

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**ADAMILTON NOVAIS SILVEIRA  
ANDERSON NOGUEIRA COTA**

**TÉCNICAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS AO ESTUDO DO  
CRESCIMENTO DO NÚMERO DE ELEITORES DE LAGOA REAL – BAHIA**

**CAETITÉ – BA  
2011**

**ADAMILTON NOVAIS SILVEIRA  
ANDERSON NOGUEIRA COTA**

**TÉCNICAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS AO ESTUDO DO  
CRESCIMENTO DO NÚMERO DE ELEITORES DE LAGOA REAL – BAHIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito final para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia – UNEB – Campus VI.

Orientador: Prof. Esp. Alterlei Cardoso Batista

**CAETITÉ – BA  
2011**

**ADAMILTON NOVAIS SILVEIRA  
ANDERSON NOGUEIRA COTA**

**TÉCNICAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS AO ESTUDO DO  
CRESCIMENTO DO NÚMERO DE ELEITORES DE LAGOA REAL – BAHIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito final para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia – UNEB – Campus VI.

Orientador: Prof. Esp. Alterlei Cardoso Batista

**BANCA EXAMINADORA:**

**Wilson Toews Doll Júnior**

**Especialista, Escola Superior de Propaganda e Marketing – ESPM**

**Alterlei Cardoso Batista**

**Especialista, Universidade Federal de Lavras – UFLA**

**Cleudimar de Oliveira Castro**

**Especialista, Universidade Federal de Lavras – UFLA**

**15 DE MARÇO DE 2011**

Dedico a toda minha família, principalmente, aos meus pais Braulino Moreira Silveira e Ailta da Silva Novais Silveira e, também, a minha querida avó materna Zumerinda Francisca que Deus a tenha.

Adamilton Novais Silveira

Dedico em particular à minha mãe Maria Inês, aos meus irmãos Jéssica e Jéferson e não menos importante à minha namorada Hellen. Aos colegas e amigos – muitos para serem individualmente listados – que nesses encontros e em outras instituições, além desta, mantivemos vínculos nos estudos.

Anderson Nogueira Cota

Agradeço, primeiramente, a Deus e a todos os professores da Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus VI, que contribuíram direta e indiretamente para a minha formação.

Adamilton Novais Silveira

“Por que nos torna tão pouco felizes esta maravilhosa ciência aplicada, que economiza trabalho e torna a vida mais fácil? A resposta é simples: porque ainda não aprendemos a nos servir dela com bom senso.”

Einstein

## RESUMO

Este trabalho apresenta técnicas de modelagem matemática no estudo do crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia, entre as quais, ele desenvolve, compara e analisa a Lei do Crescimento Natural, o Modelo Logístico de Verhult, a Função de Gompertz, a Regressão Linear e a função polinomial do sexto grau gerada no Microsoft Excel 2007 no crescimento do eleitorado de Lagoa Real – Bahia, mostra a precisão de cada um destes modelos matemáticos no caso específico do município de Lagoa Real – Bahia e, também, faz uma previsão da quantidade aproximada de eleitores que irão votar nas eleições municipais de 2012 com base no modelo matemático que mais se aproxima realidade.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. População de eleitores de Lagoa Real – Bahia. Microsoft Excel.

## **ABSTRACT**

This work presents mathematical modeling techniques to study the growing number of voters from Lagoa Real – Bahia, among which, it develops, analyzes and compares the Law of Natural Growth, the Logistic Model of Verhulst, the Function of Gompertz, the Linear Regression and the polynomial function through the use of the software Microsoft Excel 2007 in the electoral growth of Lagoa Real – Bahia. It also makes a prediction of the approximate number of voters who will vote in the 2012 municipal elections based on the model that most closely matches the reality.

Key-words: Mathematical Modeling. Electorate of Lagoa Real – Bahia. Microsoft Excel.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Gráfico 1 – Eleitorado de Lagoa Real – Bahia -----	23
Gráfico 2 – Curvas possíveis para os valores dos K's -----	30
Gráfico 3 – Aproximação da Lei do Crescimento Natural -----	32
Gráfico 4 – Aproximação do Modelo Logístico de Verhulst -----	39
Gráfico 5 – Tendência do Modelo Logístico de Verhulst -----	39
Gráfico 6 – Aproximação da Função de Gompertz -----	44
Gráfico 7 – Tendência da Função de Gompertz -----	44
Gráfico 8 – Aproximação da Regressão Linear -----	48
Gráfico 9 – Tendência da função polinomial do 6º grau -----	52
Gráfico 10 – Curvas para os modelos -----	54
Imagem 1 – Sistema heliocêntrico de Copérnico -----	16
Imagem 2 – Malthus -----	27
Imagem 3 – Verhulst -----	33
Imagem 4 – Tela de abertura do Microsoft Excel 2007 -----	49
Imagem 5 – Inserir dispersão -----	50
Imagem 6 – Gráfico de dispersão somente com marcadores -----	50
Imagem 7 – Opções de linha de tendência -----	51
Imagem 8 – Linha polinomial do sexto grau -----	51
Figura 1 – Ordem cronológica de contribuições da Astronomia -----	14
Figura 2 – Ordem cronológica de contribuições da Geometria e da Álgebra -----	14
Figura 3 – Ordem cronológica de contribuições da Mecânica e Movimento -----	14
Figura 4 – Modelos, problemas e temas geradores -----	15

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Eleitorado de Lagoa Real – Bahia -----	22
Tabela 2 – Valores das constantes de proporcionalidade para $P(t) = 5.461 \cdot e^{kt}$ ----	29
Tabela 3 – Resultado da margem de erro para cada constante k encontrada -----	31
Tabela 4 – Valores $r_i$ médios e respectivas populações médias $P_i$ -----	36
Tabela 5 – Valores das taxas de variação $r_i$ relacionadas com $\ln(P_i)$ -----	42
Tabela 6 – Valores para o cálculo do coeficiente de correlação de Pearson (r) -----	47
Tabela 7 – Resultado dos valores para cada um dos modelos -----	53
Tabela 8 – Resultado da margem de erro para cada modelo -----	55

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2 UM PANAROMA HISTÓRICO SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>14</b>
2.1 A HISTÓRIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA	14
2.2 A DEFINIÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA	17
2.3 A UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA	18
2.4 A MODELAGEM MATEMÁTICA NO BRASIL	19
<b>3 TÉCNICAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS AO ESTUDO DO CRESCIMENTO DO NÚMERO DE ELEITORES DE LAGOA REAL – BAHIA</b>	<b>22</b>
3.1 O ELEITORADO DE LAGOA REAL – BAHIA	22
3.1.1 O crescimento do eleitorado de Lagoa Real – Bahia	23
3.2 CRESCIMENTO POPULACIONAL	24
3.2.1 Solução das equações diferenciais ordinárias separáveis	24
3.2.2 A Lei do Crescimento Natural	26
3.2.2.1 A margem de erro para a constante (k)	30
3.2.3 O Modelo Logístico de Verhulst	32
3.2.4 A Função de Gompertz	40
3.3 A REGRESSÃO LINEAR NO CRESCIMENTO DO NÚMERO DE ELEITORES DE LAGOA REAL – BAHIA	45
<b>4 MODELAGEM MATEMÁTICA NO CRESCIMENTO DO NÚMERO DE ELEITORES DE LAGOA REAL – BAHIA COM O USO DO MICROSOFT EXCEL</b>	<b>49</b>
4.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA NO MICROSOFT EXCEL 2007	49
<b>5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS</b>	<b>53</b>
<b>6 CONCLUSÃO</b>	<b>58</b>
<b>7 REFERÊNCIAS</b>	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A especulação científica e a vontade de provar que a modelagem matemática funciona na prática e não apenas na teoria como é estudada na universidade despertou o nosso interesse em desenvolver este trabalho.

Apesar da falta da disciplina *modelagem matemática* na grade do curso, nós entendemos ser a modelagem matemática uma ferramenta importante no desenvolvimento científico e social de um povo. No meio científico, ela força o “diálogo” entre a Matemática e as diversas áreas do conhecimento. No meio social, não se pode pensar a Matemática como uma aprendizagem de regras, fórmulas ou quaisquer situações ligadas à simples memorização, ela vai além desses conceitos e deve ser vinculada à realidade social das pessoas.

A Lei do Crescimento Natural, o Modelo Logístico de Verhulst, a Função de Gompertz, a Regressão Linear e a função polinomial do sexto grau descrevem o crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia com precisão?

Pensando assim, este trabalho de conclusão de curso desenvolve, analisa e interpreta os modelos matemáticos no estudo do crescimento do número de eleitores de Lagoa Real, cidade localizada no sudoeste da Bahia, obtidos a partir da aplicação da Lei do Crescimento Natural, do Modelo Logístico de Verhulst, da Função de Gompertz, da Regressão Linear e de uma função polinomial do sexto grau gerada no Microsoft Excel 2007, prevendo a quantidade aproximada de eleitores que irão votar nas eleições municipais de 2012.

Também define modelo, modelo matemático e modelagem matemática. Compara a lei do Crescimento Natural, o Modelo Logístico de Verhulst, a Função de Gompertz, a Regressão Linear e uma função polinomial do sexto grau gerada no Microsoft Excel com os valores reais e faz a opção pelo modelo que melhor descreve o crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia.

Para isso, o método de procedimento estatístico foi usado durante a pesquisa junto ao método de procedimento monográfico, ou seja, o estudo do tema abordado. Todos os dados utilizados neste estudo foram coletados do *site* do Superior Tribunal Eleitoral (TSE) e outras fontes disponíveis na internet ou divulgadas por órgãos oficiais.

O segundo capítulo é composto por um panorama histórico sobre a modelagem matemática, a importância da modelagem matemática para a Ciência, a definição de modelagem matemática, a utilização da modelagem matemática e de sua história na educação brasileira.

O terceiro capítulo desenvolve a Lei do Crescimento Natural, o Modelo Logístico de Verhulst, a Função de Gompertz e a Regressão Linear no crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia.

O quarto capítulo prossegue com o desenvolvimento de uma função polinomial do sexto grau com o uso do Microsoft Excel.

O quinto capítulo faz uma análise e discute os dados obtidos nos capítulos três e quatro.

E, finalmente, o sexto capítulo apresenta uma conclusão geral para todo o trabalho.

## 2 UM PANAROMA HISTÓRICO SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA

### 2.1 A HISTÓRIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

De acordo com Biembengut e Hein (2005, p.15), “a modelagem matemática não é uma idéia nova”. Há mais de 500 A.C. têm surgido vários modelos matemáticos em diversas áreas do conhecimento. Mas como os modelos matemáticos foram sendo construídos ao longo da história? Quais foram os problemas geradores ou subjacentes aos modelos?

Os modelos matemáticos foram sendo idealizados ao longo da história de forma desarticulada, divididos em três grandes áreas, a saber: Astronomia, Geometria e Mecânica e Movimento. Em cada uma destas três áreas surgiram importantes estudiosos como mostra a ordem cronológica abaixo.

#### Na Astronomia



Figura 1 – Ordem cronológica de contribuições da Astronomia. Fonte: Silva, 2010.

#### Na Geometria

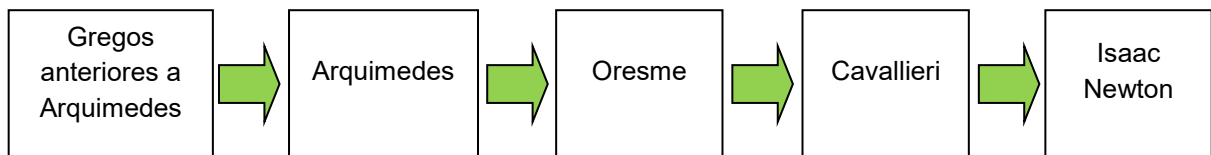


Figura 2 – Ordem cronológica de contribuições da Geometria e da Álgebra. Fonte: Silva, 2010.

#### Na Mecânica e Movimento

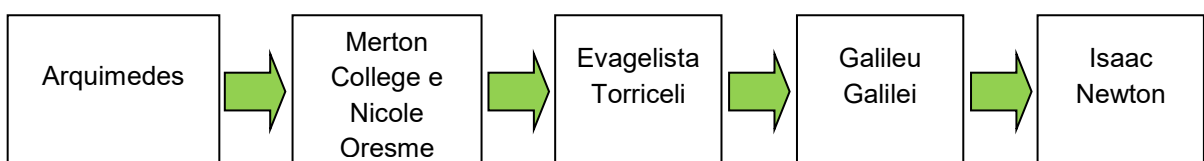


Figura 3 – Ordem cronológica de contribuições da Mecânica e Movimento. Fonte: Silva, 2010.

Já os problemas geradores ou subjacentes aos modelos matemáticos vieram das questões relacionadas ao movimento dos planetas, dos problemas sobre quadraturas (determinação de áreas e volumes limitados por curvas e superfícies e comprimento de curvas) e dos problemas sobre velocidades (latitude das formas), tangente a uma curva, equilíbrio dos corpos, lançamentos dos corpos e queda livre, como mostra a figura abaixo.

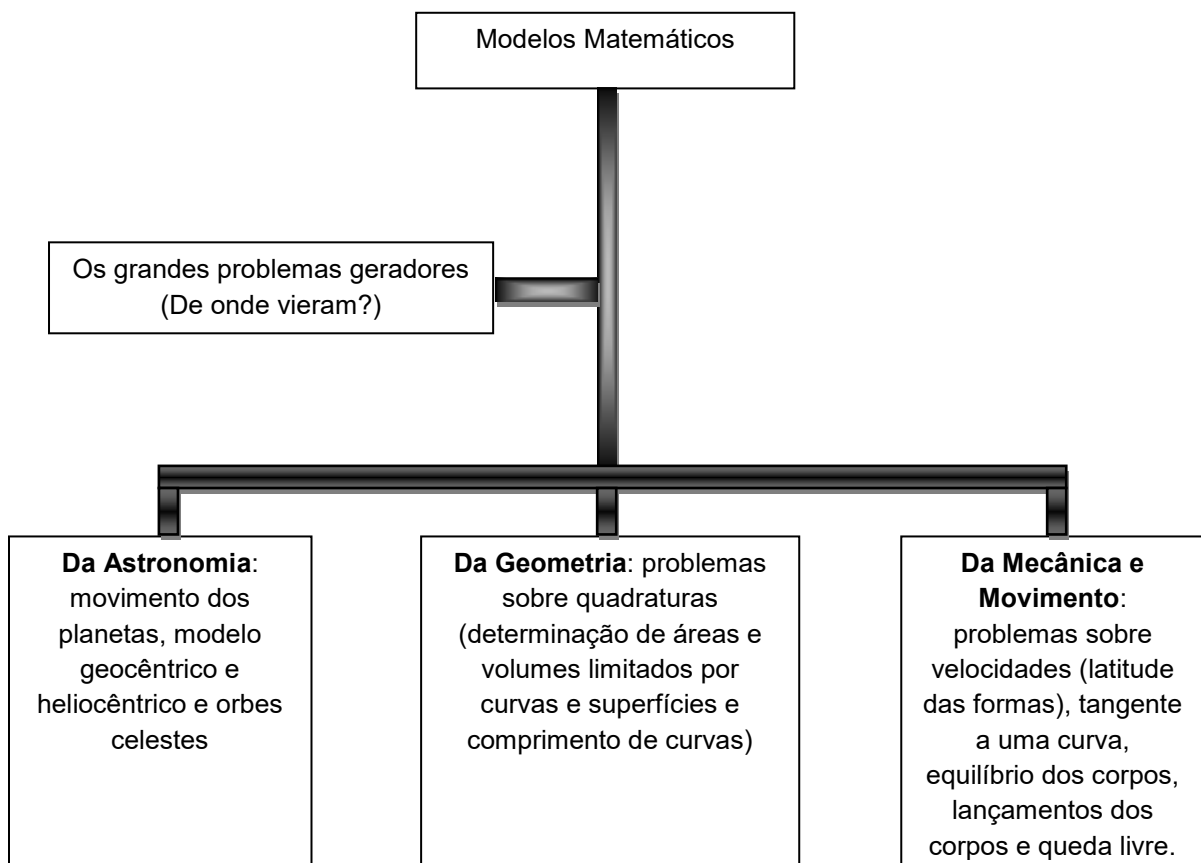


Figura 4 – Modelos, problemas e temas geradores. Fonte: Silva, 2010.

O sistema heliocêntrico de Copérnico, por exemplo, que conferiu ao Sol a posição central e considerou a Terra, acompanhada da Lua, como mais um planeta a girar em volta do Sol, provocou uma revolução profunda no pensamento físico da época, apresentando enorme resistência em ser aceito. A idéia de que a Terra não era o centro do universo se chocava com as opiniões filosóficas dominantes desencadeando uma grande batalha ideológica, mas ao romper com concepção geocêntrica do universo, Copérnico suprimiu quase totalmente a complexidade do sistema geocêntrico de Ptolomeu e abriu caminho para novas explicações do funcionamento do universo.

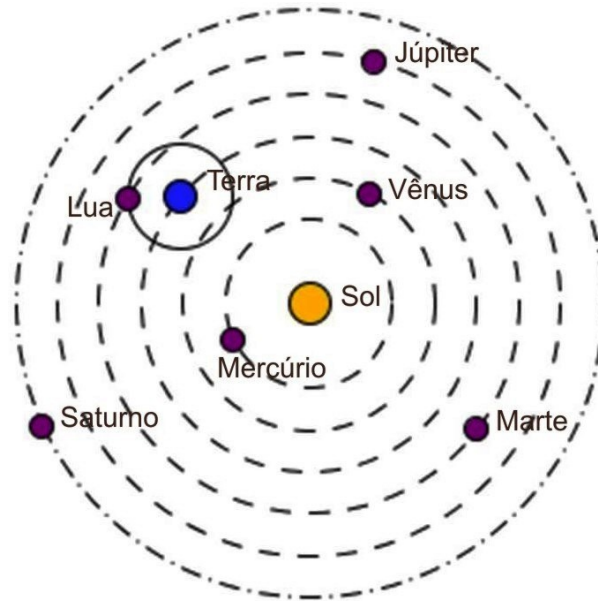


Imagem 1 – Sistema heliocêntrico de Copérnico. Fonte: Sayols, 2011.

Este modelo, assim como outros, forneceu uma enorme contribuição para o desenvolvimento da Ciência. Assim, o conhecimento foi se acumulando ao longo dos anos e dando base a uma Ciência cada vez mais consistente e coerente. Sobre a Ciência, Bassanezi (2006, p. 17) faz um comentário de grande relevância:

A Ciência é uma atividade essencialmente desenvolvida pelo ser humano que procura entender a natureza por meio de teoria adequada; ainda que a natureza continue existindo e funcionando independente das teorias científicas, o homem utiliza tais teorias para avançar seus conhecimentos que possibilitam num futuro tomar decisões e agir corretamente. A Ciência é o produto da evolução mental-emocional-social da humanidade sendo pois um fenômeno acumulativo natural. A Ciência como conhecimento acumulado, depende de codificações e símbolos associados às representações orais ou visuais de *comunicações* (ação comum para entender, explicar e manejar a realidade), dando origem à linguagem e representação gráfica.

Conseqüentemente, o papel da modelagem matemática no desenvolvimento da Ciência é indiscutível, suas codificações e símbolos associados às representações orais e visuais de comunicações possibilitaram o acúmulo do conhecimento necessário e suficiente para o desenvolvimento da Ciência e, por conseguinte, à sistematização do Cálculo Diferencial e Integral por Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz no século XVII, hoje, considerado como a base do pensamento moderno.

## 2.2 A DEFINIÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

O termo *modelo* foi utilizado pela primeira vez durante a descoberta das geometrias não euclidianas por Riemann (1826-1866) e Lobachewski (1792-1856). Aí este termo não corresponde ao usado na Matemática Aplicada, no sentido em que ele é empregado hoje, mas na época já havia vários tipos de *modelos*, tais como as idéias iniciais sobre função, números naturais, conjuntos, entre outros, sem que a denominação *modelo* estivesse sido explícita, como afirma Martins (2007).

Segundo o dicionário Aurélio (2001, p. 500), modelo é definido como:

1. Aquilo que serve de referência ou que é dado para ser reproduzido.
2. Representação em pequena escala de algo que se pretende reproduzir em grande.
3. Protótipo de um objeto.
4. Pessoa que posa para artista plástico ou fotógrafo. Pessoa ou coisa que serve de exemplo ou norma.
5. Tipo específico de roupa, automóvel e outros produtos de consumo.
7. Manequim.

São muitas as definições de modelo, mas uma em especial se mostra mais apropriada para definir modelo neste trabalho. Modelo é a representação em pequena escala de algo que se pretende reproduzir em grande.

E modelo matemático? De acordo com Bassanezi (2006, p. 20), modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.” Já Biembengut e Hein (2005, p. 12) define modelo matemático como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real”. Percebe-se que ambos os autores concordam, em parte, com a definição de modelo matemático. Todo modelo matemático pode ser formulado através de expressões numéricas, equações algébricas, fórmulas, diagramas, gráficos, tabelas, representações geométricas e até mesmos programas computacionais.

Para Bassanezi (2006, p. 24) a

*Modelagem Matemática* é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências (...)

Já para Biembengut e Hein (2005, p. 12) a “modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo”. Mas a idéia de modelo não é tão simples, daí uma boa dose de criatividade e intuição faz a diferença neste processo.

Nesse sentido, a modelagem matemática é uma perspectiva, algo a ser explorado, é livre, espontânea e surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção, ela usa a matemática e a computação científica, aproveita os métodos matemáticos e computacionais na elaboração de modelos matemáticos e na busca de soluções para os problemas atuais nas mais diversas áreas do conhecimento, abrange a criação, a realização e a aplicação na prática de modelos matemáticos, denota tanto uma metodologia quanto uma atitude técnico-científica e é interdisciplinar por natureza, pois utiliza os resultados e os instrumentos de outras áreas como ponto de partida para seu desenvolvimento.

Portanto, a modelagem matemática como processo na obtenção de um modelo matemático possui diversas facetas e interpretações, cabendo ao modelador a criatividade e a intuição para desvendá-la na busca do modelo matemático ideal que corresponda ao fenômeno em estudo, ou seja, a realidade.

### 2.3 A UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática tem se mostrado importante e eficiente em diversas áreas do conhecimento.

As Ciências Exatas, por exemplo, têm usado a modelagem matemática com muita eficiência. É notável a sua presença neste meio. Atualmente a modelagem é utilizada em áreas como, por exemplo, a proliferação de doenças bovinas, a produção de materiais para construção civil, as estratégias de pesca, os efeitos biológicos de radiações, as doenças infecciosas, a movimentação de animais, o movimento de rios, as estratégias de vacinação, a teoria da decisão, a identificação de sistemas, o crescimento de cidades, o tráfego urbano, o armazenamento e a secagem de grãos, o controle biológico de pragas, a extração de óleos vegetais, os meios reagentes ionizados, entre outras.

Até mesmo as Ciências Sociais vêm utilizando a modelagem matemática de modo crescente. De acordo com Bassanezi (2006, p. 34):

As várias Ciências Sociais estão, gradualmente, tornando-se clientes do poder da Matemática para a organização de seus dados e para testar a objetividade de seus pensamentos [...] Outras áreas sociais (Geografia, História, Sociologia, Política, Psicologia, Antropologia etc) ainda estão nos primeiros passos (modelos elementares) no que se refere ao uso de matemática em suas pesquisas e o progresso tem sido lento (...)

Deste modo, segundo Bassanezi (2006, p. 33), “a modelagem matemática, com toda sua abrangência e poder de síntese, é por excelência o método científico usado nas ciências factuais (...)”.

Atualmente, as Ciências Exatas usufruem da modelagem matemática com muita eficácia. Já as Ciências Sociais ainda testam sua objetividade, por exemplo, os psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam as **curvas de aprendizado**. Uma curva de aprendizado é o gráfico de uma função  $P(t)$ , onde o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade é medido em função do tempo de treinamento  $t$ . Lentamente, a modelagem matemática vai se mostrando eficiente, também, em muitos casos nas Ciências Sociais.

## 2.4 A MODELAGEM MATEMÁTICA NO BRASIL

A Modelagem Matemática começou a ser trabalhada no Brasil na década de 80 na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP por um grupo de professores coordenados pelo Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – IMECC, na área da Biomatemática.

No início os estudos envolviam modelos de crescimento cancerígenos, mas também foi realizada, com sucesso, uma experiência com alunos do curso de Engenharia de Alimentos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que possuía um programa específico definido.

Já as pós-graduações na área de modelagem matemática iniciaram-se em 1983 com os cursos de especialização para professores oferecidos pela Faculdade

de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava – FAFIG, hoje, conhecida como Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO.

Mas a modelagem matemática só se deslanchou e conseguiu adeptos com o início do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de Rio Claro. A grande preocupação era encontrar formas alternativas de ensinar matemática no Ensino Fundamental e Médio a partir da vivência dos alunos.

Os primeiros trabalhos científicos na área de modelagem matemática contendo alternativas de ensino da Matemática começaram a surgir em 1987 na forma de dissertações de mestrado e artigos.

A partir daí vários adeptos se dedicaram ao estudo da modelagem matemática e propuseram diversas alternativas de ensinar Matemática, e, conseqüentemente, características e percepções diferentes da aplicação da modelagem matemática começaram a surgir em diversas áreas.

A modelagem matemática, enquanto alternativa de ensino de Matemática, originou-se no seguinte princípio – o interesse do grupo ou dos grupos. Na forma usual, o processo de ensino é deflagrado pelo professor. Na Modelagem Matemática, o processo é compartilhado com o grupo de alunos, assim, a motivação advém do interesse pelo assunto. Essa motivação possui aspectos importantes como o interesse do grupo, a interação no processo de ensino-aprendizagem e a demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação e, como consequência, a adoção de uma nova postura do professor que rompe com a forma usual de se trabalhar o ensino de Matemática na escola e encontra argumentos na Psicologia da Educação.

Nos dias atuais, destacam-se por suas pesquisas na área os estudiosos Rodney Carlos Bassanezi e Maria Salett Biembengut.

Para Bassanezi (2006), o desenvolvimento de um novo modelo de educação menos alienado e mais comprometido com as realidades dos indivíduos e sociedades precisa de instrumentos matemáticos inter-relacionados a outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, a modelagem matemática se impõe com a capacidade de estabelecer relações entre o campo da Matemática e as outras áreas do conhecimento.

Já para Biembengut e Hein (2003), a educação enfrenta desafios cada vez mais difíceis como antever e propor à sociedade um “novo” cidadão que comandará

a produção, a economia, o lazer e muitas outras áreas que ainda irão surgir nas próximas décadas. Desafios como esse têm tornado crescente o movimento em favor da educação matemática, tem reestruturado o currículo e os métodos de ensino. Nesse cenário, a modelagem matemática se apresenta como alternativa de ensino de Matemática.

Apesar da história da modelagem matemática ser recente no Brasil, com início na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, ela tem despertado o interesse de pesquisadores como o Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi, Maria Salett Biembengut, entre outros. Além disso, têm surgido diversos cursos de pós-graduação na área da modelagem matemática em diferentes universidades e faculdades do país.

### 3 TÉCNICAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS AO ESTUDO DO CRESCIMENTO DO NÚMERO DE ELEITORES DE LAGOA REAL – BAHIA

#### 3.1 O ELEITORADO DE LAGOA REAL – BAHIA

De acordo com o Tribunal Superior Eleitoral (TSE), em consulta ao site [www.tse.gov.br](http://www.tse.gov.br) às 10 horas e 52 minutos do dia 27 de novembro de 2010, a população de eleitores de Lagoa Real – Bahia, de outubro de 1990 até setembro de 2010, está de acordo com a tabela abaixo:

Tabela 1 – Eleitorado de Lagoa Real – Bahia

<b>Ano</b>	<b>Quantidade de eleitores</b>
1990	5.461
1992	5.779
1994	6.341
1996	6.753
1998	6.939
2000	7.143
2002	7.569
2004	8.070
2006	8.444
2008	9.434
2010	9.599

Fonte: Tribunal Superior Eleitoral, 2010.

Os dados permitem acompanhar a evolução do eleitorado de Lagoa Real – Bahia e até fazer uma previsão de quantos eleitores irão às urnas para escolher seus representantes municipais nas eleições de 2012. A propósito, este é um dos objetivos deste trabalho que pretende desenvolver, comparar e analisar alguns modelos matemáticos para o crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia.

Segundo Bassanezi (2006, p. 19),

Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o *modelo*.

No entanto, a modelagem matemática assume um papel importante e necessário. Ela coloca as pessoas para interagir diretamente com a realidade. Aliás, esta função da modelagem matemática converge com um dos principais objetivos da educação, preparar as pessoas para a prática social.

### 3.1.1 O crescimento do eleitorado de Lagoa Real – Bahia

A população de eleitores de lagoa Real – Bahia tem crescido de forma significativa nos últimos vinte anos. Apesar de ainda ser pequena em comparação a outras cidades do interior da Bahia como Caetité que em setembro de 2010 contabilizou 33.667 eleitores.

Considerando  $P(0) = 5.461$ ,  $P(1) = 5.779$ ,  $P(2) = 6.341, \dots$ ,  $P(t) = P$ , onde  $P$  representa a quantidade de eleitores (em milhares) no tempo  $t$  (em anos), têm-se a evolução do número de eleitores dessa população no gráfico abaixo:

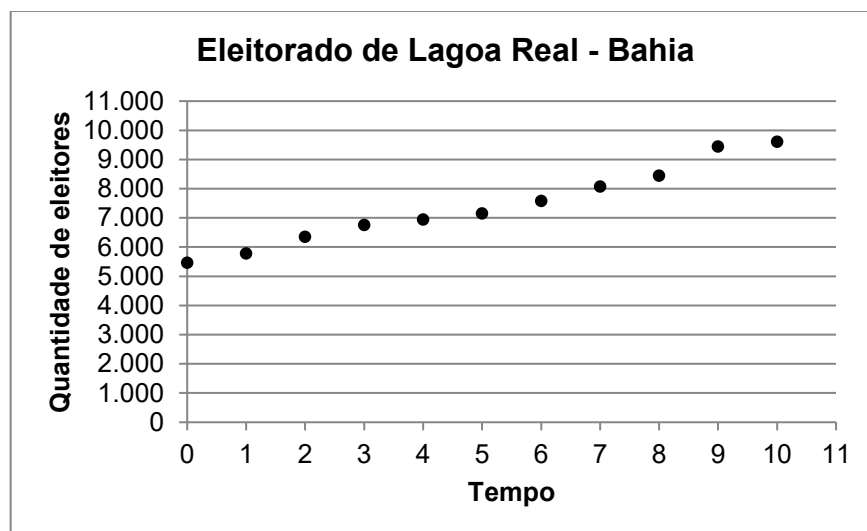


Gráfico 1 – Eleitorado de Lagoa Real – Bahia. Fonte: do autor, 2010.

Numa análise inicial do gráfico 1, percebe-se um crescimento contínuo do número de eleitores ao longo dos anos, bem como, da união dos pontos vislumbra-se uma curva  $P = P(t)$  ascendente, ou seja, crescente.

### 3.2 CRESCIMENTO POPULACIONAL

São muitos os modelos matemáticos usados para modelar o crescimento de uma população. Mas os mais utilizados são: a Lei do Crescimento Natural, o Modelo Logístico de Verhulst e a Função de Gompertz.

Neste trabalho, os três modelos citados acima serão usados para modelar o crescimento da população de eleitores de Lagoa Real – Bahia a fim de encontrar uma função que forneça a quantidade de eleitores em função do tempo  $t$ , além de uma Regressão Linear e de uma função polinomial gerada no Excel para comparar os resultados de cada um dos modelos.

#### 3.2.1 Solução das equações diferenciais ordinárias separáveis

A lei do Crescimento Natural, o Modelo Logístico de Verhulst e a Função de Gompertz são definidos por equações diferenciais ordinárias e separáveis. Em relação esse tipo de equação, Stewart (2009, p. 550) faz um comentário de grande relevância:

Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão para  $dy/dx$  pode ser fatorada como uma função de  $x$  vezes uma função de  $y$ . Em outras palavras, pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

O nome *separável* vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser “separada” em uma função de  $x$  e uma função de  $y$ .

De forma equivalente, com  $f(x) \neq 0$ , podemos reescrevê-la assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Onde  $h(y) = 1/f(y)$ .

Colocando na forma diferencial

$$h(y)dy = g(x)dx$$

Integrando os dois lados da igualdade, têm-se:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Usando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dx} \left( \int h(y)dy \right) = \frac{d}{dx} \left( \int g(x) \right) dx$$

Logo,

$$\frac{d}{dx} \left( \int h(y)dy \right) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot f(y)$$

Portanto, a condição para a equação diferencial separável do início é satisfeita.

### 3.2.2 A Lei do Crescimento Natural

Segundo Bassanezi (1996, p. 22), se considerarmos uma população sujeita a um crescimento exponencial, a teoria determinística indica que o crescimento populacional  $\left(\frac{dP}{dt}\right)$  é proporcional ao número de indivíduos da população (P) em cada instante t. Se k denota o coeficiente de crescimento desta mesma população, então o modelo matemático pode ser dado por:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Cuja solução é:

$$dP = kPdt$$

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

$$\int \frac{dP}{P} = k \int dt$$

$$\ln P = kt + c$$

$$P = e^{kt+c}$$

$$P = e^{kt} \cdot e^c$$

Onde  $P_0 = P(0)$  é a população inicial:

$$P_0 = e^{k \cdot 0} \cdot e^c$$

$$P_0 = e^0 \cdot e^c$$

$$P_0 = 1 \cdot e^c$$

$$P_0 = e^c$$

Logo, a solução da lei do crescimento natural é:

$$P = P_0 \cdot e^{kt}$$

De acordo com Stewart (2009, p. 537), esta Lei de Crescimento Natural que se baseia na hipótese de que uma população cresce proporcionalmente ao seu tamanho, é aceitável “para uma população de bactérias ou animais em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, ausência de predadores e imunidade de doenças)”. Para as demais hipóteses, ela não é aceitável, pois a proporção de reprodutores não permanece constante durante o crescimento da população.

Segundo Bassanezi (2006) se admitirmos que a proporção de indivíduos reprodutores permaneça constante durante o crescimento da população, então as taxas de fertilidade e de mortalidade são constantes. Estas hipóteses são realísticas em uma população grande que varia em condições ideais, isto é, quando todos os fatores inibidores do crescimento estão ausentes.

Numa situação real, os fatores inibidores do crescimento sempre estão presentes, mas mesmo assim, a lei do crescimento natural foi usada no passado por Malthus, com resultados satisfatórios, para modelar o crescimento da população mundial.



Imagem 2 – Malthus. Fonte: DiariodoVerde, 2010.

De volta ao problema inicial, se  $P(0) = 5.461$  eleitores na população eleitoral de Lagoa Real – Bahia, então se tem um Problema de Valor Inicial (PVI). Portanto, podemos escrever a função a seguir:

$$P(t) = 5.461 \cdot e^{kt}$$

A próxima etapa é descobrir qual o valor da constante de proporcionalidade  $k$  que melhor adapta o modelo matemático à realidade.

Considerando  $P(0) = 1990$ ,  $P(1) = 1992$ ,  $P(2) = 1994, \dots$ ,  $P(10) = 2010$ , têm-se os seguintes valores para a constante de proporcionalidade ( $k$ ):

$$5.461 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 0}$$

$$\frac{5.461}{5.461} = e^{k \cdot 0}$$

$$1 = e^{k \cdot 0}$$

$$k \cdot 0 = \ln 1$$

$$k \cdot 0 = 0$$

$$5.779 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 1}$$

$$\frac{5.779}{5.461} = e^{k \cdot 1}$$

$$1,05823 = e^{k \cdot 1}$$

$$k \cdot 1 = \ln 1,05823$$

$$k \cdot 1 = 0,0566$$

$$\mathbf{k = 0,0566}$$

$$6.341 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 2}$$

$$\frac{6.341}{5.461} = e^{k \cdot 2}$$

$$1,16114 = e^{k \cdot 2}$$

$$k \cdot 2 = \ln 1,16114$$

$$k \cdot 2 = 0,149$$

$$k = \frac{0,149}{2}$$

$$\mathbf{k = 0,0747}$$

$$6.753 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 3}$$

$$\frac{6.753}{5.461} = e^{k \cdot 3}$$

$$1,23659 = e^{k \cdot 3}$$

$$k \cdot 3 = \ln 1,23659$$

$$k \cdot 3 = 0,21236$$

$$k = \frac{0,21236}{3}$$

$$\mathbf{k = 0,07079}$$

$$6.939 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 4}$$

$$\frac{6.939}{5.461} = e^{k \cdot 4}$$

$$1,27065 = e^{k \cdot 4}$$

$$k \cdot 4 = \ln 1,27065$$

$$k \cdot 4 = 0,23953$$

$$k = \frac{0,23953}{4}$$

$$\mathbf{k = 0,05988}$$

$$7.143 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 5}$$

$$\frac{7.143}{5.461} = e^{k \cdot 5}$$

$$1,30800 = e^{k \cdot 5}$$

$$k \cdot 5 = \ln 1,30800$$

$$k \cdot 5 = 0,268$$

$$k = \frac{0,268}{5}$$

$$\mathbf{k = 0,0537}$$

$$7.569 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 6}$$

$$\frac{7.569}{5.461} = e^{k \cdot 6}$$

$$1,38601 = e^{k \cdot 6}$$

$$k \cdot 6 = \ln 1,38601$$

$$k \cdot 6 = 0,32643$$

$$k = \frac{0,32643}{6}$$

$$\mathbf{k = 0,0544}$$

$$8.070 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 7}$$

$$\frac{8.070}{5.461} = e^{k \cdot 7}$$

$$1,47775 = e^{k \cdot 7}$$

$$k \cdot 7 = \ln 1,47775$$

$$k \cdot 7 = 0,39052$$

$$k = \frac{0,39052}{7}$$

$$\mathbf{k = 0,05579}$$

$$8.444 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 8}$$

$$\frac{8.444}{5.461} = e^{k \cdot 8}$$

$$1,54624 = e^{k \cdot 8}$$

$$k \cdot 8 = \ln 1,54624$$

$$k \cdot 8 = 0,43583$$

$$k = \frac{0,43583}{8}$$

$$\mathbf{k = 0,05448}$$

$$9.434 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 9}$$

$$\frac{9.434}{5.461} = e^{k \cdot 9}$$

$$1.72752 = e^{k \cdot 9}$$

$$k \cdot 9 = \ln 1,72752$$

$$k \cdot 9 = 0,54669$$

$$k = \frac{0,54669}{9}$$

$$k = 0,06074$$

$$9.599 = 5.461 \cdot e^{k \cdot 10}$$

$$\frac{9.599}{5.461} = e^{k \cdot 10}$$

$$1,75774 = e^{k \cdot 10}$$

$$k \cdot 10 = \ln 1,75774$$

$$k \cdot 10 = 0,56403$$

$$k = \frac{0,56403}{10}$$

$$k = 0,0564$$

São muitos os valores para a constante de proporcionalidade  $k$ , mas uma aproxima melhor os valores obtidos pelo modelo matemático aos valores reais. Por isso todos os valores devem ser analisados e testados. Veja a tabela a seguir:

Tabela 2 – Valores das constantes de proporcionalidade para  $P(t) = 5.461 \cdot e^{kt}$

Ano	Valor real	$k_1 = 0,0566$	$k_2 = 0,0747$	$k_3 = 0,07079$	$k_4 = 0,05988$	$k_5 = 0,0537$	$k_6 = 0,0544$	$k_7 = 0,05579$	$k_8 = 0,05448$	$k_9 = 0,06074$	$k_{10} = 0,0564$
1990	5.461	5.461	5.461	5.461	5.461	5.461	5.461	5.461	5.461	5.461	5.461
1992	5.779	5.779	5.884	5.861	5.798	5.762	5.766	5.774	5.767	5.803	5.778
1994	6.341	6.115	6.341	6.291	6.156	6.080	6.089	6.106	6.090	6.166	6.113
1996	6.753	6.472	6.833	6.753	6.536	6.415	6.429	6.456	6.431	6.552	6.468
1998	6.939	6.848	7.363	7.248	6.939	6.769	6.788	6.826	6.791	6.963	6.843
2000	7.143	7.247	7.934	7.780	7.367	7.143	7.168	7.218	7.171	7.399	7.240
2002	7.569	7.669	8.549	8.351	7.822	7.537	7.569	7.632	7.572	7.862	7.660
2004	8.070	8.116	9.212	8.963	8.304	7.953	7.992	8.070	7.996	8.354	8.105
2006	8.444	8.588	9.927	9.621	8.817	8.392	8.439	8.533	8.444	8.878	8.575
2008	9.434	9.089	10.697	10.327	9.361	8.854	8.910	9.023	8.917	9.434	9.072
2010	9.599	9.618	11.526	11.084	9.939	9.343	9.409	9.540	9.416	10.024	9.599

Fonte: do autor, 2010.

As curvas para cada valor da constante de proporcionalidade  $k$  estão dispostas no gráfico a seguir, observe que a curva em preto é a que mais se aproxima dos valores reais, ou seja, dos pontos.

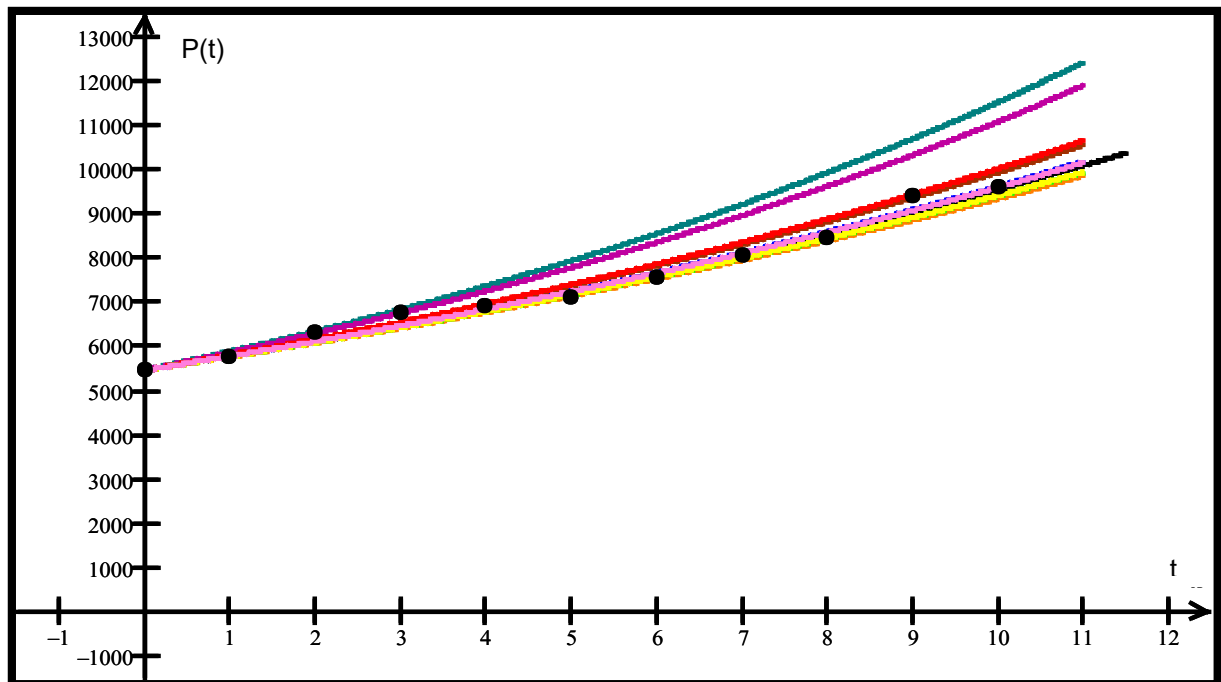


Gráfico 2 – Curvas possíveis para os valores dos K's. Fonte: do autor, 2010.

### 3.2.2.1 A margem de erro para a constante (k)

Mas só através de uma análise da margem de erro pode-se fazer a escolha da melhor constante de proporcionalidade, ou seja, a que mais se aproxima dos valores reais. Para isso utiliza-se o seguinte recurso:

$$\frac{\text{Valor real} - \text{Valor modelado}}{\text{Valor real}} = \text{Resultado obtido} \cdot 100$$

Em relação à aproximação da função modelada aos dados reais, Bassanezi (2006, p.24) nos alerta de que

(...) A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual [...] A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com *aproximações* da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.

Na tabela abaixo estão dispostos os resultados da margem de erro para cada constante de proporcionalidade (k), isso facilita a escolha.

Tabela 3 – Resultado da margem de erro para cada constante k encontrada

<b>k<sub>1</sub> =</b> <b>0,0566</b>	<b>k<sub>2</sub> =</b> <b>0,0747</b>	<b>k<sub>3</sub> =</b> <b>0,07079</b>	<b>k<sub>4</sub> =</b> <b>0,05988</b>	<b>k<sub>5</sub> =</b> <b>0,0537</b>	<b>k<sub>6</sub> =</b> <b>0,0544</b>	<b>k<sub>7</sub> =</b> <b>0,05579</b>	<b>k<sub>8</sub> =</b> <b>0,05448</b>	<b>k<sub>9</sub> =</b> <b>0,06074</b>	<b>k<sub>10</sub> =</b> <b>0,0564</b>
0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0%	-2%	-1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
4%	0%	1%	3%	4%	4%	4%	4%	3%	4%
4%	-1%	0%	3%	5%	5%	4%	5%	3%	4%
1%	-6%	-4%	0%	2%	2%	2%	2%	0%	1%
-1%	-11%	-9%	-3%	0%	0%	-1%	0%	-4%	-1%
-1%	-13%	-10%	-3%	0%	0%	-1%	0%	-4%	-1%
-1%	-14%	-11%	-3%	1%	1%	0%	1%	-4%	0%
-2%	-18%	-14%	-4%	1%	0%	-1%	0%	-5%	-2%
4%	-13%	-9%	1%	6%	6%	4%	5%	0%	4%
0%	-20%	-15%	-4%	3%	2%	1%	2%	-4%	0%

Fonte: do autor, 2010.

O objetivo da tabela 3 é visualizar a menor margem de erro para fazer a escolha da constante de proporcionalidade (k). Vejam que as margens de erro são respectivamente:  $k_1 = [-2\%; 4\%]$ ,  $k_2 = [-20\%; 0\%]$ ,  $k_3 = [-15\%; 1\%]$ ,  $k_4 = [-4\%; 3\%]$ ,  $k_5 = [0\%; 6\%]$ ,  $k_6 = [0\%; 6\%]$ ,  $k_7 = [-1\%; 4\%]$ ,  $k_8 = [0\%; 5\%]$ ,  $k_9 = [-5\%; 3\%]$  e  $k_{10} = [-2\%; 4\%]$ .

No entanto, a menor margem de erro é apresentada pelas constantes  $k_7 = 0,05579$  e  $k_8 = 0,05448$ . Mas em uma análise mais criteriosa usando duas casas decimais temos:  $k_7 = [-1,05\%; 4,36\%]$  e  $k_8 = [-0,39\%; 5,48\%]$ . Portanto, a constante de proporcionalidade adequada é  $k_7 = 0,05579$ . Ela é a que mais se aproxima dos valores reais. Logo, a quantidade de eleitores em função do tempo é dada por:

$$P(t) = 5.461 \cdot e^{0,05579t}$$

Cujo gráfico a seguir está mostrando a aproximação do modelo matemático em relação aos dados reais para o eleitorado de Lagoa Real – Bahia.

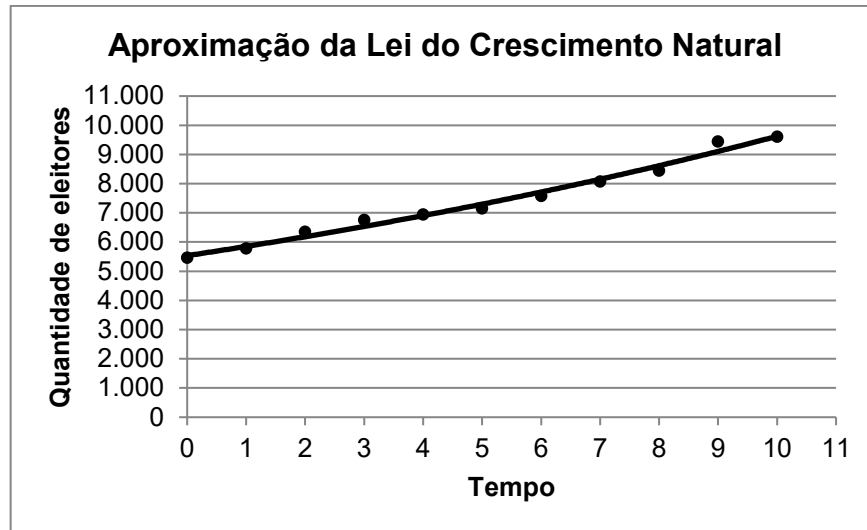


Gráfico 3 – Aproximação da Lei do Crescimento Natural. Fonte: do autor, 2010.

O gráfico mostra a curva da função modelada juntamente com os dados reais. É possível notar que o modelo matemático captou o comportamento fundamental dos dados, descrevendo-os de maneira apropriada, de tal maneira que se pode utilizar o modelo acima para fazer previsões.

### 3.2.3 O Modelo Logístico de Verhulst

Nem toda população cresce de forma exponencial. É comum a interferência de fatores inibidores do crescimento. A presença desses fatores determina a capacidade de suporte da população. De acordo com Stewart (2009, p. 561),

(...) uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas em dado momento se estabiliza e aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Se  $P(t)$  for o tamanho da população no instante  $t$ , assumimos que

$$\frac{dP}{dt} \cong kP \quad \text{se } P \text{ for pequeno}$$

Isso quer dizer que taxa de crescimento inicialmente está próxima de ser proporcional ao tamanho.

Portanto, existe população que começa crescendo exponencialmente e se estabiliza quando se aproxima da capacidade de suporte ( $C$ ) ou diminui em direção

a capacidade de suporte (C) quando excede a mesma. Há um limite determinado pelas condições ambientais, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = C$$

O modelo matemático para a taxa de crescimento populacional que leva em consideração essas características foi formulado pelo matemático belga Pierre François Verhulst em 1837.



Imagem 3 – Verhulst. Fonte: Bioquest, 2011.

Segundo Bassanezi (2006, p. 333),

(...) O modelo de Verhulst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um *limite máximo sustentável*, isto é, ela tende a se estabilizar. A equação incorpora a queda de crescimento da população que deve estar sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade. Este modelo teve um impacto maior quando, no início do século XX, os pesquisadores americanos R. Pearl e L. Reed utilizaram-no para projetar a demografia americana.

Esse modelo que considera a taxa de crescimento como sendo proporcional à população em cada instante é dado pela equação diferencial separável conhecida como Modelo Logístico de Verhulst:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{C} \right)$$

Cuja solução é:

$$\frac{dP}{P(1 - P/C)} = k dt$$

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/C)} = k \int dt$$

Para calcular a integral do lado esquerdo, escreve-se:

$$\frac{1}{P(1 - P/C)} \cdot \frac{C}{C} = \frac{C}{P(C - P)}$$

Usando frações parciais, têm-se:

$$\frac{C}{P(C - P)} = \frac{A_1}{P} + \frac{A_2}{C - P}$$

$$\frac{C}{P(C - P)} = \frac{A_1(C - P) + A_2P}{P(C - P)}$$

$$C = A_1(C - P) + A_2P$$

$$C = A_1C - A_1P + A_2P$$

$$C = (-A_1 + A_2)P + A_1C$$

$$-A_1 + A_2 = 0$$

$$A_1 = A_2$$

$$C = A_1C$$

$$\frac{C}{C} = A_1$$

$$1 = A_1$$

$$A_1 = 1$$

Substituindo os valores de  $A_1$  e  $A_2$ , têm-se:

$$\frac{C}{P(C - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{C - P}$$

Isso permite reescrever a equação dessa forma a seguir:

$$\int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{C-P} \right) dP = k \int dt$$

$$\ln|P| - \ln|C-P| = kt + a$$

$$\ln|C-P| - \ln|P| = -kt - a$$

$$\ln \left| \frac{C-P}{P} \right| = -kt - a$$

$$\left| \frac{C-P}{P} \right| = e^{-kt-a}$$

$$\left| \frac{C-P}{P} \right| = e^{-a} \cdot e^{-kt}$$

Fazendo  $A = \pm e^{-a}$  e isolando  $P$ , obtém-se:

$$\frac{C-P}{P} = Ae^{-kt}$$

$$\frac{C}{P} - 1 = Ae^{-kt}$$

$$\frac{C}{P} = Ae^{-kt} + 1$$

$$\frac{P}{C} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

$$P = \frac{C}{1 + Ae^{-kt}}$$

Se  $P(0) = P_0$  (população inicial), então o valor de  $A$  é dado por:

$$\frac{C - P_0}{P_0} = Ae^{-k \cdot 0}$$

$$\frac{C - P_0}{P_0} = A \cdot 1$$

$$A = \frac{C - P_0}{P_0}$$

Logo, a solução para o Modelo Logístico de Verhulst é:

$$P(t) = \frac{C}{1 + Ae^{-kt}} \quad \text{onde} \quad A = \frac{C - P_0}{P_0}$$

Para usar o Modelo Logístico de Verhulst no crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia é preciso encontrar a capacidade de suporte ( $C$ ) e constante de proporcionalidade ( $k$ ).

Como o modelo logístico pressupõe que a taxa decaí linearmente, em função da população, podemos ajustar os valores  $r_i$  médios (estimados entre o intervalo de tempo  $i$  e  $i + 1$  em anos) com as respectivas populações médias  $P_i$  (estimadas através de um modelo exponencial):

$$r_i = \left( \frac{P_i}{P_{i-1}} \right)^{\frac{1}{i}} - 1$$

Na tabela abaixo estão os valores  $r_i$  médios e junto às respectivas populações médias  $P_i$ :

Tabela 4 – Valores  $r_i$  médios e respectivas populações médias  $P_i$

P	r	P · r	P <sup>2</sup>
5.784	0,0287	166,0008	33.454.656
6.355	0,0475	301,8625	40.386.025
6.760	0,03197	216,1172	45.697.600
6.940	0,01368	94,9392	48.163.600
7.144	0,01459	104,23096	51.036.736
7.575	0,02939	222,62925	57.380.625
8.078	0,03256	263,01968	65.254.084
8.448	0,0229	193,4592	71.368.704
9.464	0,057	539,448	89.567.296
9.599	0,0087	83,5113	92.140.801
$\sum P = 76.147$	$\sum r = 0,28699$	$\sum (P \cdot r) = 2.185,21809$	$\sum P^2 = 594.450.127$

Fonte: do autor, 2011.

Considerando  $x = P$  e  $y = r$ , os coeficientes do ajuste linear para  $r$  em função de  $P$  são dado por  $a$  e  $b$ , com o valor de  $a$  igual a:

$$a = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$a = \frac{10 \cdot 2.185,21809 - 76.147 \cdot 0,28699}{10 \cdot 594.450.127 - 5.798.365.609}$$

$$a = \frac{21.852,1809 - 21.853,4275}{5.944.501.270 - 5.798.365.609}$$

$$a = \frac{-1,2466}{146.135.661}$$

$$a = -0,0000000085$$

E o valor de  $b$  é igual a:

$$b = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$b = \frac{0,28699 \cdot 594.450.127 - 76.147 \cdot 2185,21809}{10 \cdot 594.450.127 - 5.798.365.609}$$

$$b = \frac{170.601.241,9 - 166.397.801,9}{5.944.501.270 - 5.798.365.609}$$

$$b = \frac{4.203.440}{146.135.661}$$

$$b = 0,02876$$

Logo, a reta que ajusta  $r$  em função de  $P$  é dada por:

$$r(P) = -0,0000000085P + 0,02876$$

E o Modelo Logístico de Verhust será dado, neste caso, por:

$$\frac{dP}{dt} = r(P)P \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0,02876P - 0,0000000085P^2$$

A equação diferencial  $\frac{dP}{dt}$ , como função de  $P$ , é uma parábola com concavidade voltada para baixo e cujas raízes são  $P' = 0$  e  $P'' = C$ . O valor máximo de  $\frac{dP}{dt}$ , relativamente a  $P$ , é atingido quando  $P = \frac{C}{2}$ , isto é, quando a população for a igual a metade da população limite.

Por consequência, a população limite é estimada quando  $\frac{dP}{dt} = 0$ , assim

$$0,02876P - 0,0000000085P^2 = 0$$

$$P \cdot (0,02876 - 0,0000000085P) = 0$$

$$P' = 0$$

$$0,02876 - 0,0000000085P = 0$$

$$0,0000000085P = 0,02876$$

$$P = \frac{0,02876}{0,0000000085}$$

$$P'' = 3.383.529$$

Voltando ao Modelo Logístico de Verhulst para o crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia, o valor de  $A$  fica assim:

$$A = \frac{C - P_0}{P_0}$$

$$A = \frac{3.383.529 - 5.461}{5.461}$$

$$A = 618,58$$

Substituído no modelo, têm-se

$$P(t) = \frac{3.383.529}{1 + 618,58 \cdot e^{-kt}}$$

De acordo com Stewart (2009, p. 565-567), o biólogo G. F. Gause usou, em 1930, no seu Modelo Logístico o mesmo valor de  $k$  encontrado no Modelo do Crescimento Natural para modelar a dinâmica populacional do protozoário *Paramécio*. Segundo o autor, o valor de  $k$  para o Modelo Logístico de Verhulst está muito próximo do valor de  $k$  no Modelo do Crescimento Natural. E pode ser usado no Modelo Logístico de Verhulst para modelar o crescimento do eleitorado de Lagoa Real – Bahia, até mesmo porque o Modelo Logístico de Verhulst é, na essência, a Lei do Crescimento Natural modificada. Logo, o Modelo Logístico de Verhulst para o crescimento do eleitorado de Lagoa Real – Bahia fica assim:

$$P(t) = \frac{3.383.529}{1 + 618,58 \cdot e^{-0,05579t}}$$

Na figura seguinte, foram plotados os dados reais e a curva modelada.

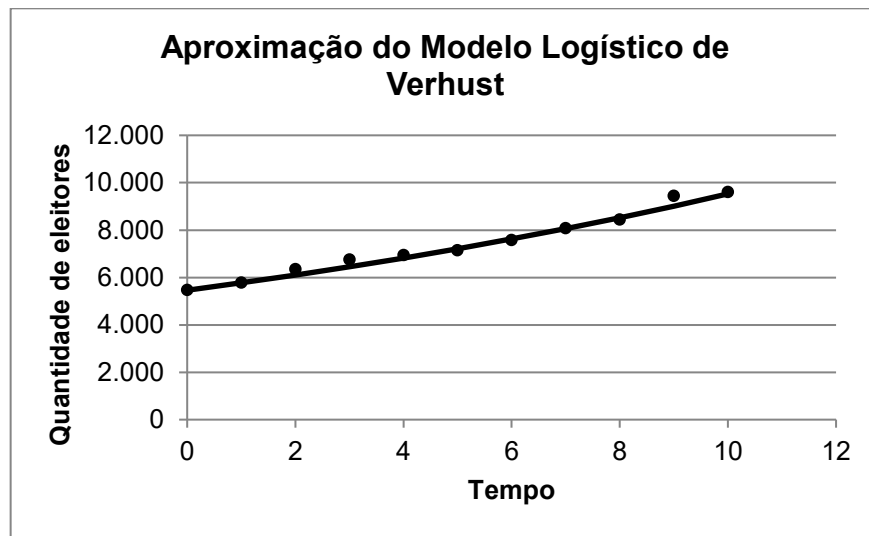


Gráfico 4 – Aproximação do Modelo Logístico de Verhulst. Fonte: do autor, 2011.

O Modelo Logístico de Verhulst aproxima-se dos dados reais no início, mas com passar do tempo, ele tende a se estabilizar quando atinge a capacidade de suporte ( $C$ ) limitada pelo ambiente, que neste caso foi de 3.383.529 eleitores. O gráfico abaixo mostra a tendência do Modelo Logístico Verhulst no crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia.

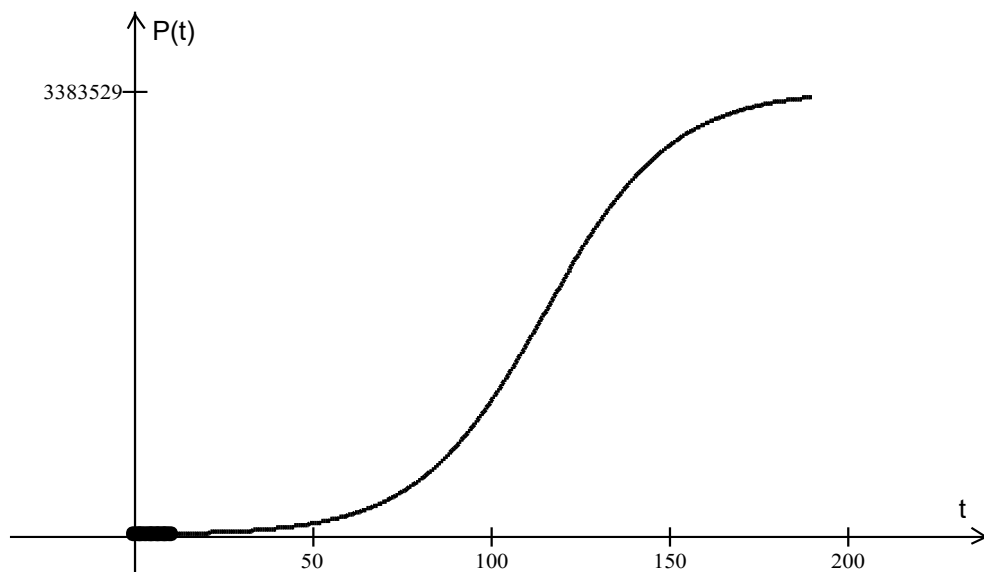


Gráfico 5 – Tendência do Modelo Logístico de Verhulst. Fonte: do autor, 2011.

### 3.2.4 A Função de Gompertz

Algumas populações possuem uma taxa de crescimento muito grande no início, mas mudam rapidamente para um crescimento mais lento. Isso faz com que a população se estabilize com o passar do tempo, ou seja, atinja a capacidade de suporte. O modelo de Gompertz incorpora esta característica. Segundo Bassanezi (2006, p. 343),

O modelo de Gompertz utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável. Isto significa que a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento. É um modelo bastante adequado para traduzir crescimentos celulares (plantas, bactérias, tumores etc), sendo que, no início, todas as células são meristemáticas, perdendo esta propriedade num intervalo de tempo relativamente pequeno.

Esse modelo é dado pelo problema de Cauchy (equação diferencial com condição inicial):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = aP - bP \ln P = P(a - b \ln P) \\ P(0) = P_0, \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0 \end{cases}$$

Cuja solução é obtida fazendo uma mudança de variável  $z = \ln P$ :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = (a - b \ln P) \\ \int \frac{dz}{a - bz} &= \int dt \\ -\frac{1}{b} \ln|a - bz| &= t + c \\ -\frac{1}{b} \ln|a - b \ln P| &= t + c \end{aligned}$$

Para  $P(0) = P_0$ , temos:

$$c = -\frac{1}{b} \ln|a - b \ln P_0|$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{b} \ln|a - b \ln P| &= t - \frac{1}{b} \ln|a - b \ln P_0| \\
\ln|a - b \ln P| &= -bt + \ln|a - b \ln P_0| \\
a - b \ln P &= e^{-bt} \cdot (a - b \ln P_0) \\
-b \ln P &= e^{-bt} \cdot (a - b \ln P_0) - a \\
\ln P &= \frac{1}{b} [a - (a - b \ln P_0) e^{-bt}] \\
\ln P &= \frac{1}{b} [a - (ae^{-bt} - e^{-bt} b \ln P_0)] \\
\ln P &= \frac{1}{b} [a - ae^{-bt} + e^{-bt} b \ln P_0] \\
\ln P &= \frac{a}{b} - \frac{a}{b} e^{-bt} + e^{-bt} \ln P_0 \\
\ln P &= \ln P_\infty - e^{-bt} \ln P_\infty + e^{-bt} \ln P_0 \\
\ln P &= \ln P_\infty + \ln \left( \frac{P_0}{P_\infty} \right) e^{-bt}
\end{aligned}$$

Logo, a solução da Função de Gompertz é dada por:

$$P(t) = P_\infty \left( \frac{P_0}{P_\infty} \right) e^{-bt}$$

Onde  $P_0$  é a população inicial,  $P_\infty$  é a capacidade de suporte e  $b$  é o coeficiente linear da reta ajustada aos valores das taxas de variação  $r_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{(t_{i+1} - t_i)P_i}$  relacionadas com  $\ln(P_i)$ .

Ainda de acordo com o autor, na Função de Gompertz a taxa de crescimento  $r(P) = a - b \ln P > 0$  decresce com  $P$  e o valor de estabilidade de  $P$  é obtido considerando-se  $r(x) = 0$ , isto é,

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Leftrightarrow a - b \ln P = 0 \Leftrightarrow P_\infty = e^{a/b}$$

Para a população de eleitores de Lagoa Real – Bahia, a Função de Gompertz precisa dos valores das constantes  $a$  e  $b$ , em  $r(P) = a - b \ln P$ . Esses valores são obtidos através de um ajuste linear dos valores das taxas de variação  $r_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{(t_{i+1} - t_i)P_i}$

relacionados com  $\ln(P_i)$ , onde  $P_1 = 5.461$ ,  $P_2 = 5.779$ ,  $P_3 = 6.341$ ,  $P_4 = 6.753$ ,  $P_5 = 6.939$ ,  $P_6 = 7.143$ ,  $P_7 = 7.569$ ,  $P_8 = 8.070$ ,  $P_9 = 8.444$  e  $P_{10} = 9.434$ .

Na tabela a seguir estão os resultados necessários para os cálculos das constantes  $a$  e  $b$ .

Tabela 5 – Valores das taxas de variação  $r_i$  relacionadas com  $\ln(P_i)$

$\ln(P)$	$r$	$\ln(P)r$	$(\ln(P))^2$
8,60	0,058	0,4988	73,96
8,66	0,097	0,84002	74,9956
8,75	0,065	0,56875	76,5625
8,82	0,027	0,23814	77,7924
8,84	0,029	0,25636	78,1456
8,87	0,06	0,5322	78,6769
8,93	0,066	0,58938	79,7449
8,99	0,046	0,41354	80,8201
9,04	0,117	1,05768	81,7216
9,15	0,017	0,15555	83,7225
$\sum \ln(P) = 88,65$	$\sum r = 0,582$	$\sum \ln(P)r = 5,15042$	$\sum (\ln(P))^2 = 786,1421$

Fonte: do autor, 2011.

Considerando  $x = \ln(P)$  e  $y = r$ , o valor de  $a$  no ajuste linear é dado por:

$$a = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

Logo,

$$a = \frac{10 \cdot 5,15042 - 88,65 \cdot 0,582}{10 \cdot 786,1421 - 7.858,8225}$$

$$a = \frac{51,5042 - 51,5943}{7.861,421 - 7.858,8225}$$

$$a = \frac{-0,0901}{2,5985}$$

$$a = -0,035$$

E o valor de  $b$  é dado por:

$$b = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$b = \frac{0,582 \cdot 786,1421 - 88,65 \cdot 5,15042}{10 \cdot 786,1421 - 7.858,8225}$$

$$b = \frac{457,5347 - 456,5847}{7.861,421 - 7.858,8225}$$

$$b = \frac{0,95}{2,5985}$$

$$b = 0,365$$

Se o valor de  $a$  determina o coeficiente linear e o valor de  $b$  determina o coeficiente angular em  $r(P) = a - b \ln(P)$  deve-se então manter o valor algébrico deles e trocar o sinal, tanto do coeficiente linear quanto do coeficiente angular. Dessa forma,  $a = 0,035$  e  $b = - 0,365$ .

Substituindo o valor de  $a$ ,  $b$  e  $\ln(P)$  em  $r(P) = a - b \ln(P)$  têm-se:

$$r(P) = 0,365P + 0,035$$

Portanto, os valores de  $a$  e  $b$  para a Função de Gompertz na população de eleitores de Lagoa Real – Bahia são, respectivamente, 0,365 e 0,035, ambos maior que zero como determina a condição inicial e o valor da estabilidade de  $P$  obtido por  $P_{\infty} = e^{a/b}$  é igual a  $P_{\infty} = 33.812$ .

Se a população inicial de eleitores de Lagoa Real – Bahia é igual a 5.461 eleitores, conforme o TSE, logo o Modelo de Gompertz para a população de eleitores de Lagoa Real – Bahia fica assim:

$$P(t) = 33.812 \cdot \left( \frac{5.461}{33.812} \right)^{e^{-0,035t}}$$

Efetuando a divisão entre o valor da população inicial de eleitores de Lagoa Real – Bahia e a capacidade de suporte que é igual a 33.812 têm-se o resultado aproximado de 0,161, com três casas decimais.

$$P(t) = 33.812 \cdot 0,161^{e^{-0,035t}}$$

Graficamente, este modelo descreve a dinâmica populacional do eleitorado de Lagoa Real – Bahia com uma aproximação significativa.

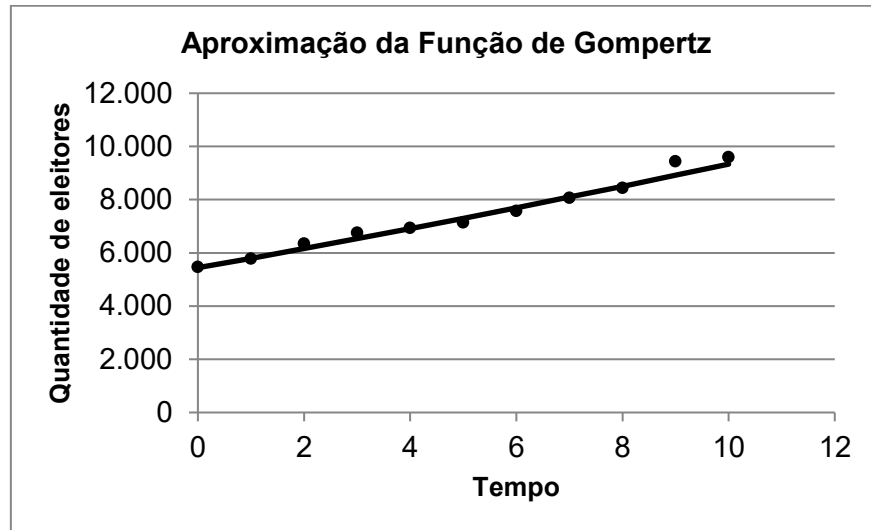


Gráfico 6 – Aproximação da Função de Gompertz. Fonte: do autor, 2011.

Porém, a estabilidade ( $P_{\infty}$ ) da população de eleitores de Lagoa Real – Bahia para a Função de Gompertz é igual a 33.812 eleitores, como ilustra perfeitamente o gráfico abaixo. Para um número diferente de 33.812, a Função de Gompertz não terá o mesmo comportamento em relação aos valores reais.

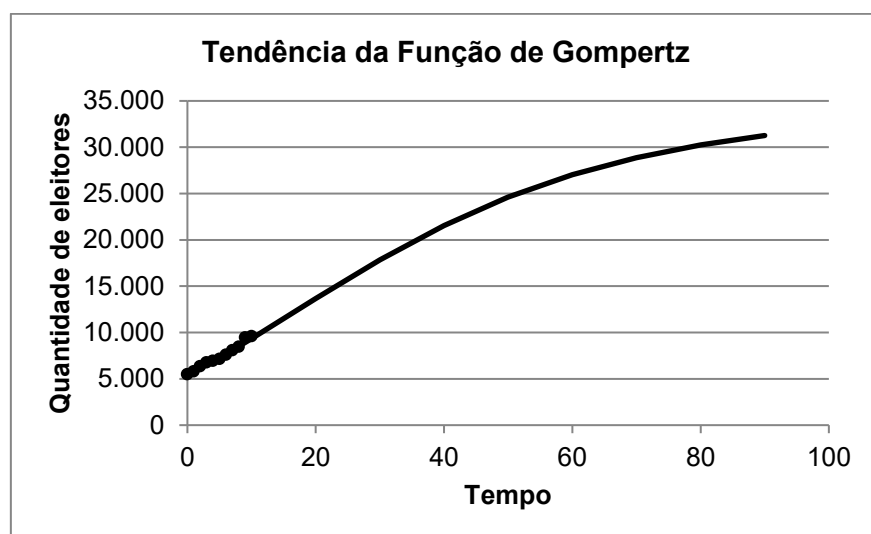


Gráfico 7 – Tendência da Função de Gompertz. Fonte: do autor, 2011.

Como a Função de Gompertz tem um crescimento rápido no início e um crescimento lento no final, em decorrência disso, a capacidade de suporte da população de eleitores de Lagoa Real - Bahia, dada pela Função de Gompertz, é pequena.

### 3.3 A REGRESSÃO LINEAR NO CRESCIMENTO DO NÚMERO DE ELEITORES DE LAGOA REAL – BAHIA

A análise gráfica mostra a tendência linear dos dados no crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia. Logo, um ajuste linear através do método dos mínimos quadrados também descreve a dinâmica populacional dos eleitores Lagoa Real – Bahia com precisão.

Segundo Spiegel (1993, p. 332),

O tipo mais simples de curva de ajustamento é a linha reta, cuja equação pode ser escrita:

$$y = a_0 + a_1x.$$

Dados dois pontos quaisquer  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  dessa reta, as constantes  $a_0$  e  $a_1$  podem ser determinadas. A equação resultante da reta pode ser escrita:

$$Y - Y_1 = \left( \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) (X - X_1) \text{ ou } Y - Y_1 = m(X - X_1),$$

em que  $m = \left( \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right)$  é denominado *coeficiente angular* (ou declividade da reta) e representa a variação Y, dividida pelo correspondente de X.

Em relação ao método dos mínimos quadrados, Spiegel (1993) afirma que a reta de mínimos quadrados que se ajusta ao comportamento dos pontos  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$  tem equação igual a  $Y = a_0 + a_1X$ , em que as constantes  $a_0$  e  $a_1$  são determinadas mediante a resolução simultânea do sistema de equações:

$$\begin{cases} \sum Y = a_0N + a_1 \sum X \\ \sum XY = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{cases}$$

Que são denominadas *equações normais da reta de mínimos quadrados*.

As constantes  $a_0$  e  $a_1$ , também, podem ser obtidas por meio das fórmulas:

$$a_0 = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$a_1 = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

No crescimento do eleitorado de Lagoa Real – Bahia, pelo método dos quadrados mínimos, tem-se para a constante  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{81.532 \cdot 385 - 55 \cdot 452.543}{11 \cdot 385 - 3.025}$$

$$a_0 = \frac{31.389.820 - 24.889.865}{4.235 - 3.025}$$

$$a_0 = \frac{6.499.955}{1.210}$$

$$a_0 = 5.372$$

E para a constante  $a_1$ , têm-se:

$$a_1 = \frac{11 \cdot 452.543 - 55 \cdot 81.532}{11 \cdot 385 - 3.025}$$

$$a_1 = \frac{4.977.973 - 4.484.260}{4.235 - 3.025}$$

$$a_1 = \frac{493.713}{1.210}$$

$$a_1 = 408$$

Portanto, o ajuste linear para o crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia em função do tempo  $t$  é dado por:

$P(t) = 5.372 + 408t$
-----------------------

Mas ainda não se sabe nada sobre a existência e o grau de relação entre as variáveis, o ajuste linear pode ter uma aproximação significativa ou não dos valores reais na população de eleitores de Lagoa Real – Bahia. Para ter essa certeza, o coeficiente de correlação de Pearson ( $r$ ) fornece um mecanismo eficiente que é dado por:

$$r = \frac{\sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{n}}{\left\{ \left[ \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n} \right] \left[ \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n} \right] \right\}^{1/2}}$$

O intervalo de variação de  $r$  é entre - 1 e + 1, o sinal de  $r$  indica o coeficiente angular da reta ajustada. Quanto mais próximo  $r$  estiver de -1 ou + 1, melhor é a relação entre as variáveis. Se  $r$  for igual a zero, não existe nenhuma relação entre as variáveis.

Para Lagoa Real – Bahia tem-se a tabela abaixo que mostra os valores correspondentes a  $x$  e  $y$ , e também, os valores necessários para o cálculo do coeficiente de correlação de Pearson.

Tabela 6 – Valores para o cálculo do coeficiente de correlação de Pearson ( $r$ )

X	Y	X <sup>2</sup>	Y <sup>2</sup>	XY
0	5.461	0	29.822.521	0
1	5.779	1	33.396.841	5.779
2	6.341	4	40.208.381	12.682
3	6.753	9	45.603.009	20.259
4	6.939	16	48.149.721	27.756
5	7.143	25	51.022.449	35.715
6	7.569	36	57.289.761	45.414
7	8.070	49	65.124.900	56.490
8	8.444	64	71.301.136	67.552
9	9.434	81	89.000.356	84.906
10	9.599	100	92.140.801	95.990
$\sum X = 55$	$\sum Y = 81.532$	$\sum X^2 = 385$	$\sum Y^2 = 623.059.876$	$\sum XY = 452.543$

Fonte: do autor, 2011.

Colocando os valores na fórmula têm-se:

$$r = \frac{452.543 - \frac{55 \cdot 81.532}{11}}{\left\{ \left[ 385 - \frac{(55)^2}{11} \right] \left[ 623.059.876 - \frac{(81.532)^2}{11} \right] \right\}^{1/2}}$$

$$r = \frac{44.883}{\{[110][18.744.692]\}^{1/2}}$$

$$r = \frac{44.883}{\{2.061.916.120\}^{1/2}}$$

$$r = \frac{44.883}{45.408,33}$$

$$r = 0,98843$$

Portanto, de acordo com o valor do coeficiente de correlação de Pearson, a dinâmica populacional dos eleitores de Lagoa Real – Bahia pode ser modelada pela curva linear  $P(t) = 408t + 5.372$  como mostra o gráfico:

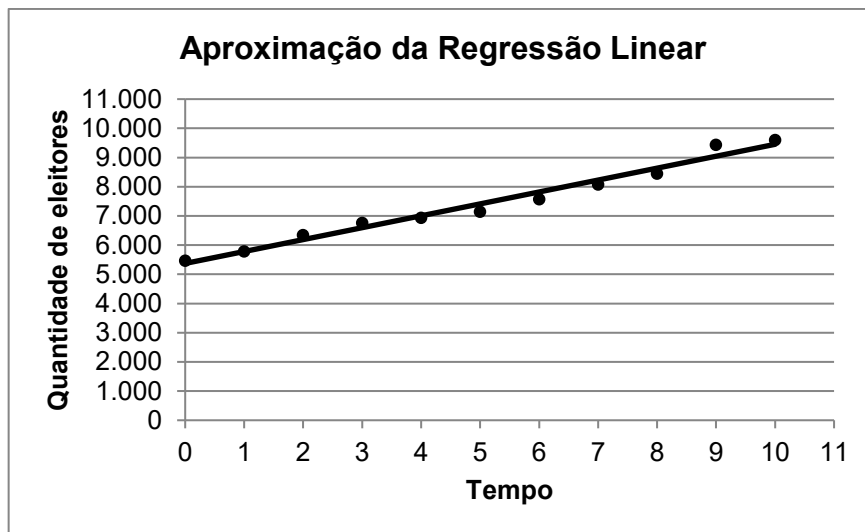


Gráfico 8 – Aproximação da Regressão Linear. Fonte: do autor, 2011.

## 4 MODELAGEM MATEMÁTICA NO CRESCIMENTO DO NÚMERO DE ELEITORES DE LAGOA REAL – BAHIA COM O USO DO MICROSOFT EXCEL

O Microsoft Excel é uma planilha eletrônica que pode ser imaginada como uma grande folha de papel dividida em 256 colunas e 16.384 linhas nas quais podemos armazenar textos e números. Mas a grande vantagem do Microsoft Excel está no fato de que os valores e textos armazenados nele podem ser manipulados da forma que o usuário achar melhor para o seu propósito, através de um grande número de fórmulas disponíveis.

### 4.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA NO MICROSOFT EXCEL 2007

O Microsoft Excel possui uma ferramenta muito útil para fazer modelagem matemática. Através dele é possível modelar diversos tipos de funções. Para explorar esta ferramenta basta ter o software instalado no computador e a habilidade de manuseá-lo. Neste trabalho será usado o Excel 2007. Veja a tela de abertura abaixo:

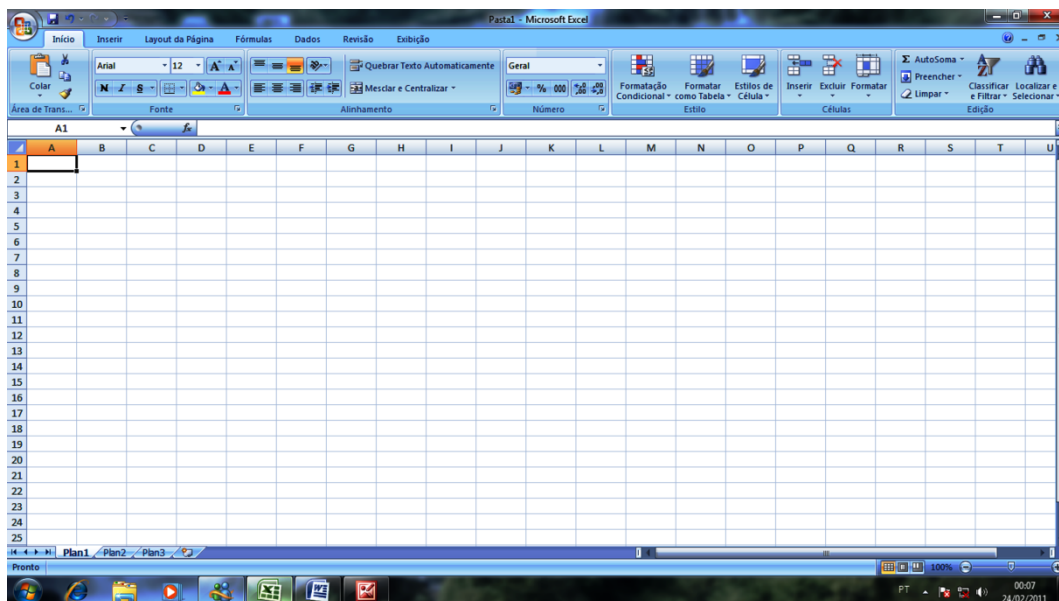


Imagem 4 – Tela de abertura do Microsoft Excel 2007. Fonte: Microsoft Excel 2007, 2011.

O primeiro passo é inserir os dados que relacionam a quantidade de eleitores (P) em função do tempo (t). Na primeira coluna foram inseridos os valores da variável independente t, em anos, e nas outras colunas os valores da variável dependente P, em milhares. Em seguida, selecionando todos os dados e clicando na guia *inserir*, *dispersão* aparecerá à tela da seguinte forma:

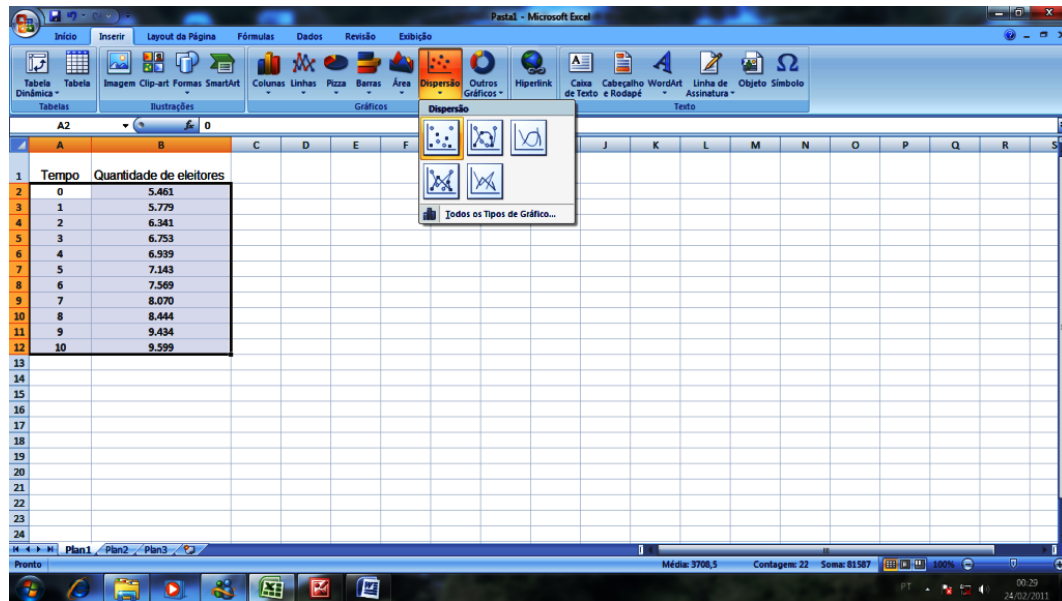


Imagem 5 – Inserir dispersão. Fonte: Microsoft Excel 2007, 2011.

Optando-se por *dispersão somente com marcadores* aparecerá o gráfico. Na guia *Layout* é possível acrescentar o título para o gráfico e para os eixos.

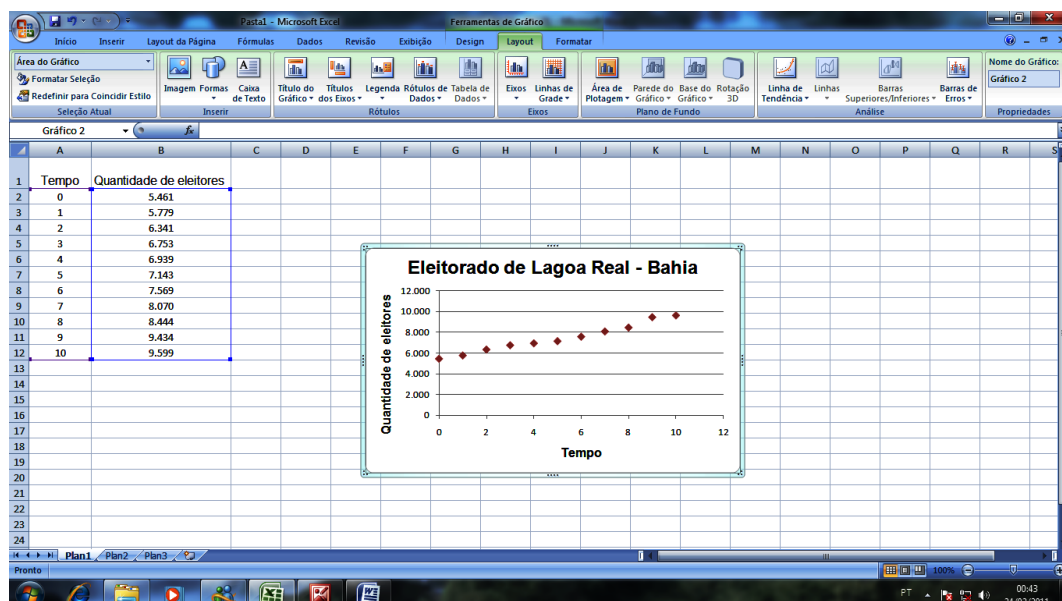


Imagem 6 – Gráfico de dispersão somente com marcadores. Fonte: Microsoft Excel 2007, 2011.

Clicando com botão direito do *mouse* em cima de um dos marcadores aparecerá uma caixa de diálogo, nesta adiciona-se a *linha de tendência*. Em seguida, aparecerá outra caixa de diálogo com várias opções de linha de tendência.

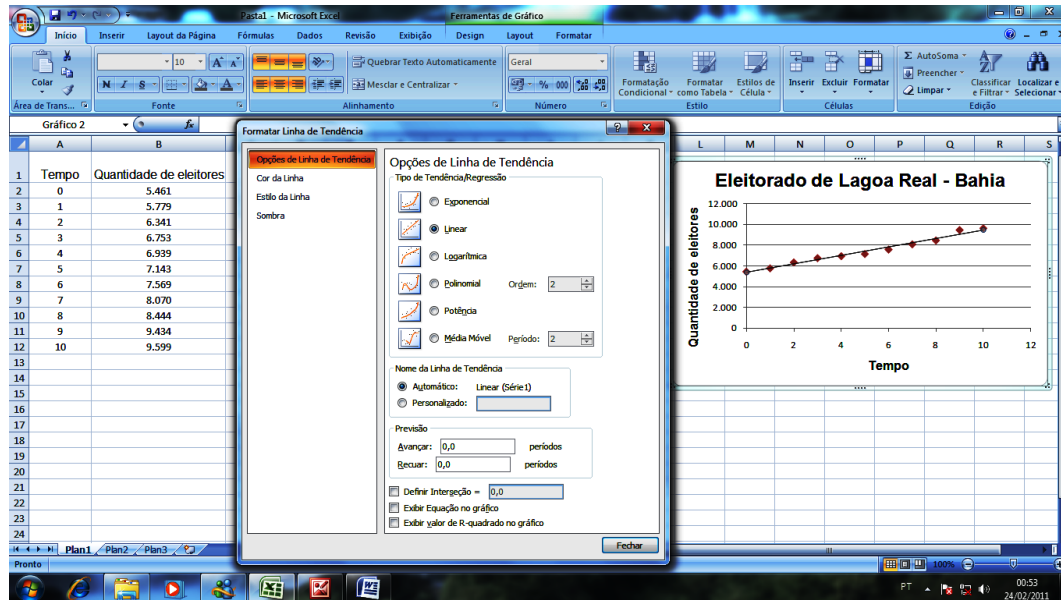


Imagem 7 – Opções de linha de tendência. Fonte: Microsoft Excel 2007, 2011.

Escolhendo a linha de tendência *polinomial*, testando o grau e ajustando-o, no máximo do 6º, a linha de tendência vai-se ajustando aos valores reais da quantidade de eleitores simultaneamente. Em seguida, clicando em *exibir equação no gráfico* aparecerá função polinomial gerada no Microsoft Excel.

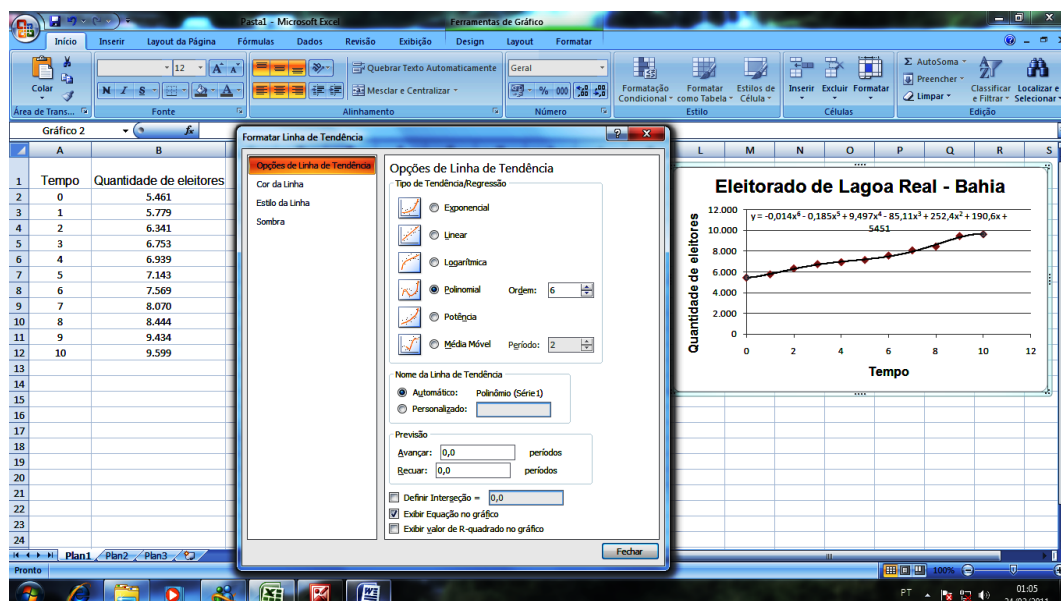


Imagem 8 – Linha polinomial do sexto grau. Fonte: Microsoft Excel 2007, 2011.

Entre as várias opções testadas, o polinômio que melhor descreveu o comportamento dos dados reais foi do sexto grau, cuja equação segue:

$$P(t) = - 0,014t^6 - 0,185t^5 + 9,497t^4 - 85,11t^3 + 252,4t^2 + 190,6t + 5.451$$

Graficamente, percebe-se que esta função tem um comportamento adequado para os valores reais que lhe originou. Contudo, não parece ser uma boa opção quando o assunto é fazer previsões, haja vista seu comportamento abrupto, a partir de  $t = 10$ .

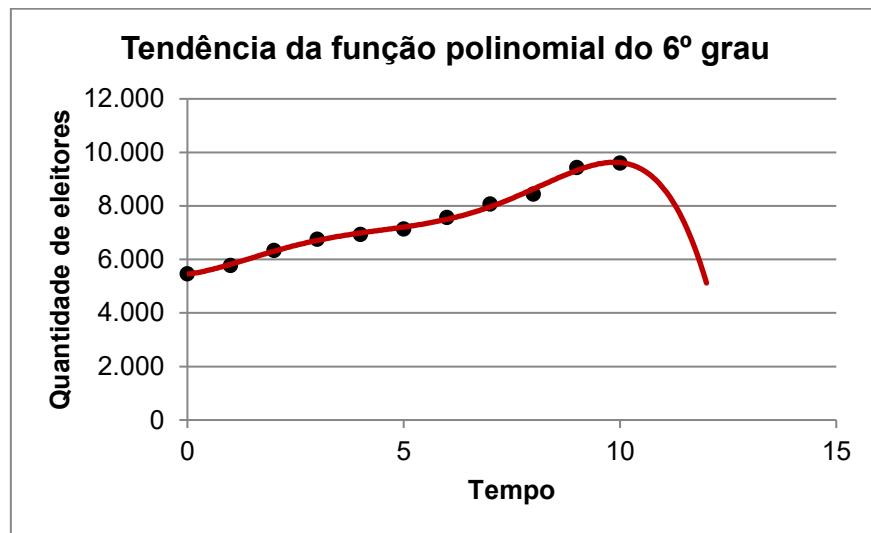


Gráfico 9 – Tendência da função polinomial do 6º grau. Fonte: do autor, 2011.

## 5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A aceitação ou não dos modelos encontrados, neste trabalho, precisa ser discutida através do processo de validação.

De acordo com Bassanezi (2006, p.30),

O problema de aceitação ou não de um modelo depende muito mais de fatores que condicionam o modelador, incluindo seus objetivos e recursos disponíveis – o simples confronto com os dados empíricos pode não bastar. De qualquer forma, um bom modelo matemático é aquele que o usuário, especialista na área onde se executou a modelagem, o considera como tal, tendo as qualidades de ser suficientemente simples e representar razoavelmente a situação analisada.

Ainda de acordo com o autor,

Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real.

No entanto, o modelo matemático deve prever, no mínimo, os valores que lhe deram origem e o grau de aproximação destas previsões com os valores reais será o fator preponderante para a sua validação. Veja a tabela abaixo.

Tabela 7 – Resultado dos valores para cada um dos modelos

Tempo	Valor real	Lei do crescimento Natural	Modelo Logístico de Verhulst	Função de Gompertz	Regressão Linear	Função polinomial
0	5.461	5.461	5.461	5.444	5.372	5.451
1	5.779	5.774	5.774	5.797	5.780	5.818
2	6.341	6.106	6.104	6.159	6.188	6.306
3	6.753	6.456	6.454	6.531	6.596	6.710
4	6.939	6.826	6.824	6.911	7.004	6.989
5	7.143	7.218	7.214	7.298	7.412	7.214
6	7.569	7.632	7.627	7.694	7.820	7.514
7	8.070	8.070	8.064	8.096	8.228	8.006
8	8.444	8.533	8.525	8.503	8.636	8.721
9	9.434	9.023	9.013	8.917	9.044	9.511
10	9.599	9.540	9.529	9.335	9.452	9.957

Fonte: do autor, 2011.

Para Bassanezi (2006, p. 30), “A interpretação dos resultados obtidos através dos modelos pode ser feita com o uso de gráfico de soluções que facilita avaliar as previsões ou mesmo sugerir o aperfeiçoamento dos modelos”.

O gráfico abaixo mostra a curva da Lei do Crescimento Natural (curva verde), do Modelo Logístico de Verhulst (curva preta), da Função de Gompertz (curva roxa), da Regressão Linear (curva azul) e da função polinomial (curva vermelha).

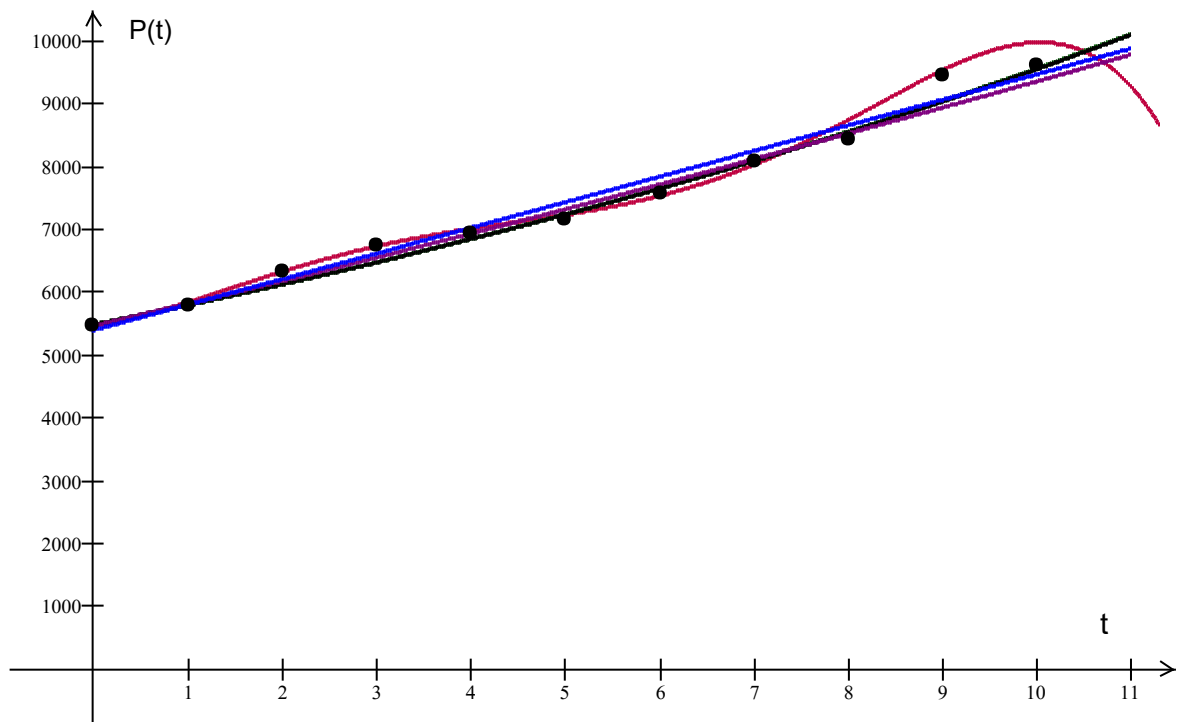


Gráfico 10 – Curvas para os modelos. Fonte: do autor, 2011.

Embora o Modelo do Crescimento Natural seja indicado para uma população ilimitada e o Modelo Logístico de Verhulst para uma população limitada como afirma Stewart (2009), ambos descrevem a dinâmica populacional dos eleitores de Lagoa Real – Bahia com uma aproximação significativa em relação aos valores reais. Graficamente, percebe-se que as curvas dos dois modelos quase coincidiram entre si. Isso mostra que o valor de  $k$  usado na Lei do Crescimento Natural é verdadeiramente próximo do valor de  $k$  usado no Modelo Logístico de Verhulst. Mas, uma das limitações deste último modelo consiste no fato de que o crescimento máximo da curva acontece quando a população é igual à metade da população limite, o que nem sempre acontece nos fenômenos com tendência assintótica.

A Função de Gompertz (curva roxa) apresenta uma tendência inicialmente semelhante à Lei do Crescimento Natural (curva verde) para o eleitorado de Lagoa

Real – Bahia. Todavia, com o passar do tempo, a Função de Gompertz se estabiliza, ao contrário da Lei do Crescimento Natural. Graficamente, percebe-se a aproximação, no início, tanto da Função de Gompertz quanto da Lei do Crescimento Natural em relação aos dados reais e, no final, há uma diferença entre elas.

Apesar do ajuste linear (curva azul) não ser o modelo matemático indicado para modelar crescimento populacional, a população estudada cresce de forma quase linear. Graficamente, a curva do ajuste linear aproxima-se bastante dos dados reais, assim como a Função de Gompertz.

Tanto o Modelo Logístico de Verhulst quanto a Função de Gompertz se mostram eficientes no início, mas com o passar do tempo, há uma diferença muito grande entre os seus valores, começando pela capacidade de suporte, respectivamente, iguais a 3.383.529 e 33.812 no eleitorado de Lagoa Real – Bahia.

Só a comparação gráfica dos modelos não é o suficiente para a escolha do modelo ideal. Logo, a opção pelo modelo eficiente, neste trabalho, será feita utilizando a margem de erro dada pela fórmula:

$$\frac{\text{Valor real} - \text{Valor modelado}}{\text{Valor real}} = \text{Resultado obtido} \cdot 100$$

E através da margem de erro, chega-se a conclusão de qual modelo mais se aproxima dos valores reais na população de eleitores de Lagoa Real – Bahia.

Tabela 8 – Resultado da margem de erro para cada modelo

Tempo	Lei do Crescimento Natural	Modelo Logístico de Verhulst	Função de Gompertz	Regressão Linear	Função polinomial
0	0%	0%	0,31%	1,63%	0,18%
1	0,09%	0,09%	-0,31%	-0,02%	-0,67%
2	3,71%	3,74%	2,87%	2,41%	0,55%
3	4,40%	4,43%	3,29%	2,32%	0,64%
4	1,63%	1,66%	0,40%	-0,94%	-0,72%
5	-1,05%	-0,99%	-2,17%	-3,76%	-0,99%
6	-0,83%	-0,77%	-1,65%	-3,32%	0,73%
7	0%	0,07%	-0,32%	-1,96%	0,79%
8	-1,05%	-0,96%	-0,70%	-2,27%	-3,28%
9	4,36%	4,46%	5,48%	4,13%	-0,82%
10	0,61%	0,73%	2,75%	1,53%	-3,73%

Fonte: do autor, 2011.

De acordo com a tabela anterior, as margens de erro para a Lei do Crescimento Natural, para o Modelo Logístico de Verhulst, para a Função de Gompertz, para a Regressão Linear e para a função polinomial são, respectivamente, iguais a [- 1,05%; 4,40%], [- 0,99%; 4,46%], [- 2,17%; 5,48%], [- 3,76%; 4,13%] e [- 3,73%; 0,79%].

Logo, a função polinomial

$$P(t) = - 0,014t^6 - 0,185t^5 + 9,497t^4 - 85,11t^3 + 252,4t^2 + 190,6t + 5.451$$

descreve a dinâmica populacional dos eleitores de Lagoa Real – Bahia com a melhor aproximação. Mas, de acordo com a análise gráfica desta função, a partir de  $t = 10$ , ela tem um comportamento inesperado que não parece representar o crescimento populacional de modo a torná-la ineficiente para uma previsão.

Já a Lei do Crescimento Natural e o Modelo Logístico de Verhulst vêm em seguida com a mesma margem de erro. Porém, com uma diferença, a primeira descreve uma população ilimitada enquanto a segunda descreve uma população limitada pela capacidade de suporte. Dessa forma, a lei do Crescimento Natural

$$P(t) = 5.461 \cdot e^{0,05579t}$$

E o Modelo Logístico de Verhulst

$$P(t) = \frac{3.383.529}{1 + 618,58 \cdot e^{-0,05579t}}$$

descrevem o crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia, no passado e presente, com uma aproximação significativa.

Numa análise mais criteriosa da margem de erro usando cinco casas decimais, têm-se [- 1,04998%; 4,35658%] para a Lei do Crescimento Natural e [- 0,99398; 4,46258%] para o Modelo Logístico de Verhulst. Logo, com uma diferença mínima na margem de erro, a Lei do Crescimento Natural se mostra mais eficiente para fazer uma previsão para 2012.

Considerando  $P(0) = 1990$ ,  $P(1) = 1992$ ,  $P(2) = 1994, \dots$ ,  $P(11) = 2012$ , a previsão do número de eleitores que irão votar nas eleições municipais de 2012,

segundo a Lei do Crescimento Natural é igual a 10.074 eleitores, com uma margem de erro de 1,04998% para menos e 4,35658% para mais.

Apesar da Lei do Crescimento Natural e do Modelo Logístico de Verhust se mostrarem eficientes para o crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia, a previsão foi feita com a primeira. Mas, futuramente, a segunda pode ser tão eficiente quanto a primeira.

## 6 CONCLUSÃO

A história dos modelos matemáticos não é recente no desenvolvimento do pensamento científico. Deste A.C. utiliza-se a ideia de modelo para descrever fenômenos. Dessa forma, a modelagem matemática desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da ciência. Até mesmo, a sistematização do Cálculo Diferencial e Integral desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz no século XVII se beneficiou deles.

No Brasil, a modelagem matemática na educação tem uma história recente, datada em aproximadamente três décadas. Como método alternativo de ensino de Matemática, ela permite a contextualização dos conteúdos matemáticos e proporciona à interdisciplinaridade. Além disso, admite uma aproximação entre os conteúdos matemáticos e a realidade, fugindo, assim, das abstrações generalizadas e facilitando o “diálogo” entre as diversas áreas do conhecimento, conseqüentemente, favorecendo o desenvolvimento da Ciência.

As técnicas de modelagem matemática aplicadas ao estudo do crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia se mostraram eficientes. A Lei do Crescimento Natural, o Modelo Logístico de Verhulst, a Função de Gompertz, a Regressão Linear e a função polinomial do sexto grau gerada no Microsoft Excel se mostraram capazes de modelar o crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia. Entretanto, as limitações apresentadas por alguns destes modelos não permitiram validar todos, cabendo à opção pela Lei do Crescimento Natural. Esta, por sua vez, apresentou a melhor aproximação em relação aos dados reais na população de eleitores de lagoa Real – Bahia. Isso permitiu fazer uma previsão de 10.074 eleitores alistados para as eleições municipais de 2012, com uma margem de entre de 1,04998% para menos e 4,35658% para mais.

Como a maioria dos modelos matemáticos descreve um fenômeno do dia-a-dia, logicamente, os valores obtidos por uma pesquisa ou observação desse fenômeno precisam ser organizados. Com esses valores em mãos, o Microsoft Excel 2007 se mostrou uma ferramenta apropriada para modelar uma função polinomial do sexto grau após ter testado todos os polinômios de grau menor.

Todas as técnicas de modelagem matemática aplicadas ao estudo do crescimento do número de eleitores de Lagoa Real – Bahia apresentadas neste trabalho podem ser aplicadas em outras áreas de estudo que envolvem crescimento de um modo geral e, principalmente, no estudo do crescimento da população de um município, estado, país ou mundial, talvez com algumas alterações em uma escala maior. Nesse sentido, elas podem ser utilizadas para o controle do crescimento populacional e para o planejamento das políticas sociais pelas autoridades governantes.

## 7 REFERÊNCIAS

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIOQUEST. **Pierre François Verhulst**. Disponível em: <[http://www.bioquest.org/esteem/esteem\\_details.php?product\\_id=197](http://www.bioquest.org/esteem/esteem_details.php?product_id=197)> Acesso em: 28 Fev. 2011.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DIARIODOVERDE. **Malthus**. Disponível em: <<http://diariodoverde.blogspot.com/2011/02/teoria-malthusiana-o-ambiente-e-sua.html>>. Acesso em: 28 Fev. 2011.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 2.ed. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio Século XXI: O minidicionário da Língua Portuguesa**. 5. ed. revisada e ampliada. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

GASPAR, Alberto. **Física**: volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

MARTINS, Ana Regina. **O uso da Modelagem Matemática no ensino superior**. 2007. 61f. Trabalho de conclusão de curso (Especialização em Matemática: ênfase em Cálculo) – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2007.

RODNEY, Carlos Bassanezi. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

SAYOLS, Ramon Sanahuja. **A escola em casa**. Edição 2005. Recife: Desafio Editorial, 2005.

SILVA, Maria Deusa Ferreira da. **Problemas e Modelos Matemáticos que Contribuíram com o Desenvolvimento do Cálculo**: dos gregos a Newton. 1999. 11f. Trabalho de conclusão de curso (Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 1999.

SPIEGEL, Murray R. **Estatística**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1993.

STEWART, James. **Cálculo**: volume 2. Trad. da 6. ed. Norte- Americana. São Paulo: Cengagelearning, 2009.

TRIBUNAL SUPERIOR ELEITORAL. **Eleições**. Disponível em: <[http://www.tse.gov.br/internet/eleicoes/regi\\_uf\\_blank.htm](http://www.tse.gov.br/internet/eleicoes/regi_uf_blank.htm)>. Acesso em: 27 Nov. 2010.