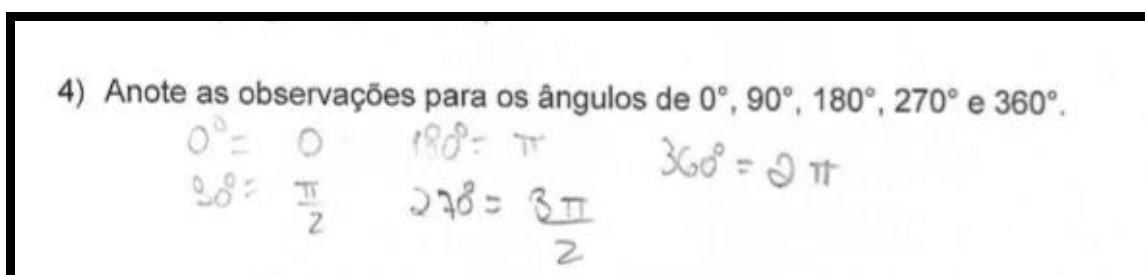
- Comprimento de um arco de medida angular 0° , 90° , 180° e 360° ;
- Intervalos de crescimento e decréscimo da função cosseno;
- Gráfico da Função cosseno.

Nas atividades 3 e 4, partimos da língua natural para o registro das tabelas de valores e gráficos.

5.8.2.2 análise *posteriori*

Ao verificar os registros no protocolo de cada grupo e confrontando com nossa análise *a priori*, percebemos que os grupos 1 e 2 conseguiram fazer o registro da observação da relação entre a medida angular dos arcos descritos pela movimentação do ponto B na janela de visualização 1 e seu comprimento na janela de visualização 2. Como o grupo 3 conseguiu desenvolver toda atividade, e na segunda parte da atividade solicitamos uma observação semelhante e o grupo conseguiu fazer o registro correto, há indícios de que tenha conseguido fazer essa observação, embora não tenha feito o registro no protocolo.

Figura 83 - Grupo 3.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Outra observação é que os grupos 1 e 2 (o grupo 2) escolheram maneiras diferentes de representar esses comprimentos. O grupo 1 apresentou comprimento do segmento em função de π e o grupo 2 apresentou comprimento utilizando números decimais, exceto o arco de 180° , realizando um tratamento aritmético, quando faz a substituição de π por 3,14 e determina esses comprimentos com valores decimais, embora não tenha sido solicitado a fazê-lo.

Figura 84 - Grupo 1 .

Arco	Comprimento \overline{OI}
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3\pi}{2}$
360°	2π

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 85 - Grupo 2.

Arco	Comprimento \overline{OI}
0°	0
90°	1,57
180°	π
270°	4,71
360°	0

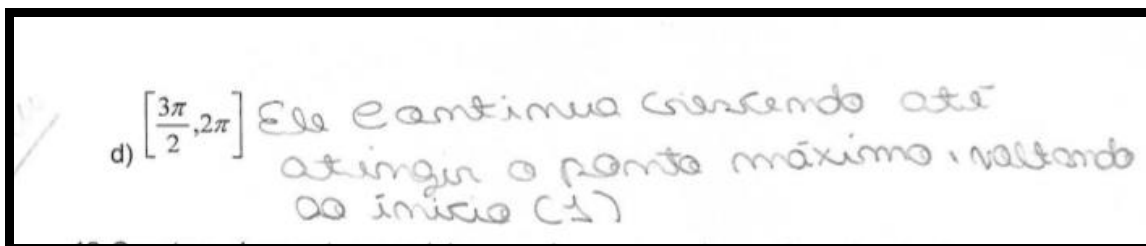
Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Essa atividade tinha como objetivo que os grupos percebessem a construção do gráfico das funções seno e cosseno na janela de observação 2. Inicialmente pedimos que os grupos escondessem o segmento OI e fizessem a observação do ponto F. Os três grupos conseguiram perceber que o ponto F inicia sua movimentação em $y=1$ e finaliza o movimento também em $y=1$ e que corta o eixo ox em π e 2π . E ponto J inicia sua movimentação em $y=0$ e finaliza o movimento

também em $y=0$ e que corta o eixo Ox em $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

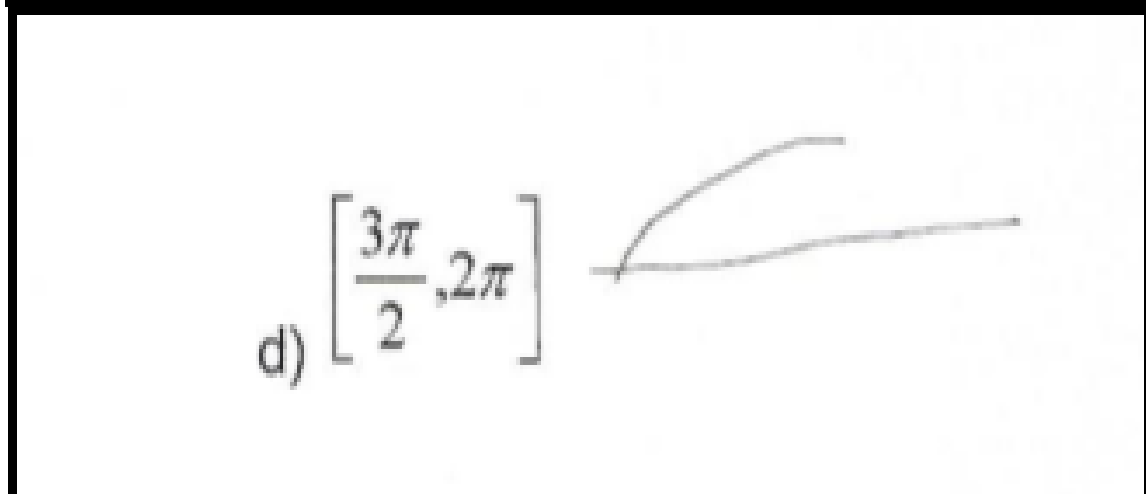
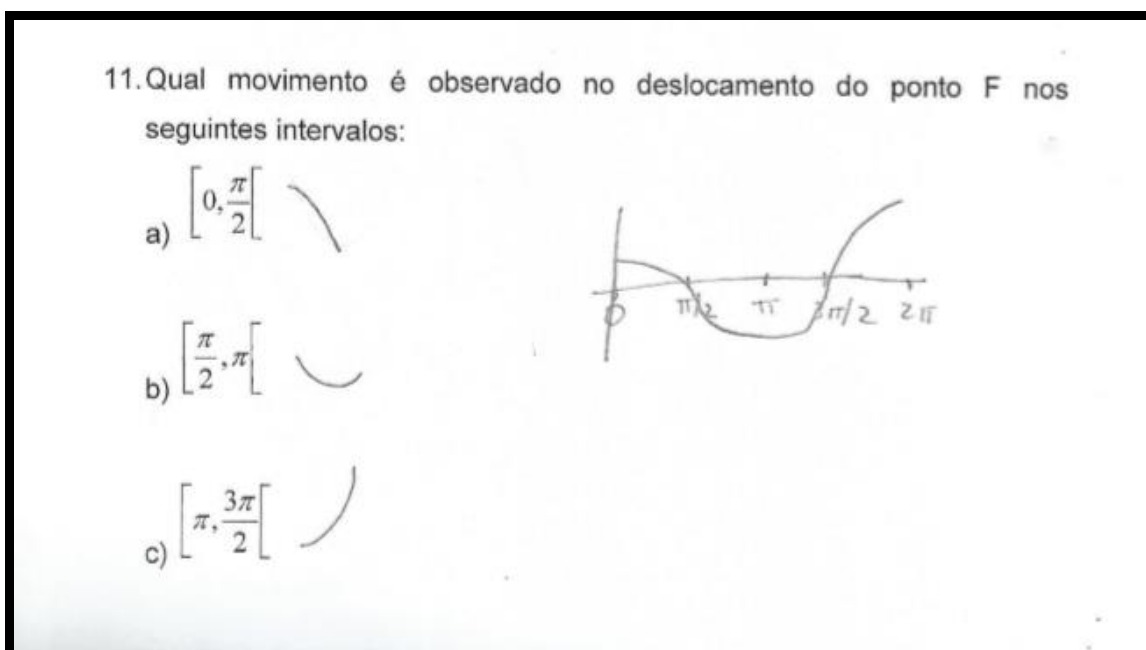
E ainda desejamos que eles percebam, em cada intervalo, o seguinte:

- a) Inicia em $y=1$ e termina em $y=0$ ou que ponto desce b) inicia de $y=0$ e termina $y=-1$, ponto continua descendo, c) inicia em $y=-1$ e chega em $y=0$ ou



Fonte: Elaborada pela autora (2013).

Figura 88 - Grupos 3.

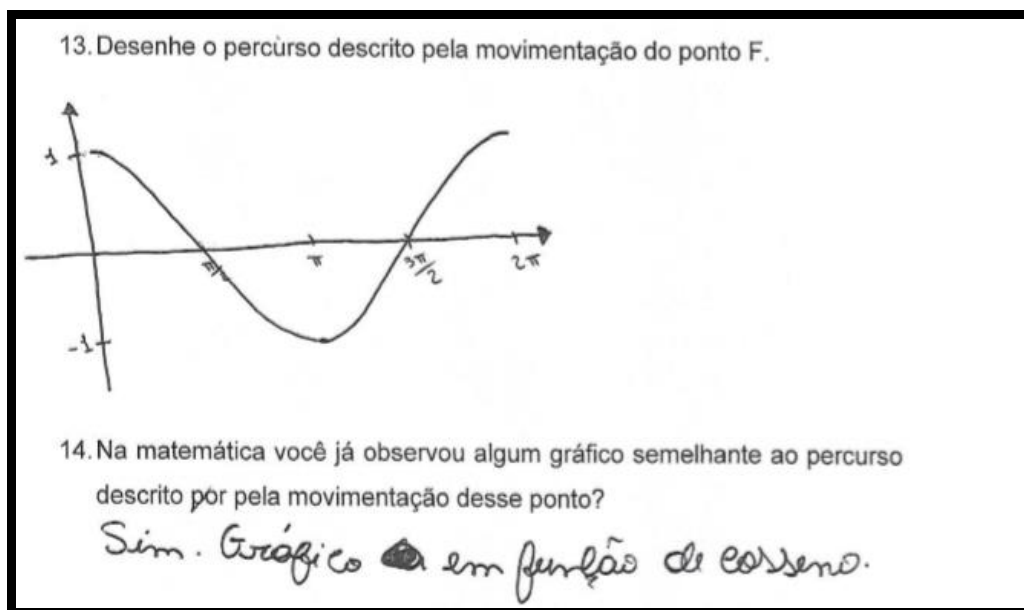


Fonte: Elaborada pela autora (2013).

Ainda se espera que o aluno perceba que os pontos F tocam as retas $y=1$ e $y=-1$ e que o rastro desse ponto descreve um desenho semelhante ao gráfico da função seno. Os grupos 1 e 3 conseguiram representar graficamente a função seno;

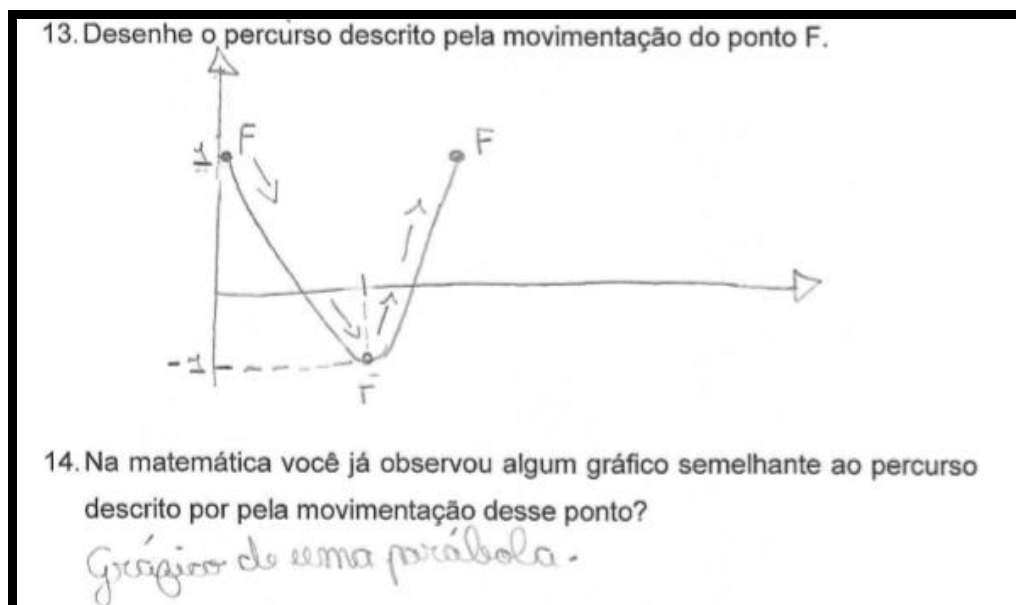
o grupo 2 supõe que o rastro descrito pelo movimento do ponto F era semelhante ao gráfico de uma função do 2º. Outra observação importante foi o fato de o grupo 3 ter apresentado uns fenômenos que podem ser modelados pela função seno.

Figura 89 - Grupo 1.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 90 - Grupo 2.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Conforme o diálogo abaixo, o grupo 2 conclui que o movimento do ponto F descreve uma parábola.

Júlio - Ele atinge o ponto mínimo. Coloca aí. Professora! Qual é o nome daquela figura que a gente usa para mostrar a equação de segundo grau?

Alcinéia - Parábola.

Júlio - É uma parábola, né?!

Alcinéia - Será? Veja aí.

Júlio - Mas é! O ponto mínimo faz um movimento aqui, ó, e volta e termina. É!

Bruna - Ahh! Carinha feliz ou triste.

Júlio - A aceleração é maior que 0.

Camila - Ele continua decrescendo.

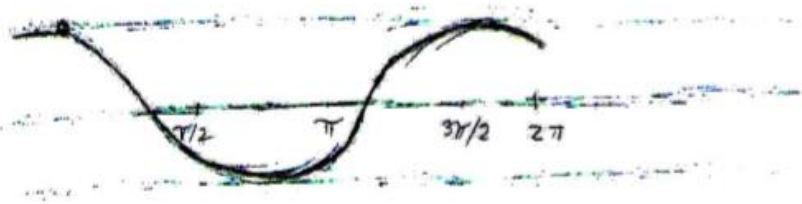
Júlio - Coloca que ele atinge o ponto mínimo. Melhor!

Alcinéia - Descreva o movimento e veja depois.

Júlio - Ele faz assim... Aí ele sobe. Ele atinge o ponto mínimo e faz um movimento crescente. Ele decresce o ponto mínimo... Ele começa a crescer e faz um movimento crescente. Ele cresce até atingir 1 novamente... é.

Figura 91 - Grupo 3.

13. Desenhe o percurso descrito pela movimentação do ponto F.



14. Na matemática você já observou algum gráfico semelhante ao percurso descrito por pela movimentação desse ponto?

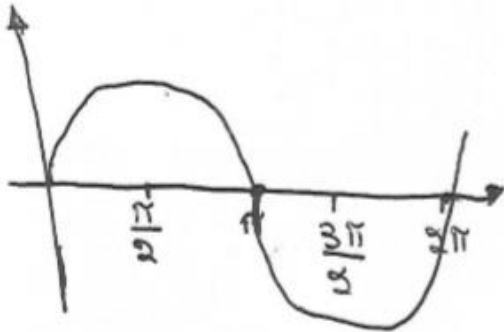
• Pode ser observado através dos movimentos das ondas, batimento cardíaco e respiração.

Fonte: elaborada pela autora (2019).

Na parte B da atividade, faremos um processo semelhante, quando vamos analisar o comportamento de um ponto J, cujo rastro vai descrever o gráfico da função seno.

Figura 92 - Grupo 1.

9) Desenhe o percurso descrito pela movimentação do ponto J.



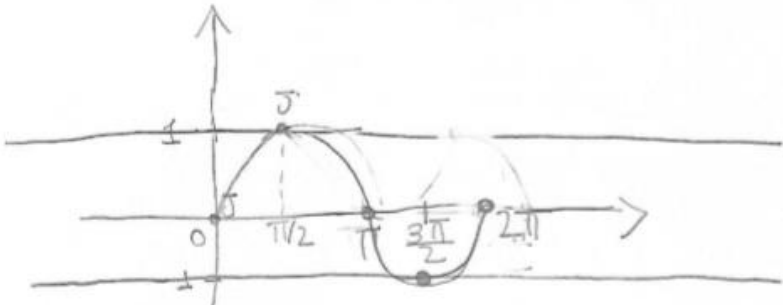
10) Na matemática você já observou algum gráfico semelhante ao percurso descrito por pela movimentação desse ponto?

Sim, o gráfico é em função do seno

Fonte: elaborada pela autora (2019).

Figura 93 - Grupo 2.

9) Desenhe o percurso descrito pela movimentação do ponto J.

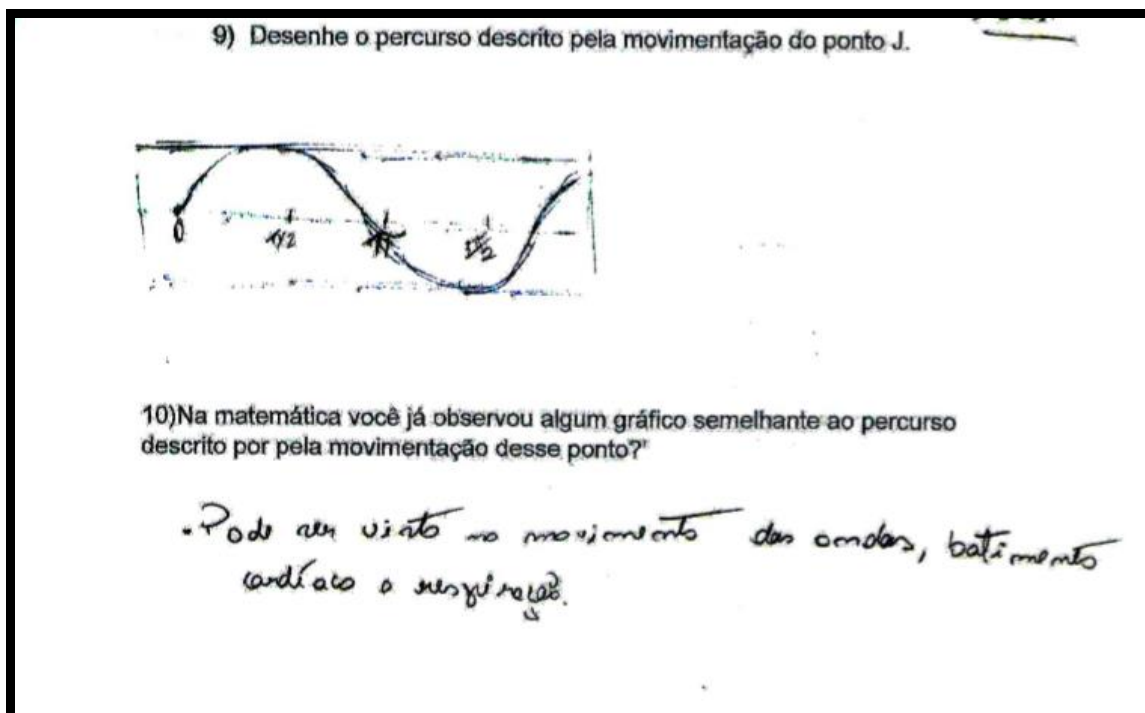


10) Na matemática você já observou algum gráfico semelhante ao percurso descrito por pela movimentação desse ponto?

MHS (Movimento Harmônico Simples).

Fonte: elaborada pela autora (2019).

Figura 94 - Grupo 3.



Fonte: elaborada pela autora (2019).

De um modo geral, acreditamos que o objetivo da questão foi atingido pelos grupos, pois todos conseguiram perceber que o gráfico descrito na janela de visualização 2 é gerado partir da movimentação de um ponto que é extremidade de um arco na circunferência trigonométrica. Nessa questão, os alunos precisaram fazer a análise dos registros figurais no ambiente GeoGebra e a transcrição dessas análises para os protocolos. Nessa passagem, foi necessário fazer a conversão entre os registros figurais para a linguagem natural, o registro gráfico tabular e o registro gráfico das funções.

Entendemos que a atividade permite que o aluno passe pelas etapas de ação, formulação e validação. Conforme esperado na análise *a priori*, a fase da ação ocorre na interação do aluno com o GeoGebra, em todos os momentos em que precisa manipular uma ferramenta para executar um comando. Por exemplo, nas questões de 1 a 6. Após iniciar a construção com o GeoGebra, o aluno precisará analisar esses processos de construção, criando conjecturas sobre a situação apresentada e tentando validá-las por meio da explicação das observações realizadas. Na fase da institucionalização a professora sintetizará o conhecimento abordado sobre o deslocamento desse ponto e a curva descrita por esse

descolamento como sendo as funções seno e cosseno.

A referida a atividade permite que o aluno passe pelas etapas de ação, formulação e validação. Para fazer essa ilustração vamos pegar alguns trechos do diálogo do grupo 2.

A fase da ação ocorre na interação do aluno com o GeoGebra, em todos os momentos em que precisa manipular uma ferramenta para executar um comando, como descrito no trecho abaixo.

A²: Vamos ver se vai.

A¹: Muda só o l aqui não. Aqui já foi.

A²: Ah foi no outro. Segmento OI.

A¹: O e outro é l?

A²: É.

A¹: Mas não são parênteses. É colchete.

A²: É. Não é esse. É esse. OI.

A¹: Tem que dar espaço?

A²: Não precisa, não.

....

P: Se você quiser pintar o segmento? Se não quiser, pode ficar sem pintar.

A³: Eu não estou vendo diferença nenhuma.

A¹: Eu também não.

A²: Bota esse, que é mais forte.

A¹: É, mas não está indo.

A³: É porque está branco.

A²: Vai naquele negócio de aumentar.

A¹: Caramba. Tá, vamos lá. Aqui. O que a gente fez? Ah, a espessura.

A²: É.

A¹: Transparência. Ué? O arco sumiu.

A³: Não, ele está aqui.

A¹: Ah. Sim, agora é copiar. Não estamos conseguindo copiar o arco. Ah, agora sim!

Vou escolher como exemplo da fase da formulação o momento em que foi solicitado que o grupo descrevesse o gráfico da função a partir do movimento do

ponto F e os estudantes chegam à conclusão de que o gráfico descrito é uma parábola.

A1: Sim. De $\pi/2$ para π . Aí a gente vai para aqui. Ele está no movimento decrescente. Aí depois ele atinge o ponto máximo. O ponto mínimo. É aquele negócio que a gente faz em função do segundo grau. Ele atinge o ponto mínimo. Bota aí. Professora? Qual o nome daquela figura que a gente usa para mostrar a função do segundo grau?

P: Parábola.

A1: É. Isso é uma parábola, não é?

P: Será?

A1: Aqui

P: Veja aí, veja direitinho.

P: Você vai descrever o movimento.

.

.....

Mesmo a com...

Nesse momento ele está tentando validar sua conclusão:

A1: O movimento, ele faz assim, ele desce assim e aí sobe. De π para $3\pi/2$ que é 270° , ele começa a subir, ele começa a crescer.

A2: Decrescente

A1: Em movimento crescente, ele atinge o ponto mínimo e depois faz o movimento crescente. Ele decresce, ponto mínimo. Não, ele começa a crescer. E faz o movimento crescente. Ele começa a crescer.

A2: É. Eu botei.

A1: OK. 270° para 360° , então é para cá. Eu não lembro como é. É ele cresce até atingir 1 novamente. Esqueci o nome desses dois pontos.

A2: Ponto mínimo e máximo.

A1: É, pode ser. Ponto mínimo e ponto máximo que é onde é o vértice, o ponto mínimo é onde muda o vértice.

A2: Então ele continua a crescer.

O que não foi confirmado pelo GeoGebra quando foi solicitada a visualização

do gráfico.

Na fase da ação ocorre na interação do aluno com o GeoGebra, em todos os momentos em que precisa manipular uma ferramenta para executar um comando, por exemplo, nas questões de 1 a 6. Após iniciar a construção com o GeoGebra, o aluno precisará analisar esses processos de construção, criando conjecturas sobre a situação apresentada e tentando validá-las por meio da explicação das observações realizadas. Na fase da institucionalização a professora sintetizará o conhecimento abordado sobre o deslocamento desse ponto e a curva descrita por esse deslocamento como sendo as funções seno e cosseno.

5.8.3 Atividade: Domínio, imagem e período da função trigonométrica

1ª parte – Construção de gráficos

- 1) Construa o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$

Passos para a construção:

Digite na caixa de entrada a função $f(x) = \text{sen}(x)$ e tecle “enter”.

Personalize a janela de visualização:

Do lado direito da Barra de ferramenta (parte superior da tela), clique na barra de estilo, depois, em “Exibir” ou esconder a “malha” e selecione a malha quadriculada.

Para colocar o eixo x na escala de 30° , clique sobre o eixo x com o botão direito do *mouse* e selecione com o botão esquerdo do *mouse* a opção “Janela de visualização”. Clique na aba “Eixo X” e selecione em “Unidade” a opção 30° . A opção “Distância” não deve estar selecionada.

Digite no campo de entrada a função: $f(x) = \text{sen}(x)$ e tecle Enter.

Crie o controle deslizante a de valor mínimo -1080° e máximo 1080° com incremento 15° .

Crie uma tabela com os valores com os valores de x e f(x) da seguinte maneira:

Na opção Exibir, clique em Planilha;

Na célula A1, digite = a e tecle Enter;

Em A2, digite =A1+ 30° e arraste para completar a 13ª célula;

Em B,1 digite = f(A1) e tecle Enter;

Arraste também B1 até completar a 13ª célula.

Na primeira linha, clique em inserir linha acima e digite entre duas aspas " x" na primeira coluna e "f(x)", na segunda coluna.

Clique na planilha com o botão direito do *mouse* e clique na opção Criar - tabela.

Clique na primeira célula e selecione até a última e clique em centralizar.

Clique na planilha com o botão direito do *mouse* e clique na opção Criar – lista de pontos

2) Movimente o controle deslizante a e observe o comportamento dos pontos sobre o gráfico de f(x). A partir da sua observação, determine o domínio e a imagem da função f(x), justificando sua resposta.

3) Digite na caixa de entrada as retas $x = -4\pi$, $x = -2\pi$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$; em configurações, coloque a cor para vermelho e estilo tracejado. Analise o comportamento da função em cada um desses intervalos. O que vocês observaram? Diante das observações, determine o período da função seno.

4) Abra um novo arquivo e repita os mesmos **passos para a construção** função $f(x) = \sin(x)$, digitando agora a função $g(x) = \cos(x)$.

Crie o controle deslizante a de valor mínimo -1080° e máximo 1080° com incremento 15° .

Crie uma tabela com os valores com os valores de x e f(x) da seguinte maneira:

Na opção Exibir, clique em Planilha;

Na célula A1, digite = a e tecle Enter;

Em A2, digite =A1+30°, e arraste para completar a 13ª célula;

Em B1, digite = f(A1) e tecle Enter;

Arraste também B1 até completar a 13ª célula.

Na primeira linha clique em inserir linha acima e digite entre duas aspas "x" na primeira coluna e "g(x)", na segunda coluna.

Clique na planilha com o botão direito do *mouse* e clique na opção Criar - tabela.

Clique na primeira celular e selecione até a última e clique em Centralizar.

Clique na planilha com o botão direito do *mouse* e clique na opção Criar – lista de pontos.

Movimente o controle deslizante a e observe o comportamento dos pontos sobre o gráfico de $g(x)$. A partir da sua observação, determine o domínio e a imagem da função $g(x)$, justificando sua resposta.

Digite na caixa de entrada as retas $x = -4\pi$, $x = -2\pi$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$. Em configurações, coloque a cor para vermelho e estilo tracejado. Analise o comportamento da função em cada um desses intervalos. O que vocês observaram? Diante das observações, determine o período da função cosseno.

3) Comparando os dois arquivos, o que vocês observaram em comum em relação às duas funções?

5.8.3.1 Análise a priori

No processo de ensino de funções trigonométricas, após definir o domínio, a imagem e o período da função trigonométrica, muitas vezes os alunos memorizam as definições sem compreender o conceito. Por acreditarmos, assim como Durval (2013), que a articulação entre esses diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática (p. 22), é que elaboramos essa atividade. O objetivo da atividade consiste em determinar o domínio a imagem e o período da função trigonométrica e explorar, através do GeoGebra, o deslocamento de alguns pontos sobre o gráfico da função seno e da função cosseno. À medida que esses pontos se deslocam sobre o gráfico da função na janela de visualização, seus valores são modificados na janela de álgebra e na planilha.

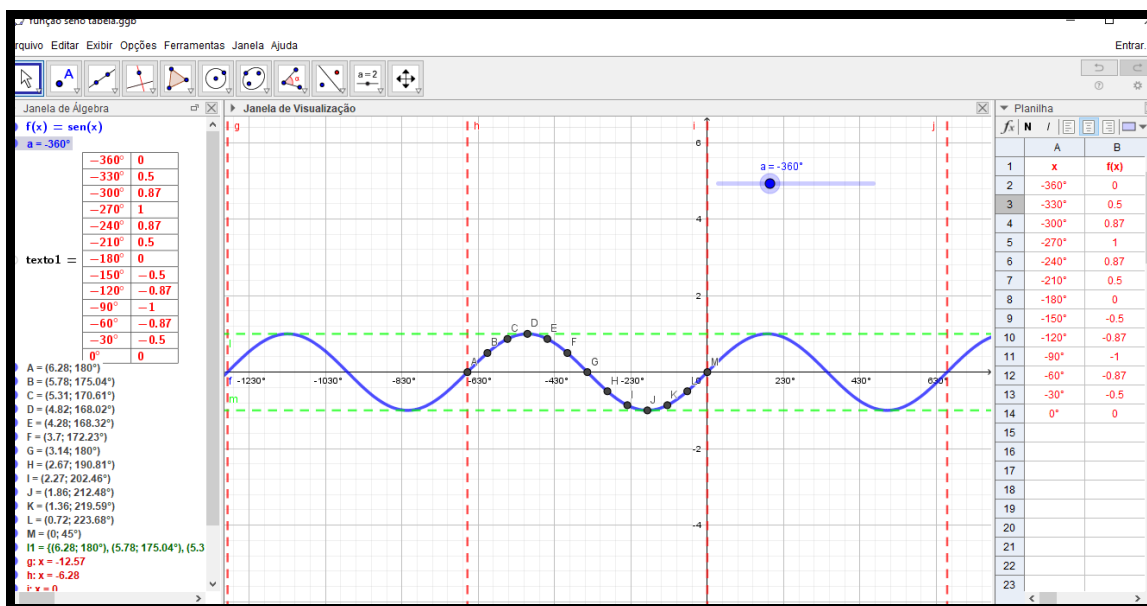
Os alunos farão a construção do gráfico das funções seno e cosseno, inserirão sobre os gráficos dessas funções 13 pontos e criarão uma planilha dinâmica com esses pontos. As abscissas são os ângulos que estão variando de -1080° a 1080° (precisamos estabelecer no GeoGebra um intervalo) e as ordenadas são dadas pelos valores dos senos e desses ângulos, que variam dentro do intervalo de -1 a 1 . Como esses pontos podem fazer o deslocamento por todo o gráfico da função, espero que os alunos concluam que as abscissas desses pontos não têm nenhuma restrição, assumindo valores para qualquer ângulo dentro desse intervalo estabelecido, que podem ser ampliados para todo o conjunto real. Sendo assim, o domínio da função é \mathbb{R} .

As variáveis didáticas da questão são:

- Domínio da função seno e da função cosseno;
- Imagem da função seno da função cosseno;
- Períodos das funções seno e cosseno.

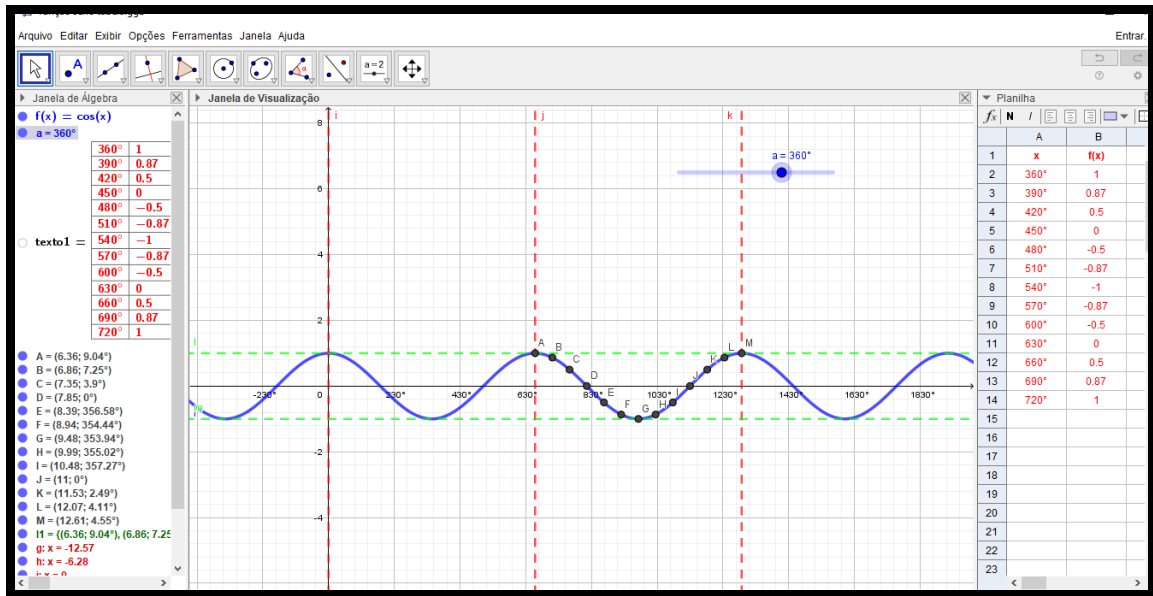
Nessa questão, tive o cuidado de detalhar os passos de construção e personalização da janela de visualização, pois não tínhamos trabalhado anteriormente com tabelas. As construções esperadas são as seguintes:

Figura 95 - Função seno.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 96 - Função cosseno.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Acreditamos que a atividade proposta possibilita ao aluno passar pelas fases descritas na Teoria das Situações Didáticas. A fase da ação sempre ocorre com a interação entre o aluno e o GeoGebra. Por exemplo, quando é solicitada a construção da planilha, o estudante deve inserir os pontos sobre o gráfico da função. Feita a construção, o aluno precisa refletir, por exemplo, sobre o deslocamento dos pontos sobre o gráfico da função, o que está ocorrendo com planilha à medida que esses pontos se deslocam sobre o gráfico, construindo, desta maneira, os elementos necessários à formulação da situação. A fase da validação ocorre nas questões, quando o aluno precisará utilizar de algum mecanismo de prova para justificar suas observações. Na institucionalização, desejamos formalizar o domínio, a imagem e o período da função.

5.8.3.2 Análise *a posteriori*

Essa atividade tem como objetivo trabalhar os conceitos de domínio, imagem e período da função seno da função cosseno. Para facilitar a compreensão, os alunos construirão um arquivo no qual trabalharão simultaneamente com os três registros da função trigonométrica: a expressão algébrica, a visualização geométrica e o registro tabular. Conforme o esperado na análise *a priori*, os grupos conseguiram realizar as construções, tendo, no entanto, dificuldade no conceito de domínio de

uma função, como veremos descrito no diálogo abaixo:

A¹: O domínio. Você lembra? O domínio de uma função é sempre o seu ponto de partida, ou seja, $b + a$. Se o elemento x pertence a A , dizemos que o y é imagem.

A²: Eu não estou entendendo nada.

A¹: Então deixa eu ver. Então o domínio pertence à imagem.

A²: Professora?

A¹: Domínio e imagem. Aqui o domínio sempre deve coincidir com o ponto de partida de a . Se tivermos um elemento de a que não parta. Mas aqui não tem esse tipo de coisa. Eu dei isso aqui.

A²: No 8º ano. Então eu não lembro.

Nesse momento foi necessário fazer uma intervenção, pois o grupo não estava lembrando o que é domínio de uma função.

A¹: Professora, eu não me lembro o que é domínio e imagem.

P: Quando você fala de domínio, você quer saber se existe alguma região de restrição de valor de x para essa função? A pergunta é esta. Tem alguma restrição? Se tem, qual é ela? Se não tem?

A¹: Restrição?

P: É. Restrição. Eu posso colocar qualquer x ? Posso colocar qualquer valor? Bote os ângulos que você já conhece, que aí fica melhor. Comece com zerinho.

A professora percebeu que o que estava dificultando a resolução da questão era o fato de o grupo não lembrar o conceito de domínio de função real. Sendo assim, a docente utilizou dois exemplos de funções para relembrar o conceito, como pode ser visto no diálogo a seguir.

Por exemplo, a função do 2º grau tem o $y = x^2$, eu posso colocar qualquer valor de x ?

A²: Não. Não pode.

P: O que isso significa, qualquer valor de x ? Eu posso colocar valor negativo para x ?

A¹: Pode.

P: Eu posso colocar -1 e achar o valor de y. Posso colocar o 1. Posso colocar o zero?

A1: É. É zero.

P: Eu posso colocar uma raiz?

A1: Pode.

P: Posso. Eu posso colocar uma fração?

A1: Pode.

P: Posso. Então eu posso colocar qualquer valor para x e isso significa que o domínio é R.

A1: Ah.

P: Eu posso encontrar a raiz negativa de -2, no que a gente estudou até o momento? Pode calcular raiz negativa?

A1: Não.

P: Não. Então qual é o domínio dessa função? É R – os negativos.

A2: Hum.

P: Então ele diz que é R+.

A1: Entendi.

Ao final o grupo conseguiu responder à questão proposta.

Nesse diálogo, notamos o quanto o GeoGebra foi fundamental para a construção do conhecimento dos alunos, pois, a partir da manipulação do controle deslizante, os pontos são deslocados sobre o gráfico, alterando, assim, suas coordenadas, conforme veremos no diálogo do Grupo 2, a seguir:

A1: Professora, o que era domínio e imagem? O que é domínio e imagem? Eu não me lembro.

P: Essa é a pergunta para você associar a ideia do domínio. E para cada valor desse x, existem quais y correspondentes? Essa é a ideia que você associa para a imagem.

A1: Ah, entendi. Cada valor de x. Então o x, o domínio é 30°, porque o x, ele tem uma coisa natural aqui. Ele faz sempre de 30 em 30°, está vendo? 1080, 1050, 30°.

A3: E o y?

A¹: E o y? Ele vai. O valor eu acho que ele aumenta até 1 e aí depois ele diminui até zero, e assim sucessivamente. Está vendo? Ele aumenta e depois diminui.

A³: Fala aí de novo o x.

A¹: O x, para que ele seja... todos têm que ter em comum que a soma da 30° os ângulos, entendeu? Tipo $1080 + 30^\circ + 50$.

A³: Ângulos?

A¹: É. Que eles são dependentes de 30°.

A²: Ele vai aumentando?

....

A¹: É. É um movimento. Aí aqui é 450°, aí vai -1, -0,5 e 0. Ah, zero aqui. Está vendo?

A²: Sim.

A¹: Zero. Aí chega 0,5; 0,87. Depois, vai 0,87; 0,5 e 0.

A²: Zero não é no i, não?

A¹: É, não. Zero é no j. Aí depois, vai -0,5; -0,87; -1.

A²: -1

A¹: Ele atinge 1. O ponto mínimo é -1 e o máximo, 1. E ele vai mudando isso.

Cada um desses.

A²: Cada um dos ângulos, né?

A¹: É.

A²: Os ângulos vão mudando e aí muda.

A¹: É. Aí aqui é 30, 90, entendeu? Aqui.

A²: Hum, hum. Entendi.

Nessa questão ficou muito claro que, com a utilização do GeoGebra, os grupos concluíram o conceito de domínio e imagem na função. Observe a conclusão, por exemplo, do diálogo do grupo 3:

A¹: Agora temos que determinar o domínio e imagem da função

A²: Como vamos fazer isso?

A¹: Ó, o domínio é isso aqui, e a imagem, isso aqui (provavelmente apontando para o arquivo).

A²: Qual vai ser a imagem aqui?

A¹: Acho que isso aqui.

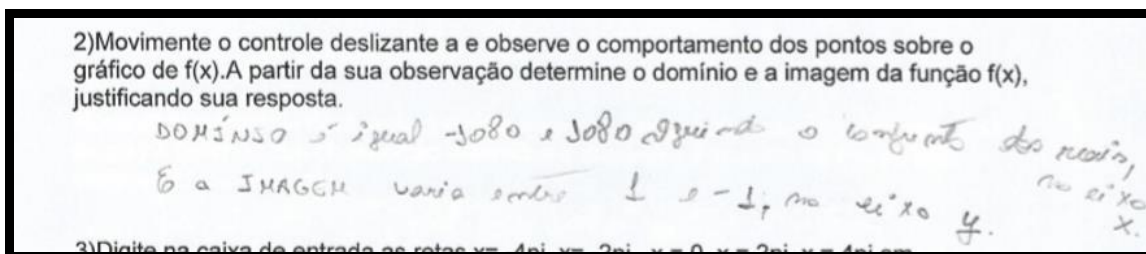
A² e A¹: Professora!

A¹: Em relação ao domínio e imagem

A¹: O domínio vai ser igual a -1080° e 1080° , segundo o conjunto dos números reais e imagem varia entre -1 e 1 .

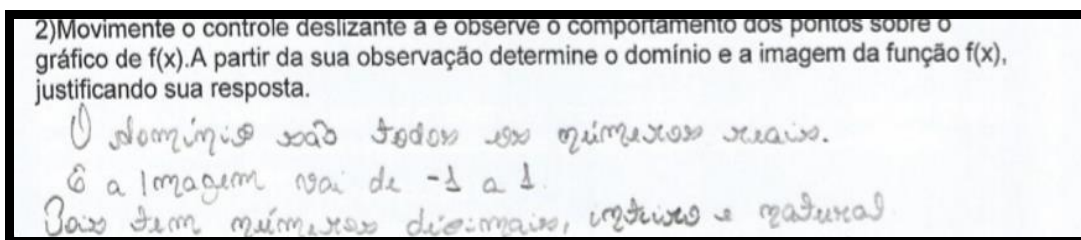
Outra observação a ser feita: nos protocolos descritos pelos alunos que compreendem que a imagem da função está estabelecida entre uma faixa de valores e concluíram que o período da função é:

Figura 97 - Grupo 3.



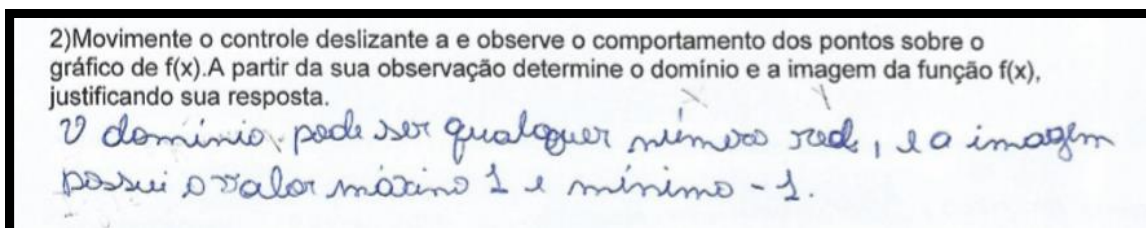
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 98 - Figura 96 – Grupo 1.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 99 - Grupo 2.

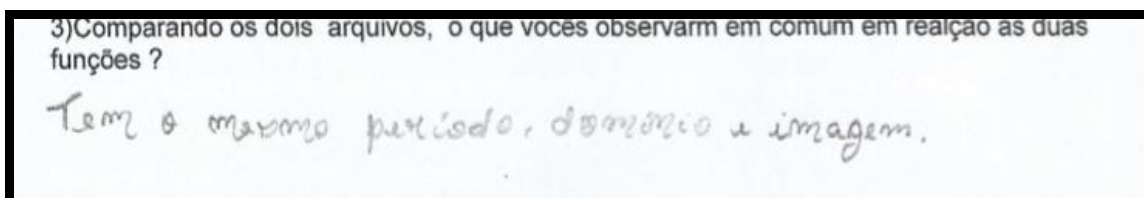


Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Também solicitamos que os alunos determinassem o período da função. Os

três grupos concluíram que o período é 2π . Solicitamos ainda que refizessem os mesmos passos e determinassem o domínio e a imagem e período para função $f(x) = \cos(x)$. Chegaram à seguinte conclusão:

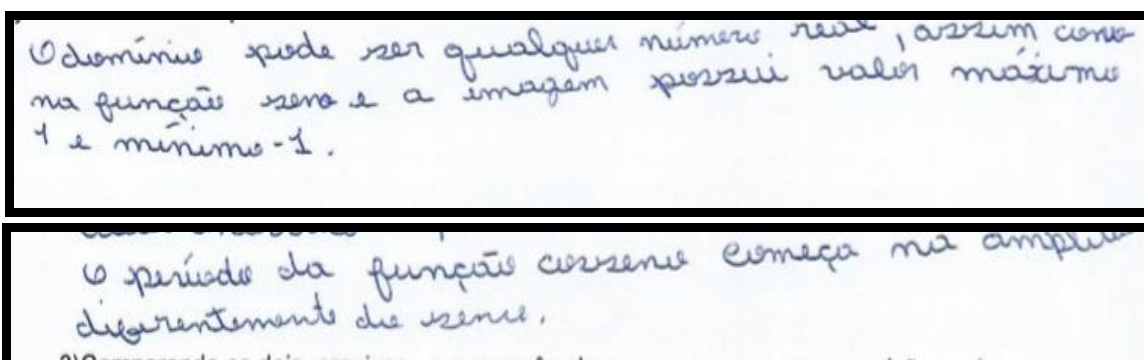
Figura 100 - Grupo 2.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Na transcrição do grupo 1, os estudantes trazem um conceito não esperado, que é a relação entre as amplitudes das funções.

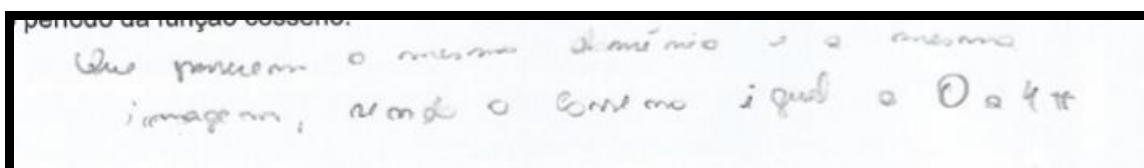
Figura 101 - Grupo 1.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

No registro do grupo 3, os estudantes consideram que o período da função cosseno é diferente da função seno.

Figura 102 - Grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Confrontando os resultados com a análise *a priori*, de modo geral os conceitos de domínio, imagem e período da função seno foram compreendidos entre os três grupos, e ampliados para função cosseno. Apenas o grupo 3 interpretou o período da função cosseno como 4π . Dentro da TSD, pequenos equívocos são esperados e a formalização dos conceitos foi realizada pela professora ao final das atividades. Fica claro, através dos diálogos, que os alunos conseguiram vivenciar as fases adidáticas, formulação e validação, sendo que a face da ação ocorreu durante toda a atividade, quando o aluno precisou interagir com as ferramentas do GeoGebra.

5.8.4 Atividade – Roda-Gigante

A roda-gigante é uma das atrações mais tradicionais de todo parque de diversões. Imagine uma roda-gigante com 12 cadeiras igualmente distribuídas ao longo da circunferência, que mede 9 m de raio. Uma estrutura de ferro sustenta a roda-gigante a partir do seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro da roda ao solo é de 10m.

Abra o arquivo da *atv6 GGB*. Nele você encontrará uma animação no GeoGebra que modela a roda-gigante descrita na questão.

- 1) Considerando $\alpha = 0^\circ$. Em qual ponto inicia o gráfico da função descrita pelo movimento da roda-gigante?
- 2) Para qual valor de α a função completa uma volta? Transforme esse valor em radianos.
- 3) Faça um esboço do gráfico que representa o movimento da roda-gigante no intervalo de $[0, 2\pi]$.
- 4) Qual função trigonométrica (seno ou cosseno) representa o gráfico descrito pelo movimento da roda-gigante? Justifique a resposta.

Faça algumas observações em relação aos controles deslizantes: d , n , r e α :

- 5) Fixando os demais controles deslizantes para $\alpha=0^\circ$, $r=9$ e $d= 1$, o que ocorre com a roda-gigante quando manipulamos o controle deslizante n ?
- 6) Fixando os demais controles deslizantes para $\alpha=0^\circ$, $n=12$ e $d= 1$, o que ocorre com a roda-gigante quando manipulamos o controle deslizante r ?
- 7) Fixando os demais controles deslizantes para $\alpha=0^\circ$, $r=9$ e $n= 12$, o que

ocorre com a roda-gigante quando manipulamos o controle deslizante d ?

8) Fixando os demais controles deslizantes para $r=9$ e $d=1$, $n=12$, o que ocorre com a roda-gigante quando manipulamos o controle deslizante α ?

Fixando o valor de $d=1$, $r = 9$, $n = 12$

9) Qual o valor máximo e mínimo atingido pelo gráfico? Qual a imagem da função?

10) Qual é período da função?

11) Seja α o ângulo determinado pelo segmento AO em relação à sua posição inicial, $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$ a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo. Dadas as funções $f(\alpha) = a + b \cdot \text{sen}(c\alpha)$ e $g(\alpha) = a + b \cdot \text{cos}(c\alpha)$ a partir das suas observações anteriores, qual das funções, $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$, descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de α ?

12) Qual a altura da roda-gigante para $\alpha = 90^\circ$?

13) Qual a altura da roda-gigante para $\alpha = 180^\circ$?

14) Sabendo que podemos calcular o período da função por $p = \frac{2\pi}{|c|}$, determine

o valor de c .

15) Como a altura da roda-gigante é dada em função de $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$, escolha uma das tabelas e complete:

α	$\text{sen}(\alpha)$	$a+b \text{ sen}(\alpha)$	$f(\alpha)$
90°			
180°			

α	$\text{cos}(\alpha)$	$a+b \text{ cos}(\alpha)$	$g(\alpha)$
90°			
180°			

16) Como podemos expressar através de uma função trigonométrica a altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio?

5.8.4.1 Análise a priori

Nessa atividade, o conceito de função trigonométrica é associado aos movimentos da roda-gigante, que é uma distração tradicional nos parques de diversão. Tem como objetivo reconhecer e aplicar o conceito de funções trigonométricas na resolução de problemas associados a fenômenos periódicos. Desejamos com essa atividade que o aluno perceba a periodicidade do movimento da roda-gigante, observando que um passageiro sentado em uma cadeira do equipamento atinge várias vezes uma determinada altura, à medida que são dadas voltas completas e que esse movimento é descrito por um gráfico da função seno. Queremos também que o estudante utilize os conhecimentos de trigonometria associados às observações realizadas na construção no GeoGebra para determinar qual lei define a função trigonométrica que representa a altura de uma cadeira em relação ao solo, durante um instante qualquer do movimento da roda.

A questão foi extraída do livro *Matemática: Ciência e Aplicação, 2: Ensino Médio* /Gelson Iezz... [et al.]. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010, p. 62. Achei a questão interessante porque os alunos costumam ter dificuldade em associar as funções trigonométricas a fenômenos periódicos e em compreender o comportamento dessas funções. Para facilitar essa compreensão, decidimos fazer a construção dinâmica da roda-gigante no Geogebra. Como o processo de construção é longo e detalhado, nesse primeiro momento, vou optar por trabalhar com o arquivo já pronto. Através da manipulação dos controles deslizantes, desejamos que os alunos determinem o período da função, a imagem da função, e percebam que cada um dos controles deslizantes representa um parâmetro na função $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e consiga, ao final das observações, determinar a seguinte lei de formação da função: $f(x) = 9 \cdot \text{sen}(x) + 10$, para $d=1$, $r = 9$, $n = 12$, $\beta = 0^\circ$. Nessa questão estarei trabalhando a conversão entre registro, com a observação que o ponto de partida não é a expressão algébrica para determinar o gráfico da função, mas a partir do gráfico encontrar sua expressão algébrica.

Variáveis Didáticas:

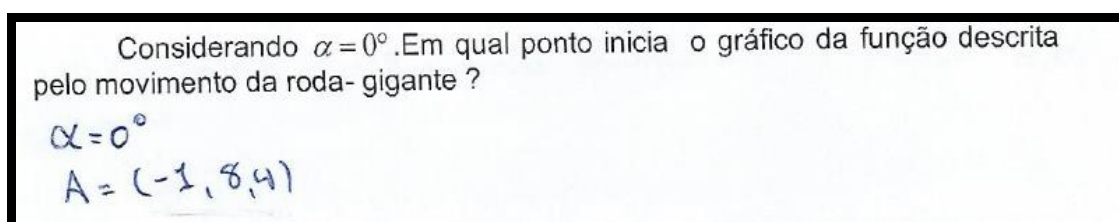
- Período da Função
- Imagem da Função
- Lei de Formação da Função

Quanto às fases adidáticas propostas neste trabalho, entendemos que a atividade permite ao aluno passar pelas etapas de ação, formulação e validação. A fase da ação ocorre quando o aluno começa a manipular os controles deslizantes. Após iniciar essa manipulação, o aluno começa a conjecturar sobre a situação proposta, construindo, dessa maneira, os elementos necessários à sua formulação, tentando validar suas conjecturas por meio da explicação das observações realizadas. Na fase da institucionalização, a partir dos estudos dos parâmetros, será feita a dedução algébrica da lei de formação da função da lei de formação da função que descreve a função trigonométrica e que caracteriza a altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio.

5.8.4.2 Análise a Posteriori

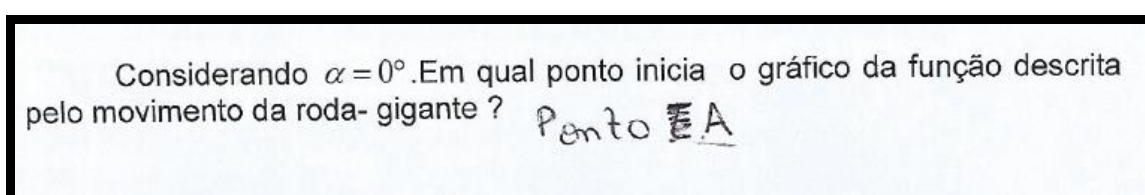
De acordo com a análise *a priori*, esperava-se que os grupos determinassem o ponto que inicia o gráfico da função descrita pelo movimento da roda-gigante, considerando $\alpha = 0^\circ$. As três equipes identificaram que começa no ponto A, sendo que o grupo 1 das equipes colocou a coordenada do ponto A = (-1, 8,4), não separando as coordenadas por “;”. O grupo 2, apenas disse que começava no ponto A. O terceiro grupo equipe interpretou “ponto” como sendo a distância no eixo y, apresentando como resposta 8,4 cm.

Figura 103 - Grupo 1.



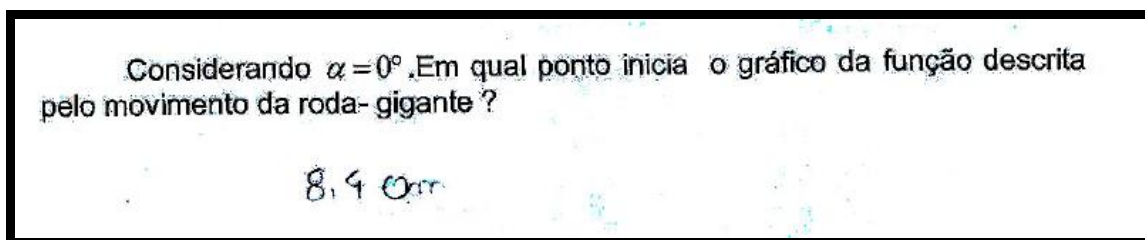
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 104 - Grupo 2.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 105 - Grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

As respostas dos grupos nos levam a observar que seria importante um tratamento no registro da língua natural que levasse o aluno a perceber que uma coisa é o objeto matemático (ponto) e a outra coisa é seu representante (coordenadas cartesianas). Fazendo uma releitura do enunciado da questão, percebemos que cabem essas diferentes interpretações. Dessa forma, pode-se substituir no enunciado da questão a palavra “ponto” pela expressão “coordenadas do ponto”.

Na segunda questão, perguntamos: para qual valor de α a função completa uma volta? Transforme esse valor em radianos.

A1: “No mesmo lugar. Analisando isso aqui, é como se isso fosse o círculo trigonométrico”.

A2: “Qual o valor?”

A1: “2 pi. 360 graus.”

Diálogo 2:

A2: 360

A1: Você viu isso?

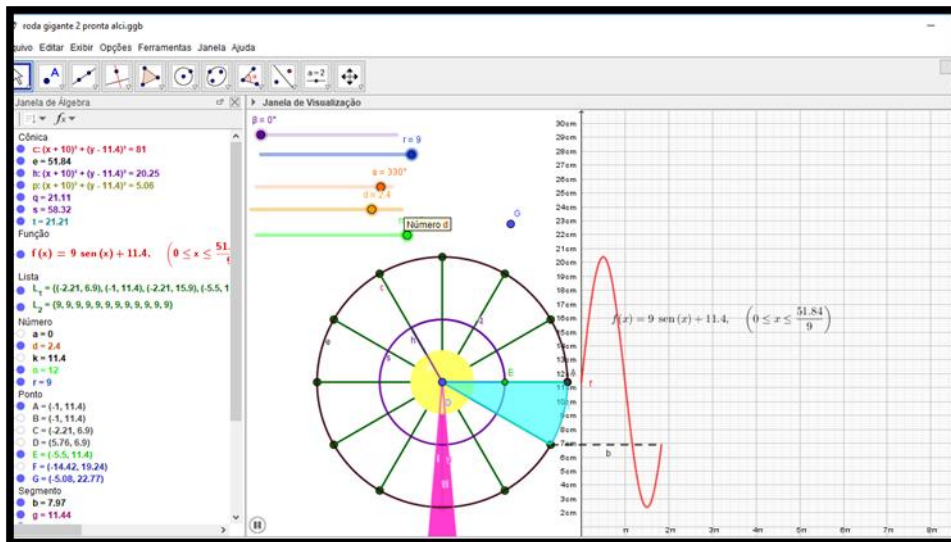
A2: Porque dá uma volta.

Dialogo 3: Não está audível.

Na questão a, o “termo completa uma volta” se refere a um período da função, como foi esclarecido pela professora aos alunos. Percebemos que os alunos já têm alguns conceitos formalizados, apesar de estarem manipulando o controle deslizante α , em que se tem que para $\alpha = 180^\circ$ e de nessa manipulação não terem

se dado conta de que o ângulo α é responsável pela movimentação de um dado ponto da roda-gigante que se move pelo gráfico da função que representa o giro da roda-gigante.

Figura 106 - Atividade Roda-Gigante.

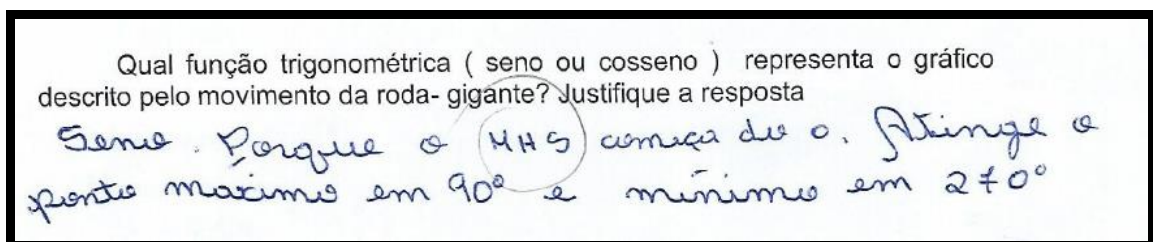


Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Na terceira questão, pedimos para que os estudantes esboçassem o gráfico que representa o movimento da roda-gigante no intervalo de $[0, 2\pi]$. Como esperado na análise *a priori*, todos os grupos conseguiram fazer o esboço do gráfico.

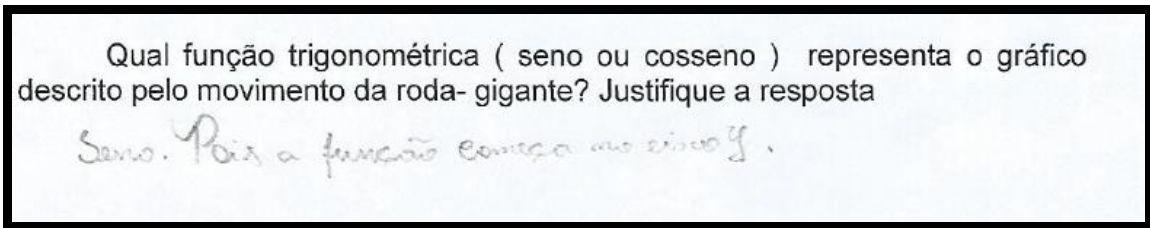
Na questão 4, perguntamos: a função trigonométrica (seno ou cosseno) representa o gráfico descrito pelo movimento da roda-gigante? Todos os grupos responderam: a função seno.

Figura 107 - Grupo 1.



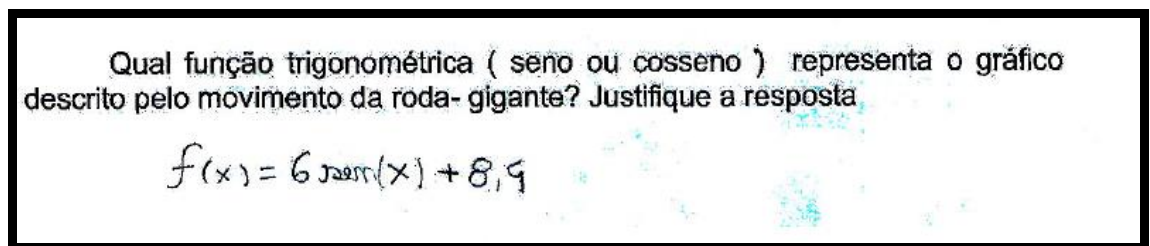
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 108 - Grupo 2.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 109 - Grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Nesse caso, há uma confusão entre o objeto matemático função seno com um fenômeno que pode ser modelado por essa função trigonométrica, que movimento harmônico simples (MHS), o que afirmou o grupo 1. Percebemos através do diálogo que o grupo consegue observar o comportamento da função, analisando os valores do seno e do cosseno, conforme a transcrição a abaixo:

“Se fosse o cosseno o ponto máximo não estaria em 90° não. O ponto máximo estaria no zero e o mínimo no 180° ”.

Acreditamos, no caso do grupo 2 que, apesar de terem justificado que a função é seno porque começa no eixo y, eles tenham testado os valores dos ângulos para verificar se dava seno o cosseno, conforme se verifica no diálogo abaixo.

A2: “A gente tem que botar os valores e fazer como Seno ou como Cosseno”

A1: “Botar os valores do quê?”

A2: “Essas medidas.”

A2: “A gente pode pôr em Radianos ou então ver o Seno.”

As justificativas nos levaram a concluir que o grupo 3 utilizou a ferramenta do GeoGebra “exibir objeto” para identificar a lei de formação da função trigonométrica.

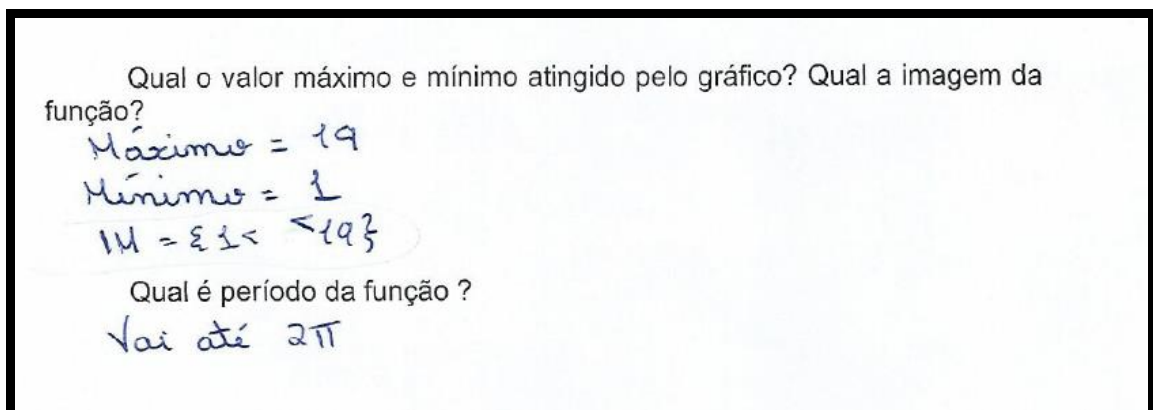
O conjunto de respostas das questões 5, 6, 7 e 8 sobre as observações dos controles deslizantes mostra que os três grupos afirmam que o controle n “muda os ângulos”. Acreditamos que com tal afirmação os estudantes queiram dizer que mudam as subdivisões da circunferência que está associada às cadeiras. O controle deslizante r aumenta e diminui o raio da roda-gigante. O controle deslizante d muda a altura da roda-gigante. Os grupos 2 e 3 perceberam que, ao manipular o *software*, há uma relação direta entre o controle deslizante α e gráfico da função $f(x)$. o grupo 1 apenas afirmou que o controle deslizante α é responsável por fazer a roda-gigante girar.

Para questões posteriores, fixamos os controles deslizantes para os seguintes valores:

$$d=1, r = 9, n = 12$$

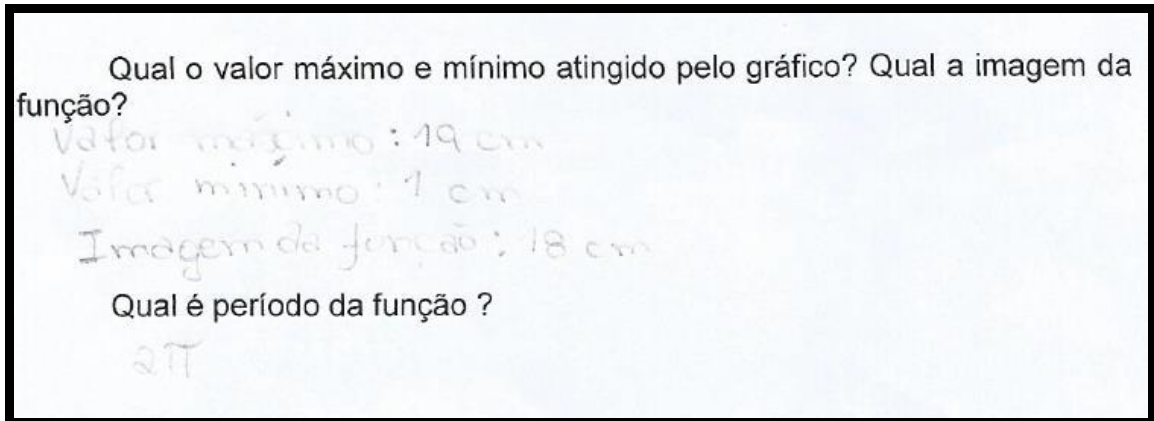
Na questão 9, tratei da imagem da função e na questão 10, tratei do período da função. Quando perguntei sobre o período da função, não houve dúvidas e todos afirmaram corretamente que é 2π . Vamos analisar as respostas dadas em relação à imagem, conforme as figuras abaixo:

Figura 110 - Grupo 1.



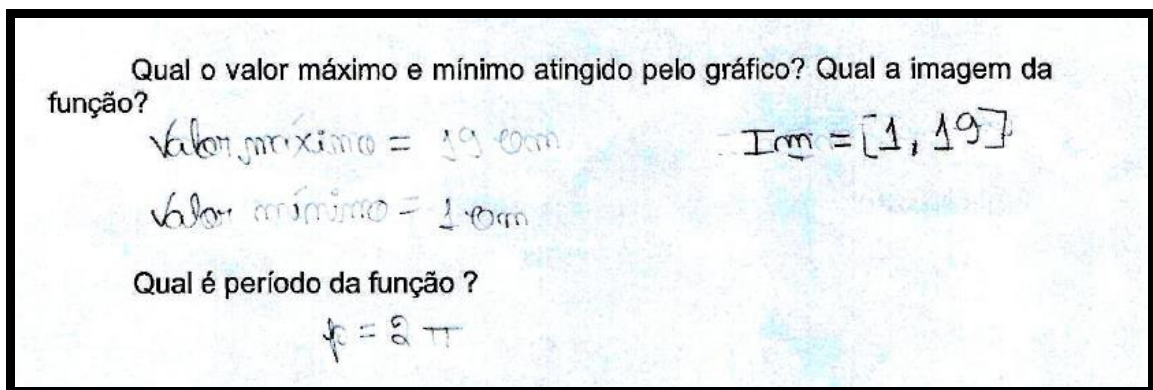
Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Figura 111 - Grupo 2.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 112 - Grupo 3.



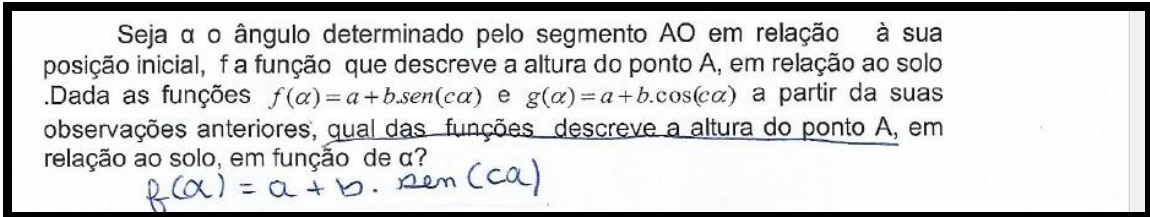
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Percebemos que os grupos souberam identificar o valor máximo e mínimo da função, mas dois grupos apresentaram dificuldade na representação da imagem. O grupo 1 consegue identificar que imagem da função varia no intervalo de 1 a 19, mas não soube representar de forma simbólica corretamente esse intervalo. O grupo 2 apresentou dificuldade no conceito de imagem, pois a resposta apresentada leva a indícios de que estão entendendo a imagem como sendo o tamanho do intervalo e não um conjunto a ser representado pelo intervalo real, em nosso exemplo $[1, 19]$. O grupo 3 não apresentou dificuldade no entendimento do conceito e da representação da imagem.

A questão 10 é subdividida em etapas, de modo que ao final os estudantes consigam escrever a representação algébrica da função f , que descreve a altura de um determinado ponto A em relação ao solo, considerando α o ângulo determinado

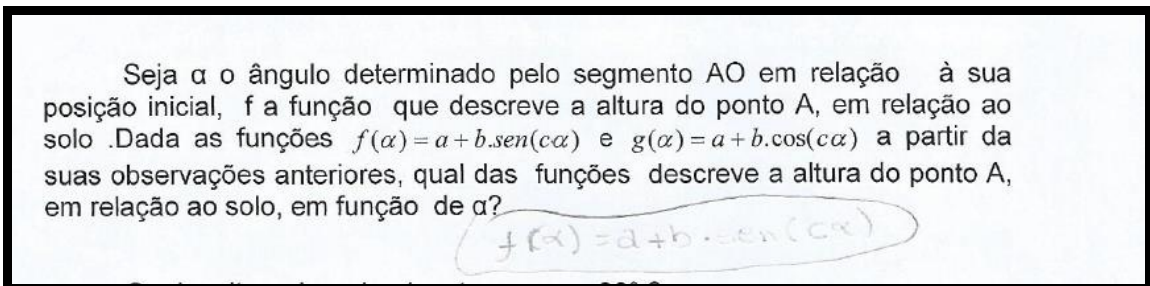
pelo segmento AO em relação à sua posição inicial. Começamos perguntando qual das funções $f(\alpha) = a + b \cdot \text{sen}(c\alpha)$ ou $g(\alpha) = a + b \cdot \text{cos}(c\alpha)$ descreveria essa altura, e todos os grupos responderam que seria a função $f(\alpha) = a + b \cdot \text{sen}(c\alpha)$, conforme veremos abaixo.

Figura 113 - Grupo 1.



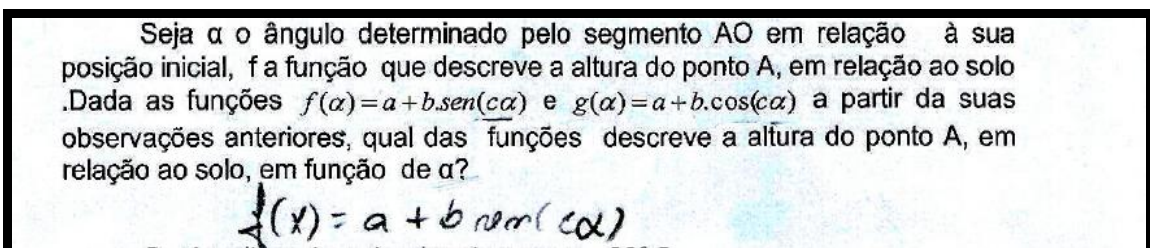
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 114 - Grupo 2.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 115 - Grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Feita a escolha da função, pedimos que os alunos observassem a altura da roda-gigante para $\alpha = 90^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$ e depois preenchessem uma das tabelas, conforme a escolha da função $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$.

Observe um dos diálogos do grupo 2.

Diálogo do grupo 2:

Professora: “Aqui você já tem um sistema. Você já tirou o A”.

A1: “Sim, porque eu vi no computador a altura e coloquei aqui” .

Professora: “Mas a ideia é essa mesmo”.

A1: “Aí eu fui fazer a função”.

Fase da formulação do grupo 2:

A1: “Mas a altura seria a distância?”.

A2: “A altura do centro ao solo é 10”.

A1: “Não, a altura do centro ao solo é 9”.

A1: “Seria 10, mas a gente tá começando com o 1, tá ligado?”.

A2: “Ah, então é 9”.

A2: “Então esse 10 aqui não existe”.

A1: “Então eu acho que tá certo agora”.

A1: “ $18-b+bx1$ ”.

A1: “É igual a 18”.

Diálogo do grupo 3:

A1: “Cadê o \hat{A} ?”.

A2: “Toca nele que ele aparece”.

A2: “B está no 19 cm e o \hat{A} está onde?”.

E o grupo 3 consegue validar sua resposta, conforme o diálogo:

A1: “ 90° o $\text{sen}(x)$ dele vai ser 1. O $a+b \times \text{sen}(x)$ vai ser $a+b \times 1$. E o $f(x)$ como sabemos que o sen de x é 1 a gente faz $1 \times 9 = 9 + 10$ que dá 19”.

A1: “Com 180° o $\text{sen}(x)$ vai ser 0, então $a+b \times 0$. E o $f(x)$ vai ser 10”.

Como todos os grupos escolheram a função $f(\alpha) = a + b \cdot \text{sen}(c\alpha)$ e fizeram o preenchimento da primeira tabela, seguem os resultados encontrados:

Figura 116 - Grupo 1.

de um ponto

Como a altura da roda-gigante é dada em função de $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$,
 escolha uma das tabelas e complete :

α	sen(α)	$a+b \text{ sen}(\alpha)$	$f(\alpha)$
90°	1	$a+b \cdot 1$	19
180°	0	$a+b \cdot 0$	10

$$19 = a+b$$

$$10 = a$$

$$19 = 10+b$$

$$b = 9$$

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 117 - Grupo 2.

de um ponto A

Como a altura da roda-gigante é dada em função de $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$,
 escolha uma das tabelas e complete :

α	sen(α)	$a+b \text{ sen}(\alpha)$	$f(\alpha)$
90°	1	$a+b \cdot 1$	19
180°	0	a	10

$$a = 9$$

$$b = 10$$

$$a = 1$$

$$b = 18$$

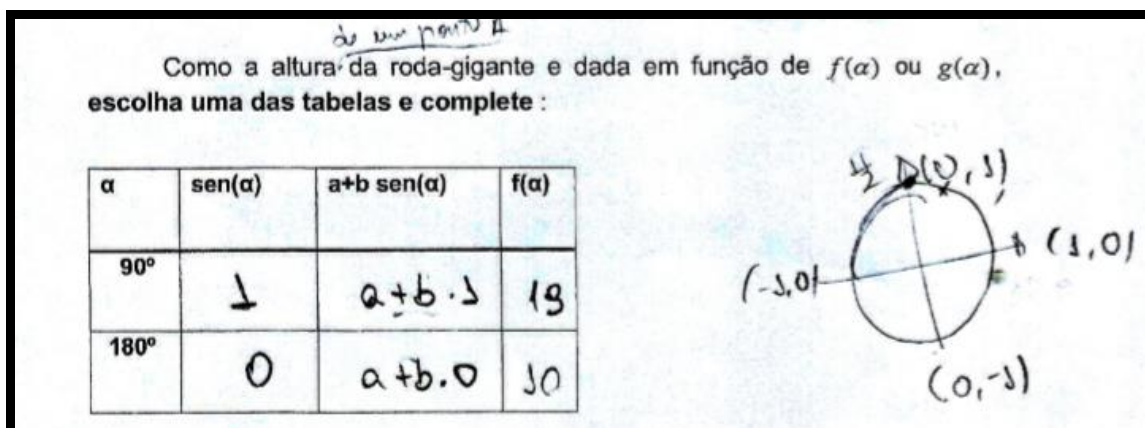
$$9 - \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - 9$$

$$a = 1$$

$$b = 18$$

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 118 - Grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Ao analisar as tabelas preenchidas, percebemos que os grupos, assim como esperado *a priori*, conseguiram fazer a conversão do registro gráfico para o tabular e algébrico, pois conseguiram visualizar, no gráfico da função descrita pelo movimento da roda-gigante, os valores correspondentes aos senos dos arcos de 90° e 180° e fizeram a substituição desses valores na tabela, realizando os cálculos algébricos para determinar o valor de $f(\alpha)$.

Na próxima questão, de acordo com a análise *a priori*, desejo que os alunos realizem o tratamento algébrico para determinar os valores das constantes a e b na expressão da função e determinar o período da função a partir da substituição do valor da constante c na expressão e ao final consiga determinar a lei de formação da função.

Como não foi orientado aos alunos que trabalhassem com escala, ocorreu dúvida entre os grupos quanto a qual unidade de medida seria utilizada.

Figura 119 - Grupo 3.

A partir dos dados da tabela anterior escolhida por vocês, determine os valores dos parâmetros a e b.

$$\begin{aligned} 19 &= a + b \\ 10 &= a \end{aligned} \quad \begin{aligned} 19 &= 10 + b \\ b &= 9 \end{aligned}$$

Sabendo que podemos calcular o período da função por $p = \frac{2\pi}{|c|}$, determine o valor de c

$$p = \frac{2\pi}{|c|} \quad 2\pi = \frac{2\pi}{|c|} \quad 2\pi |c| = 2\pi$$

$$|c| = \frac{2\pi}{2\pi}$$

$$c = 1$$

Como podemos expressar através de uma função trigonométrica altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio?

$$f(\alpha) = a + b \cdot \text{sen}(c\alpha)$$

$$f(\alpha) = 10 + 9 \cdot \text{sen}(1 \cdot \alpha)$$

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 120 – Grupo 3.

A partir dos dados da tabela anterior escolhida por vocês, determine os valores dos parâmetros a e b.

$$\begin{aligned} a &= 9 \\ b &= 10 \end{aligned}$$

Sabendo que podemos calcular o período da função por $p = \frac{2\pi}{|c|}$, determine o valor de c

$$2\pi = \frac{2\pi}{c} \quad 2\pi c = 2\pi$$

$$c = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Como podemos expressar através de uma função trigonométrica altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio?

$$f(\alpha) = 9 + 10(\text{sen } \alpha)$$

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 121 - Grupo 2 .

A partir dos dados da tabela anterior escolhida por vocês, determine os valores dos parâmetros a e b.

$$a = 9$$

$$b = 10$$

Sabendo que podemos calcular o período da função por $p = \frac{2\pi}{|c|}$, determine o valor de c

$$p = \frac{2\pi}{|c|} \quad 2\pi = \frac{2\pi}{c} \quad c \cdot 2\pi = 2\pi$$

$$c = \frac{2\pi}{2\pi}$$

$$c = 1$$

Como podemos expressar através de uma função trigonométrica altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio?

$$f(\alpha) = 9 + 10 \operatorname{sen}(\alpha)$$

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

De modo geral, confrontando os resultados esperados na análise *a priori* com os registros no protocolo e nas transcrições dos áudios dos grupos, consideramos satisfatórios os resultados obtidos. Apenas ressaltamos que o fato de não havermos trabalhado anteriormente o conceito de escala gerou dúvida em relação à unidade de medida, sendo que os três grupos conseguiram fazer um tratamento algébrico a partir do registro figural. O grupo 2 considerou a altura diferente para $\alpha = 180^\circ$ e o grupo 3 considerou $f(\alpha) = 10$ em relação ao solo da cadeira, conforme os diálogos descritos acima. Quanto ao preenchimento da tabela, o grupo conseguiu fazer as substituições corretas, mas não afirmou corretamente os valores dos parâmetros a e b, o que gerou a equação $f(\alpha) = 9 + 10 \operatorname{sen}(\alpha)$, diferentemente da espera *a priori* $f(\alpha) = 10 + 9 \operatorname{sen}(\alpha)$.

Conforme esperado na análise *a priori*, entendemos que a atividade permite ao aluno passar pelas etapas de ação, formulação e validação. A fase da ação ocorre quando o aluno começa a manipular os controles deslizantes. Após iniciar essa manipulação, percebemos, através das transcrições dos áudios, que o aluno começa a conjecturar sobre a situação proposta, construindo, dessa maneira, os

elementos necessários à sua formulação e tentando validar suas conjecturas por meio da explicação das observações realizadas. Ao final da atividade realizamos a institucionalização, promovendo a discussão dos valores dos parâmetros encontrados e a dedução algébrica da lei de formação da função da lei de formação que descreve a função trigonométrica que caracteriza a altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio.

5.9 Análise do questionário diagnóstico

O questionário inicial (em anexo) é composto de 10 questões contemplando os conteúdos matemáticos a serem abordados nas sequências didáticas. Os alunos foram orientados a responder somente as questões de que se recordavam. Caso não lembrassem, foram orientados a deixar em branco ou escrever “não sei responder”. O questionário tinha como objetivo fazer um levantamento das dúvidas dos alunos em relação ao conteúdo trabalhado em sala no ambiente lápis e papel.

As três primeiras questões se referiam à representação figural da circunferência trigonométrica.

A primeira foi dividida em três letras: a, b e c.

Na letra a perguntamos se os alunos se recordavam da figura representada. Todos os alunos responderam que sim.

Na letra b perguntamos o que representava a figura. Todos responderam que representava o círculo trigonométrico

Na letra c, solicitamos aos estudantes que, a partir da figura da circunferência trigonométrica, assinalassem as afirmações verdadeiras. Colocamos também a opção “não sei responder as alternativas anteriores”, caso o aluno não se recordasse as proposições. Nessa questão apenas um aluno conseguiu assinalar todas as proposições corretas. Sendo assim, escolhemos essa questão para fazer parte da avaliação final.

Na segunda questão desejamos que o aluno, a partir da visualização da circunferência trigonométrica, conseguisse extrair alguns conceitos. Dois alunos não responderam, um aluno respondeu que no primeiro quadrante “os valores são positivos” e os demais relacionaram o seno ao eixo horizontal e o cosseno, ao eixo vertical. Com o objetivo de explorar mais conceitos, decidimos também aplicar essa questão na avaliação final.

Na terceira questão solicitamos que os alunos determinassem o valor do seno e do cosseno de 5 ângulos escolhidos por eles (a ideia era que consultassem a circunferência trigonométrica que constava na atividade). Apenas quatro alunos conseguiram determinar.

A quarta questão tinha como objetivo trabalhar arcos côngruos. Apresentamos três figuras de círculos e pedimos para que marcassem, aproximadamente, as extremidades dos arcos 30° , -330° e 1110° . 5 alunos deixaram em branco e 3 não conseguiram relacionar um arco com outro.

Diante dessa reposta elaboramos uma atividade voltada para arcos côngruos na sequência didática e ao final das atividades. Os alunos deveriam concluir que os arcos côngruos possuem os mesmos valores para o seno e para o cosseno. Sendo assim, resolvemos elaborar uma única questão na avaliação final, solicitando que o aluno marcasse na circunferência o arco de 420° e determinasse seu seno e cosseno.

Na quinta questão, desejamos verificar se o aluno se recordava das duas representações da função trigonométrica. Para tanto, demos a lei de formação e pedimos para que a associasse à lei de formação correspondente. Quatro alunos fizeram a correspondência correta e os demais não conseguiram responder. Realizamos quatro atividades em que foram explorados a lei de formação e o gráfico da função e percebemos que, com ajuda do GeoGebra, eles conseguiram fazer a associação da lei da função com seu gráfico correspondente. Ou seja, conseguiram, durante as atividades, associar a lei de formação da função $f(x) = \sin(x)$ com o gráfico da senoide, e da função $g(x) = \cos(x)$ com o gráfico da cossenoide. Sendo assim, entendemos que essa dúvida já havia sido sanada, de modo que não selecionamos essa questão para a avaliação final. Optamos, portanto, para compor a avaliação final, pelas questões que os alunos ainda não demonstravam ter compreendido.

O enunciado abaixo é referente às questões 6, 7, 8 e 9.

Em certo dia do ano, em uma cidade, a maré alta ocorreu à meia-noite. A altura da água no porto dessa cidade é uma função periódica. A altura y , em metros, da maré, nesse dia, no porto da cidade, pode ser obtida, aproximadamente, pela fórmula: $y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{\tau}\right)$, sendo t o tempo decorrido, em horas, após a meia noite.

Na sexta questão, tratamos também sobre formas de representação da

função trigonométrica. Para tanto, demos a lei de formação da função e desejávamos que o estudante identificasse na expressão da função o que caracterizava como função trigonométrica. Um aluno respondeu que sim, porque tem amplitude, um ângulo de fase e cosseno. Outro aluno respondeu que tem cosseno e tem pi (π). Um terceiro aluno respondeu que era uma função trigonométrica pela presença do cosseno. Os demais não souberam responder.

Na sétima questão desejamos que o aluno associasse a altura da maré com a imagem da função, mas não houve acerto nessa questão. Cinco alunos confundiram com o período da função. Elaboramos uma atividade específica que tratou exatamente de imagem da função.

Na oitava questão perguntamos por que a função descrita pelo movimento da maré é periódica. Tivemos as seguintes respostas:

Porque ocorre de tempos em tempos (periodicamente).

Pois se repete em determinando período.

Pois trabalha com tempo, período.

Porque é possível achar um período.

Os alunos não tiveram acesso as suas repostas no questionário diagnóstico. Optamos por trabalhar as dúvidas encontradas nas atividades propostas e, ao final, através de um questionário intitulado “avaliação final”, optamos por retomar as questões que ofereceram mais dificuldades.

5.10 Análise da avaliação final

A avaliação final foi composta pelas 5 questões do questionário diagnóstico que ofereceram mais dificuldades os alunos e que, mesmo após as atividades subsequentes, ainda suscitaram dúvidas. Acrescentamos uma questão referente a arcos congruos, cobrando também os valores dos senos e cossenos. Tínhamos como objetivo avaliar se as dificuldades apresentadas no questionário diagnóstico foram sanadas. Fazendo a análise do questionário final, encontrei as seguintes respostas.

Na primeira questão, todos os alunos assinalaram conceitos corretos referentes a circunferências trigonométricas. Na segunda questão, apenas dois alunos não conseguiram citar afirmações verdadeiras em relação a circunferências

trigonométricas. Na terceira questão, referente ao arco cômputo, todos os alunos conseguiram marcar na circunferência trigonométrica o arco de 420° e determinar que o seu seno e cosseno corresponde ao seno e cosseno de 60° . Na quarta questão, desejamos que os alunos associassem a altura da maré com a imagem da função e determinassem o valor dessa altura para $t=12h$. Além disso, perguntamos o que fariam para responder essa questão se eles estivessem no ambiente GeoGebra. Apenas um aluno deixou a questão em branco; os demais conseguiram justificar a forma de resolvê-la no ambiente GeoGebra. Desses alunos, 5 conseguiram também determinar o valor da altura $h= 3,9$, para $t=12$ (abaixo apresentaremos as soluções).

Sendo assim, fizemos uma análise comparativa das 4 questões comuns entre a atividade diagnóstica e a avaliação final. Escolhi fazer a análise por questão, comparando as respostas dadas por um aluno de cada grupo.

Questão 1:

Nessa questão foi solicitado que, a partir da circunferência trigonométrica, os alunos julgassem as afirmações como verdadeiras ou falsas. Obtivemos as seguintes respostas:

Figura 122 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do Grupo 2.

C) Assinale as afirmações verdadeiras em relação a figura:

- a) está orientada positivamente no sentido horário
- b) está orientada positivamente no sentido anti-horário
- c) a circunferência contida na figura tem raio igual a 1
- d) a circunferência contida na figura pode ter raio de qualquer valor
- e) tem centro no ponto no ponto $(1,0)$
- f) tem centro no ponto $(0,0)$
- g) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto $(1,0)$
- h) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto $(0,0)$
- i) é construída no sistema cartesiano ortogonal
- j) está dividida em quatro quadrantes
- k) está dividida em dois quadrantes
- l) não sei responder as alternativas anteriores

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 123- Resposta dada pelo mesmo aluno A1 do grupo 2 na Avaliação final.

- a) está orientada positivamente no sentido horário
 b) está orientada positivamente no sentido anti-horário
 c) a circunferência contida na figura tem raio igual a 1
 d) a circunferência contida na figura pode ter raio de qualquer valor
 e) tem centro no ponto no ponto (1,0)
 f) tem centro no ponto (0,0)
 g) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (1,0)
 h) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (0,0)
 i) é construída no sistema cartesiano ortogonal
 j) está dividida em quatro quadrantes
 k) está dividida em dois quadrantes
 l) não sei responder as alternativas anteriores

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

As respostas dadas pelo aluno estão corretas, mostrando que o aluno A1 do grupo 2 não tem dúvida em relação à questão proposta e reafirmando suas respostas na Avaliação Final.

Figura 124 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 1.

- e) Assinale as afirmações verdadeiras em relação a figura:
- a) está orientada positivamente no sentido horário
 b) está orientada positivamente no sentido anti-horário
 c) a circunferência contida na figura tem raio igual a 1
 d) a circunferência contida na figura pode ter raio de qualquer valor
 e) tem centro no ponto no ponto (1,0)
 f) tem centro no ponto (0,0)
 g) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (1,0)
 h) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (0,0)
 i) é construída no sistema cartesiano ortogonal
 j) está dividida em quatro quadrantes
 k) está dividida em dois quadrantes

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 125 - Resposta da Avaliação final do aluno A1 do grupo 1.

- a) (F) está orientada positivamente no sentido horário
- b) (V) está orientada positivamente no sentido anti-horário
- c) (V) a circunferência contida na figura tem raio igual a 1
- d) (F) a circunferência contida na figura pode ter raio de qualquer valor
- e) (F) tem centro no ponto no ponto (1,0)
- f) (V) tem centro no ponto (0,0)
- g) (V) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (1,0)
- h) (F) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (0,0)
- i) (F) é construída no sistema cartesiano ortogonal
- j) (V) está dividida em quatro quadrantes
- k) (F) está dividida em dois quadrantes

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

O aluno possui um conhecimento sobre circunferência trigonométrica. Demonstrava dúvida em relação ao ponto de partida da origem dos arcos na atividade diagnóstica, mas, na avaliação final, afirma corretamente que o ponto de partida é o ponto (1,0).

Figura 126 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 3.

- 3) Assinale as afirmações verdadeiras em relação a figura:
- a) () está orientada positivamente no sentido horário
 - b) (X) está orientada positivamente no sentido anti-horário
 - c) (X) a circunferência contida na figura tem raio igual a 1
 - d) () a circunferência contida na figura pode ter raio de qualquer valor
 - e) () tem centro no ponto no ponto (1,0)
 - f) (X) tem centro no ponto (0,0)
 - g) () a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (1,0)
 - h) (X) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (0,0)
 - i) () é construída no sistema cartesiano ortogonal
 - j) (X) está dividida em quatro quadrantes
 - k) (F) está dividida em dois quadrantes
 - l) () não sei responder as alternativas anteriores

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 127 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do grupo 3.

- a) (F) está orientada positivamente no sentido horário
 b) (V) está orientada positivamente no sentido anti-horário
 c) (V) a circunferência contida na figura tem raio igual a 1
 d) (F) a circunferência contida na figura pode ter raio de qualquer valor
 e) (F) tem centro no ponto no ponto (1,0)
 f) (V) tem centro no ponto (0,0)
 g) (V) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (1,0)
 h) (F) a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (0,0)
 i) (F) é construída no sistema cartesiano ortogonal
 j) (V) está dividida em quatro quadrantes
 k) (F) está dividida em dois quadrantes
 l) () não sei responder as alternativas anteriores

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Assim como o aluno do grupo 1, o aluno do grupo 3 possui um conhecimento sobre circunferência trigonométrica. Demonstrava dúvida em relação ao ponto de partida da origem dos arcos no questionário diagnóstico, mas na avaliação final afirma corretamente que o ponto de partida é o ponto (1,0).

Figura 128 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 2.

- 2) Analise a figura acima e cite, no mínimo, mais duas afirmações verdadeiras (não presentes na questão anterior) a respeito dos conceitos trigonométricos tratados na figura.
- * O nome de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ é, respectivamente, $0, 1, 0, -1, 0$.
- * O cosseno de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ é, respectivamente, $1, 0, -1, 0, 1$.

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

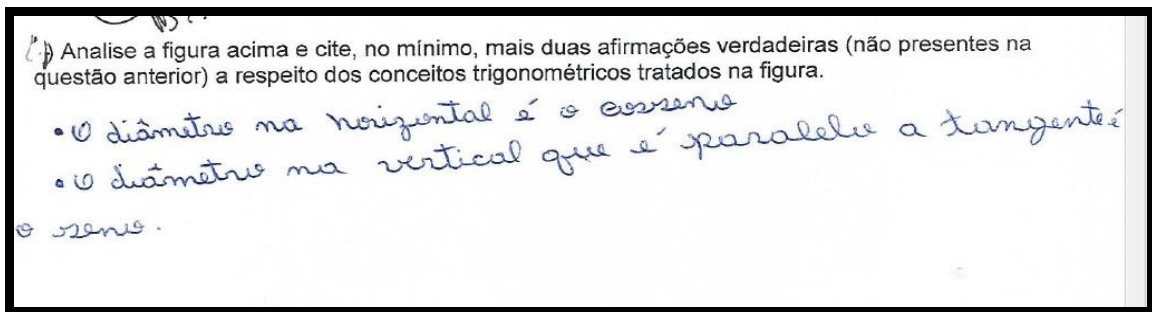
Figura 129 - Resposta da Avaliação final do aluno A1 do grupo 2.

- Relembrando a atividade realizada e analisando a figura acima e cite, no mínimo, mais duas afirmações verdadeiras (não presentes na questão anterior) a respeito dos conceitos trigonométricos tratados na figura.
1. Os ângulos notáveis são $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$.
 2. O período dos círculo é 2π .

Fonte: Elaborada pela autora (2019)

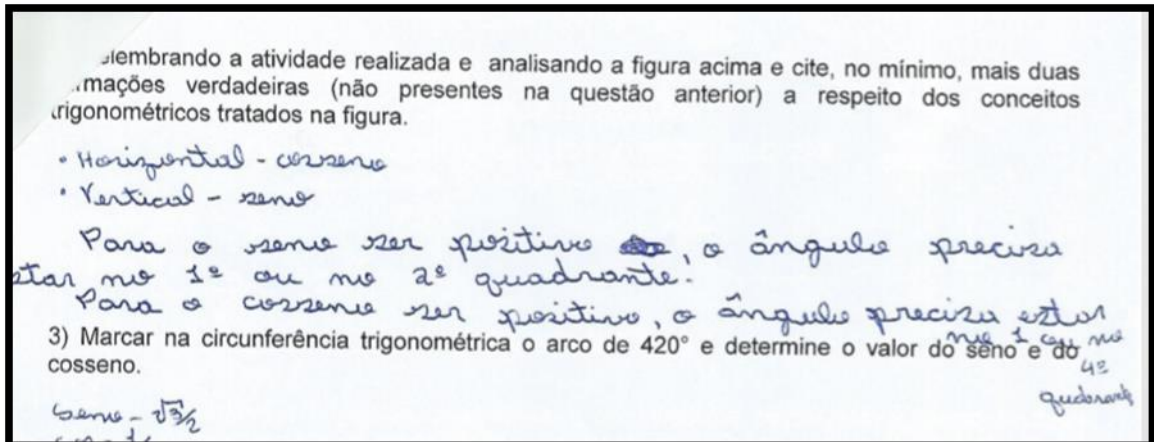
Percebemos que o aluno apresenta duas novas informações. Como o círculo é uma figura geométrica, não tem período, senão um comprimento em radianos de 2π . Contudo essa afirmação mostra que o aluno compreendeu que um ponto P da circunferência trigonométrica é a extremidade de uma coleção de arcos de medidas $(\alpha, \alpha+2\pi, \alpha + 4\pi\dots)$.

Figura 130 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 1.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

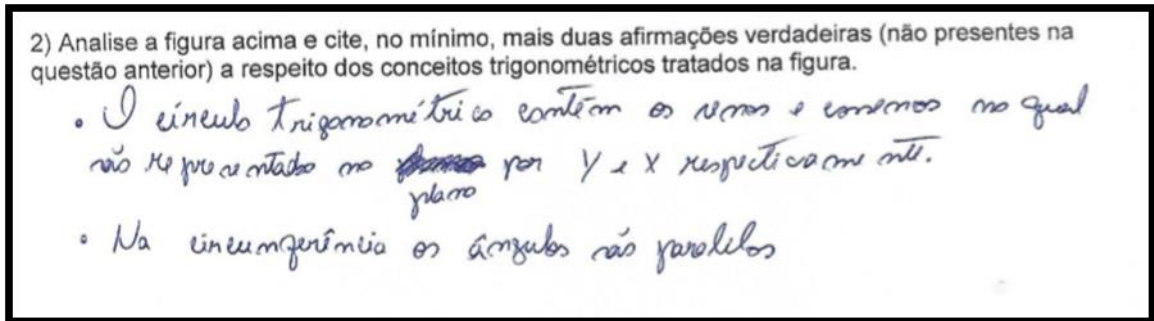
Figura 131 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do grupo 1.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

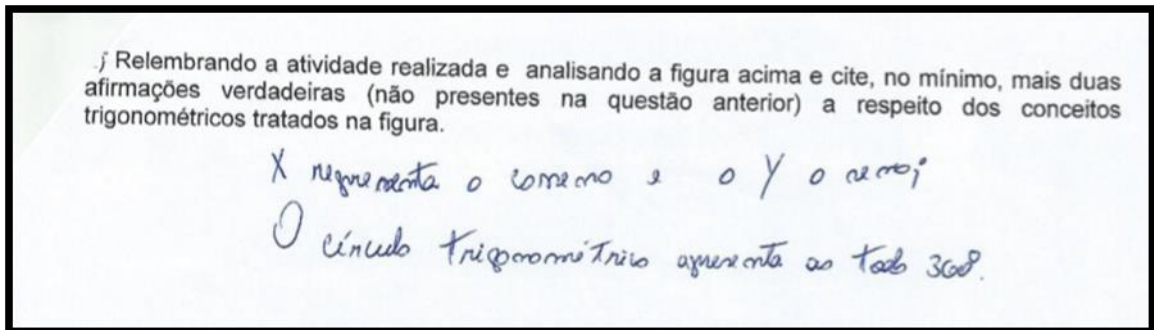
Na atividade diagnóstica, a aluna usa as nomenclaturas diâmetro horizontal e diâmetro vertical para representar respectivamente cosseno e seno. Na atividade final não usa mais a nomenclatura diâmetro. Talvez já esteja considerando implicitamente os eixos cartesianos. A aluna poderia ter dito que o seno é positivo no 1º e 2º quadrante, porém mostra uma apropriação de conceito quando relaciona a condição de o seno ser positivo ao fato de os ângulos precisarem estar no primeiro ou segundo. De forma análoga, demonstrou que os cossenos são positivos e que os ângulos estão no 1º e no 4º quadrante.

Figura 132 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 133 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

A aluna conseguiu partir da figura do círculo trigonométrico, identificar o eixo dos x como cosseno e o eixo vertical o eixo dos senos e reafirmar sua resposta na avaliação final. Contudo, em relação a sua segunda afirmação na avaliação diagnóstica, não entendi por que estava considerando os ângulos paralelos. Na avaliação final ela não se refere ao fato de os ângulos serem paralelos e traz uma nova afirmação verdadeira em relação à circunferência trigonométrica.

O enunciado abaixo é referente às questões 6, 7, 8 e 9.

Em certo dia do ano, em uma cidade, a maré alta ocorreu à meia-noite. A altura da água no porto dessa cidade é uma função periódica. A altura y , em metros, da maré, nesse dia, no porto da cidade, pode ser obtida, aproximadamente, pela fórmula: $y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$, sendo t o tempo decorrido, em horas, após a meia-noite.

Figura 134 - Resposta do questionário diagnóstico do Aluno A1 do grupo 2.

9) é correto afirmar que no instante $t = 12$ h ocorre maré alta, cuja altura é de 3,9 m, justifique sua resposta.

$$y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{22\pi}{6}\right)$$

$$y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right)$$

$$y = 2 + 1,9 \cdot 1$$

$$y = 3,9$$

S

$\pi = 180^\circ$
 $6\pi \Rightarrow x$
 $7x = 1080^\circ$
 $x = 1080^\circ$

$\frac{1080}{360} = 3$
 $\frac{1080}{6} = 180$

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Figura 135 - Resposta da Avaliação final do aluno 1 do Grupo 2.

3) Em certo dia do ano, em uma cidade, a maré alta ocorreu à meia-noite. A altura da água no porto dessa cidade é uma função periódica. A altura y , em metros, da maré, nesse dia, no porto da cidade, pode ser obtida, aproximadamente, pela fórmula: $y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$, sendo t o tempo decorrido, em horas, após a meia-noite. É correto afirmar que no instante $t = 12$ h ocorre maré alta, cuja altura é de 3,9 m, justifique sua resposta. Se você tivesse no ambiente geogebra, o que faria para responder essa questão? *Faria o gráfico da função cosseno.*

$$y = 2 + 1,9 \cdot \cos(2\pi)$$

$$y = 2 + 1,9 \cdot 1$$

$$y = 3,9 \text{ m}$$

Fonte: elaborada pela autora (2019).

Percebemos que o aluno conseguiu interpretar e resolver algebricamente a questão, apresentando como uma nova estratégia de resolução a representação gráfica.

Figura 136 - Resposta do questionário diagnóstico do Aluno A1 do Grupo 1.

9) é correto afirmar que no instante $t = 12$ h ocorre maré alta, cuja altura é de 3,9 m, justifique sua resposta.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 137 - Resposta da Avaliação final do aluno A1 do Grupo 1.

43) Em certo dia do ano, em uma cidade, a maré alta ocorreu à meia-noite. A altura da água no porto dessa cidade é uma função periódica. A altura y , em metros, da maré, nesse dia, no porto da cidade, pode ser obtida, aproximadamente, pela fórmula: $y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$, sendo t o tempo decorrido, em horas, após a meia-noite. É correto afirmar que no instante $t = 12$ h ocorre maré alta, cuja altura é de 3,9 m, justifique sua resposta. Se você tivesse no ambiente geogebra, o que faria para responder essa questão?

$$y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 12}{6}\right)$$

$$y = 2 + 1,9 \cdot \cos 0 = 2\pi$$

$$y = 2 + 1,9 \cdot 1$$

$$y = 3,9$$

~~Eu colocaria a função no~~

Escreveria a função, criaria um controle deslizante e verificaria se em $t=12h$ ocorre a maré alta.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Na avaliação diagnóstica, o aluno não conseguiu resolver a questão. Já na avaliação final, não apenas conseguiu resolver algebricamente, como também descreveu um procedimento de resolução no GeoGebra.

Figura 138 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do Grupo 3.

9) é correto afirmar que no instante $t = 12$ h ocorre maré alta, cuja altura é de 3,9 m, justifique sua resposta.

$$y = 2 + 1,9 \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$2 + 1,9 \cos\left(\frac{\pi \cdot 12}{6}\right) = (2\pi)$$

$$2 + 1,9 \cos 2\pi$$

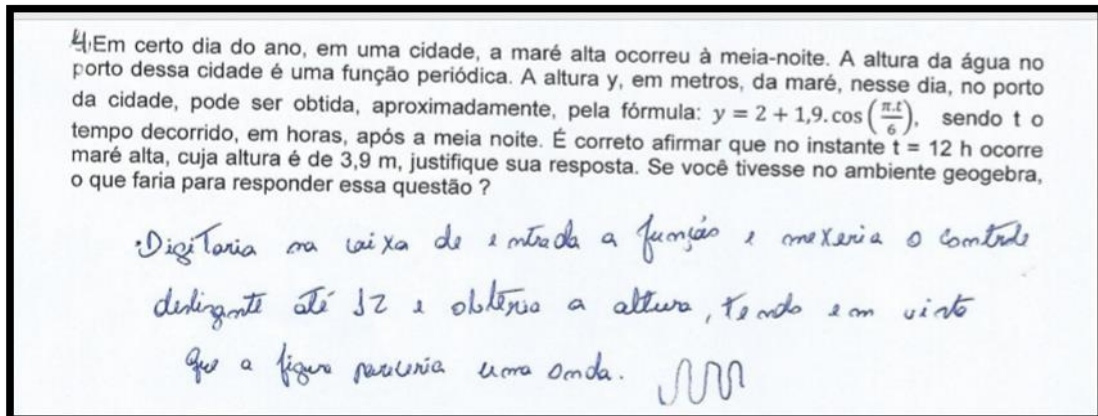
$$2 + 1,9 \cdot 0$$

$$y = 2 \text{ m}$$

. Não é correto afirmar pois a altura é 2m.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

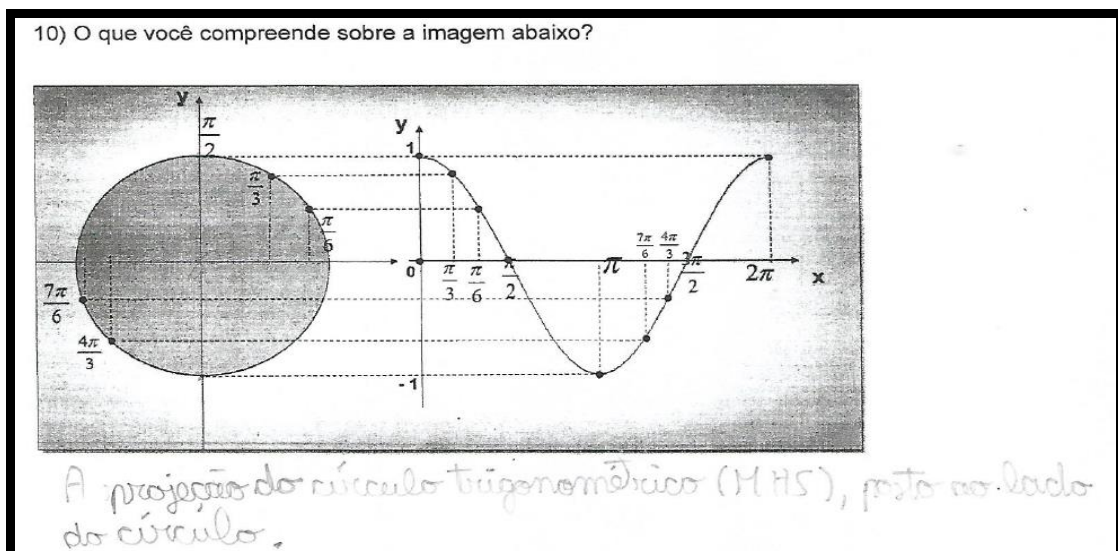
Figura 139 - Resposta da avaliação final do aluno A1 do Grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

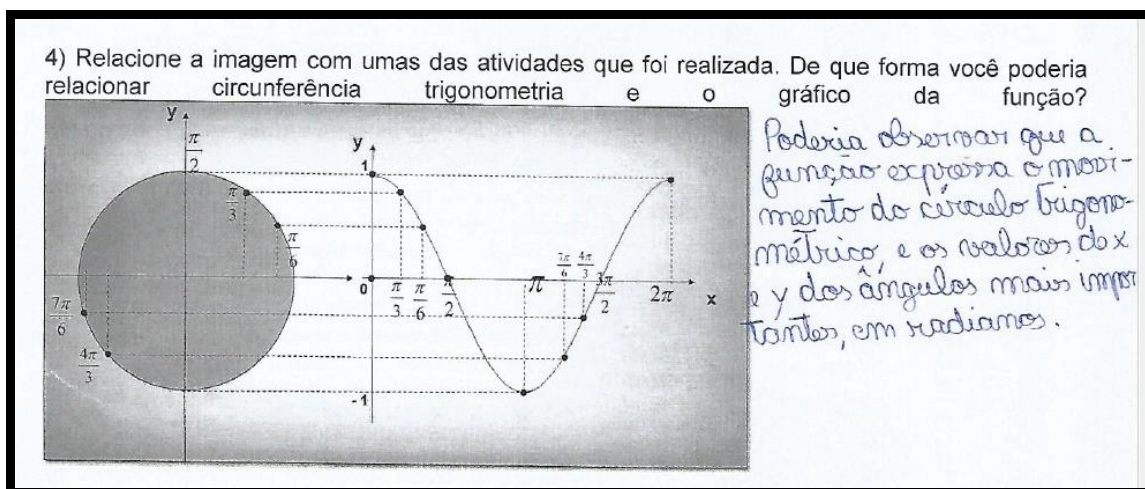
O aluno do grupo 3, assim como o aluno do grupo 2, conseguiu interpretar a questão na avaliação diagnóstica. Na atividade final o aluno não apresenta os cálculos algébricos. Acreditamos que possa tê-lo feito sem, no entanto, ter deixado registro na avaliação, já que não mostrou dificuldade em fazê-lo na avaliação diagnóstica, embora não tenha encontrado a solução corretar por ter considerado cosseno 2π igual a zero. Em relação ao ambiente GeoGebra, traz uma resposta bastante satisfatória, pois identifica que a caixa de entrada é o local onde deve inserir os comandos. Cita, além disso, uma ferramenta que foi bastante utilizada durante as atividades, a do controle deslizante, e faz uma representação aproximada do gráfico esperado.

Figura 140 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do grupo 2.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 141 - Resposta da Avaliação final do aluno A1 do grupo 2.



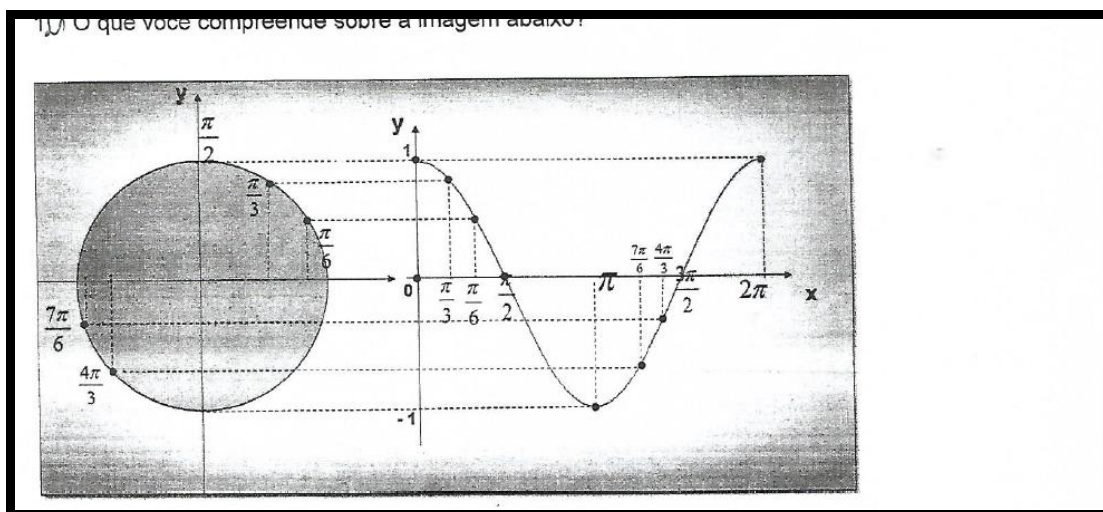
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Percebemos que o mesmo aluno, já tendo um conhecimento sobre funções trigonométricas, teve um aprimoramento na resposta, pois na atividade diagnóstica reconhece o círculo trigonométrico e também conhece o gráfico da função, sem, no entanto, nomeá-lo como gráfico. Denomina o gráfico da função de (MHS), recordando de um exemplo de uma aplicação da função seno. Segundo Duval, esse tipo de ocorrência se daria por uma possível confusão entre o objeto matemático e sua representação.

Nesta última questão o aluno consegue fazer a associação da representação da figura com umas das atividades realizadas, cujo objetivo era perceber que a medida angular de um arco descrito pela movimentação do ponto B na janela na circunferência trigonométrica descreve o gráfico da função, quando afirma que “a função expressa o movimento do círculo trigonométrico”.

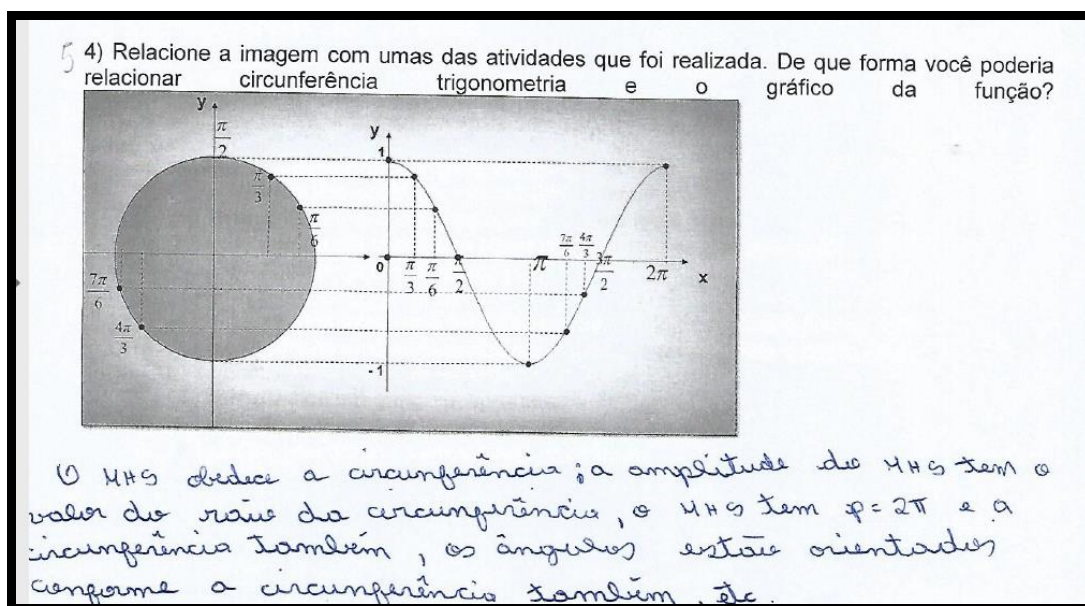
Percebemos que o aluno conseguiu compreender e fazer a conversão entre a representação figural para linguagem natural.

Figura 142 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do Grupo 2.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 143 - Resposta da Avaliação final do aluno A1 do grupo 1

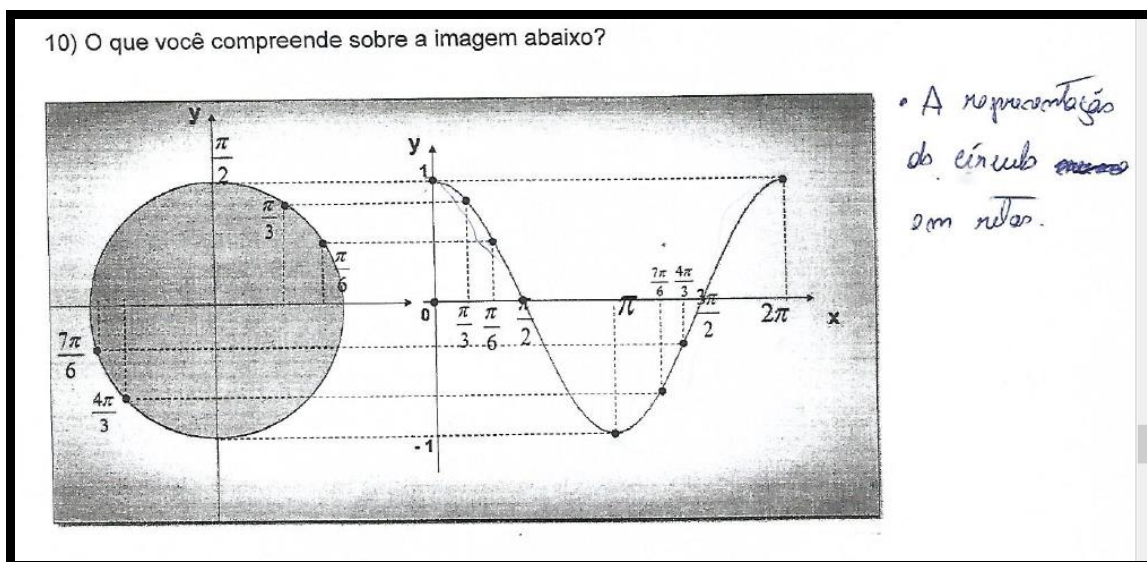


Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Apesar de o aluno continuar referindo-se ao gráfico da função cosseno como MHS, consegue compreender que o gráfico está associado à circunferência trigonométrica, pois, quando afirma que “O MHS obedece a circunferência”, exemplifica dizendo que os ângulos estão orientados conforme a circunferência. E quando se refere à amplitude, entendemos que está associando ao valor máximo ou mínimo da função e está considerando esse valor em módulo, pois associa ao valor do raio da circunferência. A aluna demonstra um grande avanço nessa questão, já que na avaliação diagnóstica não conseguiu perceber nenhuma relação entre a

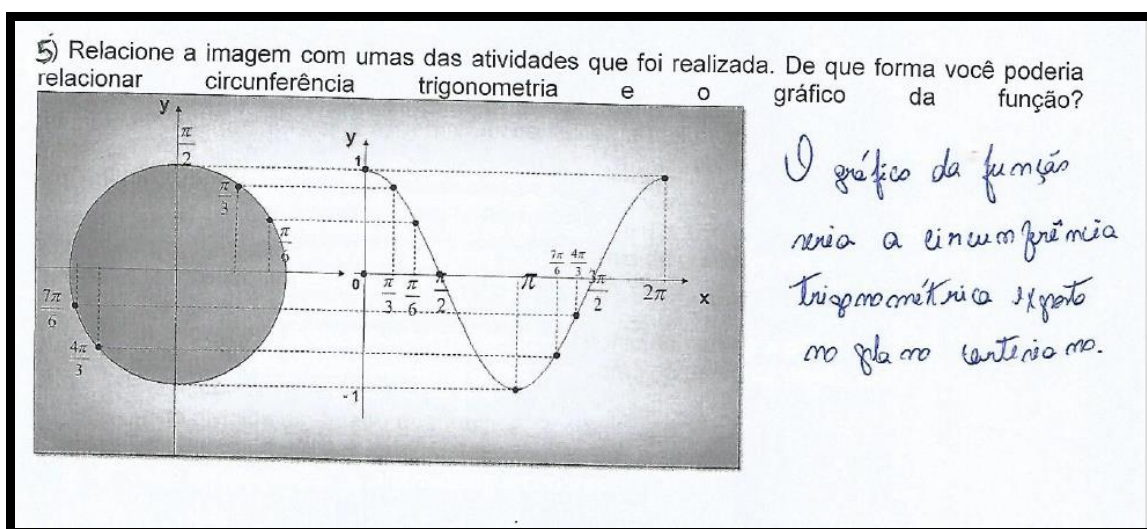
circunferência trigonométrica e o gráfico da função. Acredito que se não estivesse tão presa aos conceitos físicos, ela poderia ter expandido mais as relações matemáticas existentes.

Figura 144 - Resposta do questionário diagnóstico do aluno A1 do Grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 145 - Resposta da Avaliação final do aluno A1 do grupo 3.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Observamos a resposta na avaliação diagnóstica e percebemos que o aluno não tinha compreendido nenhuma relação entre a circunferência e o gráfico. Quando na avaliação final ele traz uma afirmação de que o gráfico da função seria a

circunferência exposta no plano cartesiano, embora não correta, nos dá forte indícios que tenha compreendido que é a partir da movimentação de um ponto, extremidade de determinado arco na circunferência, que é gerado o gráfico da função.

De forma geral, considerei muito satisfatório o resultado apresentado pelos alunos, porque ampliaram de forma significativa a compreensão sobre funções trigonométricas. Essa última questão, por exemplo, exige um grau de compreensão complexo, pois o aluno trabalha simultaneamente com dois sistemas de referência diferente, que estão relacionados entre si da seguinte forma: a função f , denominada função seno, associa a cada número real x a ordenada do ponto correspondente a sua imagem na circunferência trigonométrica e as respostas apresentadas pelos alunos dão indícios dessa compreensão.

As atividades foram pensadas em uma sequência que permitisse os estudantes construir o conhecimento conforme avançassem nas questões. Essa última questão, por exemplo, exige um grau de compreensão complexo, já que o aluno trabalha simultaneamente com dois sistemas de referência diferentes, relacionados entre si da seguinte forma: a função f , denominada função seno, associa a cada número real x a ordenada do ponto correspondente a sua imagem na circunferência trigonométrica e as respostas dadas pelos estudantes dão indícios dessa compreensão.

De forma geral, considerei muito satisfatório o resultado apresentado pelos alunos, porque ampliaram de forma significativa a compreensão sobre funções trigonométricas, nos permitindo avaliar positivamente os instrumentos utilizados para aplicação desses instrumentos e apontar o software GeoGebra como potencializador do aprendizado das funções trigonométricas.

5.11 Análise do Questionário Final

O questionário final é composto de seis questões com o objetivo de investigar as impressões dos grupos em relação às atividades desenvolvidas, suas percepções sobre o trabalho com o GeoGebra, além da avaliação que fizeram sobre a forma como foram conduzidas as atividades. Ao serem questionados sobre suas impressões quanto às atividades e o que motivou resolvê-las tivemos as seguintes respostas:

Análise do Questionário Final

O questionário final é composto de seis questões com o objetivo de investigar as impressões dos grupos em relação às atividades desenvolvidas, bem como a percepção que tiveram ao trabalhar com o GeoGebra.

A seguir, destacaremos cada uma das seis questões, realizando a análise das questões pelos grupos.

O que vocês acharam das atividades propostas? O que te motivou a resolvê-las?

As respostas apresentadas pelos grupos foram as seguintes:

Figura 146 - Grupo 1.

Interessante. Interesse que despertou ao decorrer do tempo e a motivação da dupla.
Concordo, as atividades foram muito interessantes e, nós, adquirimos um grande aprendizado.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 147 - Grupo 2.

Algo deveras interessante que incentiva o aluno ao aprendizado. Conhecimento.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 148 - Grupo 3.

• Produtivo, interessante, forma de grande conhecimento, pois os assuntos abordados ao longo do ano, pode ser visualizado de forma simples e divertida, ou seja de modo diferente.

• Junto com incentivo da professora, adquirir conhecimento.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Diante das repostas, percebemos que os três grupos aceitaram a responsabilidade de resolver as situações de ensino proposta, haja vista que as consideraram interessantes e confirmaram que as atividades lhes oportunizaram uma situação de aprendizagem, e que a busca pelo conhecimento os motivou a resolver as atividades. Um dos grupos ainda ressalta que foi uma maneira diferente, classificada como divertida e mais simples de abordar o conteúdo que já havia sido trabalhado no padrão de aula convencional. Assim, podemos afirmar que as atividades elaboradas levaram a uma mudança no comportamento do aluno, o que, de acordo com Almouloud (2007, p. 30), caracteriza que o conhecimento foi gerado.

2) Dentre as atividades propostas, qual foi mais interessante para vocês? Por quê?

Figura 149 – Grupo 1.

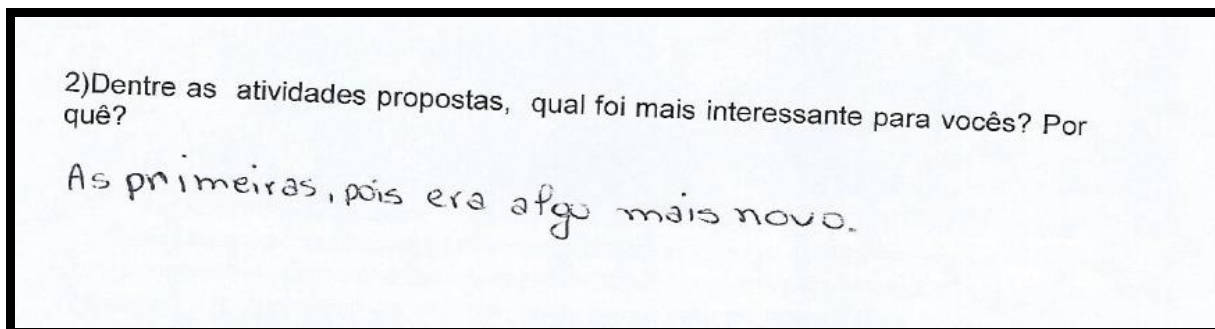
2) Dentre as atividades propostas, qual foi mais interessante para vocês? Por quê?

A atividade Rede gigante. Porque mesmo sendo difícil de respondê-la eu ~~(fui)~~ e minha dupla conseguimos mais uma vez.

Realmente, colocar os conteúdos, de forma prática na atividade da rede gigante foi sensacional.

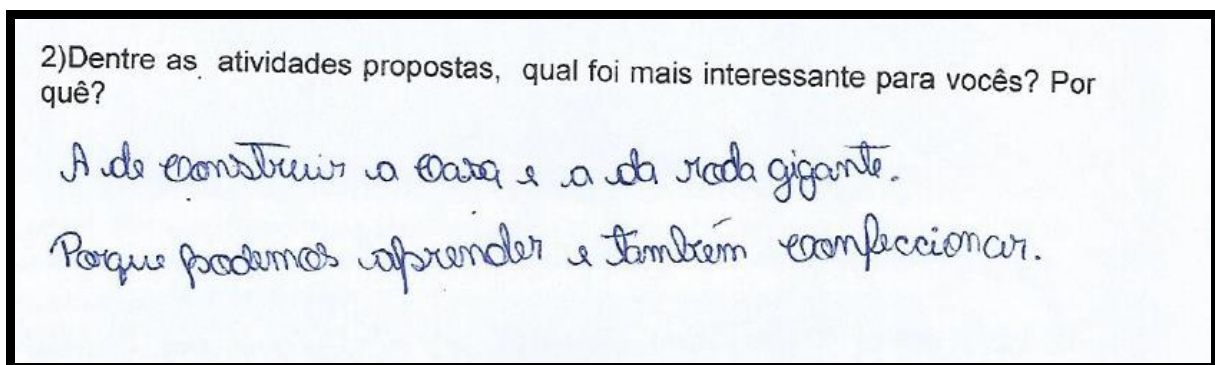
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 150 - Grupo 2.



Fonte: elaborado pela autora (2019).

Figura 151 - Grupo 3.

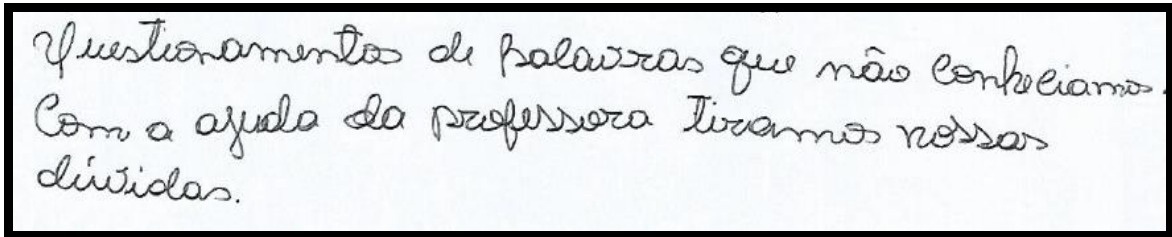


Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Na nossa sequência de atividades, elaboramos as que demandavam dos alunos a construção de arquivo no GeoGebra e outras que demandavam a manipulação no arquivo já construído. As atividades iniciais se referem às atividades de construção. A atividade da roda-gigante citada foi uma atividade que explorou o conhecimento algébrico, que inclusive foi umas das questões cobradas no Enem 2018.

3) Durante o processo da realização da atividade, quais foram as dificuldades encontradas? O que foi feito para superar essas dificuldades?

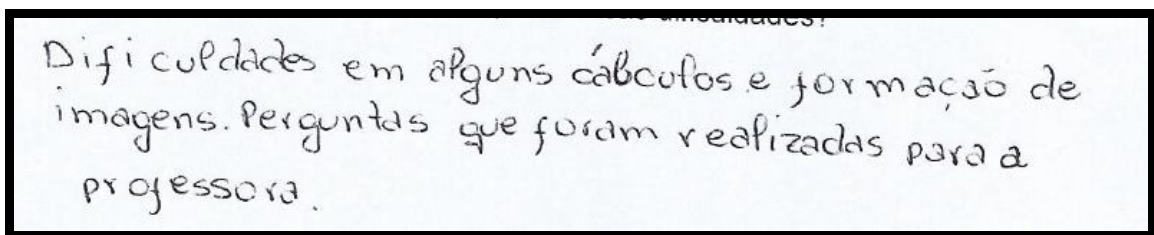
Figura 152 – Grupo 1.



Questionamentos de palavras que não conheciamos. Com a ajuda da professora tiramos essas dúvidas.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

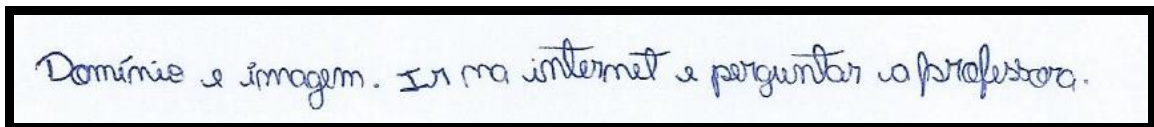
Figura 153 – Grupo 2.



Dificuldades em alguns cálculos e formação de imagens. Perguntas que foram realizadas para a professora.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 154 - Grupo 3.



Domínio e imagem. Ir na internet e perguntar a professora.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Percebemos que houve dúvidas diversas. Um dos grupos se refere à formação da imagem. Nesse caso seriam as construções. Outro grupo, a palavras desconhecidas (pode ser algum termo matemático, como imagem e domínio da função). O terceiro grupo, a conteúdo específico. As dúvidas em relação às construções foram esperadas, já que os alunos não tinham tido anteriormente contato com o GeoGebra. Na atividade Imagem e Domínio, como aparecerá em análises posteriores da função trigonométrica, os alunos não estavam recordando o conceito de domínio de uma função real. Então houve necessidade de definir esse conceito, sem trazer a definição do domínio da função seno e da função cosseno.

Vale ressaltar que essas dúvidas foram tiradas. Não apresentando a solução das situações, os alunos continuaram sendo os responsáveis pela resolução das atividades, conforme o exemplo de trecho de um diálogo abaixo:

Professora: “Primeira coisa, vamos estar revisando o que a gente já viu. Quem é que está aqui?”

A1: “Cosseno.”

Professora: “Pronto, então observe as coordenadas desse ponto. Um ponto que está aqui tem que coordenada?”

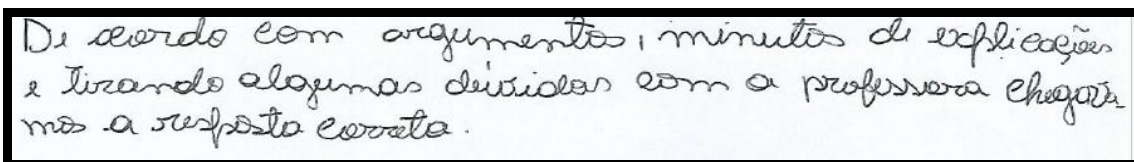
A1: “ $\pi/2$ ”

Professora: “Então x tem que valor?”

A1: “0,0.1.”

4) Quando surgiu dúvida em relação a alguma questão da atividade proposta, como o grupo chegou a um consenso? Quais foram os argumentos utilizados por um colega para convencer o outro de que seu raciocínio estava correto? Se recordar, cite um exemplo.

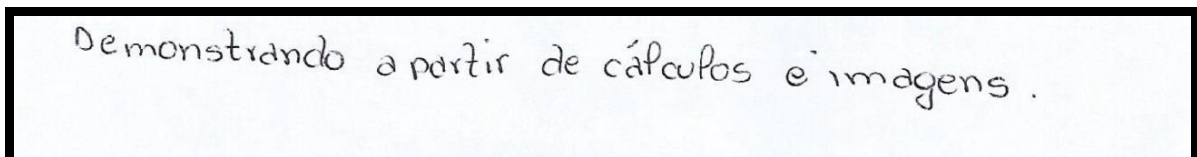
Figura 155 - Grupo 1.



De acordo com argumentos, minutos de explicações e tirando algumas dúvidas com a professora chegamos a resposta correta.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

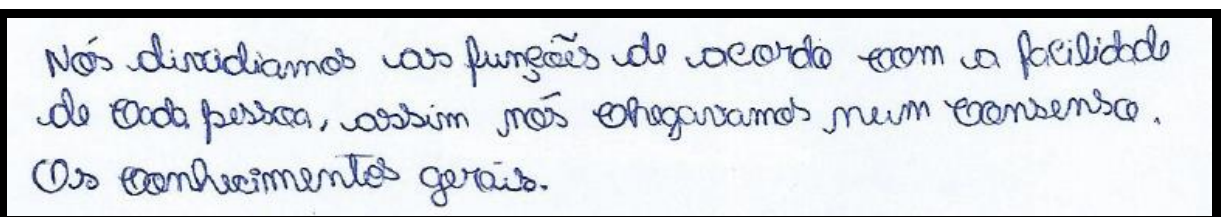
Figura 156 - Grupo 2.



Demonstrando a partir de cálculos e imagens.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 157 - Grupo 3.



Nós discutíamos as funções de acordo com a facilidade de cada pessoa, assim nós chegamos num consenso. Os conhecimentos gerais.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Através da fala dos alunos do grupo 1 e 2, percebemos indícios da fase da validação, quando o aluno precisa usar de algum mecanismo de prova para justificar sua resposta. Esse mecanismo pode ser uma explicação verbal (minutos de explicação), através de cálculo matemático e/ ou também pode ser validado pela

construção realizada no Geogebra (o aluno se refere à imagem). A resposta dada pelo grupo 3 nos leva a compreender que eles estão se referindo às estratégias para a resolução do problema proposto. Por exemplo: quem vai fazer a construção no GeoGebra, quem fará os cálculos matemáticos, e não dialética da validação.

5) Em que momento da atividade vocês solicitaram mais ajuda da professora e por

Figura 158 - Grupo 1.

No meio da atividade.
Durante ^{decorrer da atividade} algumas dúvidas ^{suriram} sobre os
ferramentas do Geogebra, e ~~também~~
sobre alguns conteúdos e também, no final,
verificar se a atividade estava correta.

Fonte: Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 159 - Grupo 2.

Solicitamos mais no final. Tinha que lembrar o assunto,
erros em cálculos.

Fonte: Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 160 - Grupo 3.

No início do geogebra, chamamos a professora para nos
auxiliar a entender as ferramentas. E no final para
ter certeza se estava correto.

Fonte: Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Quando o aluno fala que chamava a professora para ter certeza de que estava correto, temos uma característica da fase da institucionalização. De acordo com Freitas (2008), mesmo que o aluno consiga resolver um problema e tenha certeza de que sua resposta esteja correta, dificilmente o reconhecerá por si só, como um conhecimento novo, necessitando do reconhecimento externo do professor. Nesse momento o professor deve retomar parte da responsabilidade

conferida aos alunos, cabendo ao profissional docente apresentar as definições (o aluno se refere a lembrar o assunto) em linguagem matemática mais formalizada e fazer as devidas correções, como, por exemplo, verificar os cálculos.

6) Em relação ao ambiente usado para realização das atividades, vocês consideram que fazer as atividades com o suporte do GeoGebra facilitou de alguma maneira o aprendizado de funções trigonométricas? Por quê?

Figura 161 – Grupo 1.

Sim. Pois o GeoGebra nos lembrou várias coisas que aprendemos em funções trigonométricas e isso fez com que eu melhorasse também de outras coisas os gráficos.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Figura 162 - Grupo 2.

Sim, não somente a lembrar o assunto, mas como também ajuda na formação das imagens.

Fonte: elaborado pela autora (2019).

Figura 163 - Grupo 3.

Sim. A ferramenta do GeoGebra nos mostrou de forma lúdica, explorativa e fácil os assuntos que abordam as funções trigonométricas. Além da utilização do computador.

Fonte: elaborado pela autora (2019).

As respostas dadas pelos grupos evidenciam que a GeoGebra favoreceu a construção dos conhecimentos em relação à função trigonométrica. Quando usam expressões como “relembrar o assunto”, “relembrar várias coisas” e “ajudam na formação de imagens”, “gráficos”, um dos grupos conclui que isso aconteceu porque

as ferramentas do GeoGebra lhe permitiram trabalhar de forma lúdica e exploratória. Sendo assim, a utilização do *software* GeoGebra favoreceu a compreensão da articulação dos registros da representação algébrica e gráfica e o aprofundamento dos conhecimentos relacionados às funções trigonométricas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, objetivamos desenvolver uma sequência didática digital, baseada no uso do *software* GeoGebra, que potencializasse a aprendizagem de Funções Trigonométricas. Esse objetivo surgiu a partir das reflexões sobre as dificuldades apresentadas em sala pelos alunos, tais como a transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para as razões trigonométricas na circunferência trigonométrica, assunto que, segundo Brasil (2008), merece atenção, especialmente na compreensão do conceito de Funções Trigonométricas e seus respectivos gráficos.

Como sujeitos da pesquisa, tivemos 12 alunos do Colégio Estadual Odorico Tavares, dos quais 8 foram escolhidos para as análises. O experimento durou 10 encontros, sendo que esses estudantes também participaram anteriormente de uma oficina com 6 encontros.

O estudo das Funções Trigonométricas é um campo extenso. Nesses termos, para a delimitação do tema, escolhemos, conforme orienta Brasil (2008), as funções seno e cosseno como objeto de estudo e buscamos responder a seguinte questão de pesquisa: "Quais as potencialidades de uma sequência didática construída no ambiente GeoGebra para a abordagem de Funções Trigonométricas?".

Em busca de caminhos que pudessem ajudar a responder a questão referida, empregamos a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau (1986), cuja finalidade concerne em modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, correlacionando professor, estudante e objeto de pesquisa. Como estamos trabalhando com Funções Trigonométricas, cujo estudo é dado pela integração entre as representações algébricas e as geométricas, recorreremos à Teoria de Registro de Representações Semióticas.

Construímos e utilizamos no ambiente GeoGebra sete atividades que deram aos alunos condições de assimilação de um novo saber, que desejávamos ensinar e que não foi revelado no início de aplicação da sequência. Motivados pelo uso do

GeoGebra, os grupos aceitaram o desafio de resolver as atividades propostas, comportando-se de modo semelhante ao pesquisador de um problema matemático. Durante todo o processo de construção dos arquivos, os grupos precisaram fazer investigações, testar conjecturas, descobrir propriedades, levantar hipóteses e validar os resultados por meio das construções realizadas. Vejamos um trecho do diálogo abaixo:

A¹: Professora, o que era domínio e imagem? O que é domínio e imagem? Eu não me lembro.

P: Essa é a pergunta para você associar à ideia do domínio. E, para cada valor desse x , existem quais y correspondentes? Essa é a ideia que você associa para a imagem.

A¹: Ah, entendi. Cada valor de x . Então o x , o domínio é 30° , porque o x ele tem uma coisa natural aqui. Ele faz sempre de 30 em 30° , está vendo? 1080, 1050, 30° .

A³: E o y ?

A¹: E o y ? Ele vai. O valor eu acho que ele aumenta até um e aí depois ele diminui até zero e assim sucessivamente. Está vendo? Ele aumenta e depois diminui.

Nesse diálogo, notamos o quanto o GeoGebra foi fundamental para a construção do conhecimento dos alunos, pois, a partir da manipulação do controle deslizante, os pontos são deslocados sobre o gráfico, alterando, assim, suas coordenadas e permitindo aos estudantes que fizessem as conjecturas.

As atividades trabalhadas neste estudo ofereceram meios para que os alunos explorassem os principais conceitos de funções trigonométricas de maneira experimental, de acordo com Borba (2018), ou seja, realizando manipulações e construções com o GeoGebra, desvendando os recursos visuais do *software*, buscando estabelecer conexões entre representações e objetos matemáticos. Dessa forma, entendemos que nosso segundo objetivo, a saber, construir e utilizar um ambiente investigativo de aprendizagem sobre funções trigonométricas, foi alcançado.

Do ponto de vista metodológico, usamos os pressupostos da Engenharia Didática, de Artigue (1996), como norteadores do trabalho. Sendo assim, ao longo

do estudo, as quatro etapas propostas por Artigue (1996) foram desenvolvidas. A segunda fase da Engenharia Didática é a análise *a priori*, que, na perspectiva de Salazar (2009), é constituída pela elaboração e análise das situações didáticas que contemplam a delimitação das variáveis didáticas, seja macrodidáticas (engenharia em geral), seja microdidáticas (organização de uma seção ou fase).

Em nosso estudo estamos tratando das variáveis microdidáticas. Em cada atividade, identificamos as variáveis microdidáticas, isto é, as variáveis específicas que serão utilizadas para o controle das atividades e dizem respeito ao planejamento de uma seção da sequência didática, contemplando, desse modo, o primeiro objetivo específico delineado nesta proposta, a saber, identificar as variáveis didáticas para o ensino de Funções Trigonométricas. Na atividade "razões", por exemplo, as variáveis didáticas foram: os valores dos arcos trigonométricos, medidos em graus; os valores dos senos e dos cossenos para os arcos de 0° , 90° , 180° e 360° ; coordenadas do ponto B, quando este é extremidade dos arcos 0° , 90° , 180° e 360° ; e as razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno e cosseno. Em cada tarefa, descrevemos o que esperávamos e as dificuldades encontradas na resolução da atividade. Realizamos a fase da aplicação e confrontamos os resultados das análises *a posteriori* e *a priori*.

Não esperávamos, na análise *a priori*, que, quando os estudantes estivessem fazendo uma constante, associassem o gráfico da função seno ao movimento harmônico simples (MHS). Acreditamos que esse fato tenha ocorrido porque, na primeira unidade, os discentes estudaram em física o Movimento Harmônico Simples, cuja representação se utiliza de senos e cossenos; isto é, viram uma noção de matemática como ferramenta da física antes de verem Funções Trigonométricas mais formalmente, o que ajuda a confundir o objeto função seno com o fenômeno MHS.

O último objetivo específico neste trabalho foi modelar as produções dos estudantes considerando a Teoria das Situações Didáticas, o que foi realizado nas análises *a posteriori* das atividades, já que não apenas justificamos a passagem dos alunos pelas fases didáticas da TSD, mas explicitamos em quais momentos essas fases ocorreram, utilizando, para tanto, as transcrições dos diálogos e os protocolos dos grupos.

Neste diálogo, notamos o quanto o GeoGebra foi fundamental para a construção do conhecimento dos alunos, pois, a partir da manipulação do controle

deslizante, os pontos são deslocados sobre o gráfico, alterando, assim, suas coordenadas, conforme veremos no diálogo do Grupo 2:

A1: Professora, o que era domínio e imagem? O que é domínio e imagem? Eu não me lembro.

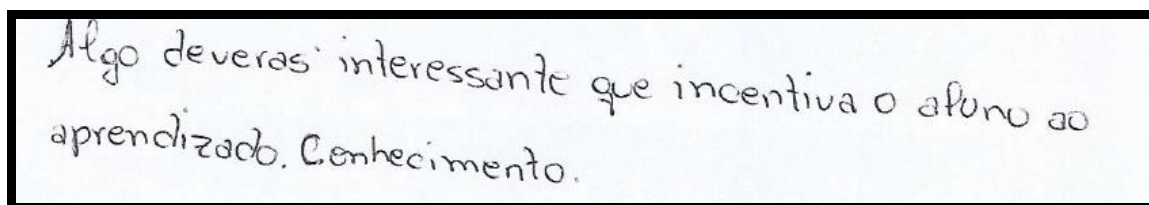
P: Para cada valor desse x , existem quais y correspondentes? Essa é a ideia que você associa para a imagem.

A1: Ah entendi. Cada valor de x . Então o x , o domínio é 30° , porque o x ele tem uma coisa natural aqui. Ele faz sempre de 30 em 30° , está vendo? 1080, 1050,

A nossa observação dos alunos realizando as atividades de trigonometria com auxílio do GeoGebra permitiu que chegássemos às conclusões que seguem abaixo no que tange às suas vantagens.

O GeoGebra possui ferramentas que motivam os discentes no desempenho de suas investigações, facilitando o interesse em resolver as atividades propostas e construir seus conhecimentos.

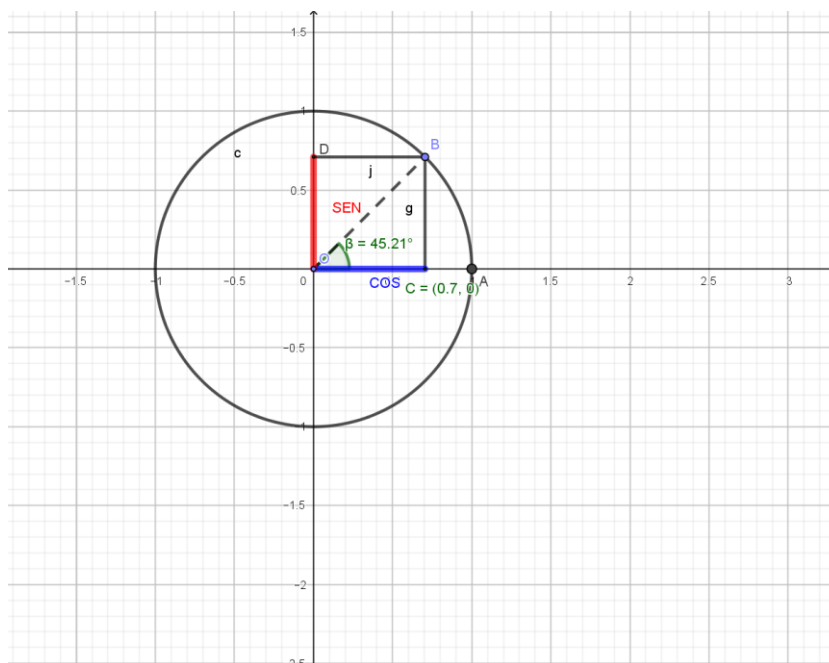
Figura 164 - Questionário final.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

O GeoGebra permite ainda a exploração do visual das figuras construídas, o que não é possível com as figuras estáticas feitas com lápis e papel. Na atividade razões trigonométricas, por exemplo, os alunos construíram a circunferência trigonométrica e um triângulo retângulo dentro dessa circunferência, conforme a figura abaixo.

Figura 165 - Razões Trigonômétricas.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

No quadro, a figura é estática. O estudante teria, então, que ficar imaginando o B se movendo, enquanto que, com o recurso do GeoGebra, o aluno não apenas percebe que esse ponto se movimenta, como também é o responsável por determinar o deslocamento dos segmentos OC e OD.

A²: Não está perguntando do ponto B, tá perguntando do OC, o ponto B não vem na questão.

A¹: Mas ele muda conforme o ponto B tá girando.

A²: Então se o ponto B não tiver girando, tira o ponto B, pra ver.

A¹: O segmento para, tá vendo aí?

A¹: Vou animar de novo.

A²: Conforme o ponto B gira, ele percorre uma linha na horizontal, onde se encontra nas extremidades.

A¹: Quando o b está no primeiro e segundo quadrante ele vai para a direita, e quando está no terceiro e quarto quadrante ele vai para a esquerda. Pronto.

Ao final da atividade, os segmentos OC e OD foram definidos, respectivamente, como cosseno e seno.

O GeoGebra nos permite trabalhar com duas janelas de visualizações interligadas.

Outra situação que no quadro não conseguimos contemplar foi o fato de termos explorado na atividade as funções trigonométricas. Nessa atividade, utilizamos, simultaneamente, duas janelas de visualização e interligamos essas duas janelas de visualização para tratarmos de uma transição importantíssima e muito pouco compreendida, que é a relação entre a circunferência trigonométrica e os gráficos das funções seno e cosseno. Ao final da tarefa, os estudantes conseguiram perceber, conforme descrevemos na análise a posteriori, que o gráfico descrito na janela de visualização dois é gerado a partir da movimentação de um ponto, que é extremidade de um arco na circunferência trigonométrica.

O GeoGebra nos permite construir e visualizar um mesmo objeto em três formas diferentes de representações distintas.

Na terceira questão, conseguimos, num mesmo arquivo, trabalhar com o registro algébrico, o gráfico e o tabular, ligados de modo dinâmico e adaptando-se automaticamente às mudanças realizadas em quaisquer dessas representações. De acordo com Durval (2013), o uso dessas diferentes formas de representação configura atividades cognitivas necessárias para o aprendizado em matemática.

O GeoGebra permite também que os alunos testem conjecturas e propriedades, através da manipulação da dinâmica dos objetos construídos, favorecendo a compreensão dos conceitos matemáticos abordados em nosso estudo, a saber, referentes à função trigonométrica.

De modo geral, consideramos muito satisfatório o resultado apresentado pelos alunos nesta pesquisa, pois estes ampliaram de forma significativa a compreensão sobre funções trigonométricas, o que ficou evidenciado na comparação da atividade diagnóstica com o questionário final, permitindo-nos avaliar positivamente os instrumentos utilizados para a aplicação deste experimento.

O presente estudo pode contribuir com a construção de uma sequência didática, que pode servir de base de referência para outras construções similares que contemplem outros conteúdos matemáticos. Como proposta de continuidade para este trabalho, poderíamos ampliar o estudo para as demais funções trigonométricas, bem como ampliar o discurso sobre os conhecimentos docentes necessários para exercitar o uso apropriado das tecnologias digitais.

Por fim, espera-se que este trabalho possa contribuir para incentivar colegas docentes de matemática quanto à adoção de uma nova postura frente ao ensino da disciplina. Sugerimos, como proposta, a utilização de sequências didáticas com o

emprego do *software* GeoGebra. Enfatizamos, nesse contexto, que as sequências de ensino construídas devem provocar os movimentos dialéticos de ação, formulação e validação dos estudantes, que precisam se engajar em trajetórias investigativas que propiciem a construção de conjecturas, de maneira semelhante ao trabalho do matemático que busca recursos teóricos para o desenvolvimento de uma pesquisa.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, Editora UFPR, 2010.
- NETO, A. et al , **Noções de Matemática**, volume 3. São Paulo, Ed. Moderna, 1978.
- NETO, A. et al , **Noções de Matemática**, volume 1. São Paulo, Ed. Moderna, 1978.
- ARTIGUE, M. **IngénierieDidactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1988.
- ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L; GÓMEZ. P. (Ed.). **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. @1995. “uma empresa docente” & Grupo Editorial Iberoamérica. Impreso en México.
- ARAÚJO, L. C. L. e NÓBRIGA, J. C. C. **Aprendendo Matemática com GeoGebra**. São Paulo, Editora Exato, 2010.
- BELLEMAIN F.: 2000, A transposição informática na engenharia de softwares educativos, I SIPEM, 22 a 25 de novembro, Serra Negra (SP).
- BITTAR, M. A Incorporação de um Software em uma Aula de Matemática: uma análise segundo a abordagem instrumental. In: ALLEVATO, N. S. G.; JANN, A. P. (Org.) **Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores**. Recife: SBEM, 2010. p. 209–225.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**. Conteúdos e Métodos de Ensino. São Paulo, Editora Ática, 2008.
- CARMO, M. P, MORGADO, A. C e WAGNER, E. **Trigonometria, Números Complexos**, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2005.
- D'Amore B. (2007). **Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino**. **Bolema. Boletim de Educação Matemática**. Vol. 20, nº 28, 1179-205. ISSN: 0103-636X.
- DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia D. A. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2012, p. 135-154.
- DANTE, L. R., **Matemática, Contexto e Aplicações**. Manual do Professor. São Paulo, Editora Ática, 2003.
- DANTE, L. R., **Matemática, Contexto e Aplicações**. Manual do Professor. São Paulo, Ed. Ática, 2016.
- DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. **Aprendizagem em**

Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papyrus, 2003, p. 11-34.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FIORENTINI, D. e LORENZATO, S.; **Investigação em Educação Matemática:** Percursos Teóricos Metodológicos. São Paulo, Autores Associados, 2006

GRAVINA, M.A. A aprendizagem da Matemática e ambiente informatizados-PGIE-UFRG. **Informática na educação:** Teoria e Prática.v.2. n.1.p.73-88.1999.

HENRIQUES, AFONSO AND ALMOULOU, SADDO AG **Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior:** uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. *Ciênc. educ. (Bauru)*, jun. 2016, vol.22, no.2, p.465-487. ISSN 1516-7313.

IEZZI, G. et al, **Matemática: Ciência e Aplicação**, volume 2. São Paulo, Ed Saraiva, 2010

Instituto GeoGebra do Rio Janeiro. Disponível em: <<http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>>. Acesso 21/03/2018.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papyrus, 2007.

LIMA Jr., A. **As interpretações da Tecnologia na Contemporaneidade:** por uma tectogênese dos processos tecnológicos, 2005.

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo, EDUC, 2008.

MAGALHÃES, A. R. **Mapas conceituais digitais como estratégia para o desenvolvimento da metacognição no estudo de funções.** Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. PUC - São Paulo, 2009.

PAIS, L. C. Introdução. In: Silvia D. A. (org.). **Educação Matemática:** uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ., 2002. p 9-12.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**, 2.ed. São Paulo. Editora Moderna,2013

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula:** elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo, 2013. 72 p.
Disponível em: <<http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf>> Acesso em: 19 maio 2018.

PONTE, J. P; SERRAZINHA, M. L. **Didática da Matemática do 1º ciclo.** Universidade aberta. S/D.

SILVA, G. H. G. **Ambientes de Geometria Dinâmica:** potencialidades e imprevistos. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 5, n. 1, jan-abr 2012.

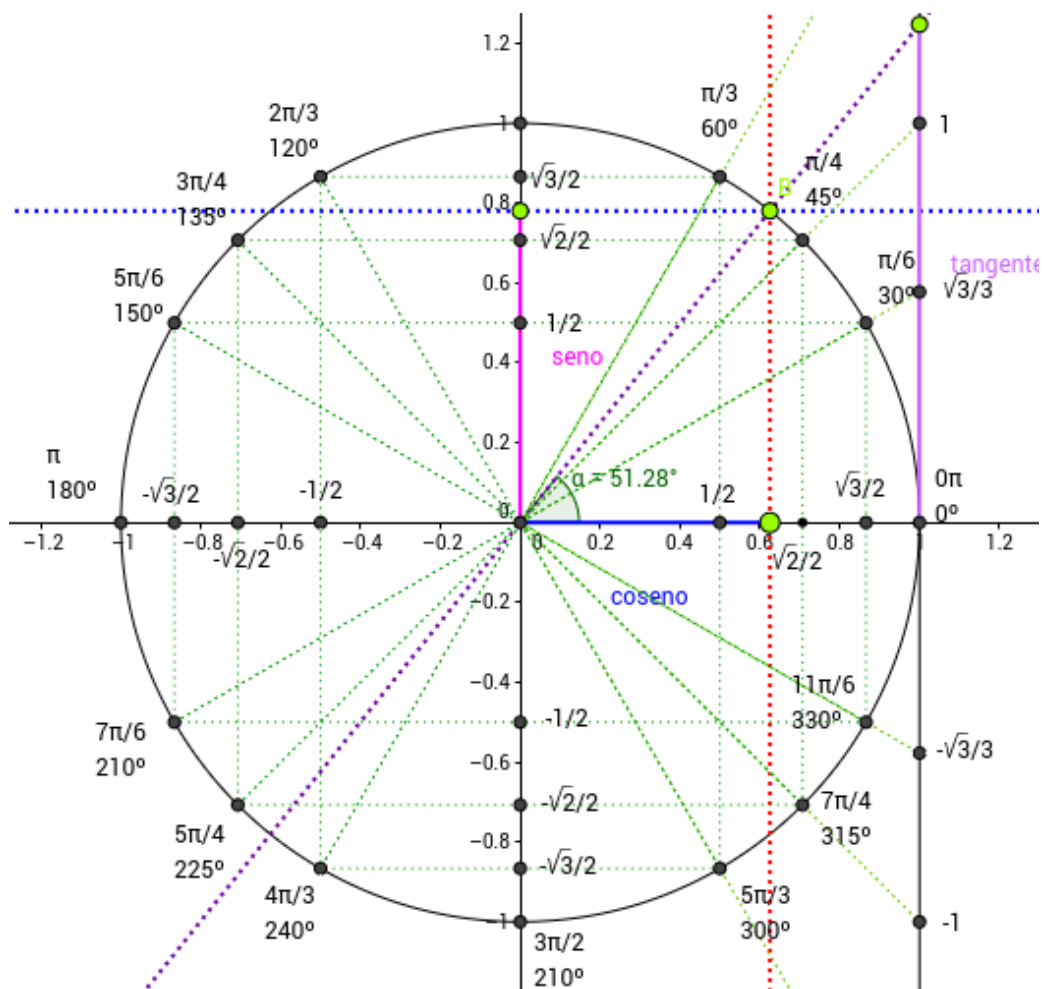
VALENTE, J.A. **Diferentes usos do computador na educação.** Em Aberto, Brasília, ano 12, n.57, jan./mar. 1993. Disponível em: < https://www.pucsp.br/geogebraesp/img/mapa_sobre-instituto.jpg > Acesso em: em 30 jan. 2019.

APÊNDICE A – MODELO QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

Considere a figura abaixo e responda as questões de 1 a 3.

Figura 164 – Circunferência Trigonométrica.



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/zAKgUYFG>

1) você se recorda dessa figura? () sim () não.

2) O que representa a figura?

- a) Plano cartesiano
- b) arcos trigonométricos
- c) círculo trigonométrico

- d) circunferência trigonométrica
 e) não sei responder

3) assinale as afirmações verdadeiras em relação à figura:

- a) () está orientada positivamente no sentido horário
 b) () está orientada positivamente no sentido anti-horário
 c) () a circunferência contida na figura tem raio igual a 1
 d) () a circunferência contida na figura pode ter raio de qualquer valor
 e) () tem centro no ponto no ponto (1,0)
 f) () tem centro no ponto (0,0)
 g) () a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (1,0)
 i) () a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (0,0)
 j) (...) é construída no sistema cartesiano ortogonal
 k) () está dividida em quatro quadrantes
 l) () está dividida em dois quadrantes
 m) () não sei responder as alternativas anteriores

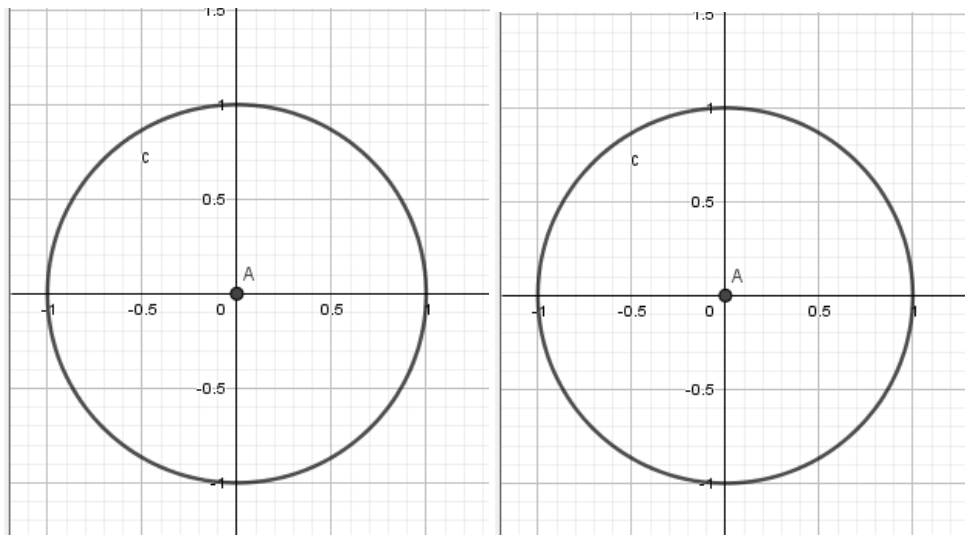
2) analise a figura acima e cite, no mínimo, mais duas afirmações verdadeiras (não presentes na questão anterior) a respeito dos conceitos trigonométricos tratados na figura.

3) Escolha cinco ângulos e determine o valor do seno e cosseno. Organize os valores na tabela abaixo

Ângulo	seno	cosseno

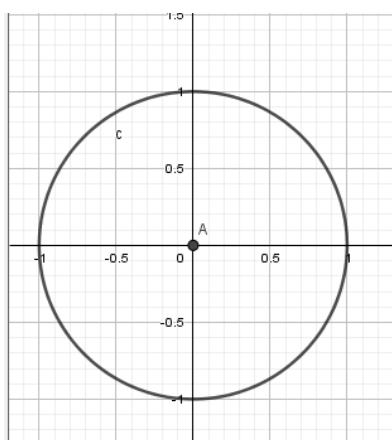
4) Utilizando uma figura para cada caso, marque (aproximadamente) as extremidades dos arcos cujas as medidas são: 30° , -330° e 1110°

Arcos c\u00f4ngruos.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

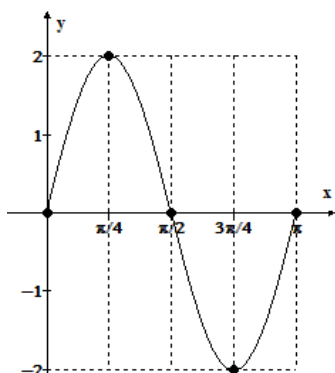
Arco c\u00f4ngruo.



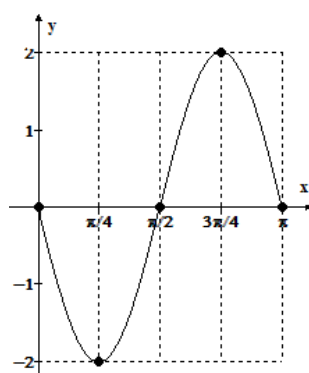
Fonte: elaborada pela autora (2019).

5) Dada a fun\u00e7\u00e3o $y = 2 \cdot \text{sen}(2x)$, assinale o gr\u00e1fico que melhor representa a fun\u00e7\u00e3o. Justifique sua resposta.

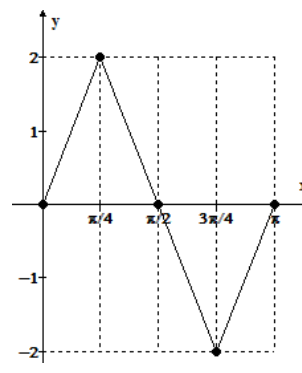
a)



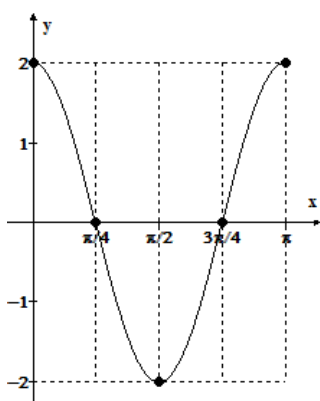
b)



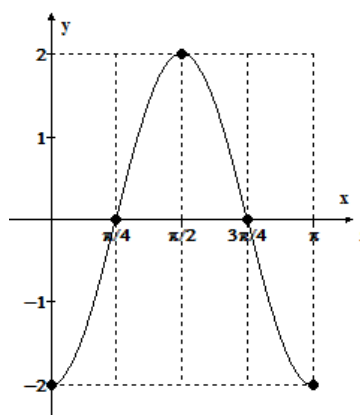
c)



d)



e)



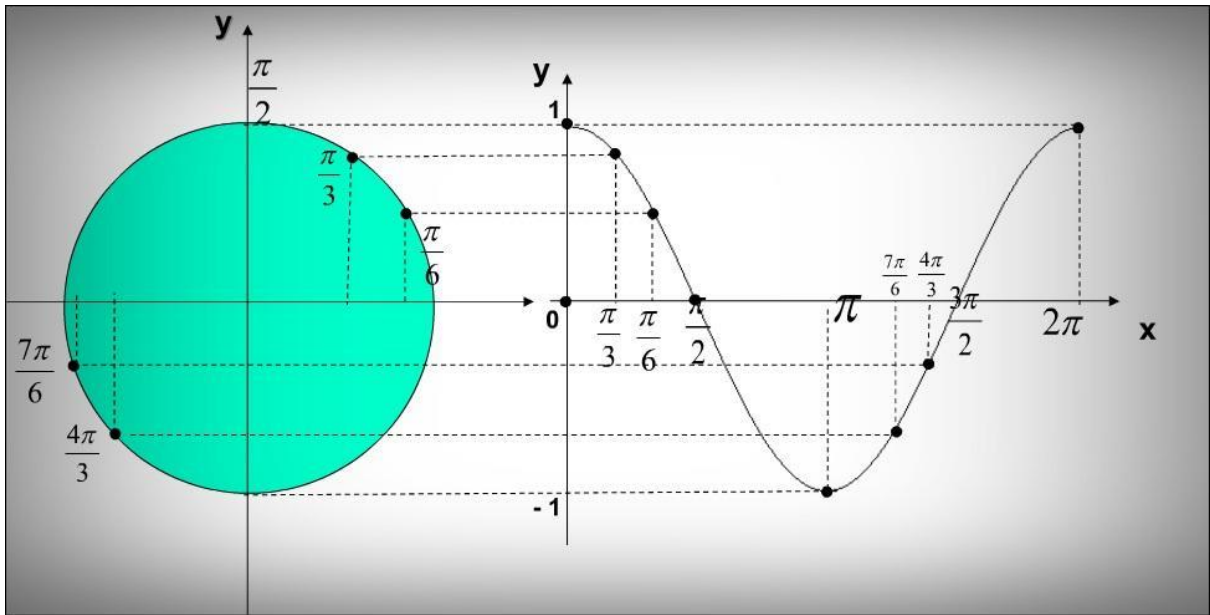
O enunciado abaixo é referente às questões 6, 7, 8 e 9

Em certo dia do ano, em uma cidade, a maré alta ocorreu à meia-noite. A altura da água no porto dessa cidade é uma função periódica. A altura y , em metros, da maré, nesse dia, no porto da cidade, pode ser obtida, aproximadamente, pela fórmula: $y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$, sendo t o tempo decorrido, em horas, após a meia-noite.

6) Você pode afirmar que a expressão da função $y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$ se refere a uma função trigonométrica? Por quê?

- 7) Altura da maré é determinada pelo(a):
- Domínio da função
 - Período da função
 - Imagem da função
 - Nenhum desses elementos
 - Não sei responder
- 8) Por que essa função é considerada uma função periódica?
- 9) É correto afirmar que no instante $t = 12$ h ocorre maré alta, cuja altura é de 3,9 m? Justifique sua resposta.
- 10) O que você compreende sobre a imagem abaixo?

Transição da circunferência para o plano.



Fonte: <http://traprendizado.blogspot.com/2011/08/grafico-de-funcoes-do-tipo-y-c-sen.ht>

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, _____,
responsável pelo(a) estudante _____,
aluno(a) do segundo ano do curso Médio/Integrado do Colégio Estadual Odorico Tavares , situado na Av 7 de Setembro, Salvador/Ba, AUTORIZO que depoimentos, questionários, fotos, filmagens que incluam meu filho(a), assim como materiais produzidos por eles (textos, desenhos entre outros) sejam feitas e utilizadas.

O (A) estudante foi convidado a participar de um estudo denominado “A Utilização do GeoGebra em situações Didáticas para Aprendizagem de Funções Trigonométricas”. Foi alertado de que, da pesquisa a se realizar, pode esperar alguns benefícios, tais como: metodologias e práticas de ensino que possam contribuir para o seu aprendizado. Levando-se em conta que é uma pesquisa, e os resultados positivos ou negativos somente serão obtidos após a sua realização. E que os riscos da pesquisa são mínimos. Reconhecemos riscos inerentes à exposição dos alunos participantes da pesquisa. Tais danos serão evitados por meio de um trabalho ético, que não permitirá ações dos participantes que venham prejudicar o outro e do compromisso em manter sigilo da identidade dos alunos ao expor os dados de forma que não venha gerar nenhum constrangimento aos participantes.

Nesta pesquisa os estudantes participarão de encontros na sala da coordenação, ou sala de aula, onde utilizarão os Chromebooks para laboratório de informática e desenvolverão as seguintes atividades: construir e manipular arquivos no GeoGebra e responder a questionários.

Está ciente de que sua privacidade será respeitada, ou seja, seu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, identificá-lo, será mantido em sigilo.

Também foi informado de que pode se recusar a participar do estudo, ou retirar seu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar, e que, por desejar sair da pesquisa, não sofrerá qualquer prejuízo à assistência que vem recebendo.

Os pesquisadores envolvidos com o referido projeto são: Alcinéia Lima Santos, aluna do Mestrado Profissional Gestão e Tecnologias Aplicadas a Educação – GESTEC, e Dr. André Ricardo Magalhães, professor da Universidade do Estado da Bahia-UNEB.

É garantido ao estudante o livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo o que ele queira saber antes, durante e depois da sua participação.

A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo uso da imagem, voz e material produzido pelos estudantes (textos, desenhos entre outros) em todo território nacional e no exterior, e em todas as suas modalidades.

Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito.

Salvador, _____ de _____ de 2018

(assinatura por extenso do representante legal do sujeito da pesquisa)

Contatos:

Equipe da pesquisa: Alcineia Lima Santos (pesquisadora) – alcineia_lima@hotmail.com, André Magalhães (orientador) – andrerm@gmail.com
Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UNEB – (71) - 3117-2399

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO INICIAL

1) Qual a sua data de nascimento?

___/___/_____

2) Realizou o Ensino Fundamental II (6º ano ao 9º ano):

Escola particular () Escola pública () Em ambas ()

3) Realizou o 1º ano do Ensino Médio em:

Escola particular () Escola pública () Em ambas ()

4) Durante o Ensino Fundamental II fez alguma recuperação em Matemática:

Sim () Não ()

5) Durante o 1º ano do Ensino Médio fez recuperação em Matemática:

Sim () Não ()

6) Qual a sua dificuldade no aprendizado de Matemática

Entender os conceitos ()

Realizar os cálculos algébricos ()

Entender os conceitos e realizar os cálculos algébricos ()

Não tenho dificuldade ()

7) Você gosta de estudar Matemática

Sim () Não () Depende do conteúdo ()

8) O que você pretende fazer ao terminar o ensino médio?

Buscar um emprego ()

Matricular-se em curso técnico ()

Ingressa em curso superior ()

Trabalhar e estudar (curso técnico) ()

Trabalhar e estudar curso superior) ()

Ainda não pensei a respeito ()

9) Caso você pretenda fazer um curso técnico ou superior, qual seria o curso? Qual seria a influência da Matemática nessa escolha?

10) Caso você deseje fazer um curso técnico ou superior, pretende recorrer a outras instituições além da escola para se preparar?

Sim () Não ()

11) Caso você deseje fazer um curso técnico ou superior, deseja ingressar em uma instituição pública ou particular? Por quê?

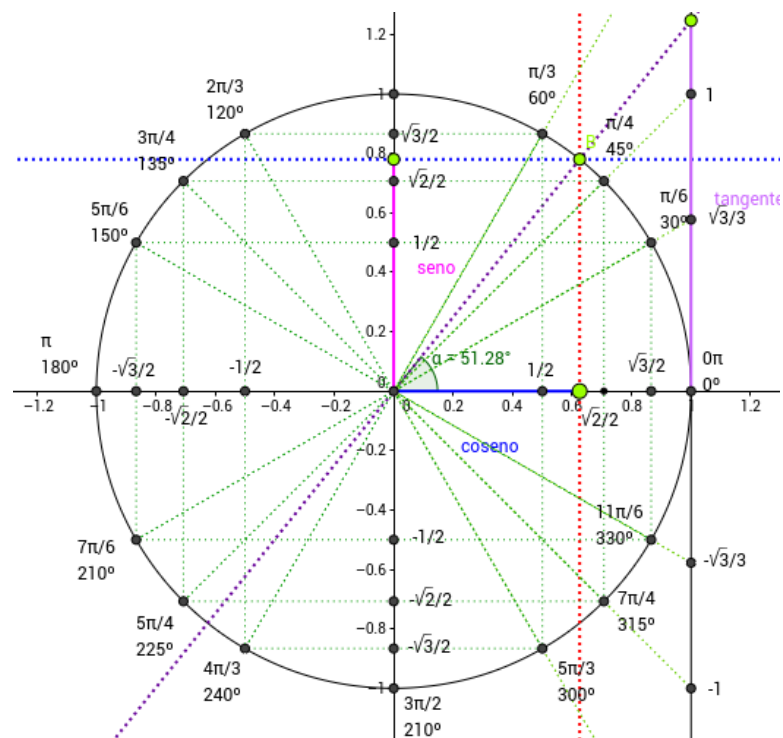
APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO FINAL

- 1) O que vocês acharam das atividades propostas? O que te motivou a resolvê-las?
- 2) Dentre as atividades propostas, qual foi a mais interessante para vocês? Por quê?
- 3) Durante o processo da realização da atividade, quais foram as dificuldades encontradas? O que foi feito para superar essas dificuldades?
- 4) Quando surgiu dúvida em relação a alguma questão da atividade proposta, como o grupo chegou a um consenso? Quais foram os argumentos utilizados por um colega para convencer o outro de que seu raciocínio estava correto? Se recordar, cite um exemplo.
- 5) Em que momento da atividade, vocês solicitaram mais ajuda da professora e por quê?
- 6) Em relação ao ambiente usado para realização das atividades, vocês consideram que fazer as atividades com o suporte do GeoGebra facilitou de alguma maneira o aprendizado de funções trigonométricas? Por quê?

APÊNDICE E – AVALIAÇÃO FINAL

Participante: _____

1) Entre as atividades propostas, construímos a circunferência trigonométrica, a partir da figura abaixo e recordando a atividade construída, o que podemos afirmar:



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/zAKgUYFG>

- a) () está orientada positivamente no sentido horário
- b) () está orientada positivamente no sentido anti-horário
- c) () a circunferência contida na figura tem raio igual a 1
- d) () a circunferência contida na figura pode ter raio de qualquer valor
- e) () tem centro no ponto no ponto (1,0)
- f) () tem centro no ponto (0,0)
- g) () a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (1,0)
- h) () a origem dos arcos orientados tem como ponto de partida o ponto (0,0)
- i) () é construída no sistema cartesiano ortogonal

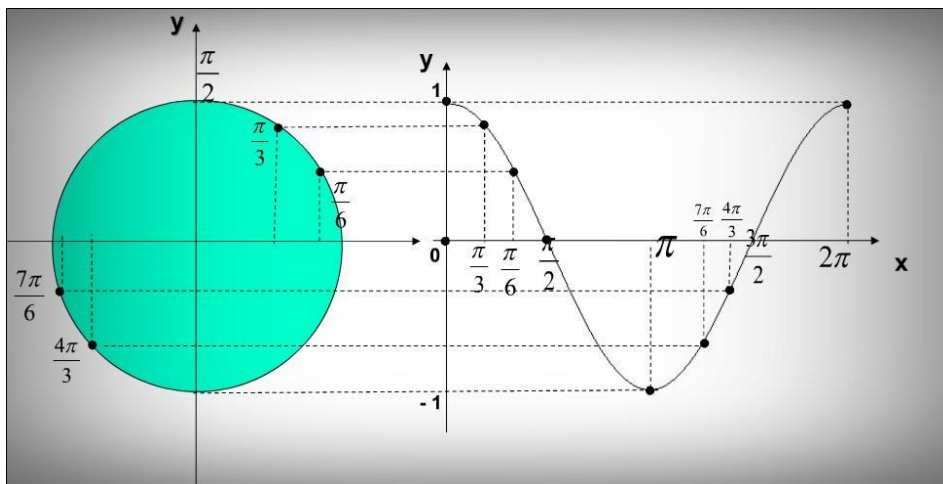
- j) () está dividida em quatro quadrantes
 l) () está dividida em dois quadrantes
 m(...) não sei responder as alternativas anteriores

2) Relembrando a atividade realizada e analisando a figura acima e cite, no mínimo, mais duas afirmações verdadeiras (não presentes na questão anterior) a respeito dos conceitos trigonométricos tratados na figura.

3) Marcar na circunferência trigonométrica o arco de 420° e determine o valor do seno e do cosseno.

3) Em certo dia do ano, em uma cidade, a maré alta ocorreu à meia-noite. A altura da água no porto dessa cidade é uma função periódica. A altura y , em metros, da maré, nesse dia, no porto da cidade, pode ser obtida, aproximadamente, pela fórmula: $y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$, sendo t o tempo decorrido, em horas, após a meia-noite. É correto afirmar que no instante $t = 12$ h ocorre maré alta, cuja altura é de 3,9 m, justifique sua resposta. Se você estivesse no ambiente GeoGebra, o que faria para responder essa questão?

4) Relacione a imagem com umas das atividades que foi realizada. De que forma você poderia relacionar circunferência trigonometria e o gráfico da função?



Fonte: elaborado pela autora (2019).

APÊNDICE F – GOEGEBRA⁵

INTERFACE E FERRAMENTAS

Neste texto apresentamos o *software* GeoGebra em linhas gerais. Fazemos uma breve abordagem de seu desenvolvimento, apresentamos sua interface, algumas funcionalidades e os passos necessários para construção de alguns objetos.

APRESENTAÇÃO

O GeoGebra é um programa/aplicativo com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos.

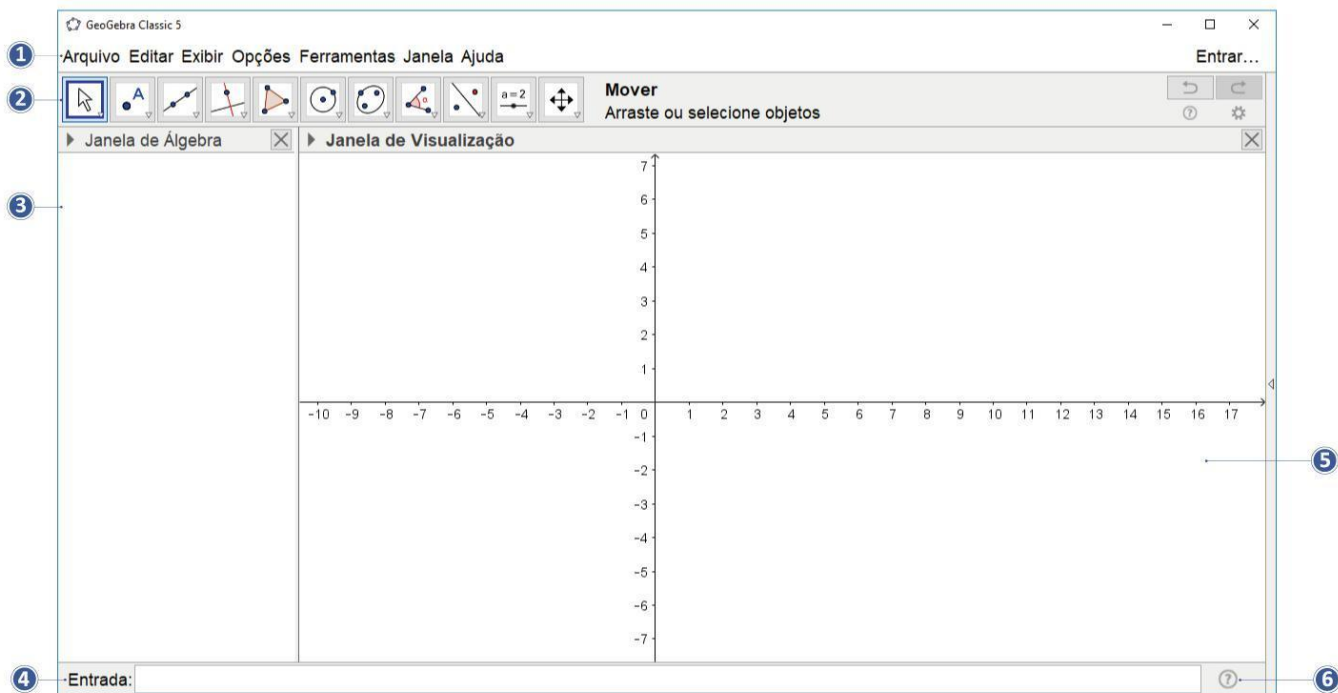
Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo é o idealizador do projeto do programa e é um de seus principais desenvolvedores em conjunto com Yves Kreis da Universidade de Luxemburgo.

Os desenvolvedores do GeoGebra permitem que ele seja baixado do site oficial (www.geogebra.org) e instalado em computadores ou em dispositivos móveis com sistemas operacionais diversos.

INTERFACE

A interface padrão do GeoGebra instalado em um computador, ao ser carregado, apresenta a seguinte configuração.

⁵ Todas as figuras e informações deste Apêndice foram retiradas do site: www.ogegebra.com .



①

Barra de Menus

A Barra de Menus disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.

②

Barra de Ferramentas

A Barra de Ferramentas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.

③

Janela de Álgebra

Área em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

④

Entrada
Campo de texto para digitação de comandos.

⑤

Janela de Visualização

Área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse, após clicar nos ícones da Barra de Ícones.

As construções exibidas na Janela de Visualização também podem ser realizadas via comandos digitados na Entrada.

⑥

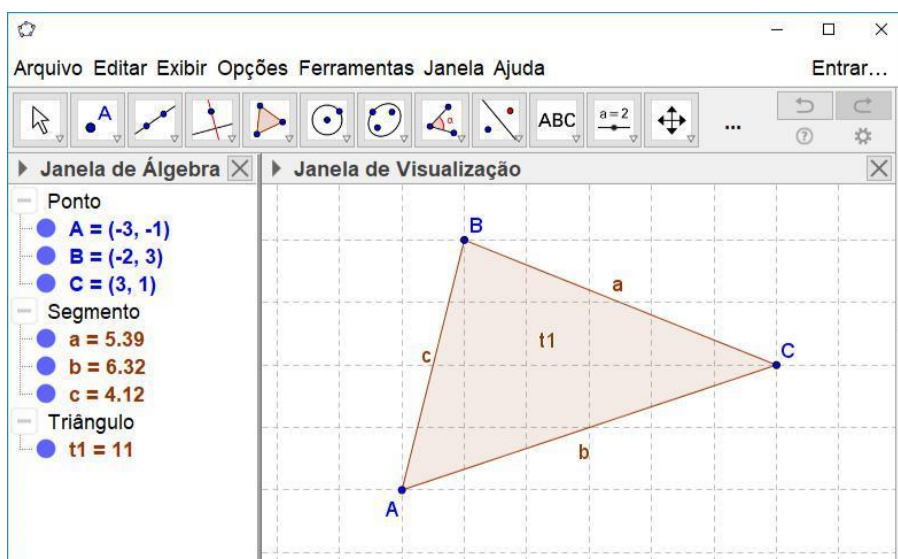
Lista de Comandos

Listagem de comandos predefinidos. Entre eles há comandos relacionados aos ícones da Barra de Ferramentas.

JANELA DE VISUALIZAÇÃO VERSUS JANELA DE ÁLGEBRA

O GeoGebra recebeu esse nome pela possibilidade de operar com as representações aritmética, algébrica e geométrica, conjuntamente. Isso significa que um objeto construído com o mouse ou digitando sua sintaxe na Entrada pode possuir mais de uma representação: geométrica e aritmética ou algébrica.

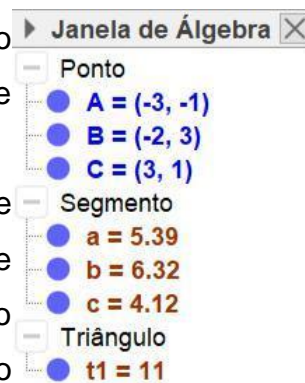
Veja na Janela de Visualização representada na figura abaixo exibe um triângulo construído em um plano cartesiano.



Janela de Álgebra e Janela de Visualização

Observe que na Janela de Visualização está representado geometricamente um triângulo com vértices A, B e C e lados a, b e c.

Observe também que no lado esquerdo da tela, na Janela de Álgebra, são exibidas as coordenadas de cada vértice desse triângulo, a medida de cada um dos lados a, b e c e a área do triângulo (11cm^2), que foi nomeado automaticamente pelo GeoGebra como “t1”.



BARRA DE FERRAMENTAS

A Barra de Ferramentas, localizada na parte superior do GeoGebra, é composta de doze conjuntos de ícones com as ferramentas necessárias para o usuário construir, movimentar, obter medidas e modificar atributos de objetos construídos.

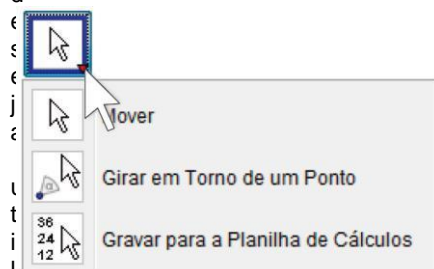
Ao abrir o GeoGebra a Barra de Ferramentas apresenta a seguinte configuração visual.



Para ativar uma ferramenta clique em seu ícone. No entanto, para cada conjunto de ícones há apenas um visível, veja a seguir como acessar os ícones ocultos.

1

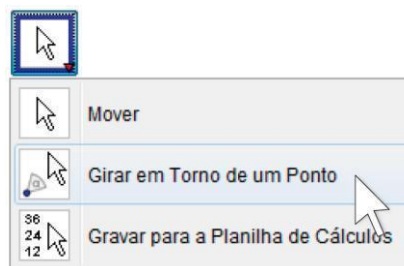
Clique no canto inferior esquerdo do ícone que contenha a ferramenta que



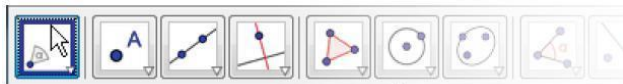
izar.

2

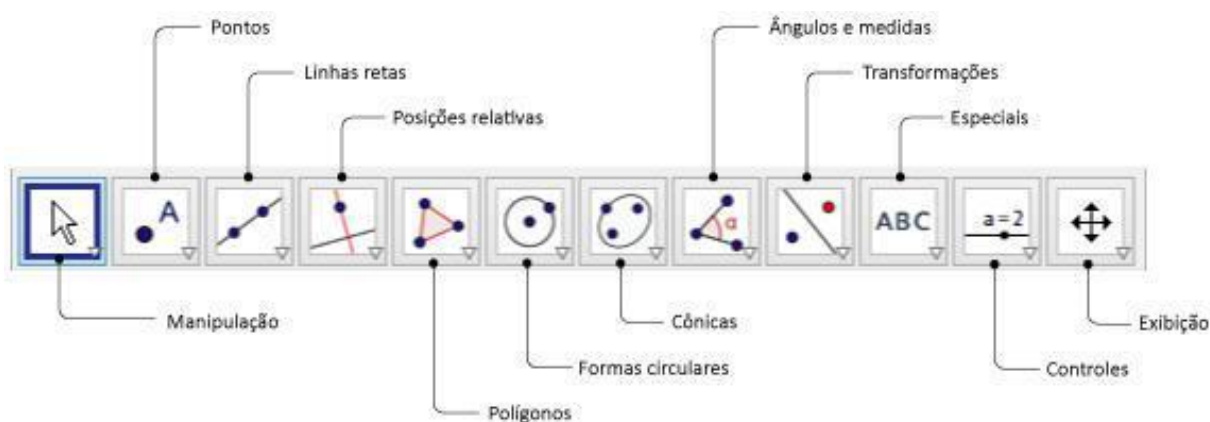
Selecione a ferramenta.



A ferramenta selecionada fica ativa e seu ícone ocupa o lugar de destaque do conjunto a que ela pertence.



Na imagem da Barra de Ferramentas abaixo está indicado como nomeamos cada conjunto de ferramentas.



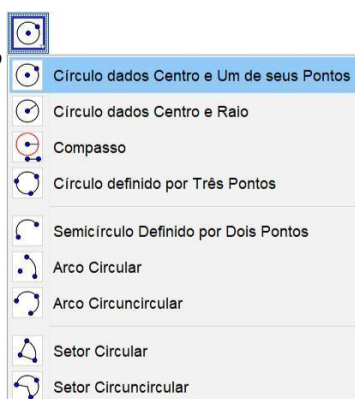
CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Para realizar uma construção selecione a ferramenta desejada na Barra de Ícones e clique na Janela de Visualização ou digite os valores de entrada solicitados pelo GeoGebra. Considere os seguintes problemas.

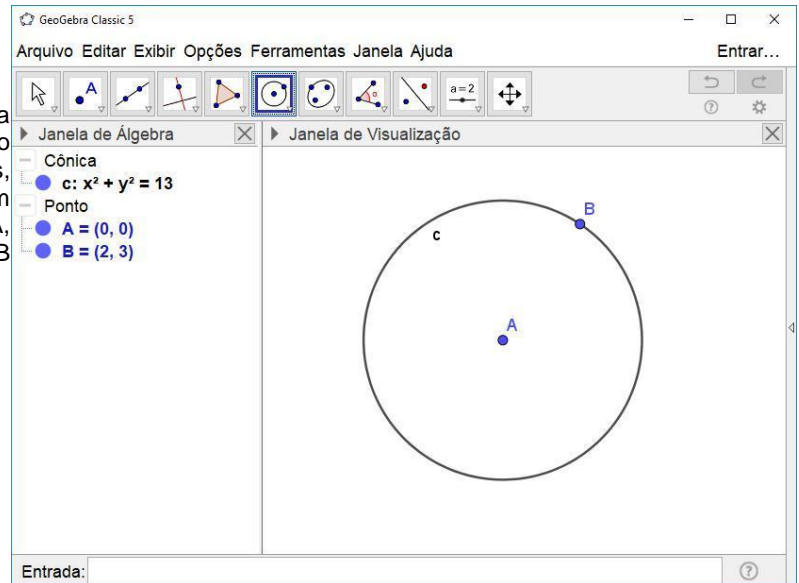
Construir um círculo de Centro A que passe por um ponto B.

1

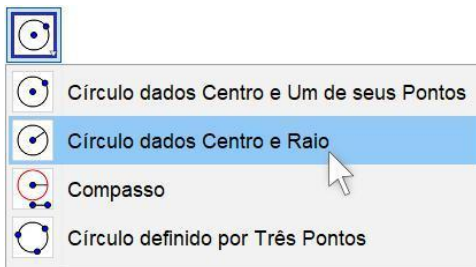
Selecione a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*.



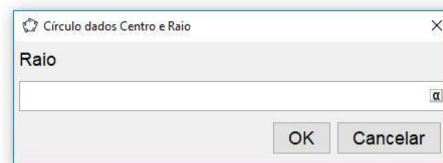
- 2 Clique em qualquer região da Janela de Visualização para marcar o centro A do círculo. Depois, arraste o mouse e clique em um local distinto do ponto A, marcando assim o ponto B pertencente à circunferência.



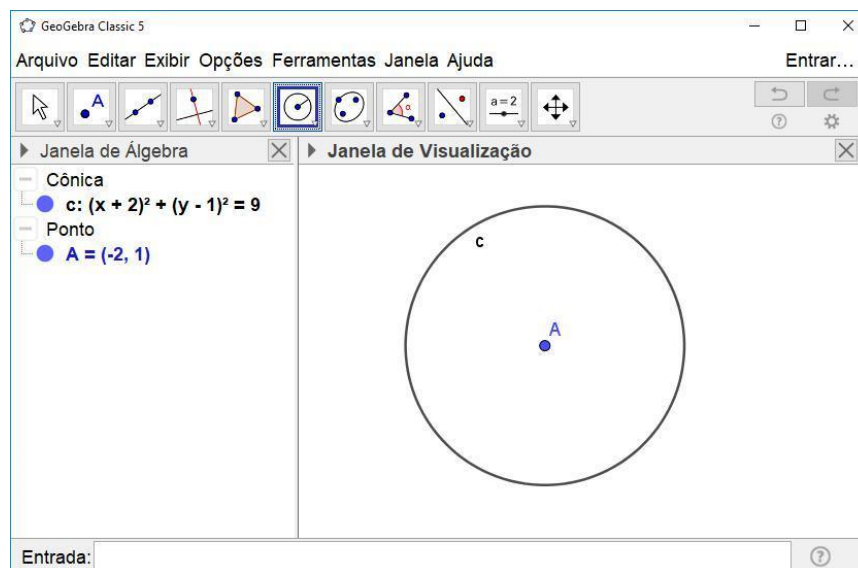
- 1 Selecione a ferramenta Círculo dados centro e raio.



- 2 Clique em qualquer região da Janela de Visualização para marcar o centro A do círculo. Após marcar o ponto A o GeoGebra exibe a seguinte janela.



- 3 Digite a medida do raio (3) na caixa de texto. Em seguida, clique em OK para que o GeoGebra construa o círculo.

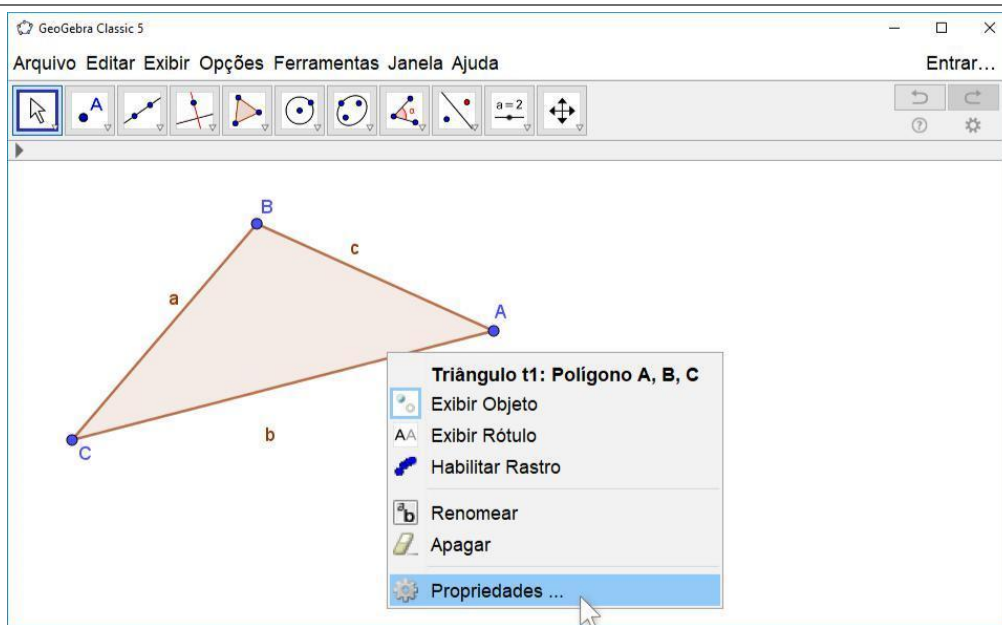


OBJETOS E SUAS PROPRIEDADES

Quando construímos um objeto no GeoGebra, por exemplo, um polígono, uma reta, um ponto, eles são exibidos na Janela de Visualização com atributos como cor, espessura da linha, transparência/opacidade, entre outras características que são predefinidas pelo próprio programa. Essas características ou atributos podem ser modificadas pelo usuário do programa e como realizá-las é o tema desse capítulo.

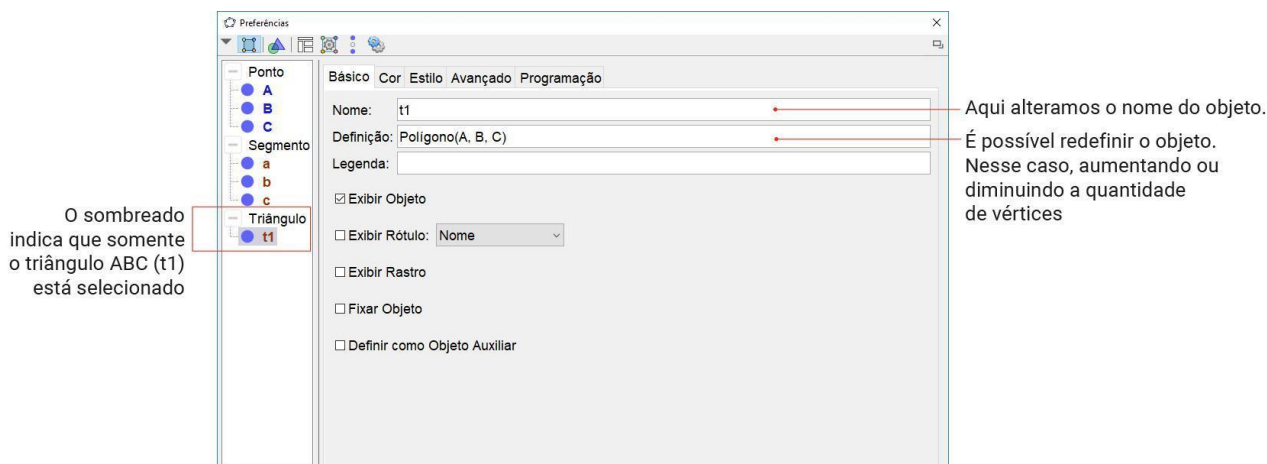
JANELA DE PROPRIEDADES

Clicando com o botão direito do *mouse* sobre um objeto na Janela de Visualização ou sobre seu nome na Janela de Álgebra podemos acessar a Janela de Propriedades.

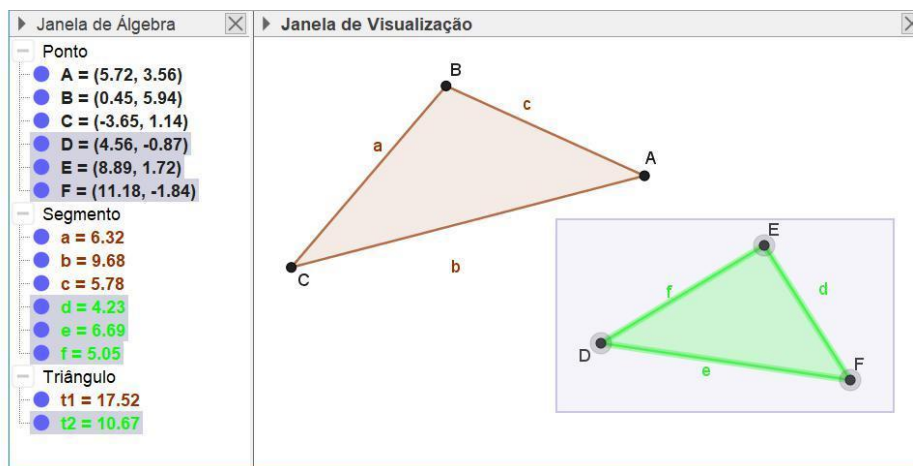


Na Janela de Propriedades visualizamos cinco abas: Básico, Cor, Estilo, Avançado e Programação. Na aba Básico é possível modificar atributos de um ou mais objetos selecionados.

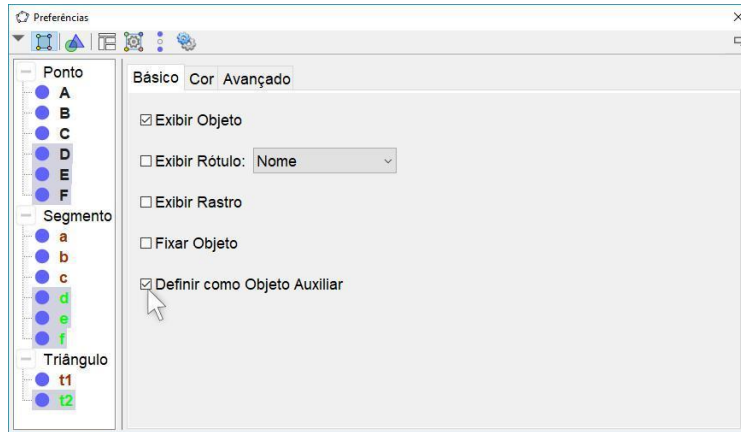
Em nossa imagem exemplo acima selecionamos o triângulo ABC (t1). Ao acessar as propriedades desse objeto que são exibidas na Janela de Propriedades abaixo, visualizamos as definições e atributos desse triângulo.



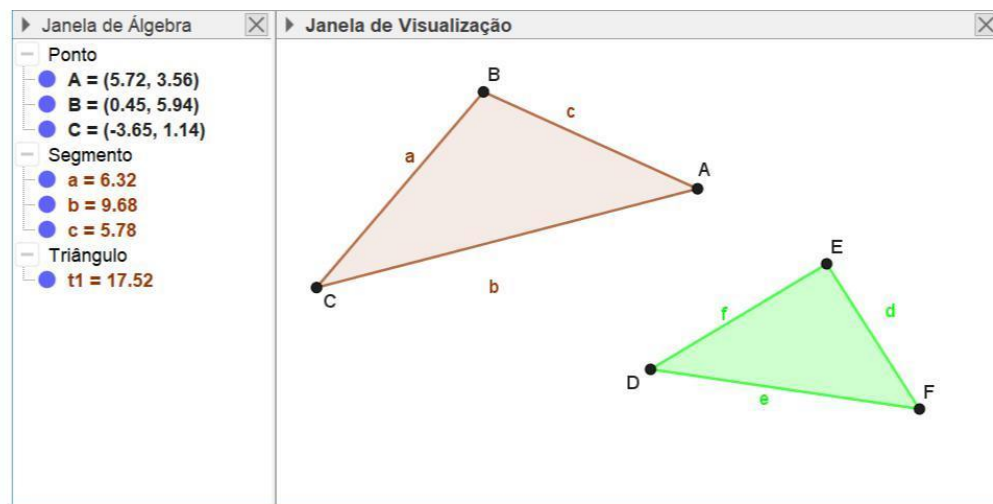
A opção *Fixar Objeto* quando selecionada fixa o objeto na Janela de Visualização não permitindo que ele seja movido com o ponteiro do mouse. A opção *Definir como Objeto Auxiliar* faz com que o nome do objeto componha uma lista de objetos que não são exibidos por padrão na Janela de Álgebra. Por exemplo, o triângulo t2 abaixo e seus elementos foram selecionados por meio de um retângulo. Para isso, clicou-se com o botão direito do mouse e manteve tal botão pressionado até seleção envolver a todos os objetos com o movimento do *mouse*.



Com os objetos selecionados, clicou-se em propriedades, foi acessada a aba Básico e definidos os objetos como auxiliares.

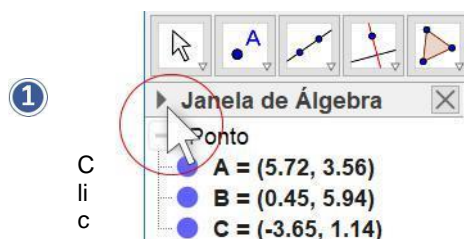


O triângulo DEF, representado na cor verde na imagem abaixo, foi definido como objeto auxiliar. Como podemos notar, t2 e seus elementos são exibidos na Janela de Visualização, mas não são exibidos na Janela de Álgebra.



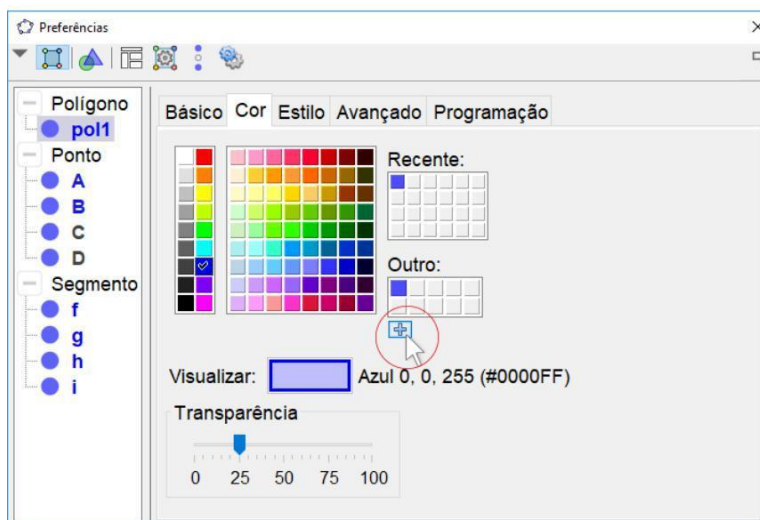
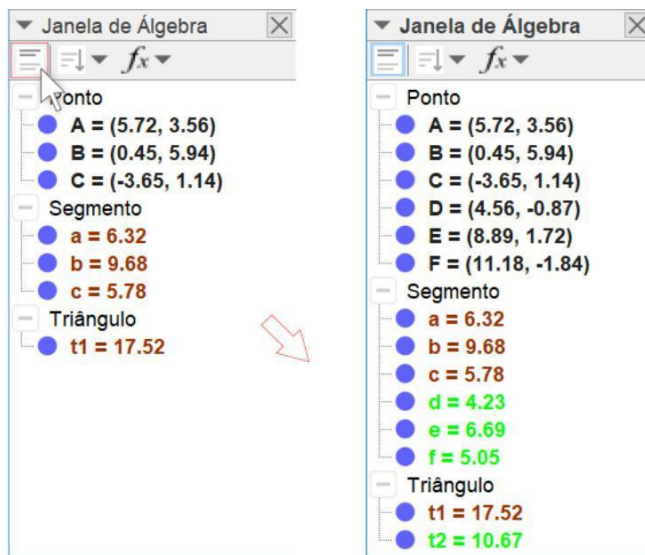
www.ogeogebra.com.br

Esse recurso do GeoGebra permite que objetos e suas nomenclaturas que foram úteis na construção, mas que não são úteis ao utilizar o GeoGebra em uma aula ou em uma apresentação, não desviem a atenção do usuário. No entanto, caso necessitemos, é possível exibir as nomenclaturas dos objetos auxiliares na Janela de Álgebra. Para isso, realizamos os seguintes passos.



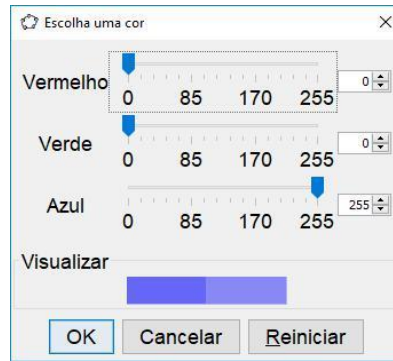
amos no ícone que aparece ao lado de Janela de Álgebra.

Clicamos em Objetos Auxiliares e eles são exibidos na Janela de Álgebra.



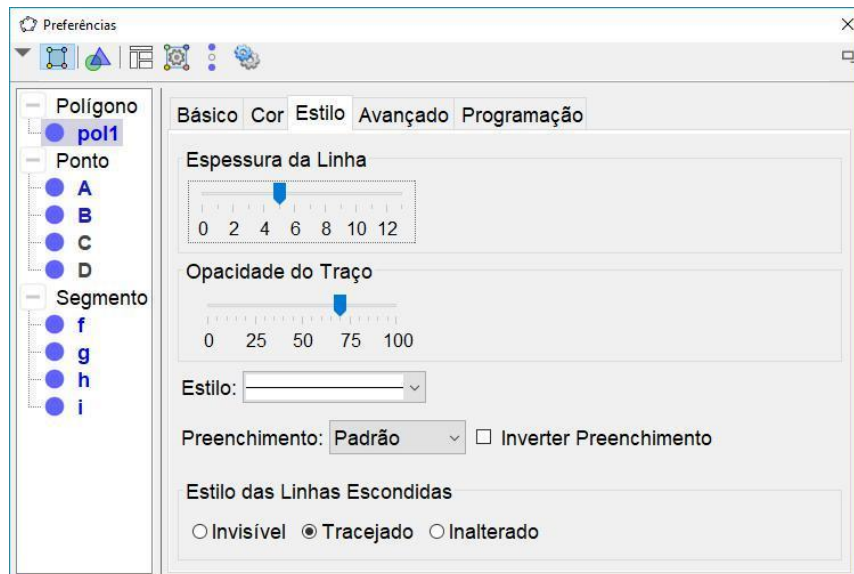
Na aba Cor é possível modificar a cor do objeto selecionado a partir de uma palheta de cores predefinidas no software. Clicando em outro é possível ainda acrescentar cores que não são apresentadas na palheta. Para isso, devemos modificar os valores dos controles deslizantes.

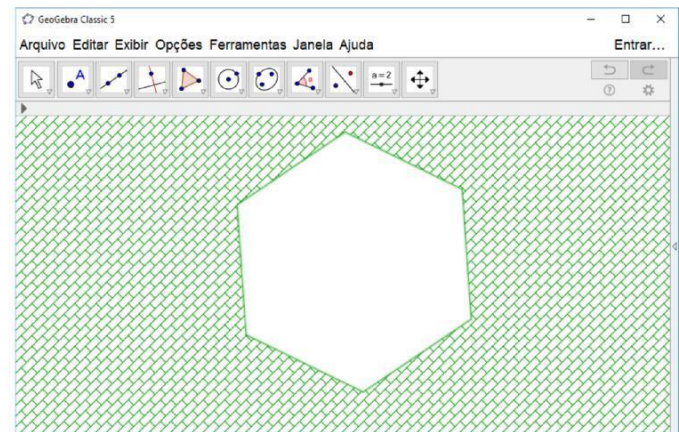
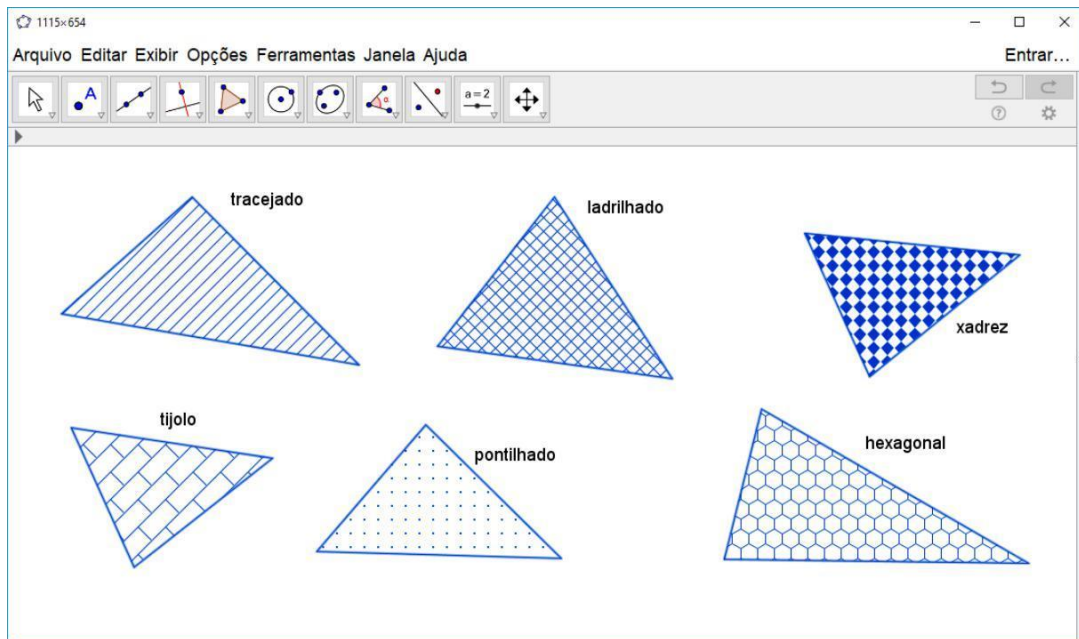
Para controlar a transparência ou opacidade do objeto modificamos os valores do controle de transparência para valores de 0 a 100. Sendo que no valor zero a figura é totalmente transparente e no 100, totalmente opaca.



Na aba Estilo são disponibilizadas opções que permitem modificar a espessura e o estilo da linha. E, além disso, pode-se modificar o preenchimento de objetos.

As imagens abaixo são exemplos de aplicação da opção preenchimento.





A opção *Inverter Preenchimento* permuta o preenchimento do objeto com o plano de fundo.

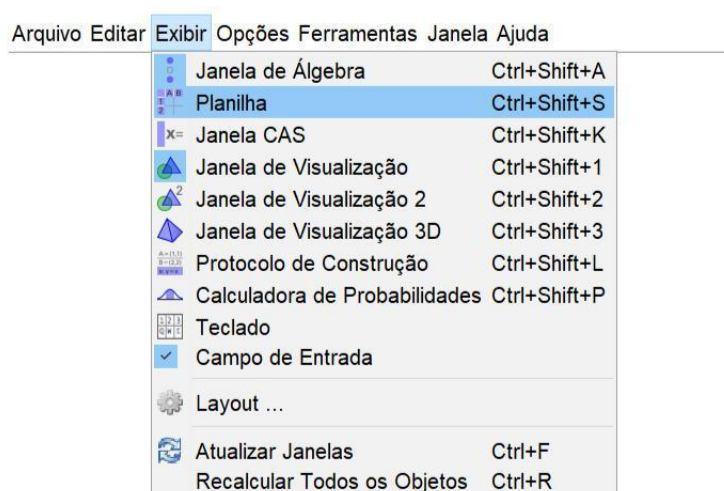
No exemplo acima, antes de selecionarmos *Inverter Preenchimento*, o plano de fundo era de cor branca e o polígono estava preenchido com a malha Tijolos.

PLANILHA

Nesse texto apresentamos a Janela Planilha do GeoGebra e alguns de seus recursos para trabalhar em conjunto com as janelas de Álgebra e de Visualização.

PLANILHA, CÉLULAS E CONTEÚDO

Para abrir a planilha no GeoGebra basta clicar no menu Exibir e acessar a opção Planilha.



Essa ação faz carregar a Planilha no lado direito do GeoGebra, conforme a figura abaixo.



Em uma célula da planilha é possível digitar valores numéricos, coordenadas de pontos, funções, segmentos, polígonos, entre outros. Nas células A1 a A5 foram digitados as seguintes entradas:

A1: -3

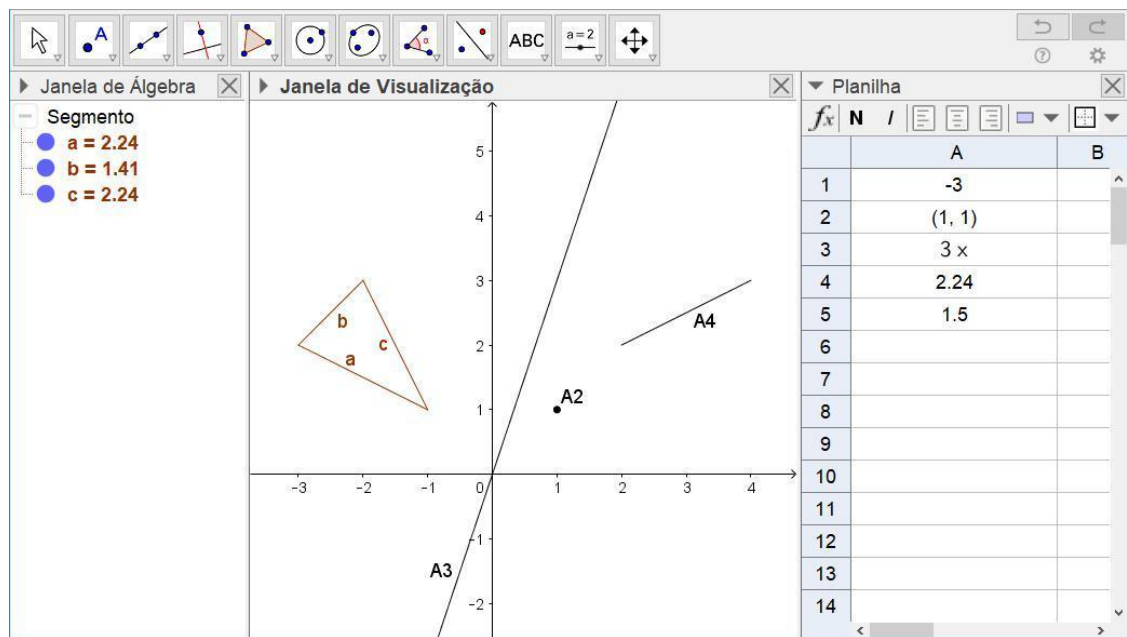
A2: (1, 1)

A3: $3x$

A4: Segmento[(2, 2), (4, 3)]

A5: Polígono[(-1, 1), (-3, 2), (-2, 3)]

A partir dessas entradas, o GeoGebra exibiu um valor numérico em A1, as coordenadas de um ponto em A2, a expressão da função em A3, o comprimento do segmento em A4 e a área do polígono em A5. Exibiu ainda a representação gráfica desses objetos na Janela de Visualização.



Note que o ponto (1,1) não foi exibido na *Janela de Visualização*. Para exibi-lo basta clicar com o botão direito do mouse na célula A2 e, em seguida, clicar em *Exibir Objeto*.

APÊNDICE G – SEQUÊNCIA DIDÁTICA DIGITAL

ATIVIDADE 1 - RAZÃO TRIGONOMÉTRICA NA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Orientação para construção da atividade:

1. Insira o ponto $O = (0,0)$, (ferramenta ponto);
2. Insira o círculo de centro em O e raio igual a 1 (ferramenta círculo dado centro e raio);
3. Insira o ponto $A = (1,0)$ (digite na caixa de entrada $A = (1,0)$ e pressione ENTER);
4. Insira o ponto B sobre a circunferência (ferramenta ponto);
5. Ao animar o ponto B , anote as observações:
 - a) Em que sentido o ponto B percorre a circunferência?
 - b) Ao percorrer toda a circunferência, o ponto B percorre quantos graus?
6. Clique na ferramenta ângulo e nos pontos A, O, B nessa ordem;
7. Na caixa de entrada insira o ponto o ponto $C = (x(B), 0)$;
8. Construa o segmento OC (ferramenta segmento);
9. Personalize o segmento OC (clique com o botão do lado direito do mouse e selecione propriedades);
10. Em que sentido percorre o segmento OC ?
11. Na caixa de entrada insira o ponto o ponto $D = (0, y(B))$;
12. Personalize o segmento OD , (clique com o botão do lado direito do mouse e selecione propriedades);
13. Em que sentido percorre o segmento OD ?
14. Construa mais três segmentos: OB , BC e BD ;
15. Desabilite a animação do ponto B e anote as observações:
16. Para cada ângulo da tabela abaixo, determine as coordenadas do ponto B

Ângulo	x	y	(x,y)
0°			
90°			
180°			
360°			

17. De que maneira podemos verificar que os triângulos ODB e OCB são retângulos
18. Posicione os triângulos OCB no primeiro quadrante, sabendo que $CB = OD$, identifique justificando sua resposta qual o segmento representa:
 - a) Cateto oposto

7. Dos valores observados qual o máximo valor assumido pelo seno? E pelo cosseno?
8. Dos valores observados qual o mínimo valor assumido seno? E pelo cosseno?
9. Para quais ângulos os valores dos senos são positivos? Esses ângulos pertencem a que quadrante?
10. Para quais ângulos os valores do seno são negativos? Esses ângulos pertencem a quais quadrantes?
11. Para quais ângulos os valores do cosseno são positivos? Esses ângulos pertencem a que quadrante?
12. Para quais ângulos os valores do cosseno são negativos? Esses ângulos pertencem a quais quadrantes?
13. Personalize o controle deslizante, mudando o intervalo máximo de 360° para 1080° ;
14. Ao movimentar o controle deslizante e possível contar quantas voltas completas o ponto B percorre a circunferência?
15. Movimente o controle deslizante e registre os valores dos ângulos α e β dados na janela algébrica. Na janela de visualização você conseguir distinguir os ângulos α e β ?
16. Digite na caixa de texto $\alpha = 60^\circ$, anote valor do $\sin 60^\circ$ e do $\cos 60^\circ$, faça o procedimento para os ângulos de 420° e 780° . Compare os valores encontrados para o seno e cosseno destes ângulos. O que você pode concluir?

ATIVIDADE 3 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: SENO E COSSENO

PARTE A: Função Cosseno

1. Abra o arquivo já construído do ciclo trigonométrico da atividade 1;
2. Construa um arco AB (ferramenta círculo);
3. Clique na ferramenta exibir e peça para exibir a janela 2 de visualização;
4. Clique na janela de visualização 2, vá em janela de visualização e personalize os eixos coordenados, mude a distância do eixo ox para 2, mude a distância do eixo ou para 1;

Com a janela de visualização 2 ativada:

1. Digite na caixa de entrada: $I = (k,0)$;
2. Digite na caixa de entrada: segmento $[O, I]$;
3. Clique na ferramenta copiar estilo visual, clique no arco AB e depois no segmento $[O, I]$;
4. Movimente o ponto B e faça a correspondência entre o arco descrito na janela de visualização 1 e o comprimento do segmento OI na janela visualização 2.
5. Digite na caixa de entrada: $F = (d, x(C))$;
6. Anote as observações para os ângulos de 0° , 90° , 180° , 270° e 360° ;
7. Esconda o segmento OI e faça a observação do ponto F na janela de visualização 2;

8. Posicione o ponto B para o ponto A;
9. Em que valor de y inicia a movimentação do ponto F? Em que valor de y termina?
10. Para quais valores de x o ponto F corta o eixo ox ?
11. Qual movimento é observado no deslocamento do ponto F nos seguintes intervalos:

a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

c) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

d) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

12. Construa duas retas paralelas ao eixo ox , $y = -1$ e $y = 1$ na janela de visualização 2.
13. Agora observe se a movimentação do ponto F toca nessas retas, ultrapassa a região compreendida por essas duas retas ou não consegue tocar nas duas retas.
14. Desenhe o percurso descrito pela movimentação do ponto F.
15. Na matemática você já observou algum gráfico semelhante ao percurso descrito por pela movimentação desse ponto?

PARTE B - Função seno

- 1) Utilizando o mesmo arquivo da atividade 3, desabilite o ponto F;
- 2) Digite na caixa de entrada: $J = (d, y(D))$.
- 3) Anote as observações para os ângulos de 0° , 90° , 180° , 270° e 360° .
- 4) Esconda o segmento \overline{OI} e faça a observação do ponto J na janela de visualização 2.
- 5) Posicione o ponto B para o ponto A.
- 6) Em que valor de y inicia a movimentação do ponto J? Em que valor de y termina?
- 7) Para quais valores de x o ponto J corta o eixo ox ?
- 8) Qual movimento é observado no deslocamento do ponto J nos seguintes intervalos:

a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$$\text{c) } \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right[$$

$$\text{d) } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$$

- 9) Construa duas retas paralelas ao eixo ox, $y = -1$ e $y = 1$ na janela de visualização 2.
- 10) Agora observe se a movimentação do ponto J toca nessas retas, ultrapassa região compreendida por essas duas retas ou não consegue tocar nas duas retas.
- 11) Desenhe o percurso descrito pela movimentação do ponto J.
- 12) Na matemática você já observou algum gráfico semelhante ao percurso descrito por pela movimentação desse ponto?

ATIVIDADE 4 – PARÂMETROS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Orientação para construção da atividade:

- 1) Construa o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$

Passos para construção :

Digite na caixa de entrada a função $f(x) = \text{sen}(x)$ e tecla “enter”.

Personalize a janela de visualização:

Do lado direito da Barra de ferramenta (parte superior da tela), clique na barra de estilo, depois, em “Exibir” ou esconder a “malha” e selecione a malha quadriculada.

Para colocar o eixo x na escala de s^π radiano, clique sobre o eixo x como botão direito do mouse e selecione com botão esquerdo do mouse a opção “Janela de visualização”. Clique na aba “Eixo X” e selecione em “Unidade” a opção π . A opção “Distância” não deve estar selecionada.

De acordo com a construção, responda :

- a) Qual é a imagem da função f
- b) Qual é o período da função f

Esconda a função f (clica na janela álgebra e desativa a função).

- 2) Construa o gráfico da função $g(x) = \text{cos}(x)$

De acordo com a construção responda :

- a) Qual é a imagem da função f

b) Qual é o período da função f

Ative a função f e responda:

Quantos pontos de interseção existem entre as funções f e g no intervalo de $[0, 2\pi]$

3) Esconda o gráfico da função $g(x) = \cos(x)$ e habilite o gráfico da função $f(x) = \sin(x)$.

- Construa os gráficos das funções: $m(x) = 1 + \sin(x)$, $h(x) = -1 + \sin(x)$.
 - Comparando com o gráfico da função $f(x) = \sin(x)$ que podemos observar sobre o gráfico da $m(x) = 1 + \sin(x)$? E sobre o gráfico da função $h(x) = -1 + \sin(x)$
 - Determine o conjunto imagem das funções $f(x)$, $m(x)$ e $h(x)$.
 - Esconda os gráficos das funções $m(x)$ e $h(x)$ e construa o gráfico das funções $j(x) = \sin(2x)$ e $k(x) = \sin\left(\frac{-1}{2}x\right)$.
 - Comparando com o gráfico da função $f(x) = \sin(x)$ que podemos observar sobre o gráfico da $j(x) = \sin(2x)$ e $k(x) = \sin\left(\frac{-1}{2}x\right)$?
 - Determine o período das funções $j(x) = \sin(2x)$ e $k(x) = \sin\left(\frac{-1}{2}x\right)$
- 4) Esconda o gráfico da função das funções anteriores e habilite o gráfico da função $g(x) = \cos(x)$.

- Construa os gráficos das funções: $t(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$, $z(x) = -2\cos(x)$.
- Comparando com o gráfico da função $g(x) = \cos(x)$ que podemos observar sobre o gráfico da função $t(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$. E sobre o gráfico da função
- Determine o conjunto imagem das funções $g(x)$, $t(x)$ e $z(x)$.
- Esconda os gráficos das funções $t(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$ e $z(x) = -2\cos(x)$ e construa o gráfico da $t(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $t(x) = \cos\left(x - \pi\right)$.
- Comparando com o gráfico da função $g(x) = \cos(x)$ que podemos observar sobre o gráfico da função $t(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $t(x) = \cos\left(x - \pi\right)$?
- Qual o resultado da expressão $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + g(x)$?

2ª PARTE – GENERALIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Abra um novo documento e siga os seguintes passos:

1º passo: Na barra de ferramenta clique, com o botão esquerdo do mouse, inicialmente na opção “Controle Deslizante” e, em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização; automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”. Nesse momento aparecerá um parâmetro a (com valor inicial igual a 1). Repita a operação e insira novos parâmetros (b, c e d). Altere a cor de cada um dos controles deslizantes.

2º passo: No campo de entrada digite a função: $f(x) = a + b * \text{sen}(c * x + d)$ ou $f(x) = a + b * \text{cos}(c * x + d)$

3º passo: Movimente o controle deslizante a (clique na bolinha do controle deslizante).

Observe o que acontece com o gráfico da senoide. Repita a mesma operação para os demais controles deslizantes b, c e d.

- Ao movimentar o parâmetro a o que ocorre no gráfico da função?
- Ao movimentar o parâmetro b, o que ocorre no gráfico da função?
- Ao movimentar o parâmetro c, o que ocorre no gráfico da função?
- Ao movimentar o parâmetro d, o que ocorre no gráfico da função?
- Clicando o controle deslizante e fazendo $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 1,6$, encontraremos o gráfico da função. $g(x) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ Esta função é equivalente a uma função conhecida. Qual é essa função?

ATIVIDADE 5: DOMÍNIO, IMAGEM E PERÍODO DA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

1ª parte – Construção de gráficos

- Construa o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$

Passos para construção:

Digite na caixa de entrada a função $f(x) = \text{sen}(x)$ e tecla “enter”

Personalize a janela de visualização:

Do lado direito da Barra de ferramenta (parte superior da tela), clique na barra de estilo, depois, em “Exibir” ou esconder a “malha” e selecione a malha quadriculada.

Para colocar o eixo x na escala de 30° , clique sobre o eixo x como botão direito do mouse e selecione com botão esquerdo do mouse a opção “Janela de visualização”. Clique na aba “Eixo X” e selecione em “Unidade” a opção 30° . A opção “Distância” não deve estar selecionada.

Digitei no campo de entrada a função: $f(x) = \text{sen}(x)$ e tecla Enter:

Crie o controle deslizante a de valor mínimo -1080° e máximo 1080° com incremento 15°

Crie uma tabela com os valores com os valores de x e f(x) da seguinte maneira:

Na opção Exibir, clique em Planilha;

Na célula A1 digite = a e tecla Enter;

Em A2 digite =A1+30°, e arraste para completar a 13ª célula

Em B1 digite = f(A1) e tecla Enter;

Arraste também B1 até completar a 13ª célula

Na primeira linha clique em inserir linha acima e digite entre duas aspas " x" na primeira coluna e "f(x)" na segunda coluna.

Clique na planilha com o botão direito do mouse e clique na opção. Criar - tabela.

Clique na primeira celular e selecione até a última e clique em centralizar.

Clique na planilha com o botão direito do mouse e clique na opção. Criar – lista de pontos.

2) Movimente o controle deslizante a e observe o comportamento dos pontos sobre o gráfico de $f(x)$. A partir da sua observação determine o domínio e a imagem da função $f(x)$, justificando sua resposta.

3) Digite na caixa de entrada as retas $x = -4\pi$, $x = -2\pi$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$, em configurações coloque a cor para vermelho e estilo tracejado. Analise o comportamento da função em cada um desses intervalos. O que vocês observaram? Diante das observações, determine o período da função seno.

4) Abra um novo arquivo e repita os mesmos **passos para construção** função $f(x) = \sin(x)$, digitando agora a função $g(x) = \cos(x)$.

Crie o controle deslizante a de valor mínimo -1080° e máximo 1080° com incremento 15° .

Crie uma tabela com os valores com os valores de x e f(x) da seguinte maneira:

Na opção Exibir, clique em Planilha;

Na célula A1 digite = a e tecla Enter;

Em A2 digite =A1+30°, e arraste para completar a 13ª célula;

Em B1 digite = f(A1) e tecla enter;

Arraste também B1 até completar a 13ª célula

Na primeira linha clique em inserir linha acima e digite entre duas aspas " x" na primeira coluna e "g(x)" na segunda coluna.

Clique na planilha com o botão direito do mouse e clique na opção. Criar - tabela.

Clique na primeira celular e selecione até a última e clique em centralizar.

Clique na planilha com o botão direito do mouse e clique na opção Criar – lista de pontos.

Movimente o controle deslizante a e observe o comportamento dos pontos sobre o gráfico de $g(x)$. A partir da sua observação determine o domínio e a imagem da função $g(x)$, justificando sua resposta.

Digite na caixa de entrada as retas $x = -4\pi$, $x = -2\pi$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$, em configurações. Coloque a cor para vermelho e estilo tracejado. Analise o comportamento da função em cada um desses intervalos. O que vocês observaram? Diante das observações determine o período da função cosseno.

3) Comparando os dois arquivos, o que vocês observaram em comum em relação as duas funções?

ATIVIDADE 6 - LARGURA DE UMA CALÇADA

No plano cartesiano xOy , em que a unidade adotada no eixo Ox é radiano e no eixo Oy é o metro, um arquiteto projetou uma calçada a ser construída na orla reta de uma praia. No piso serão desenhadas ondas representadas entre os gráficos das funções $f(x) = 4 \text{ sen } x$ e $g(x) = 3 + 4 \text{ sen } x$. O gráfico f tangenciará uma margem da calçada, e o gráfico g tangenciará a outra margem da calçada conforme mostra a figura.

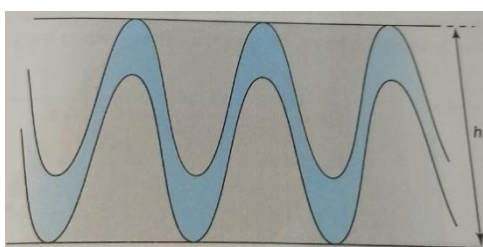


Figura 17: Atividade 6
Fonte: Paiva (2013, p.89)

Com auxílio do GeoGebra, construa uma figura que representa a situação proposta:

Passos da construção:

Criar um controle deslizante a variando de -5 a 5

Criar mais dois controles deslizantes e nomeá-los de x_1 e x_2 , variando de -50 a 50.

Na caixa de entrada digitar as funções:

$$F(x) = a \text{ sen } (x),$$

$$G(x) = 3 + a \text{ sen } (x)$$

$$h(x) = a + 3$$

$$t(x) = -a$$

Para pintar a região utilizei o comando integral

Integral entre ($\langle a \text{ sen}(x) \rangle, \langle 3 + a \text{ sen}(x) \rangle, \langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle$).

Para representar a altura criei um vetor.

Clica na terceira janela de visualização, opção vetor depois clicar nas retas $-a$ e $a+3$, nessa ordem.

Utilize o arquivo construído e faça o solicitado:

- determine as coordenadas dos pontos de tangencia do gráfico da função f e da função g .
- Calcule a largura h da calçada em metros.

- c) movimente o controle deslizante e verifique o que acontece com a largura da calçada e com a ordenada dos pontos de tangência? Existe alguma relação entre eles?
- d) Ao movimentar o controle deslizante, escolha três observações e determine as novas larguras.
- e) Ao fazer a movimentação no controle deslizante é possível perceber alguma alteração na lei de formação da função na janela algébrica?
- f) Diante de todas as observações é possível estabelecer alguma relação entre a movimentação do controle deslizante, a lei da formação da função e a largura da calçada.

ATIVIDADE 7 - RODA-GIGANTE

A roda-gigante é uma das atrações mais tradicionais de todo parque de diversões. Imagine que uma roda-gigante com 12 cadeiras igualmente distribuídas ao longo da circunferência, que mede 9 m de raio. Uma estrutura de ferro sustenta a roda-gigante a partir do seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro da roda ao solo é de 10m.

Abra o arquivo da atv6 GGB. Nele você encontrará uma animação no GeoGebra que modela a roda-gigante descrita na questão.

- 1) Considerando $\alpha = 0^\circ$. Em qual ponto inicia o gráfico da função descrita pelo movimento da roda-gigante?
- 2) Para qual valor de α a função completa uma volta? Transforme esse valor em radianos.
- 3) Faça um esboço do gráfico que representa o movimento da roda-gigante no intervalo de $[0, 2\pi]$.
- 4) Qual função trigonométrica (seno ou cosseno) representa o gráfico descrito pelo movimento da roda-gigante? Justifique a resposta.

Faça algumas observações em relação aos controles deslizantes: d , n , r e α :

- 5) Fixando os demais controles deslizantes para $\alpha=0^\circ$, $r=9$ e $d= 1$, o que ocorre com a roda-gigante quando manipulamos o controle deslizante n ?
- 6) Fixando os demais controles deslizantes para $\alpha=0^\circ$, $n=12$ e $d= 1$, o que ocorre com a roda-gigante quando manipulamos o controle deslizante r ?
- 7) Fixando os demais controles deslizantes para $\alpha=0^\circ$, $r=9$ e $n= 12$, o que ocorre com a roda-gigante quando manipulamos o controle deslizante d ?
- 8) Fixando os demais controles deslizantes para $r=9$ e $d= 1$, $n=12$ o que ocorre com a roda-gigante quando manipulamos o controle deslizante α ?

Fixando o valor de $d=1$, $r = 9$, $n = 12$

- 9) Qual o valor máximo e mínimo atingido pelo gráfico? Qual a imagem da função?
- 10) Qual é período da função?
- 11) Seja α o ângulo determinado pelo segmento AO em relação à sua posição inicial, $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$ a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo. Dadas as funções $f(\alpha) = a + b \cdot \text{sen}(c\alpha)$ e $g(\alpha) = a + b \cdot \text{cos}(c\alpha)$ a partir das suas observações anteriores, qual das funções $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$, descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de α ?
- 12) Qual a altura da roda-gigante para $\alpha = 90^\circ$?
- 13) Qual a altura da roda-gigante para $\alpha = 180^\circ$?
- 14) Sabendo que podemos calcular o período da função por $p = \frac{2\pi}{|c|}$, determine o valor de c.
- 15) Como a altura da roda-gigante é dada em função de $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$, escolha uma das tabelas e complete:

α	$\text{sen}(\alpha)$	$a+b \text{sen}(\alpha)$	$f(\alpha)$
90°			
180°			

α	$\text{cos}(\alpha)$	$a+b \text{cos}(\alpha)$	$g(\alpha)$
90°			
180°			

- 16) Como podemos expressar através de uma função trigonométrica altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio?