UNEB-UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA
POLO 60

César Alexandre Oliveira Malta

Q-Matrix: um jogo de tabuleiro integrado a uma unidade de ensino potencialmente significativa para uma abordagem de conceitos de computação quântica no ensino médio

Salvador - BA
2024

César Alexandre Oliveira Malta

Q-Matrix: um jogo de tabuleiro integrado a uma unidade de ensino potencialmente significativa para uma abordagem de conceitos de computação quântica no ensino médio

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, Polo 60, da Universidade do Estado da Bahia, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Dr. Marco Antônio Silva Trindade

Coorientador: Dr. José Carlos Oliveira de Jesus

Salvador - BA
2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Biblioteca Professor **Edivaldo Machado Boaventura - UNEB – Campus I**
Bibliotecária: Patricia Morena Batista da Sila – CRB5/1662

M261q Malta, César Alexandre Oliveira
Q-Matrix: um jogo de tabuleiro integrado a uma unidade de ensino potencialmente significativa para uma abordagem de conceitos de computação quânticas no ensino médio / César Alexandre Oliveira Malta Moreira. - Salvador, 2024.
87f.: il.

Orientador: Marco Antônio Silva Trindade.
Coorientador: José Carlos Oliveira de Jesus.
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação Profissional em Física - MNPEF, Campus I. 2024.

Contém referências, apêndices e anexos.

1. Ludoterapia. 2. Computação quântica. 3. Tecnologia educacional. 4. Aprendizagem – ensino médio. 5. Autismo – jogos educativos. I. Trindade, Marco Antônio Silva. II. Jesus, José Carlos Oliveira de. III. Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Exatas e da Terra. Campus I. IV. Título.

César Alexandre Oliveira Malta

Q-Matrix: um jogo de tabuleiro integrado a uma unidade de ensino potencialmente significativa para uma abordagem de conceitos de computação quântica no ensino médio

Dissertação apresentada ao Polo 60 do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física do Programa de Pós-graduação em Ensino de Física da Universidade do Estado da Bahia (Uneb) como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada em 25 de outubro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Marco Antônio Silva Trindade

Prof. Dr. Marco Antônio Silva Trindade – Orientador
Universidade do Estado da Bahia

Eliene Maria da Silva

Profa. Dra. Eliene Maria da Silva – Examinadora
Universidade do Estado da Bahia

Wallas Santos Nascimento

Prof. Dr. Wallas Santos Nascimento – Examinador
Campus Integrado de Manufatura e Tecnologias

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos os meus professores e à minha família. Faço justa homenagem ao saudoso Prof. Dr. Dielson Pereira Hohenfeld, que faria parte da banca examinadora dessa dissertação.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais que me deram a dádiva da vida, a companhia da minha irmã, que é minha referência, à minha ex-companheira que compartilhou os momentos turbulentos e laminares deste caminho e às minhas filhas que me dão a alegria de viver.

Agradeço também aos colegas do Mestrado Profissional em Ensino de Física e aos professores do programa que me auxiliaram durante essa jornada em busca de uma melhor formação.

Agradeço ao meu coorientador José Carlos Oliveira de Jesus por sua paciência e esforço nas orientações semanais (mesmo fora do escopo do MNPEF) e ao nosso orientador Marco Antônio Silva Trindade pela compreensão, atenção e gentileza nas sugestões para a construção de um trabalho mais essencial.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

EPÍGRAFE

“Educar é um ato político.” *Paulo Freire*

“A vitalidade é demonstrada não apenas pela persistência, mas pela capacidade de começar de novo.” *F. Scott Fitzgerald*

“Posso não concordar com uma única palavra do que dizes, mas defenderei até a morte o teu direito de dizê-la”.
Voltaire

RESUMO

Q-Matrix: um jogo de tabuleiro integrado a uma unidade de ensino potencialmente significativa para uma abordagem de conceitos de computação quântica no ensino médio

Este trabalho tem como proposta aplicar uma sequência didática, tendo como recurso didático um jogo para favorecer a abordagem de conceitos de computação quântica, uma vez que vivemos em uma era digital na qual os produtos tecnológicos despertam extrema curiosidade pelos jovens. A computação quântica é uma tecnologia disruptiva, com significativo potencial de transformação social e que vem despertando sobremaneira o fascínio da juventude, sendo foco de intensa pesquisa científica no sentido do desenvolvimento de computadores com uma capacidade de processamento cada vez maior. O objetivo geral dessa pesquisa é aplicar uma proposta de sequência didática com conceitos da computação quântica como produto, e, como objetivos específicos, têm-se o ato de desenvolver uma sequência didática e aplicar um jogo de tabuleiro como recurso didático. Para consolidar esses objetivos, se adota uma metodologia qualitativa, baseada numa revisão de literatura sobre a computação quântica. Em seguida, faz-se o detalhamento da sequência didática a ser aplicada (baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel) e a posterior intervenção com o produto educacional. As informações obtidas após a aplicação do jogo, ocorreu a análise das interações entre os discentes e deles com o produto educacional. Com a aplicação da sequência didática, observam-se indícios de aprendizagem significativa. Com a aplicação do jogo como recurso didático, percebe-se que houve um aumento da curiosidade dos estudantes em relação aos conceitos de computação quântica. Esse jogo permite aproximar cada vez mais um tema de extrema relevância da comunidade científica aos discentes do ensino médio. Há também, com o game, a possibilidade de trabalhar outros campos do saber (além das ciências exatas do conhecimento).

Palavras-Chave: Jogo. Computação Quântica. Ensino Médio. Aprendizagem Significativa. Organizador Prévio.

ABSTRACT

Q-Matrix: a board game integrated into a potentially significant teaching unit for an approach to quantum computing concepts in high school

This work aims to apply a didactic sequence, using a game as a teaching resource to encourage the approach to quantum computing concepts, since we live in a digital era in which technological products arouse extreme curiosity among young people. Quantum computing is a disruptive technology, with significant potential for social transformation and which has greatly aroused the fascination of young people, being the focus of intense scientific research towards the development of computers with an increasingly greater processing capacity. The general objective of this research is to apply a proposal for a didactic sequence with quantum computing concepts as a product, and, as specific objectives, there is the act of developing a didactic sequence and applying a board game as a teaching resource. To consolidate these objectives, a qualitative methodology is adopted, based on a literature review on quantum computing. Next, the didactic sequence to be applied is detailed (based on David Ausubel's Theory of Meaningful Learning) and the subsequent intervention with the educational product. With the information obtained after applying the game, the interactions between the students and them with the educational product were analyzed. With the application of the didactic sequence, signs of significant learning are observed. With the application of the game as a teaching resource, there was an increase in students' curiosity regarding the concepts of quantum computing. This game allows you to increasingly bring a topic of extreme relevance from the scientific community closer to high school students. There is also, with the game, the possibility of working in other fields of knowledge (in addition to the exact sciences of knowledge).

Keywords: Game. Quantum Computing. High School. Meaningful Learning. Prior Organizer.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este trabalho é composto de sete capítulos. No primeiro capítulo, faremos uma introdução, com uma revisão de literatura sobre obras na comunidade científica acerca do ensino de Computação Quântica via Teoria da Aprendizagem Significativa (**TAS**). No segundo capítulo, abordamos a teoria epistemológica que subjaz o trabalho, dando enfoque para a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (**UEPS**). No capítulo três, tratamos aspectos da Computação Quântica, com um viés físico-matemático. No capítulo quatro, explicaremos a elaboração do Produto Educacional, um jogo de tabuleiro com conceitos de computação quântica. No capítulo cinco, apresentamos a Sequência Didática, com seus respectivos planos de aula. No capítulo seis, faz-se o relato da intervenção pedagógica organizada na Sequência Didática, contrastando o planejamento e a execução, buscando indícios de aprendizagem significativa e identificando ações e proposições que podem ser aprimoradas nas versões subsequentes nesse trabalho. Por fim, no capítulo sete, faz-se uma síntese da obra e se houve ou não o alcance dos objetivos introdutórios, com perspectivas para trabalhos futuros.

1 INTRODUÇÃO

1.1 REVISÃO DE LITERATURA:

Para começar o trabalho, é necessário fazer uma revisão de literatura sobre os assuntos mais importantes e que têm relação próxima com a nossa proposta. Assim, fizemos um levantamento dos temas: Computação Quântica, ensino de Computação Quântica e ensino de Computação Quântica via **TAS** na Revista Brasileira de Ensino de Física, Caderno Brasileiro de Ensino de Física, a Revista Física na Escola, o portal de periódicos da CAPES, a Biblioteca Digital Brasileira de Dissertações e Teses e o portal Scielo. Assim, encontramos os seguintes artigos que possuem proximidade com o nosso trabalho.

Em (FERNANDES, G. P. L. M.; RICARDO, A.C.; CARDOSO, F. R.; VILLAS-BOAS, C.J.;2023), no artigo "*Íons Aprisionados como Arquitetura para Computação Quântica*" o foco é como ocorre a construção de um Computador Quântico (num viés físico-químico) e não sobre o tema Computação Quântica. Muito menos, esse tema é voltado para o ensino de discentes em nível médio, como propomos.

No artigo *"Algoritmos Quânticos usando o Qiskit: Uma abordagem para o ensino de informação e computação quântica"* (ALVES, W. M. S; FELIPE, J.C.C.F.; 2022) há um enfoque no ensino de Computação Quântica através de um simulador; porém o público-alvo são foram estudantes de graduação. Não encontramos registro da utilização de um jogo como recurso didático.

Canabarro & colaboradores (2022), no artigo "*Quantum Finance: um tutorial de computação quântica aplicada ao mercado financeiro",* abordaram a computação quântica na otimização de problemas do mercado financeiro brasileiro (como na bolsa de valores). Nesse artigo, o tema de Computação Quântica não é voltado para o ensino médio e não há utilização de recurso didático.

Os artigos *"Algoritmos quânticos com IBMQ Experience: Algoritmo de Deutsch-Jozsa"* (OLIVEIRA, et all., 2021), *"Bosons vs. Férmions – A computational complexity perspective"* de Brod (2021)*,*"*Computação Quântica Adiabática: Do Teorema Adiabático ao Computador da D-Wave"*Souza & colaboradores (2021) há uma abordagem física de nível superior, contrariando a nossa proposta que é o ensino de conceitos em nível médio e não há a aplicação de um recurso didático para tal.

O artigo *"Computação quântica: uma abordagem para a graduação usando o Qiskit" Jesus* & colaboradores (2021), sinaliza para a utilização remota do Computador Quântico da IBM e concentra-se na lógica de programação do computador quântico (o Qiskit). Essa proposta está destinada ao ensino universitário, contrariamente à nossa, destinada ao ensino médio.

No trabalho de Sena & Pinto (2021) sobre "*O isomorfismo inesperado entre um sistema de bilhar e um algoritmo quântico"* vê-se as semelhanças entre um jogo de bilhar e o algoritmo de Grover, a partir de espaços de configuração. O artigo abordou a Computação Quântica num grau muito avançado para o ensino médio, e não há menção de aplicação de Sequência Didática.

Já o trabalho de Grosman, Braga & Huguenin (2019), "*Realização experimental da simulação do algoritmo de Deutsch com o interferômetro de Mach-Zehnder"* trata da correlação entre o experimento clássico da Mecânica Quântica (interferômetro de Mach-Zehnder) e o algoritmo pioneiro da Computação Quântica- o algoritmo de Deutsch. E não há desenvolvimento de um recurso didático para o ensino do tema.

Em Filho & Silva (2019), *"O experimento WS de 1950 e as suas implicações para a segunda revolução da mecânica quântica"* há foco no experimento que evidencia o entrelaçamento quântico que aponta para o desenvolvimento de tecnologias como: teleportação, Computação Quântica e criptografia. Mas, não há abordagem de ensino de conceitos de Computação Quântica e aplicação de recursos didáticos para esse fim.

No artigo de Caldeira (2018), *"Feynman, dissipação e computação quântica*" ressalta a importância de Richard P. Feynman para a Computação Quântica, como abordaremos ao longo desse trabalho, mas não há enfoque para o ensino médio, além de ter um formalismo coerente com o nível superior- o que diverge da nossa proposta.

Em Rabelo & Costa (2018) "*Uma abordagem pedagógica no ensino da computação quântica com um processador quântico de 5-qbits"* percebe-se grande aproximação com o nosso trabalho, uma vez que está voltado para o ensino de conceitos de Computação Quântica numa abordagem pedagógica, mas o recurso didático é uma simulação, utilizando o computador quântico da IBM; o que não é o nosso caso.

Nos trabalhos de Santos (2017) "*O Computador Quântico da IBM e o IBM Quantum Experience*" ocorre a abordagem de ensino de Computação Quântica com um recurso didático- que é o computador da IBM, mas não há menção a um jogo como esse recurso; diferente da nossa proposta.

Em Piqueira & Lopes (2013) *"Introdução à programação quântica."* há foco na programação quântica, sem definição de conceitos da Computação Quântica em nível médio, nem há utilização de recurso didático para esse fim.

Já em (FREIRE, R. T.; OSTERMANN, F.; PRADO, S. D.;2007) *"O tratamento clássico do interferômetro de Mach-Zehnder: uma releitura mais moderna do experimento da fenda dupla na introdução da física quântica"* há a elaboração de um método didático de entendimento do algoritmo de Deutsch a partir do experimento de Mach-Zehnder. Novamente, não há uma abordagem de ensino médio da Computação Quântica, nem a utilização de um recurso didático (com base na "gamificação") para o entendimento do algoritmo abordado.

Para o nosso trabalho, tratamos de conceitos da Computação Quântica, aplicando, como recurso didático, um jogo de tabuleiro. Assim, atestamos a originalidade do nosso trabalho na comunidade científica.

1.2 ASPECTOS GERAIS:

Há diferenças estatísticas nos percentuais de autistas entre o Brasil e os Estados Unidos.

Segundo Paiva (2023),

> "1 em cada 36 crianças de 8 anos são autistas nos Estados Unidos, o que significa 2,8% daquela população. O dado divulgado hoje (23.mar.2023) vem da principal referência mundial a respeito da prevalência de autismo, o CDC (Centro de Controle e Prevenção de Doenças), do governo dos EUA, que divulgou sua atualização bienal, com dados de 2020, um retrato daquele ano. O número desse estudo científico, com mais de 226 mil crianças, é 22% maior que o anterior, divulgado em dezembro de 2021 — que foi de 1 em 44 (com dados de 2018)."

No Brasil, especialmente, ainda existem muitos desafios a serem enfrentados, pois não existe infraestrutura suficiente para o Atendimento Educacional Especializado (**AEE**) nas Unidades Escolares, nem para a instalação das Salas de Recursos Multifuncionais (**SRM**), apesar da existência de legislação especifica que obriga a instalação de ambos (BRASIL,2011). E para a instalação das **SRM´s** (BRASIL,2007). Assim, a Educação Inclusiva, nos dias de hoje, é de fundamental importância.

1.3 PROBLEMÁTICA:

Além da questão da inclusão de discentes especiais, percebe-se que a Mecânica Quântica é uma área da física muito importante para a sociedade atual, como indica (LANDI,2019):

> "A Mecânica Quântica é, sem dúvida, a teoria mais peculiar de toda a física. Desenvolvida em meados da década de 1920, ela é capaz de explicar com enorme precisão o comportamento de sistemas microscópicos, como átomos e moléculas. Hoje, ela forma a base para o nosso entendimento de diversos ramos da ciência, como a física nuclear, a química e a ciência dos materiais. Tecnologias essenciais ao nosso dia a dia, como computadores, smartphones, lasers, telecomunicações etc., só existem graças ao desenvolvimento da Mecânica Quântica. Estima-se que pelo menos 30% do PIB mundial esteja diretamente relacionado a ela. Em qualquer campo de conhecimento.". (LANDI,2019)

Motivados por esses cenários (exclusão de estudantes especiais e proximidade da Mecânica Quântica no nosso cotidiano), foi elaborado um jogo de tabuleiro para o ensino de conceitos de Computação Quântica e, ao aplicá-lo numa turma com um discente autista, traremos uma tecnologia atual (uma vez que a computação quântica virou a verdadeira "corrida do ouro" da comunidade científica) para a sala de aula e favorecendo a inclusão de todos os estudantes.

1.4 OBJETIVOS

Esse trabalho pretendeu aplicar uma proposta de Sequência Didática com conceitos da Computação Quântica para alunos do ensino médio e aplicar um produto educativo através da "gamificação" e inclusão dos discentes autistas.

1.4.1 Objetivo geral

Foi aplicar uma proposta de sequência didática com conceitos da computação quântica como produto.

1.4.2 Objetivos específicos:

- Desenvolver uma Sequência Didática;
- Aplicar um jogo de tabuleiro como recurso didático;
- Promover a inclusão escolar;
- Verificar indícios de aprendizagem significativa;

1.5 BREVE DESCRIÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

O produto foi desenvolvido com o intuito de abordar conceitos de Computação Quântica, mas teve uma dinâmica que permite tratar outros assuntos ou áreas do conhecimento. Os assuntos de Computação Quântica tratados no Jogo foram: matrizes, bits clássicos, portas lógicas clássicas, bits quânticos, portas lógicas quânticas, superposição. O público-alvo deste jogo foram discentes do terceiro ano do ensino médio, envolvendo estudante com alto funcionamento do espectro autista. O jogo correspondeu ao produto de duas matrizes A e B, dando uma terceira matriz identidade I, fixa. Os elementos de cada matriz A 4x4 e cada matriz

B 4x4 estavam encobertos por fichas numeradas de 1 a 32, pois as matrizes A e B possuem 16 elementos cada. O estudante que respondesse corretamente cada pergunta descobrirá uma casa, alternando entre jogadores (com início a ser determinado por sorteio- valor maior de um dado não viciado lançado). O jogo terminou quando a trigésima segunda casa for descoberta (último elemento da matriz B) e ganhou o jogador que descobrisse o maior número de casas.

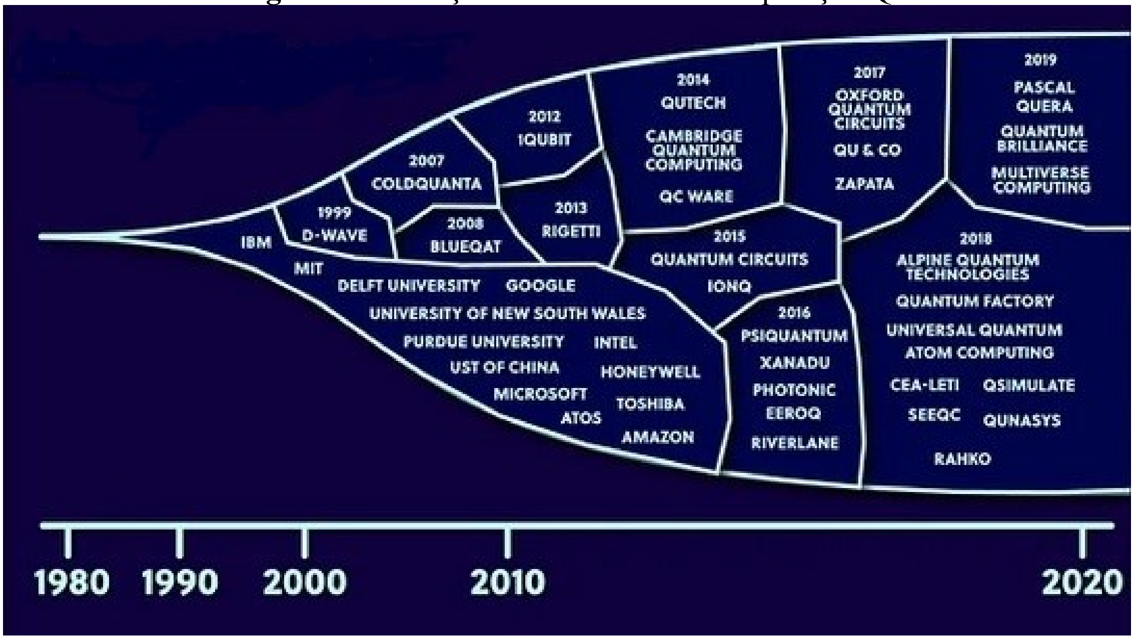
1.6 PROMESSAS DA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

A computação quântica está sendo muito explorada pelas empresas gigantes de tecnologia como está abordado na figura 1. Há também um elevado número de publicações de artigos científicos que tratam do tema de Computação Quântica, crescendo muito nos últimos anos, como indica o gráfico da figura 2.

Ainda, segundo (VERÍSSIMO,2020):

> “Áreas como finanças, logística, energia, empresas automobilísticas, materiais e química devem obter benefícios significativos dessa tecnologia nos próximos poucos anos. Isso é extremamente importante, pois os primeiros a adotar a computação quântica provavelmente colherão as maiores recompensas e as empresas rivais vão enfrentar barreiras de entrada mais elevadas para igualar a mesma qualidade de serviços e produtos.”

Figura 1: Evolução da Indústria da Computação Quântica.



Fonte:Bushra Haque/Medium (2023).

Figura 2:Número de publicações por ano com o termo "Quantum Computer"

Fonte: DIMENSIONS,2018.

2 ELEMENTOS DA TEORIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

O marco teórico adotado foi a Teoria de Aprendizagem Significativa, cujo criador foi David Paul Ausubel[1] e o seu maior divulgador, no Brasil, foi o Marco Antônio Moreira. Ausubel, ao se aposentar, voltou a se concentrar em seus escritos. Desde então, Joseph D. Novak, professor de educação da Universidade de Cornell, vem refinando e divulgando a **TAS** por meio da teoria dos mapas conceituais (DISTLER, 2015**;** MOREIRA, 2017)**.** Segundo o próprio Moreira, pode-se definir a aprendizagem significativa como:

> "... o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva (não-literal) à estrutura cognitiva do aprendiz. É no curso da aprendizagem significativa que o significado lógico do material de aprendizagem se transforma em significado psicológico para o sujeito. excelência, para adquirir e armazenar a vasta quantidade de ideias e informações representadas em qualquer campo de conhecimento." (MOREIRA, 1996, p1).

Ainda, de acordo com Moreira,

> "… a não arbitrariedade quer dizer que o material potencialmente significativo se relaciona de maneira não-arbitrária com o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aprendiz. Ou seja, o relacionamento não é com qualquer aspecto da estrutura cognitiva, mas sim com conhecimentos especificamente relevantes, os quais Ausubel chama subsunçores." (MOREIRA,1997, p1)

2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Para começar a entender a **TAS**, faz-se necessário o entendimento de algumas palavras-chave da sua teoria. Assim, temos os seguintes conceitos da **TAS**, como se seguem:

---

[1] David Ausubel nasceu em 1918, em Nova York. Estudou nas Universidades de Pensylvânia e Middlesex, graduando-se em Psicologia e Medicina. Fez três residências em distintos Centros de Psiquiatria. Seu doutorado foi em Psicologia do Desenvolvimento na Universidade de Columbia, onde depois foi professor durante muitos anos no Teachers College. Foi também professor nas Universidades de Illinois, Toronto, Berna, Munique e Salesiana de Roma. Nos últimos anos de vida dedicou-se a escrever uma nova versão de sua obra básica "Psicologia da Educação: uma visão cognitiva". Faleceu em 2008. (MOREIRA, 2013)

O **conhecimento prévio** serve de matriz ideacional e organizacional para a incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos quando estes “se ancoram” em conhecimentos especificamente relevantes (**subsunçores**) preexistentes na estrutura cognitiva, sendo materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si. “Novas ideias, conceitos, proposições, podem ser aprendidos significativamente (e retidos) na medida em que outras ideias, conceitos, proposições, especificamente relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do sujeito e funcionem como pontos de “ancoragem” aos primeiros”. (MOREIRA,1996).

Não-arbitrariedade quer dizer que o material potencialmente significativo se relaciona de maneira não-arbitrária com o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aprendiz. Pode-se entender como estrutura cognitiva como o conteúdo total e organizado de ideias de um indivíduo. Daí, surge a noção intuitiva de “ancoragem” de novas ideias ao que já está consolidado para o sujeito que aprende.

Já a **substantividade,** significa que o que é incorporado à estrutura cognitiva é a substância do novo conhecimento, das novas ideias, não as palavras precisas usadas para expressá-las. O mesmo conceito ou a mesma proposição podem ser expressos de diferentes maneiras, através de distintos signos (ideias) ou grupos de signos, equivalentes em termos de significados. Assim, uma aprendizagem significativa não pode depender do uso exclusivo de determinados signos em particular (op. cit. p. 41).

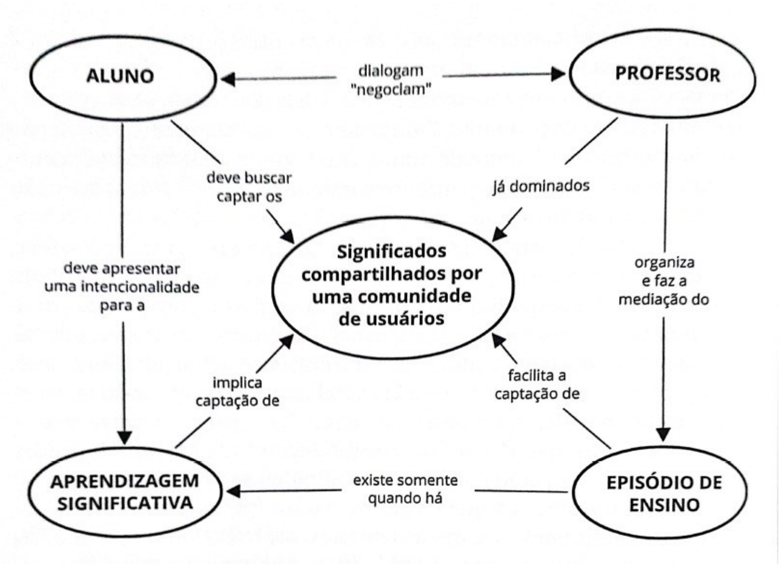
A forma de aprendizagem significativa, na qual uma nova ideia, um novo conceito, uma nova proposição, mais abrangente, passa a subordinar conhecimentos prévios é chamada de **aprendizagem significativa superordenada.**

2.2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA TEORIA DE ENSINO OU APRENDIZAGEM ADOTADA

A educação tem mudado muito nos últimos anos, até início da década de sessenta do século XX. Até a década de 1960, o behaviorismo dominou o cenário das teorias de aprendizagem. Especificamente, em 1963, de acordo com Moreira (2017), praticamente no auge da tecnologia de ensino de Skinner, a **TAS** de David Ausubel, uma visão cognitivista, não behaviorista, à aprendizagem e ao ensino. Sua inquietação era entender o processo de assimilação da aprendizagem com significado num corpo organizado de conhecimentos.

Seguindo na linha da **TAS**, Moreira (2011) sugere um modelo que pode ser esquematizado no seguinte quadro:

Figura 3: Um esquema para a captação de significados em um episódio de ensino.



Fonte: Extraído de Moreira (2011).

De acordo com Moreira (2017), neste modelo, o professor, que já domina os significados aceitos no contexto da matéria de ensino, apresenta esses significados ao aluno, usando materiais educativos do currículo.

Na busca de um referencial teórico para suas pesquisas nessa área, chegou à **TAS** de Ausubel e logo passou a ser também um grande divulgador dessa teoria, inclusive desde uma visão humanista (MOREIRA, 2017).

Segundo (NOVAK, 1984), a aprendizagem significativa é subjacente à integração construtiva, positiva, de pensamentos, sentimentos e ações, conduzindo ao engrandecimento humano.

2.3 CONCEITOS E DEFINIÇÕES DA TEORIA ADOTADA

Primeiramente, fez-se necessária a definição e caracterização da **TAS** clássica de Ausubel. Essa teoria parte do pressuposto de que o discente precisa demonstrar

intencionalidade em aprender. Os conhecimentos prévios do estudante podem viabilizar a aprendizagem significativa ou servir de obstáculo epistemológico.

A interação cognitiva entre novos conhecimentos e conhecimentos prévios especificamente relevantes é a característica-chave da aprendizagem significativa. Nessa interação, o novo conhecimento deve relacionar-se de maneira não-arbitrária e substantiva (não-literal) com o que o aprendiz já sabe. A aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica estão situadas num contínuo.

As condições para a ocorrência de aprendizagem significativa são os materiais potencialmente significativos (devem ter significado lógico e conceitos e proposições pertinentes devem estar na estrutura cognitiva do aprendiz). O discente deve ter predisposição para aprender - o aprendiz deve apresentar uma intencionalidade para relacionar de maneira substantiva e não-arbitrária o novo material potencialmente significativo. (MOREIRA, 2017).

Segundo (MOREIRA, 2017), o Organizador Prévio, como recurso didático, é servir de ligação entre o que o aluno já sabe e o que deveria saber para que pudesse adquirir de maneira significativa determinado conhecimento. Um Organizador Prévio serve de "âncora" entre o conhecimento prévio (subsunções) e o novo conhecimento.

A **TAS** pode ser representacional, conceitual ou proposicional. A aprendizagem significativa representacional ocorre com a atribuição de significados a determinados símbolos, notadamente palavras, identificando símbolos como objetos ou eventos representados; há uma relação biunívoca entre o símbolo e o que ele significa. (MOREIRA, 2017).

Segundo (MOREIRA,1997):

> "O tipo mais básico de aprendizagem significativa é a aprendizagem do significado de símbolos individuais (tipicamente palavras) ou aprendizagem do que eles representam. Ausubel denomina de **aprendizagem representacional** este tipo de aprendizagem significativa (op. cit. p. 42). A aprendizagem de conceitos, ou **aprendizagem conceitual**, é um caso especial, e muito importante, de aprendizagem representacional, pois conceitos também são representados por símbolos individuais. Porém, neste caso são representações genéricas ou categoriais. É preciso distinguir entre aprender o que significa a palavra-conceito, ou seja, aprender qual conceito está representado por uma dada palavra e aprender o significado do conceito (op. cit. p. 44). A **aprendizagem proposicional**, por sua vez, se refere aos significados de ideias

> expressas por grupos de palavras (geralmente representando conceitos) combinadas em proposições ou sentenças.”

2.4 A APRENDIZAGEM SUBORDINADA, SUPERORDENADA E COMBINATÓRIA.

Segundo (MOREIRA, 2017), a **TAS subordinada** refere-se ao conhecimento prévio, funcionando como “ancoradouro” para um novo conhecimento em um processo interativo, ou seja, o novo conhecimento ganha novos significados nessa integração e, ao mesmo passo, o conhecimento prévio ganha novos significados ou fica mais rico, mais estável, mais diferenciado; o conhecimento prévio que serve de ponto de ancoragem ao novo conhecimento é chamado de subsunçor e o processo Ausubel chama de assimilação.

Superordenada indica que conhecimentos prévios são casos particulares de um novo conhecimento que passa a subordiná-los, subsumi-los; implica uma reorganização na estrutura cognitiva; não ocorre com frequência (MOREIRA,2013)

Combinatória pressupõe a aprendizagem de novos conhecimentos que não guardam relação de subordinação nem de superordenação com conhecimentos específicos já existentes na estrutura cognitiva; a interação cognitiva do novo conhecimento é com um conjunto amplo, com um *background*, de conhecimentos prévios (MOREIRA,2013).

A **diferenciação progressiva** é o processo de atribuição de novos significados a um dado subsunçor (um conceito ou uma proposição, por exemplo) resultante da sucessiva utilização desse subsunçor para dar significado a novos conhecimentos (MOREIRA,2013).

Outros conceitos de suma importância são: reconciliação integradora e a diferenciação integrativa.

A **reconciliação integradora, ou integrativa**, é um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, simultâneo ao da diferenciação progressiva, que consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações (MOREIRA,2012).

2.5 COMPARTILHANDO COM AUTISTAS

Segundo (SILVA, J. B.; SALES, G.L.; CASTRO, S.B.;2019):

> "Por definição, a gamificação contempla o uso de elementos de *design* de *games* em contextos fora dos *games* para motivar, aumentar a atividade e reter a atenção do usuário. Os elementos de *games* são objetivos, regras claras, *feedback* imediato, recompensas, motivação intrínseca, inclusão do erro no processo, diversão, narrativa, níveis, abstração da realidade, competição, conflito, cooperação, voluntariedade, entre outros.
> Aplicar a gamificação é como utilizar várias ferramentas (elementos de games) que estão dentro de uma caixa, e que podem ser combinadas de diferentes maneiras. Todavia, para sua utilização correta, deve-se conhecer quais são as funções de cada uma e como elas irão interagir dentro do sistema proposto [24]. Contudo, é importante destacar que, para "gamificar" uma atividade, não é necessário utilizar todos os elementos de games, mas apenas alguns. Ou seja, pode-se utilizar desde um número reduzido, até uma quantia maior dos elementos [24]. Não obstante, destacam-se quatro elementos fundamentais em qualquer jogo: voluntariedade, regras, objetivos e *feedbacks*."

Já é de conhecimento da comunidade científica, as dificuldades que os autistas têm na socialização, no desenvolvimento cognitivo, na memorização e na capacidade em estabelecerem relações sociais. Porém, segundo CAMARGO (2019), o público-alvo autista apresentou um melhor desempenho no processo de aprendizagem com a gamificação. Segundo os autores, a combinação de métodos e estratégias para o desenvolvimento de aplicativos de jogos educacionais resulta em melhores níveis de usabilidade e aceitação. Após a análise, e, mediante o contexto apresentado com a pesquisa, foi possível constatar que a utilização da gamificação favoreceu positivamente a aprendizagem dos autistas nos seguintes aspectos: concentração, atenção, aprendizagem coletiva, engajamento e melhor percepção das rotinas diárias.

Segundo Portilho (2011), a desmotivação de um estudante em relação a determinado componente curricular pode ser combatida por meio de materiais com informações relevantes apresentadas com forma e conteúdo atrativos. Indo ao encontro de ações lúdicas atrativas, a **TAS** sugere algumas diretrizes básicas para se pensar o aprendizado em termos da gamificação.

Esse termo se remete, dentro do contexto educacional, à utilização dos elementos dos jogos para suscitar a mesma motivação e envolvimento dispendido por jogadores (FARDO, 2011).

Dessa maneira, "gamificar" um material didático seria aplicar características e métodos usados na confecção dos jogos, desde a mecânica e estética aos pensamentos e estratégias, para orientar a análise e resolução de problemas (KOSTER, 2005, FARDO, 2011; LEE e HAMMER, 2011).

2.6 LEGISLAÇÃO QUE AMPARA OS DISCENTES DO ESPECTRO AUTISTA

Além do conhecimento da comunidade científica sobre a inclusão dos discentes autistas, existe a "*Lei Berenice Piana"*, nº 12.764, sancionada pela presidente Dilma Rousseff, em 27 de dezembro de 2012, que garante a proteção dos direitos da pessoa com Transtorno do Espectro Autista **(TEA).** Essa legislação assegura a matrícula desses discentes atípicos na rede regular de ensino, atendimento multiprofissional, identificação deles para a sua segurança em ambientes públicos, garantia de educação básica e em ensino profissionalizante e, em caso de necessidade de acompanhante especializado no ensino regular, deve haver sem restrição alguma. Como seguem os trechos mais pertinentes ao nosso estudo de caso:

> *"(...)§ 3º Os estabelecimentos públicos e privados referidos na Lei nº 10.048, de 8 de novembro de 2000, poderão valer-se da fita quebra-cabeça, símbolo mundial da conscientização do transtorno do espectro autista, para identificar a prioridade devida às pessoas com transtorno do espectro autista. (Incluído pela Lei nº 13.977, de 2020)*
>
> *Art. 2º São diretrizes da Política Nacional de Proteção dos Direitos da Pessoa com Transtorno do Espectro Autista:*
>
> *I - a intersetorialidade no desenvolvimento das ações e das políticas e no atendimento à pessoa com transtorno do espectro autista;*

II - a participação da comunidade na formulação de políticas públicas voltadas para as pessoas com transtorno do espectro autista e o controle social da sua implantação, acompanhamento e avaliação;

III - a atenção integral às necessidades de saúde da pessoa com transtorno do espectro autista, objetivando o diagnóstico precoce, o atendimento multiprofissional e o acesso a medicamentos e nutrientes;

(...)

VII - o incentivo à formação e à capacitação de profissionais especializados no atendimento à pessoa com transtorno do espectro autista, bem como a pais e responsáveis;

Art. 3º São direitos da pessoa com transtorno do espectro autista:

I - a vida digna, a integridade física e moral, o livre desenvolvimento da personalidade, a segurança e o lazer;

II - a proteção contra qualquer forma de abuso e exploração;

III - o acesso a ações e serviços de saúde, com vistas à atenção integral às suas necessidades de saúde, incluindo:

a) o diagnóstico precoce, ainda que não definitivo;

b) o atendimento multiprofissional;

c) a nutrição adequada e a terapia nutricional;

d) os medicamentos;

e) informações que auxiliem no diagnóstico e no tratamento;

IV - o acesso:

> *a) à educação e ao ensino profissionalizante;*
> *b) à moradia, inclusive à residência protegida;*
> *c) ao mercado de trabalho;*
> *d) à previdência social e à assistência social.*
> *Parágrafo único. Em casos de comprovada necessidade, a pessoa com transtorno do espectro autista incluída nas classes comuns de ensino regular, nos termos do inciso IV do art. 2º, terá direito a acompanhante especializado."*
>
> ***Comissão de Direitos Humanos e Legislação Participativa (CDH)***

O jogo, de certo modo, favorece a inclusão dos estudantes autistas, permitindo sua socialização com seus pares -o que coaduna, especialmente, o inciso IV do artigo 2° da "*Lei Berenice Piana*".

2.7 VANTAGENS E DESVANTAGENS DA ADOÇÃO DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Dentre as possíveis vantagens da adoção da **TAS** como lastro do trabalho, têm-se o fato de ser uma teoria epistemológica que tem grande aceitação na atualidade, além da sua robustez conceitual.

3 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA:

3.1-BITS QUÂNTICOS

O bit é o conceito fundamental da computação clássica e da informação clássica. Nós podemos avaliar um “bit” para determinar onde ele encontra-se: se no estado “0” ou no estado “1”.

O físico Richard Phillips Feynman já apontava para o caminho promissor que a Computação Quântica teria:

> “... seriam os fenômenos da mecânica quântica eficientemente simuláveis numa máquina de Turing clássica? Feynman apresentou boas razões para acreditar que a resposta fosse negativa, argumentando que tal simulação parece impossível sem incorrer num retardo exponencial. Além disso, sugeriu que para poder simular eficientemente a evolução dos sistemas quânticos seriam necessários computadores que funcionassem de acordo com as leis da mecânica quântica; não definiu, porém, um modelo apropriado para tal objetivo.” Feynman (1982) apud Agudelo (2009, p.85)

Os estados possíveis de um q-bit são o $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e o $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, na forma matricial. A diferença entre o bit quântico e o bit clássico é que o bit quântico pode obedecer ao princípio de superposição, que é uma combinação linear dos estados. Como segue:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}. \quad (1)$$

Aqui, α e β são números complexos. O estado de um q-bit é um vetor no espaço de Hilbert, que neste caso é um espaço bidimensional complexo. Os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são chamados como “estados de bases computacionais”, formando uma base ortonormal (com norma unitária e ortogonal) para este espaço vetorial.

Na Mecânica Quântica pode-se determinar a probabilidade de um estado quântico. Quando se mede um q-bit, encontra-se o estado $|0\rangle$ com a probabilidade do $|\alpha|^2$,ou o resultado 1, com a probabilidade $|\beta|^2$.Evidentemente, a soma das probabilidades deve ser 1.

Geometricamente, podemos interpretar essa condição para que o estado a ser normalizado deverá ter comprimento 1.

Essa representação geométrica é dada na figura 4 (NIELSEN; CHUANG, 2000, p. 15). E a equação da esfera de *Bloch* representa é:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}(cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}sen\frac{\theta}{2}|1\rangle) \tag{2}$$

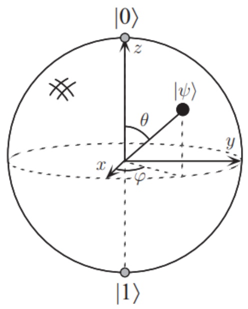
Em que, $|\psi\rangle$ é um estado puro.

Ignora-se a fase global $e^{i\gamma}$,pois ele não altera o resultado por não interferir em efeitos observáveis. Assim, (2) pode ser expressa como:

$$|\psi\rangle = (cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}sen\frac{\theta}{2}|1\rangle) \tag{3}$$

onde, θ e φ estão representados numa esfera. Essa esfera nos auxiliará a compreender os estados intermediários (grande diferença da computação clássica para a Computação Quântica). As amplitudes de probabilidade levam em conta os valores de θ e φ e, com isso, é possível percorrer todos os pontos da superfície da esfera, denominada *esfera de Bloch,* que é representada na figura 4.

Figura 4: *Q-bit* representado na esfera de *Bloch.*



Fonte: Extraída de Nielsen e Chuang (2000).

Os comportamentos dos vetores de estado na esfera de Bloch podem ser sumarizados de acordo com o **Quadro 1**. Por exemplo, no caso de θ = 0 e φ = 0, temos o estado $|0\rangle$, representado no polo norte da esfera de Bloch.

Quadro 1: Direção e sentido do vetor representativo do q-bit para alguns estados na esfera de Bloch.

θ	φ	ψ	Observação
0	0	$\vert 0\rangle$	Polo Norte
Π	0	$\vert 1\rangle$	Polo Sul
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\vert 0\rangle+\vert 1\rangle}{\sqrt{2}}$	Equador - sobre eixo x
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\vert 0\rangle+i\vert 1\rangle}{\sqrt{2}}$	Equador - sobre eixo y

Fonte: Extraída de Jorcuvich (2018).

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} cos\varphi sen\theta \\ sen\varphi sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}, \varphi\epsilon[0,2\pi), \theta\epsilon[0,\pi). \quad (4)$$

3.2- PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS

As alterações que ocorrem num estado quântico podem ser expressas utilizando linguagem quântica. De forma parecida como um computador clássico é estruturado, com circuito elétrico, contendo fios e portas lógicas clássicas, um computador quântico é construído, contendo fios e portas quânticas básicas para conduzir informação quântica.

Nesta subseção, descrevemos algumas portas quânticas simples e apresentamos vários exemplos de circuitos que ilustram sua aplicação.

3.2.1-Portas de um único q-bit

Os circuitos de computadores clássicos consistem em fios e portas lógicas. Os fios são usados para transportar informações ao longo do circuito, enquanto as portas lógicas realizam, convertendo-o de uma forma para outra. O único membro não trivial desta classe é a porta, cuja operação é definida por sua tabela verdade, na qual $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 0$, ou seja, os estados clássicos 0 e 1 são trocados. Pode ser definida uma porta quântica NOT análoga para q-bits?

Imagine que tivemos algum processo que levou o estado $|0\rangle$ ao estado $|1\rangle$ e vice-versa. Tal processo obviamente seria um bom candidato a um análogo quântico para a porta NOT.

No entanto, especificar a ação da porta nos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ não nos diz o que acontece com superposições dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, sem maiores conhecimentos sobre as propriedades de portas quânticas. Na verdade, segundo Nielsen e Chuang (2000, p.18), a porta quântica NOT age linearmente, isto é, leva o estado

$$\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$$

para o estado correspondente em que o papel de $|0\rangle$ e $1\rangle$ foram trocados, de modo que portas quânticas são operadores que atuam nos estados.

$$\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$$

Existe uma maneira conveniente de representar a porta quântica NOT em forma de matriz e que segue diretamente da linearidade das portas quânticas. Suponha que definimos uma matriz X para representar a porta quântica NOT da seguinte forma:

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

(A notação X para a porta lógica quântica NOT é utilizada por motivos históricos.).Se o estado quântico $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ é expresso numa notação matricial como

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

com a entrada superior correspondente à amplitude de $|0\rangle$ e a entrada inferior com a amplitude de $|1\rangle$, então a saída correspondente da porta quântica NOT é:

$$X\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Observe que a ação da porta é pegar o estado $|0\rangle$ e substituí-lo pelo estado correspondente à primeira coluna da matriz X. Da mesma forma, o estado $|1\rangle$ é substituído por o estado correspondente à segunda coluna da matriz X.
Existe alguma restrição sobre quais matrizes podem ser usadas como portas quânticas? Lembre-se de que a condição de normalização requer

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{7}$$

para um estado quântico $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Isso também deve ser verdade para o estado quântico $|\psi'\rangle = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$ depois da ação da porta. Isto torna inapropriada a condição na representação matricial, que é a matriz *U*, descrevendo o q-bit unitário (NIELSEN; CHUANG, 2000, p. 18):

$$U^{\dagger}.U = I \tag{8}$$

$U^{\dagger}$ é a matriz adjunta e I é a matriz identidade (ver ANEXO A).

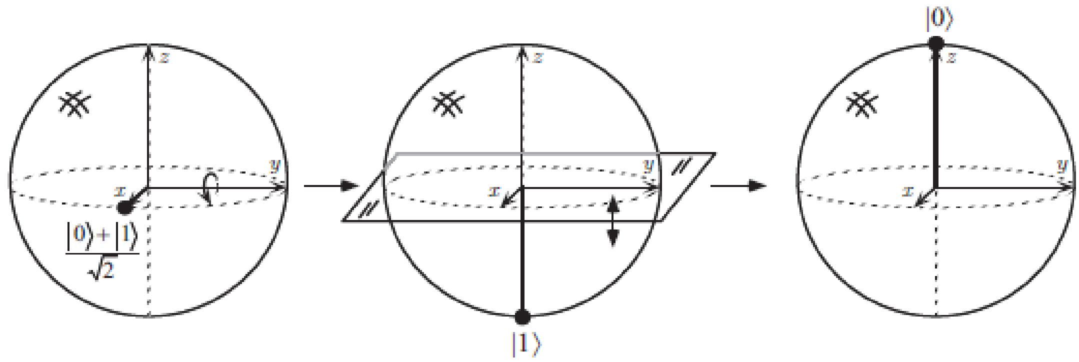
Surpreendentemente, esta restrição de unitariedade é a única restrição nas portas quânticas. Qualquer matriz unitária especifica uma porta quântica válida.
Uma outra porta quântica bastante utilizada é a porta *Hadamard*,

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Esta porta é por vezes descrita como sendo uma porta de "raiz quadrada NOT", na medida em que gira $|0\rangle$ em $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$, 'a meio caminho' entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$, e vira $|1\rangle$ em $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$, que também está ‘no meio do caminho’ entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Observe, entretanto, que H^2 não é uma porta NOT, pois a álgebra mostra que H^2 = I, e, portanto, aplicar *H* duas vezes a um estado não faz nada com ele.

A porta *Hadamard* é uma das portas quânticas mais úteis, e vale a pena tentar visualize seu funcionamento considerando a imagem da esfera de Bloch. A operação de Hadamard é uma rotação da esfera em torno do eixo y de 90º, seguida por uma rotação em torno do eixo x em 180°, conforme ilustrado na **Figura 5**.

Figura 5 - Porta *Hadamard* na esfera de Bloch



Fonte: Extraída de Nielsen e Chuang (2000).

3.2.2-Portas de múltiplos q-bits

Uma porta lógica de muitos q-bits simples e muito importante é a porta NOT-controlado ou C-NOT.A porta recebe dois q-bits de entrada, um é o q-bit controle e outro é o q-bit alvo. A matriz dessa transformação é (GALVÃO, K.K.; RODRIGUES I.I, [s.d.]):

$$U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Se o q-bit controle é $|0\rangle$, então o estado do q-bit alvo é mantido. Se o q-bit controle é $|1\rangle$, então o q-bit alvo é trocado. Ou seja:

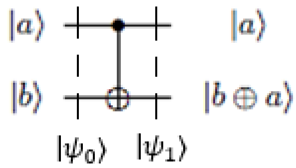
$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle$$
$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle$$
$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle$$
$$|11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

A operação do CNOT também pode ser descrita como o XOR clássico. A transformação pode ser resumida como:

$$|a, b\rangle \rightarrow |a, b \oplus a\rangle$$

Na **Figura 5**, temos a representação gráfica de um circuito da porta CNOT. Já no **Quadro 2**, temos o resumo das portas lógicas quânticas: NOT, *Hadamard* e CNOT.

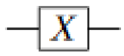
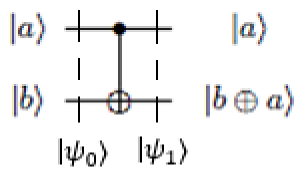
Figura 6-A representação gráfica de circuito da porta CNOT.



Fonte:Extraída de Galvão e Rodrigues (adaptada) [s.d.]

Existem outras portas lógicas quânticas,mas não serão exploradas no texto, uma vez que elas são suficientes para dar base e compreensão aos capítulos subsequentes.

Quadro 2-Resumo das portas lógicas quânticas nesse trabalho.

Nome da Porta:	Matriz:	Símbolo:
NOT	$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
Hadamard	$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	
CNOT	$U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	

Fonte:Próprio autor.

3.3 PRODUTOS TENSORIAIS NA QUÂNTICA ENVOLVENDO NOTAÇÃO DE DIRAC

Há diversos graus de generalidade de produtos tensoriais. Introduz-se a definição mais simples.

Sejam dois estados:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix} \; e \; |\varphi\rangle = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix} \tag{11}$$

denotado por $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ tem como resultado o estado $|\chi\rangle$ com mp-linhas, dado por:

$$|\chi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1\varphi_1 \\ \psi_1\varphi_2 \\ \vdots \\ \psi_1\varphi_p \\ \psi_2\varphi_1 \\ \psi_2\varphi_2 \\ \vdots \\ \psi_2\varphi_p \\ \vdots \\ \psi_m\varphi_1 \\ \psi_m\varphi_2 \\ \vdots \\ \psi_m\varphi_p \end{bmatrix} \tag{12}$$

em que, $\psi_i\varphi_j$ é o produto usual dos complexos.

Usaremos, também, outras notações mais simplificadas para o produto tensorial $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$.

São elas: $|\psi\rangle|\varphi\rangle, |\psi,\varphi\rangle, |\psi\varphi\rangle$. Por exemplo:

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

e

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Notemos que o produto tensorial não é comutativo. O produto tensorial pode ser aplicado para matrizes quaisquer.

Dadas as matrizes A $\in \mathbb{C}^{m\,x\,n}$ e B $\in \mathbb{C}^{p\,x\,q}$, a matriz A $\otimes$ B $\in$ $\mathbb{C}^{mp\,x\,nq}$, C é definida por:

$$\text{A} \otimes \text{B} = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & & A_{2n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{bmatrix} \tag{15}$$

Em que A_{ij} é o elemento da linha i e da coluna j de A. De forma mais precisa, porém, mais criptográfica, cada elemento da matriz A ⊗ B é definido por

$$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})_{rs} = A_{ij}B_{kl}, \tag{16}$$

onde r = (i – 1) p + k e s = (j – 1) q + l, com os índices variando da seguinte forma: 1 ≤ i ≤ m, 1 ≤ j ≤ n, 1 ≤ k ≤ p, 1 ≤ l ≤ q (PORTUGAL, 2012).

Por exemplo, se

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

então,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

e

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Logo, $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Em seguida, damos algumas propriedades do produto tensorial que serão utilizadas, considerando z ∈ ℂ, v,$v_1, v_2 \epsilon$ $\mathbb{C}^n$ $e\ w, w_1\ w_2 \epsilon$ $\mathbb{C}^m$, temos (PORTUGAL,2012):

1. z ($|v\rangle$ ⊗$|w\rangle$) = (z$|v\rangle$ ⊗$|w\rangle$) =($|v\rangle$ ⊗(z$|w\rangle$)) (20)

2. $(|v_1\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle) = (|v_1\rangle \otimes |w\rangle) + (|v_2\rangle \otimes (|w\rangle)$ (21)

3. $(|v\rangle \otimes (|w_1\rangle + |w_2\rangle) = (|v\rangle \otimes |w_1\rangle) + (|v\rangle \otimes |w_2\rangle)$ (22)

Dadas duas transformações lineares A e B, podemos definir um novo operador linear, A ⊗ B, por (PORTUGAL, 2012):

$$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}).(|u\rangle \otimes (|w\rangle) = (A|u\rangle \otimes \mathrm{B}|w\rangle) \quad (23)$$

O produto tensorial de alguma forma aumenta a dimensão do sistema.

3.4 PRODUTO TENSORIAL E EMARANHAMENTO QUÂNTICO

Desde que garantidas as dimensões corretas para possibilitar as multiplicações das matrizes pelos vetores. Ainda, introduzindo mais algumas notações, diremos que $|\psi\rangle^{\otimes n}$ e $A^{\otimes n}$ são os produtos tensoriais de $|\psi\rangle$, por ele próprio n vezes, e de A, por ela própria n vezes, respectivamente (PORTUGAL, 2012). Vejamos, agora, a descrição de um estado genérico de $|\psi\rangle$ com 2 q-bits. Esse será uma superposição dos estados $|00\rangle$, $|01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ (estamos usando a notação simplificada para o produto tensorial entre dois estados de 1 q-bit), ou seja, um estado genérico com 2 q-bits, temos:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \delta|10\rangle + \gamma|11\rangle \quad (24)$$

Em que:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \quad (25)$$

Visando a reduzir a notação, podemos considerar os zeros e uns que aparecem na equação (24) como números binários, e assim, $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e$|11\rangle$ podem ser abreviados por:

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle,$$

O $|0\rangle$ acima não é o mesmo que aparece na definição de um q-bit, pois têm dimensões diferentes. Em cada caso, o contexto esclarecerá a que situação estamos nos referindo. Em geral, um estado $|\psi\rangle$ de n q-bits é uma superposição de 2^n estados da base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots |2^n - 1\rangle\}$, dada por:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \, |i\rangle \tag{26}$$

em que:

$$\textstyle\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1. \tag{27}$$

A medição do estado genérico $|\psi\rangle$ produz um resultado $|i_0\rangle$ com probabilidade$|\alpha_{i0}|^2$, com 0 ≤ i_0≤ $2^n - 1$. Usualmente, a medida é realizada q-bit a q-bit, produzindo zeros e uns que são lidos em conjunto, gerando a saída $|i_0\rangle\cdot$.

Repetiremos, aqui, uma propriedade central do processo de medida. O estado $|\psi\rangle$, antes da medição, é inacessível, a não ser que ele pertença à base computacional. O procedimento de medida altera inevitavelmente $|\psi\rangle$, forçando-o a um colapso para algum dos vetores da base computacional. Este colapso, como vimos, é não-determinístico, com probabilidades dadas pelos quadrados dos módulos das amplitudes de $|\psi\rangle$.

Consideremos, agora, outro conceito fundamental em computação quântica: o emaranhamento. Um estado de 2 q-bits pode ou não ser o resultado do produto tensorial de estados de 1 q-bit. Vejamos. Considere os estados de 1 q-bit:

$$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \tag{28}$$

e

$$|\psi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle, \tag{29}$$

em que a, b, c, d ∈ ℂ. O estado definido pelo produto tensorial de $|\varphi\rangle \; e \; |\psi\rangle$ é:

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \quad (30)$$
$$= ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

Observamos que a equação (24) é da forma da equação (30) se, e somente se:

$$\begin{cases} \alpha = ac \\ \beta = ad \\ \delta = bc \\ \gamma = bd \end{cases} \quad (31)$$

Assim, conclui-se que:

$$\alpha.\delta = \beta.\gamma \quad (32)$$

Logo, um estado de 2 q-bits, em geral, não é o produto tensorial de estados de 1 q-bit. Quando isso acontece, dizemos que o estado está emaranhado. Por exemplo, o estado $|01\rangle$ pode, obviamente, ser descrito como produto tensorial dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, isto é:

$$|01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Do mesmo modo,

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} \quad (34)$$

Então, o estado $|\psi\rangle$ também é fatorável.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)] \quad (35)$$

Considere agora o estado:

$$|\varphi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \tag{36}$$

Vamos supor que esse estado seja fatorável. Assim:

$$|\varphi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \tag{37}$$

$$= ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

Comparando a equação (37) com a igualdade (36), temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ac = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ ad = 0 \rightarrow a = 0 \; ou \; d = 0 \\ bc = 0 \rightarrow b = 0 \; ou \; c = 0 \\ bd = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{38}$$

Logo, não há solução para o sistema acima, de modo que o estado dado pela eq. (37) é emaranhado. Vale ressaltar que os estados emaranhados desempenham um papel crucial na computação quântica e estão presentes em diversos algoritmos quânticos.

3.5 POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

O primeiro postulado da mecânica quântica estabelece o local no qual a Mecânica Quântica acontece. A área é nosso amigo familiar da álgebra linear, o espaço de Hilbert.

Postulado 1: Associado a qualquer sistema físico isolado está um espaço vetorial complexo com produto interno (isto é, um espaço de Hilbert) conhecido como o espaço de estados do sistema. O sistema é completamente descrito pelo seu vetor de estado, que é uma unidade vetorial no espaço de estados do sistema (NIELSEN; CHUANG, 2000, p. 80).

Como o estado $|\psi\rangle$ de um sistema de Mecânica Quântica muda com o tempo? O postulado a seguir fornece uma prescrição para a descrição de tais mudanças de estado.

Postulado 2: A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por um sistema de transformação unitária. Ou seja, o estado $|\psi\rangle$ do sistema no instante t_1 está relacionado com o estado $|\psi'\rangle$ do sistema no tempo t_2 por um operador unitário U que depende apenas de t_1 e t_2 (NIELSEN; CHUANG, 2000, p. 81)

Postulado 2 ´: A evolução temporal de um estado de um sistema quântico fechado é descrita pela equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \widehat{\mathcal{H}}|\psi\rangle \tag{39}$$

Nesta equação, há uma constante física $\hbar$ conhecida como constante de Planck dividida por 2π, cujo valor foi determinado experimentalmente. O valor exato não é importante para nós. Na prática, é comum absorver o fator $\hbar$ em $\widehat{\mathcal{H}}$, definindo efetivamente $\hbar = 1$. $\widehat{\mathcal{H}}$ é um operador hermitiano fixo conhecido como Hamiltoniano do sistema fechado (NIELSEN; CHUANG, 2000, p. 82).

Postulado 3: As medições quânticas são descritas por uma coleção $\{M_m\}$ de operadores de medição. Estes são operadores que atuam no espaço de estados do sistema que está sendo medido. O índice "m" refere-se aos resultados de medição que podem ocorrer no experimento. Se o estado do sistema quântico for $|\psi\rangle$ imediatamente antes da medição, então a probabilidade de que o resultado m ocorra é dada por (NIELSEN; CHUANG, 2000, p. 84):

$$p(m) = \langle\psi|{M_m}^{\dagger} M_m|\psi\rangle \tag{40}$$

Especificamente, para:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \tag{41}$$

Temos:

$$\begin{cases} M_0 = |0\rangle\langle 0| \\ M_1 = |1\rangle\langle 1| \end{cases}; \tag{42}$$

donde

$$p(0) = (a^*\langle 0| + b^*\langle 1|)\,|0\rangle\langle 0|\,(a|0\rangle + b|1\rangle) = a^*.a = |a|^2. \tag{43}$$

Em que, $p(0)$ é a probabilidade de se obter o estado zero. E, analogamente, para $p(1)$, temos: $p(1) = (a^*\langle 0| + b^*\langle 1|)\ |1\rangle\langle 1|\ (a|0\rangle + b|1\rangle) = b^*.b = |b|^2$, tendo em vista que ${M_0}^{\dagger}M_0 = |0\rangle\langle 0|$ e ${M_1}^{\dagger}M_1 = |1\rangle\langle 1|$.

Postulado 4: O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados dos sistemas físicos componentes. Além disso, se tivermos sistemas numerados de 1 a n, e o sistema número i é preparado no estado $|\psi_i\rangle$ então o conjunto de estados do sistema total é $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes ... \otimes |\psi_n\rangle$ (NIELSEN; CHUANG, 2000, p. 94)

3.6-ALGORITMOS QUÂNTICOS

3.6.1-Introdução

Os algoritmos quânticos são uma subárea da Computação Quântica em rápida evolução, não apenas em termos de novos algoritmos, mas também em aplicações e implementações. A construção começou com uma mudança nas regras do jogo. Em vez de armazenar informações em bits, que aceitam zero ou um, podemos armazenar informações em q-bits, cujo estado é uma superposição de zeros e uns. As regras baseadas na Mecânica Clássica foram substituídas por regras baseadas na Mecânica Quântica. (PORTUGAL, 2023, p.1)

O primeiro avanço veio com a proposta de Deutsch (1985), para avaliar uma função booleana de um bit em dois pontos, simultaneamente, usando paralelismo quântico, que explora a superposição de zeros e uns. Na época, faltava uma estrutura para a criação de novos algoritmos, que Deutsch estabeleceu em 1989 com a introdução de portas e circuitos quânticos, tomando o lugar de portas clássicas conhecidas como AND, OR e NOT. (PORTUGAL, 2023, p.1)

Em 1992, Deutsch e Jozsa desenvolveram um algoritmo para determinar se uma função booleana é equilibrada ou constante, dando impulso ao campo dos algoritmos quânticos e inspirando o desenvolvimento de algoritmos baseados em oráculo. O objetivo é encontrar a propriedade oculta de uma função com o mínimo de consultas possível. (PORTUGAL, 2023, p.1)

Bernstein e Vazirani (1993) observaram que o algoritmo Deutsch-Jozsa poderia ser usado para identificar uma função booleana[2] específica dentro de um conjunto de funções booleanas lineares. O algoritmo Bernstein-Vazirani supera seu equivalente clássico sem explorar o emaranhamento, confiando apenas no paralelismo quântico. (PORTUGAL, 2023, p.1)

O impulso continuou a crescer quando Simon publicou um algoritmo quântico em 1994 que superou exponencialmente os algoritmos clássicos na determinação se uma função é

---

[2] Uma função booleana é definida por: $f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$.

injetora ou dois para um. Este algoritmo aproveitou o emaranhamento máximo e teve aplicações em subgrupos ocultos dentro de classes específicas de grupos. (PORTUGAL, 2023, p.1)

Shor (1994) desenvolveu dois algoritmos quânticos inovadores para "fatorar" compostos números inteiros e cálculo de logaritmos discretos, o que representava uma ameaça significativa aos métodos de criptografia amplamente utilizados hoje. Os algoritmos de Shor trouxeram a Computação Quântica para o centro das atenções e, desde então, o campo tem crescido a um ritmo surpreendente. O algoritmo de Shor também pode ser formulado como um algoritmo baseado em oráculo com uma função periódica. O objetivo é encontrar o período avaliando a função o mínimo possível. Encontrar períodos é uma tarefa adequada para a transformada de Fourier, que, embora tenha uma complexidade de O $N.logN$, em que N representa o tamanho dos dados, mostra-se útil em algoritmos clássicos. No domínio quântico, a transformada de Fourier é implementada com portas universais. O log_2N, e é a superposição quântica que faz maravilhas. (PORTUGAL, 2023, p.1)

Tabela 1:Comparação entre os tempos estimados para fatoração de números de tamanhos diferentes com o algoritmo clássico e com o de Shor.

Tamanho do Número a Ser Fatorado (em bits)	Tempo de Fatoração por Algoritmo Clássico	Tempo de Fatoração por Algoritmo Quântico
512	4 dias	34 segundos
1024	100 mil anos	4,5 minutos
2048	100 mil bilhões de anos	36 minutos

Fonte: Revista Ciência Hoje, Vol. 33, n.193, maio de 2003.

O algoritmo de Deutsch é o primeiro algoritmo a explorar o paralelismo quântico. Esse algoritmo utiliza dois q-bits e tem um ganho modesto, mas inspirou o desenvolvimento de novos algoritmos quânticos que são mais eficientes que os seus correspondentes clássicos. O problema de Deutsch foi proposto em 1985 sem a utilização de um modelo de circuito quântico. Os conceitos de portas universais e de circuitos quânticos foram apresentados aproximadamente quatro anos mais tarde. A generalização do algoritmo de Deutsch é conhecida como o algoritmo de Deutsch-Jozsa (PORTUGAL, 2023, p.29).

3.7 ALGORITMO DE DEUTSCH

3.7.1 Formulação do Problema

Suponhamos que temos uma função de 1-bit f: {0,1} →{0,1} sem conhecer os detalhes da implementação de f. Nós queremos determinar se esta função é balanceada ou constante. Uma função booleana de 1 bit é balanceada se f (0) ≠ f (1); por outro lado, a função é constante, no caso em que f (0) = f (1) (PORTUGAL, 2023, p.29). Existem quatro funções booleanas f, com as quais podemos formar tabelas-verdade, como seguem:

Tabela 2-Tabelas-verdade de todas as funções booleanas de 1-bit:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Fonte: Extraída de Portugal (2023).

As formas normais disjuntivas são:

$$f_0(x) = 0, \tag{44}$$

$$f_1(x) = x, \tag{45}$$

$$f_2(x) = \bar{x}, \tag{46}$$

$$f_3(x) = \bar{x} V x. \tag{47}$$

Em que $\bar{x}$ = NÃO x. A expressão booleana de f_3 pode ser simplificada desde que $\bar{x}Vx$ = 1. Um algoritmo clássico que procura a solução para esse problema precisa avaliar f duas vezes, significando que deve avaliar f (0) e f (1). Entretanto, utiliza um operador unitário U_f que implementa f e acessa este operador uma única vez. Neste caso, f (0) e f (1) são também testadas, mas a diferença é que os testes ocorrem simultaneamente. Esta ideia é utilizada frequentemente em algoritmos quânticos (PORTUGAL, 2023, p.29-30).

No caso quântico, f é implementada através de um operador unitário de 2 q-bits U_f definido como:

$$U_f|x\rangle|j\rangle = |x\rangle|x \oplus f(x)\rangle, \tag{48}$$

Em que $\oplus$ representa o XOR ou a aritmética de módulo 2. Este é o meio que pode ser utilizado para implementar uma função booleana arbitrária com dimensão n. Deve-se garantir que x é a entrada do primeiro registro, e obtemos f (x). Nós utilizamos suas formas normais disjuntivas. Não há saída 1 na tabela verdade para f_0.Então,

$$U_{f_0} = I \otimes I \tag{49}$$

Existe uma saída 1 na tabela-verdade para f_1 , para a qual corresponde à entrada 1. Nós utilizamos o padrão CNOT, o qual é ativado quando o controle é ajustado para a entrada 1. Assim,

$$U_{f_1} = CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Existe uma saída 1 na tabela-verdade para f_2 , o que corresponde para a entrada 0. Nós utilizamos a CNOT que é ativada quando o controle é ajustado para 0. Portanto,

$$U_{f_2} = (X \otimes I).CNOT.(X \otimes I) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tag{51}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=U_{f_2}$$

Por fim, há duas saídas 1 na tabela-verdade para f_3 com entradas 1 e 0. Nós utilizamos o CNOT e o CNOT é ativado quando o controle é ajustado para 0. Então,

$$U_{f_3}=(X\otimes I).CNOT.(X\otimes I).CNOT=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=U_{f_3} \quad (52)$$

É claro que a utilização de modelos genéricos para implementarmos funções booleanas baseadas nas suas tabelas-verdade podem produzir muitos circuitos desnecessários. Nesses casos, é necessário simplificar a expressão booleana antes de construir o circuito. Neste aspecto não existe receita ou padrão para guiar-nos. Para f_3 , nós sabemos que f_3 (x) = 1 e a saída deve ser 1. Desde que a entrada para o segundo q-bit é 0, a saída 1 é obtida utilizando uma X. Então, a versão de simplificação de U_{f_3} é (PORTUGAL, 2023, p.30):

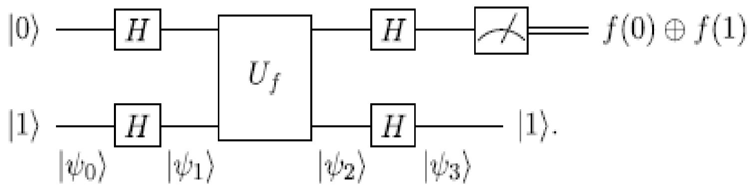
$$U_{f_3}=I\otimes \mathrm{X} \quad (53)$$

Observe que U_f é unitária em todos os casos.

3.7.2-Detalhamento Matemático do Algoritmo de Deutsch

O circuito que representa o algoritmo de Deutsch é dado pela **Figura 7** e **Quadro 5**.

Figura 7: O circuito do Algoritmo de Deutsch.



Fonte: Extraído de Portugal (2023).

Quadro 5: Passos do algoritmo de Deutsch.

Algoritmo de Deutsch
Entrada: Uma função Booleana f: {0,1} → {0,1}.
Saída: 0 se f for constante, 1 se f for balanceada.
1 Prepare o estado inicial $|0\rangle|1\rangle$;
2 Aplique $H \otimes$ H;
3 Aplicar U_f;
4 Aplique $H \otimes$ H;
5 Meça o primeiro q-bit na base computacional.

Fonte: Extraído de Portugal (2023).

Segundo (PORTUGAL, 2023, p.31), a saída $f(0) \oplus f(1)$ é 0 se f for constante, e 1 se f for balanceada. Note que a segunda porta *Hadamard* (*H*) aplicada pode ser eliminada sem afetar o resultado do algoritmo. O algoritmo de Deutsch combina duas propriedades importantes: o paralelismo quântico e a interferência.

Podemos expressar matematicamente o algoritmo de Deutsch da seguinte forma:

O estado de entrada é:

$$|\psi_0\rangle = |01\rangle \tag{54}$$

Esse estado é enviado para duas portas *Hadamard*, resultando em:

$$|\psi_1\rangle = \left[\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]. \tag{55}$$

Depois, esse estado é enviado para a porta U_f ,essa porta aplicada em estados do tipo $|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ resulta em:

$$\frac{U_f|x\rangle(|0\rangle-|1\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{|x,0\oplus f(x)\rangle-|x,1\oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= |x\rangle\frac{|0\oplus f(x)\rangle-|1\oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= (-1)^{f(x)}|x\rangle\frac{(|0\rangle-|1\rangle)}{\sqrt{2}}. \tag{56}$$

Usando esse resultado, obtém-se:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{f(0)}|0\rangle\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{f(1)}|1\rangle\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]. \tag{57}$$

Condensando...

$$|\psi_2\rangle = \begin{cases} \pm\left[\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right] \ se\ f(0) = f(1), \\ \pm\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right] \ se\ f(0) \neq f(1). \end{cases} \tag{58}$$

Aplicando a álgebra pertinente:

$$|\psi_3\rangle = \begin{cases} \pm|0\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right] \ se\ f(0) = f(1), \\ \pm|1\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right] \ se\ f(0) \neq f(1). \end{cases} \tag{59}$$

Sabendo-se que $f(0) \oplus f(1)$ é igual a zero se f (0) = f (1) e igual a um de outro modo, podemos expressar (60) na forma: (JORCUVICH, 2018, p.33)

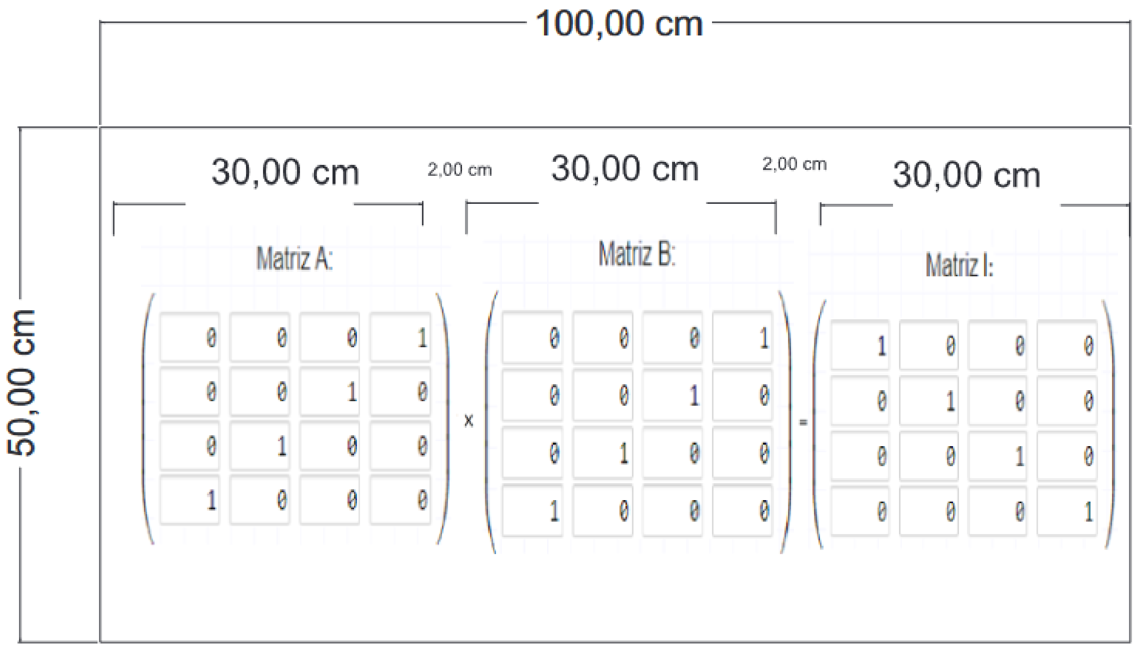
$$|\psi_3\rangle = \pm|f(0) \oplus f(1)\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]. \tag{60}$$

4 Q-MATRIX: ELABORAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional é um jogo de tabuleiro com 50 centímetros de largura e 1,0 metro de comprimento, conforme ilustrado na **Figura 9**. Foi pensado, planejado por mim e fabricado pela empresa “GAME MAKER” - sediada no Rio de Janeiro. As 32 peças que compõem o jogo foram produzidas em material cartonado, de 1.4 mm de espessura, com dimensões de 4,3 cm de largura por 4,3 cm de comprimento. Abaixo, seguem as imagens da primeira peça do jogo, na **Figura 8,** e a “planta baixa” do tabuleiro do jogo, na **Figura 9**.

Figura 8-Dimensões das peças do jogo (fora de escala):

Figura 9-Dimensões do tabuleiro do jogo (fora de escala):



5 METODOLOGIA DO TRABALHO COM O PRODUTO EDUCACIONAL

5.1 PROBLEMÁTICA

A sociedade atual passa pela identificação de um crescente número de casos de estudantes pertencentes ao espectro autista, pois houve uma evolução nos parâmetros de diagnósticos de doenças psiquiátricas, particularmente, com o estabelecimento do Cadastro Internacional de Doenças 11 (**CID 11**) e Manual Diagnóstico de Doenças Mentais 5 (**DSM 5**).

Paralelamente a esta circunstância, necessita-se reparar o histórico de exclusão dos demais discentes especiais que, outrora, estavam em ambientes separados dos demais estudantes.

Nesse sentido, a educação inclusiva precisa ser implementada nas instituições de ensino e a instalação do **AEE**, bem como a **SRM** já tem garantia da legislação, apesar de muitas Unidades Escolares não possuírem (vide Decreto-Lei n° 7.611 de 2011 que regulamenta o **AEE** e o Decreto n° 6.094 de 2007 citados na introdução para a instalação das **SRM´s**).

Hoje, a comunidade científica se depara com uma mudança de paradigma no que tange às tecnologias que amparam as ciências da computação. A computação clássica, que começou com Babbage e Alan Turing, passa a ser acompanhada pelo surgimento da Computação Quântica, no sentido do desenvolvimento de computadores com uma capacidade de processamento maior e mais eficientes na solução de problemas que pareceriam impensáveis (como o desenvolvimento de algoritmos para decomposição de números inteiros de muitos dígitos em números primos, por exemplo).

Assim, desenvolvemos um jogo de tabuleiro para o ensino de conceitos de Computação Quântica voltado para estudantes de nível médio e com elevado nível de suporte do espectro autista no sentido de empoderá-los (ao apresentá-los à vanguarda do saber científico) e incluí-los aos demais discentes numa **UEPS**.

A posteriori, verificaremos se há indícios de aprendizagem significativa o que corresponde em mais um desafio, pois os autistas têm dificuldade em gerar subjetividade nas suas relações de sentido cognitivo.

5.2 DESCRIÇÕES DA PESQUISA APLICADA OU TRANSLACIONAL REALIZADA

Primeiramente, partiu-se da aplicação de Sequência Didática a partir de uma **UEPS**, na qual se fez um contraponto entre a Computação Clássica (fazendo uma revisão dos principais conceitos) e a Computação Quântica (fazendo um levantamento de conhecimentos prévios). Em seguida, aplicou-se o jogo para analisar se os discentes pertencentes ao espectro autista foram incluídos aos demais estudantes e se houve indícios de aprendizagem significativa sobre os tópicos de Computação Quântica a partir do tratamento dos resultados do jogo. O perfil da pesquisa foi aplicado, com abordagem qualitativa, e, quanto aos objetivos, tratou-se de uma pesquisa exploratória, com estudo de caso sobre o autismo e a Computação Quântica.

5.3 ETAPAS DO DESENVOLVIMENTO DO PRODUTO EDUCACIONAL

5.3.1 Descrição do problema ao qual o produto educacional vai atuar

O grande desafio que foi enfrentado é se parte do público-alvo (discentes do espectro autista) do produto iria interagir com o jogo de maneira a criar subjetividade; aprendizagem com sentido. Outro ponto crucial foi saber se iríamos encontrar indícios de aprendizagem significativa, tanto nos discentes autistas com elevado nível de suporte, quanto nos estudantes que não possuem essa especificidade.

Assim, preparou-se uma **UEPS** baseada na obra "*Noções Básicas de Epistemologias e Teorias de Aprendizagem como subsídios para a organização de Sequências de Ensino-Aprendizagem em Ciências/Física*." De Marco Antônio Moreira e Neusa T. Massoni de Adriane Griebeler (Estudante do MNPEF). A sua versão de **UEPS** foi sobre Mecânica Quântica e está apresentada entre as páginas 171 e 175 do livro texto.

5.3.2 Etapas da aplicação do produto educacional e UEPS:

Etapa 1: Problematização Inicial/Levantamento de Conhecimentos Prévios

Situação-Problema: na primeira aula, os alunos foram questionados sobre a possibilidade de existência de computadores que utilizam, na atualidade, a Mecânica Quântica como princípio físico de funcionamento e revisão dos conhecimentos sobre a Computação Clássica.

Etapa 2: Problematização da Existência da Computação Quântica

Posteriormente, no segundo encontro, promoveu-se uma discussão sobre a Computação Quântica. Em seguida, fez-se o levantamento dos conhecimentos prévios de Mecânica Quântica, envolvendo situações-problema iniciais:

1) O que você já leu, ouviu, ou viu sobre Mecânica Quântica?
2) Onde a Mecânica Quântica é aplicada atualmente?
3) O que difere a Mecânica Quântica das outras áreas da Física (Mecânica, Termodinâmica Eletromagnetismo Clássicos)?
4) É possível que a Mecânica Quântica seja aplicada em computadores para torná-los mais rápidos e com uma capacidade de processamento maior?
5) Discussão do texto que representa a fala de Richard P. Feynman em 1982:

> “... seriam os fenômenos da mecânica quântica eficientemente simuláveis numa máquina de Turing clássica? Feynman apresentou boas razões para acreditar que a resposta fosse negativa, argumentando que tal simulação parece impossível sem incorrer num retardo exponencial. Além disso, sugeriu que para poder simular eficientemente a evolução dos sistemas quânticos seriam necessários computadores que funcionassem de acordo com as leis da mecânica quântica; não definiu, porém, um modelo apropriado para tal objetivo.” Feynman (1982) apud AGUDELO (2009. pg.85)

Será que o senhor Feynman estava correto?

Etapa 3: Organização/Aprofundamento dos Conhecimentos

No terceiro encontro, os alunos são reunidos em equipes de 3 a 4 integrantes cada, e receberam uma apostila contendo informações sobre a nova Computação Quântica, com as principais informações dos primeiros computadores quânticos e a “nova corrida do ouro” que se tornou a Computação Quântica. No contexto da teoria de Ausubel, a apostila se configurou num Organizador Prévio (fazendo uma ponte entre o que o discente já sabe e o que ele precisa aprender) para promover a aprendizagem significativa- presente nas perguntas da apostila.

Etapa 4: Aplicando o Jogo e Contrastando Mapas Conceituais

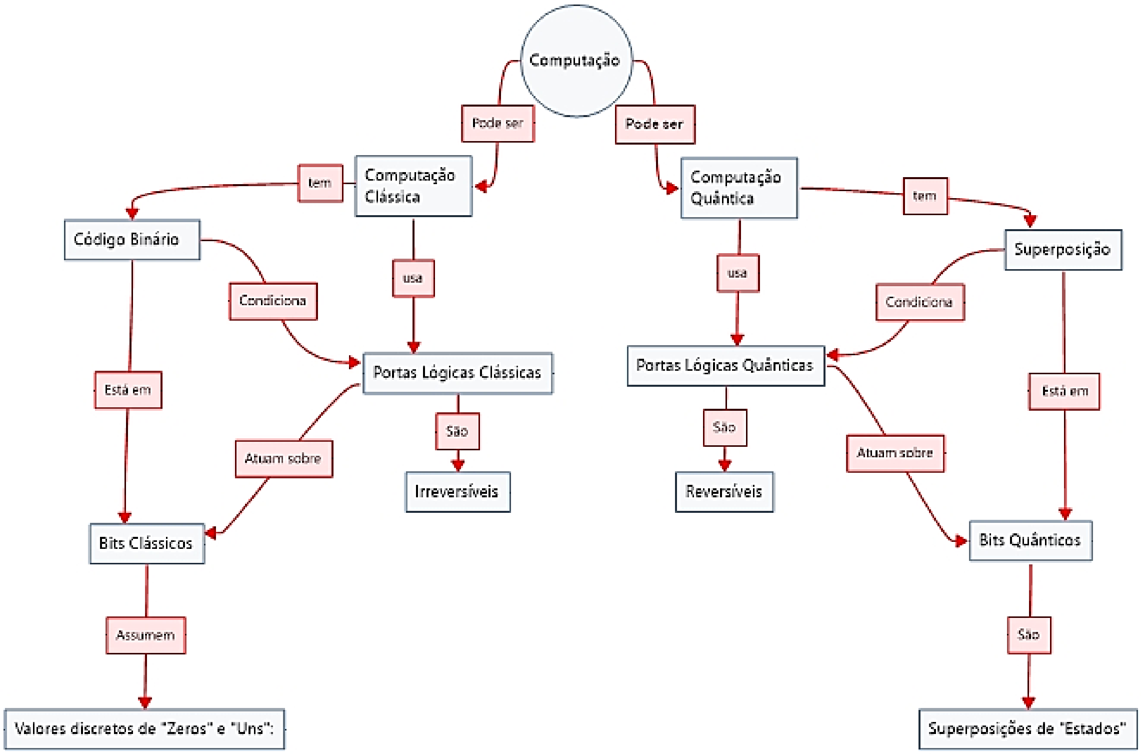
Na quarta aula, apresentou-se o produto educacional “Q-Matrix” (jogo de tabuleiro). Com a aplicação dessa dinâmica, e desenvolveu-se uma atividade para a elaboração de mapas conceituais sobre os temas Computação Clássica e Computação Quântica, envolvendo toda a turma. Em seguida, foi feito um contraste qualitativo entre os dois mapas, explorando as similaridades e diferenças.

Resumo do Game:

Assuntos:

1.Bits Clássicos;
2.Portas Lógicas Clássicas;
3.Bits Quânticos;
4.Portas Lógicas Quânticas;
5.Superposição;

Figura 10-Mapa Conceitual Esperado dos Temas do Jogo de Tabuleiro:



Enredo:

"Jogo Q-Matrix"

Alt é um especialista em computação quântica dotado de altas habilidades que é mal interpretado por ser autista e fica desanimado com o preconceito e exclusão na Q-Matrix (mundo das aparências), até entrar num mundo paralelo (quando começa o jogo).À medida que começa a jogar nesse novo mundo, Alt é procurado por um grupo de pessoas que se dizem “experts” em quântica (**End**, **Del**, **Morpheus**) e afirmam saber de uma verdade que a maioria não sabe, deixando a critério do protagonista: jogar e optar por conhecer a verdade e mudar sua vida para sempre ou continuar sendo enganado pela Q-Matrix e esquecer todas as suas descobertas. **Alt** decide então conhecer a verdade e jogar. Assim, **Alt** vai percebendo que também é capaz de vencer as dificuldades impostas pelos desafios do jogo. Com o passar das fases, **Alt** recebe estímulos e incentivos para continuar a sua saga. Ao fim do jogo, **Alt** desvenda uma propriedade muito interessante da quântica matricial, sendo libertado da antiga Q-Matrix com as essências puras das coisas do mundo (vide Platão[3]).

Jogo:
Proposta de intervenção para alunos do Terceiro Ano do Ensino Médio.

1º Passo: Escolha da operação matricial;

2º Passo: Matriz 4x4 (Operação $A \cdot B \ = I$); A, B e I sendo Hermitianas; com A e B sendo $\sigma_x \ \otimes \sigma_x$ (ver eq. 17, APÊNDICE A);

3ºPasso cada elemento da matriz será descoberto por perguntas simples de computação quântica

Cada resposta certa abrirá um elemento da primeira matriz A, depois cada elemento da Matriz A^{-1}=B.

Assim, teremos 32 passos até o final do jogo (claro, se quem iniciar o game, acertar todas as perguntas na sequência!).

O jogo iniciará no lançamento do dado.

Alternaremos entre dois jogadores. Chegará ao final do jogo quem tiver descoberto mais casas no tabuleiro.

5.4 CARACTERÍSTICAS DA UNIDADE ESCOLAR E CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS DA PESQUISA

A Escola Polivalente de Ensino Fundamental em Camaçari foi criada sob a denominação Escola Polivalente de Camaçari, decreto nº 23.072 de 13 de agosto de 1972,

---

[3] Platão foi um filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga. O Mito da Caverna, também conhecido como Alegoria da Caverna, foi escrito por Platão, um dos mais importantes pensadores da história da Filosofia. É uma metáfora que sintetiza o dualismo platônico. Por exemplo, a relação entre os conceitos de escuridão e ignorância; luz e conhecimento e, principalmente, a distinção entre aparência e realidade, fundamental para sua teoria do Mundo das Ideias.

através do convênio MEC- PREMEM (Programa de Extensão e Melhoria do Ensino Médio) e Governo do Estado da Bahia.

Em sua realização foi utilizada um empréstimo da Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional. O seu objetivo era a sondagem de aptidões e a pré-profissionalização dos alunos através das Oficinas de Artes Práticas, ou seja, Educação para o Lar, Técnicas Agrícolas, Artes industriais e Técnicas Comerciais.

A Escola Polivalente de Camaçari foi construída no Centro da Cidade, com uma área bastante grande e bem dividida, com salas amplas, ventiladas e iluminadas. Todas as atividades eram desenvolvidas em salas ambientes, devidamente aparelhadas e com funcionários previamente preparados, além de educadores capacitados.

Através da Portaria 2173/ 2002, Diário Oficial de 19 de junho de 2002, a Escola Polivalente de Camaçari passou a denominação de Colégio Estadual Polivalente de Camaçari, atendendo apenas aos educandos da modalidade de Ensino Médio, fazendo valer a Lei Nacional de Diretrizes e Bases da Educação – LDB/ MEC, que garante Ensino Fundamental através da administração dos governos municipais enquanto as de Ensino Médio, do governo estadual.

Hoje, o Colégio Estadual Polivalente de Camaçari continua atendendo aos educandos de Ensino Médio durante os turnos matutino, vespertino e a EJA (Educação de Jovens e Adultos) no turno noturno. A maioria dos estudantes do ensino médio é oriunda de escolas municipais, concluintes do 9º ano, uma boa parte de escolas particulares e discentes da zona rural de Camaçari, todos preocupados em dar continuidade à construção do conhecimento e da cidadania.

Nesse ano de 2024, houve grandes evoluções quanto à Educação Inclusiva, pois a direção implantou o **AEE** num anexo do colégio onde ficava um antigo depósito de materiais de educação física e contratou técnicos em educação especializada, bem como cuidadores dos discentes especiais. Até o momento, não houve a instalação da **SRM**, mas, dentro em breve, haverá mais esse suporte garantido por lei instalado no Polivalente de Camaçari.

Para realizar a intervenção pedagógica, escolhemos os estudantes do 3°BLM (Terceiro ano B de Linguagens e suas Tecnologias). O motivo da escolha, primeiramente, deve-se ao caráter transdisciplinar da ementa da disciplina de Inclusão Digital (com uma abordagem holística das áreas do conhecimento e suas relações).

A escolha também se deveu à maturidade matemática dos estudantes, pois foram abordadas operações que envolvem matrizes (por já terem visto matrizes e determinantes no segundo ano) e vago conhecimento de Mecânica Quântica (que servem de subsunçores) na **TAS** de David Ausubel para a Computação Quântica.

Com relação aos discentes pertencentes ao espectro autista, existiu um discente apenas. Gostaríamos de que houvesse mais estudantes desse espectro, pois poderíamos fazer uma análise quantitativa (o que não pôde ocorrer). Realizamos, entretanto, uma análise qualitativa sobre a interação da pessoa com **TEA** e os demais colegas em atividade letiva convencional e com o Game, estabelecendo relações entre ambas as situações.

5.5 PLANOS DE AULA

5.5.1 Plano de Aula I

Segundo Moreira (2010),

> “...o conhecimento prévio é um conhecimento que o aprendiz já traz em sua estrutura cognitiva. Para existir a “ancoragem” de novos conhecimentos, o seu levantamento é de suma importância.”

Logo, fizemos esse levantamento nos primeiros encontros.

<table>
<tr><td colspan="2">Unidade Escolar/NTE:</td><td colspan="4">Colégio Estadual Polivalente de Camaçari/NTE:26</td></tr>
<tr><td>Federal ( )</td><td>Estadual (x)</td><td>Municipal ( )</td><td>Privada ( )</td><td>Comunitária ( )</td><td>Outros( )</td></tr>
<tr><td colspan="2">Coordenador(a)</td><td colspan="4">PSF[4]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Componente Curricular:</td><td colspan="4">Inclusão Digital</td></tr>
<tr><td>Turma:</td><td>3º ano/BLM</td><td colspan="2">Ano letivo:</td><td colspan="2">2024</td></tr>
<tr><td colspan="2">Professor responsável:</td><td colspan="4">César Malta</td></tr>
<tr><td colspan="2">Assunto:</td><td colspan="4">Introdução à Computação Quântica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema:</td><td colspan="4">Jogo: “Q-Matrix”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo geral:</td><td colspan="4">Aplicar uma proposta de sequência didática com conceitos da computação quântica como produto.</td></tr>
</table>

[4]Obs.: O nome da coordenadora pedagógica foi ocultado por conta da Lei de Proteção de Dados.

Objetivos específicos:	Desenvolver uma sequência didática específica para alunos do ensino médio e do espectro autista com alto nível de suporte;
	Facilitar a inclusão escolar;
	Aplicar um produto educativo através da gamificação;
	Verificar indícios de aprendizagem significativa deles.
Conceitos-chave:	Mecânica Quântica e Computação Quântica.
Conhecimentos prévios:	Computação Clássica; História da Computação Clássica e Física Clássica.
Articulações culturais, sociais, tecnológicas e de Inovações Desejáveis:	Permitir a Inclusão social dos discentes autistas, favorecer a aprendizagem significativa (com sentido) e levar ao conhecimento público de tecnologias disruptivas como a Computação Quântica.
Motivação:	Exclusão dos discentes especiais; Surgimento da Computação Quântica como tecnologia alternativa à Computação Clássica.
Caracterização/descrição das atividades:	Individuais: Apontamentos de aula expositiva;
	Em grupos: Discussão sobre a existência de computadores com princípio de funcionamento nas leis da Mecânica Quântica.
Recursos didáticos:	Quadro Branco, piloto, Jogo: “Q-Matrix”, Data Show. Computador Clássico.
Atividades:	Elaboração apontamentos sobre Computação Clássica (como revisão); Discussão com o docente e com os colegas sobre a existência de computadores quânticos.

5.5.2 Plano de Aula II

Segundo (MOREIRA, 2017), o Organizador Prévio (como recurso didático) é servir de ligação entre o que o aluno já sabe e o que deveria saber para que pudesse adquirir de maneira significativa determinado conhecimento.

Nessa aula, apresentaremos uma apostila com informações de Computação Quântica como Organizador Prévio.

<table>
<tr><td colspan="3">Unidade Escolar/NTE:</td><td colspan="5">Colégio Estadual Polivalente de Camaçari/NTE:26</td></tr>
<tr><td colspan="2">Federal ( )</td><td>Estadual (x)</td><td>Municipal ( )</td><td colspan="2">Privada ( )</td><td>Comunitária ( )</td><td>Outros( )</td></tr>
<tr><td colspan="3">Coordenador(a)</td><td colspan="5">PSF</td></tr>
<tr><td colspan="3">Componente Curricular:</td><td colspan="5">Inclusão Digital</td></tr>
<tr><td>Turma:</td><td colspan="2">3º ano/BL</td><td colspan="2">Ano letivo:</td><td colspan="3">2024</td></tr>
<tr><td colspan="3">Professor responsável:</td><td colspan="5">César Malta</td></tr>
<tr><td colspan="3">Assunto:</td><td colspan="5">Introdução à Computação Quântica.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tema:</td><td colspan="5">Jogo: “Q-Matrix”</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo geral:</td><td colspan="5">Aplicar uma proposta de sequência didática com conceitos da computação quântica como produto.</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="4">Objetivos específicos:</td><td colspan="5">Desenvolver uma sequência didática específica para alunos do ensino médio e do espectro autista com alto nível de suporte;</td></tr>
<tr><td colspan="5">Facilitar a inclusão escolar;</td></tr>
<tr><td colspan="5">Aplicar um produto educativo através da gamificação;</td></tr>
<tr><td colspan="5">Verificar indícios de aprendizagem significativa deles.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Conceitos-chave:</td><td colspan="5">Mecânica Quântica e Computação Quântica.</td></tr>
</table>

Conhecimentos prévios:	Computação Clássica; História da Computação Clássica e Física Clássica.
Articulações culturais, sociais, tecnológicas e de Inovações Desejáveis:	Permitir a Inclusão social dos discentes autistas, favorecer a aprendizagem significativa (com sentido) e levar ao conhecimento público de tecnologias disruptivas como a Computação Quântica.
Motivação:	Exclusão dos discentes especiais; Surgimento da Computação Quântica como tecnologia alternativa à Computação Clássica.
Caracterização/descrição das atividades:	Individuais: Apontamento de conceitos discutidos sobre Mecânica Quântica. Em grupos: Resolução da lista de Exercícios sobre Mecânica Quântica e Computação Quântica.
Recursos didáticos:	Quadro Branco, piloto, Jogo: “Q-Matrix”, Data Show. Computador Clássico.
Atividades:	Resolução da lista sobre Mecânica Quântica; Discussão com o docente e colegas sobre texto de Feynman em equipes.

5.5.3 Plano de Aula III

No processo de aprendizagem, podem ocorrer simultaneamente a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa. Segundo Moreira:

A diferenciação progressiva é o processo de atribuição de novos significados pelo aprendiz a um dado subsunçor (um conceito ou uma proposição, por exemplo) resultante da sucessiva utilização desse subsunçor para dar significado a novos conhecimentos (MOREIRA,2013).

A reconciliação integradora, ou integrativa, é um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, simultâneo ao da diferenciação progressiva, que consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações. (MOREIRA,2012).

Unidade Escolar/NTE:		**Colégio Estadual Polivalente de Camaçari/NTE:26**			
Federal ( )	Estadual (x)	Municipal ( )	Privada ( )	Comunitária ( )	Outros( )
Coordenador(a)		PSF			
Componente Curricular:		Inclusão Digital			
Turma:	3º ano/BLM	Ano letivo:	2024		
Professor responsável:		César Malta			
Assunto:		Introdução à Computação Quântica.			
Tema:		Jogo: “Q-Matrix”			
Objetivo geral:		Aplicar uma proposta de sequência didática com conceitos da computação quântica como produto.			
Objetivos específicos:		Desenvolver uma sequência didática específica para alunos do ensino médio e do espectro autista com alto nível de suporte;			
		Facilitar a inclusão escolar;			
		Aplicar um produto educativo através da gamificação;			
		Verificar indícios de aprendizagem significativa deles.			
Conceitos-chave:		Mecânica Quântica e Computação Quântica.			
Conhecimentos prévios:		Computação Clássica; História da Computação Clássica e Física Clássica.			
Articulações culturais, sociais, tecnológicas e de Inovações Desejáveis:		Permitir a Inclusão social dos discentes autistas, favorecer a aprendizagem significativa (com sentido) e levar ao conhecimento público de tecnologias disruptivas como a Computação Quântica.			
Motivação:		Exclusão dos discentes especiais; Surgimento da Computação Quântica como tecnologia alternativa à Computação Clássica.			

Caracterização/descrição das atividades:	Individuais: Apontamentos de novos conceitos discutidos sobre Computação Quântica. Em grupo: Discussão com a sala sobre Computação Quântica e suas especulações e Elaboração de Mapa Mental sobre Computação Quântica.
Recursos didáticos:	Quadro Branco, piloto, Jogo: "Q-Matrix", Data Show. Computador Clássico.
Atividades:	Atividades em equipe; Elaboração de Mapa Mental sobre Computação Quântica.

5.5.4 Plano de Aula IV

Nessa aula IV, estávamos atentos aos possíveis indícios de aprendizagem significativa.

Unidade Escolar/NTE:		**Colégio Estadual Polivalente de Camaçari/NTE:26**			
Federal ( )	Estadual (x)	Municipal ( )	Privada ( )	Comunitária ( )	Outros ( )
Coordenador(a)		PSF			
Componente Curricular:		Inclusão Digital			
Turma:	3º ano/BL	Ano letivo:	2024		
Professor responsável:		César Malta			
Assunto:		Introdução à Computação Quântica.			
Tema:		Jogo: "Q-Matrix"			
Objetivo geral:		Aplicar uma proposta de sequência didática com conceitos da computação quântica como produto.			
Objetivos específicos:		Desenvolver uma sequência didática específica para alunos do ensino médio e do espectro autista com alto nível de suporte;			
		Facilitar a inclusão escolar;			

	Aplicar um produto educativo através da gamificação;
	Verificar indícios de aprendizagem significativa deles.
Conceitos-chave:	Mecânica Quântica e Computação Quântica.
Conhecimentos prévios:	Computação Clássica; História da Computação Clássica e Física Clássica.
Articulações culturais, sociais, tecnológicas e de Inovações Desejáveis:	Permitir a Inclusão social dos discentes autistas, favorecer a aprendizagem significativa (com sentido) e levar ao conhecimento público de tecnologias disruptivas como a Computação Quântica.
Motivação:	Exclusão dos discentes especiais; Surgimento da Computação Quântica como tecnologia alternativa à Computação Clássica.
Caracterização/descrição das atividades:	Individuais: Apontamentos sobre conceitos e comparações feitas entre computadores quânticos e computadores clássicos. Em grupo: Discussão sobre as diferenças entre Computação Clássica e Computação Quântica. Em pares: Gamificação.
Recursos didáticos:	Quadro Branco, piloto, Jogo: “Q-Matrix”, Data Show. Computador Clássico.
Atividades:	Discussão sobre as diferenças entre Computação Clássica e Computação Quântica. Jogo: “Q-Matrix”; Elaboração de Mapas Conceituais de Computação Clássica e Computação Quântica, fazendo comparações entre eles.

5.6 INSTRUMENTOS, COLETA E ANÁLISE DE DADOS

Para coletar os dados qualitativos em que a pesquisa se baseava, utilizou-se as gravações dos discentes (com o consentimento deles). Antes disso, enviamos um documento de permissão de gravação das aulas aos responsáveis para que seus filhos pudessem participar das atividades letivas.

Após a autorização das gravações, fizemos a coleta de dados a partir das respostas do primeiro questionário, a interação dos estudantes com o jogo e entre eles, o engajamento para a elaboração dos mapas conceituais e a análise desses mapas. É claro que sempre com uma observação mais cuidadosa ao discente autista presente na turma.

Após a abordagem introdutória e a revisão de conceitos de computação clássica (já na segunda aula), a turma foi dividida em grupos de 3 a 4 integrantes cada para a resolução do questionário sobre o levantamento dos conhecimentos prévios de Mecânica Quântica.

A partir da observação das interações dos grupos, podemos perceber que o estudante autista tinha pouca interação com os demais integrantes da equipe, apontando para uma característica peculiar dos discentes pertencentes ao espectro do TEA que, geralmente, possuem dificuldade de socialização.

6 RELATO DA APLICAÇÃO E DISCUSSÕES DA UEPS E DO JOGO

6.1 RELATO DA APLICAÇÃO DA **UEPS**-AULA 1

Na aula 1 (com 28 discentes presentes), comecei a iniciar as atividades um pouco em atraso, pois tínhamos o segundo e terceiro horários da manhã com a turma (aulas geminadas) e o professor do primeiro horário estendeu-se além do que deveria. Além disso, tive de me apresentar com a turma e fazer as devidas considerações sobre os conteúdos a serem trabalhados e os critérios de avaliação. Em seguida, iniciamos as atividades levantando os conhecimentos prévios dos estudantes sobre Computação Clássica e sobre o conhecimento físico que está por trás da Computação Clássica, em que os bits clássicos só podem assumir os valores "zero" e "um", sem a chance de uma parte da informação estar no "zero", e a outra parte estar no "um". Na sequência, explicamos para quem desconhecia sobre o fato de o "zero" ser um ponto de baixo potencial elétrico e o "um" ser um ponto de elevado potencial elétrico. Aproveitei o ensejo para ampliar as possibilidades representacionais de "zero" e "um", ligando e desligando a chave do interruptor da sala de aula na ocasião. Poderia ser também, ligado e apagado, "cara" e "coroa" etc. Essa ação provocou um momento de surpresa (para a maioria dos estudantes), pois mesmo os alunos conhecendo o código binário, a sua maioria desconhecia o fundamento físico que está por trás do "bit zero" e do "bit um".

Ainda na aula 1, explicamos um pouco do histórico da Computação Clássica que teve como criador o engenheiro Charles Babbage e Alan Turing.

6.2 RELATO DA APLICAÇÃO DA UEPS-AULA 2

Na aula 2 (com 28 discentes presentes), pedimos para que os estudantes se reunissem em equipes com 3 ou 4 discentes para responderem um questionário sobre Mecânica Quântica e sobre a possibilidade da existência de computadores quânticos. Nesse momento, fiz uma observação cuidadosa sobre o discente com **TEA** e pude verificar a sua dificuldade de socialização com os demais colegas de grupo (nesse caso, estabelecia pouco contato com os membros da equipe). Com as respostas do questionário, pudemos perceber que muitos nem tinham ouvido falar sobre a Mecânica Quântica, apesar de estarem cercados de tecnologias que avançaram graças à física quântica, como smartphones, Sistema de Posicionamento Global (**GPS**) etc.

6.3 RELATO DA APLICAÇÃO DA UEPS-AULAS 3 E 4

No terceiro encontro (com 30 discentes presentes), deixamos que os protagonistas fossem os estudantes (como estabelece a **TAS**) e dividimos a sala em dois grupos. O primeiro grande grupo ficou responsável em fazer dois mapas conceituais sobre Computação Quântica e Computação Clássica, ressaltando os conceitos principais das duas teorias, respectivamente.

O outro grupo ficou concentrado no jogo "Q-Matrix". Escolhemos dois jogadores (um deles com autismo de grau l de propósito) para observar o seu comportamento e o outro jogador sem o espectro.

Para nossa feliz surpresa, com o andamento do game, percebemos que a maior parte da turma ficou torcendo para que o autista ganhasse, num claro indício de inclusão, corroborada pela *"Lei Berenice Piana"*. Tivemos o cuidado, no entanto, de que não houvesse nenhum tipo de rivalidade entre ambos os jogadores e entre as torcidas.

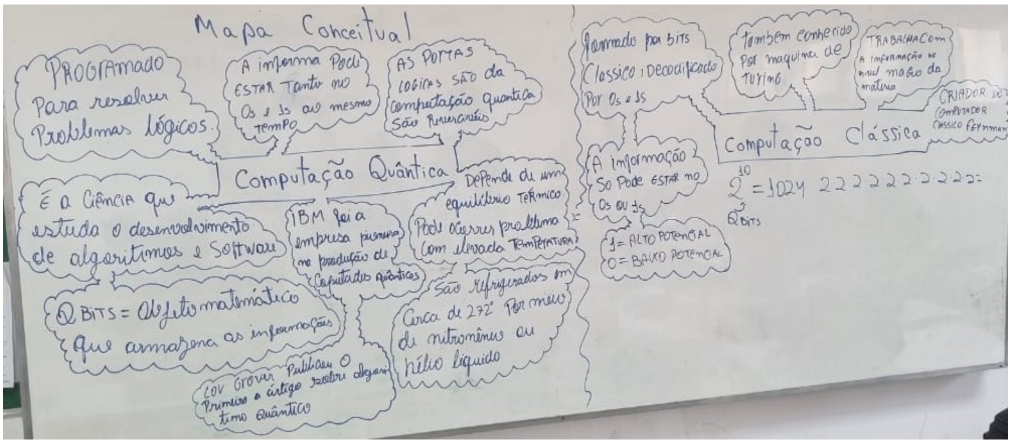
A disputa foi acirrada. O discente autista ganhou a dinâmica por 17 pontos a 15, numa prova de seu engajamento e envolvimento, o que aponta para o efeito da gamificação no aumento da concentração, memória e socialização já apontados no capítulo de epistemologia na parte de gamificação para estudantes autistas. É claro que podemos ter outros resultados em outras circunstâncias.

Na quarta aula (com 30 discentes presentes), fizemos o fechamento com o contraste entre os dois mapas conceituais. Antes, fizemos o alerta de que a elaboração de um mapa conceitual precisa partir de conceitos mais genéricos aos mais específicos e explicamos que esses conceitos precisam estar relacionados com verbos de ligação; o que não ocorreu e houve alguns deslizes conceituais.

Houve uma etapa inicial de **diferenciação progressiva** (mesmo que sem que eles tenham consciência-ver figura 10) quando há conceituação dos "bits clássicos" como pontos de elevado e baixo potencial elétrico para "uns" e "zeros", respectivamente para a computação clássica. E, analogamente, quando há definição de bits quânticos como "objetos matemáticos".

Não se pode afirmar se houve aprendizagem significativa, pois os mapas conceituais feitos e as inferências feitas não são suficientes para atestar tal hipótese.

Figura 11:Mapas Conceituais produzidos pela turma.



Fonte: Próprio Autor.

6.4 QUESTÕES OU PROBLEMAS QUE FORAM INVESTIGADOS

A grande questão que foi investigada é se o discente autista fez uma leitura subjetiva dos conhecimentos prévios de modo a "ancorá-los" à sua estrutura cognitiva para gerar a aprendizagem significativa. Os autistas têm, em geral, a apreensão da linguagem objetiva e a abstração fica prejudicada, uma vez que a **TAS** preconiza a "ancoragem" de novos conhecimentos nos conhecimentos prévios de forma não-arbitrária, substantiva e não-literal. Outra questão, foi colher evidências de que os discentes sem essa condição especial conseguem obter indícios de aprendizagem significativa numa **UEPS**.

6.5 RELATO COM EVIDÊNCIAS PARA A VERIFICAÇÃO DE INDÍCIOS DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Quando o estudante autista conseguiu lograr êxito num jogo que envolve outro discente sem a especificidade, houve um claro sinal de que ele está estabelecendo relações que ultrapassam a objetividade, num indício (e não uma certeza) de aprendizagem significativa. Assim, o game se configura num material potencialmente significativo. É claro que devemos ter o cuidado de afirmar que houve um sinal ou indício de aprendizagem significativa e não uma certeza sobre a **TAS**, uma vez que não há um ponto limítrofe entre o que é uma aprendizagem mecânica e o que se configura uma aprendizagem com "sentido".

6.6 DISCUSSÕES COM FOCO NOS RESULTADOS E ARTICULADO COM OS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E A REVISÃO DA LITERATURA

De acordo com os resultados do jogo e a interação entre o grupo de estudantes, houve claro sinal de inclusão do aluno autista com os demais pares em sala de aula (na medida em que durante a interação, surge uma torcida para apoiá-lo no game) e houve indícios de aprendizagem significativa quando esse estudante ganhou o game, mesmo que por poucos pontos. E houve sinais de aprendizagem significativa por parte de sua oponente (quando responde corretamente 15 questões), mesmo ela não obtendo êxito no final do jogo.

6.7 POSSÍVEL CONSISTÊNCIA OU DESACORDO DOS RESULTADOS OBTIDOS COM RELATADOS NA LITERATURA

Com essa abordagem qualitativa, percebeu-se que há gamificação como estratégia didática pertinente no engajamento do estudante autista com os demais discentes e melhora na sua socialização e concentração no sentido de estimulá-lo e ocorreu grande ganho de interações, se comparado com a atividade em grupo para a realização do questionário em que o estudante se encontrava deslocado dos demais. Há um desacordo com a literatura, quando o mapa conceitual apresentado teve falhas (quando, por exemplo, não apresentou verbos de ligação entre os conteúdos ou na hierarquização de conceitos-do mais genérico ao mais específico).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com os resultados apresentados e suas discussões, podemos afirmar que aplicamos uma **UEPS**, que é uma Sequência Didática baseada na **TAS**, na qual aplicamos conceitos da Computação Quântica para estudantes do terceiro ano do Ensino Médio e discente pertencentes ao espectro autista com alto nível de suporte por meio da gamificação (ao aplicar um jogo de tabuleiro de autoria própria) e ,com isso, identificamos a inclusão do estudante atípico aos demais colegas, tendo indícios de aprendizagem significativa.

Em trabalhos futuros, pretendemos estender o jogo para o ambiente virtual e para outras áreas do conhecimento. Sentimos falta de um espaço amostral mais abrangente (com um maior número de autistas) para termos uma análise estatística das suas respostas à aplicação do game, solidificando as conclusões e inferências feitas nas discussões dos resultados. Deixamos como legado que a gamificação é um mecanismo eficaz de engajamento na atualidade, pois envolve os discentes em atividades lúdicas e serviu de estímulo à socialização de todos os discentes, inclusive para o estudante atípico, preconizada pela "*Lei Berenice Piana*" que foi citada na apresentação.

A partir das aulas, podemos perceber que o sucesso ou o insucesso do aprendiz deve-se em grande parte aos aspectos atitudinais do docente. A priori, quando nos limitamos a uma atividade de responder um questionário em grupo houve pouco ou nenhum engajamento do discente autista. Porém, quando houve uma mudança quanto ao planejamento da atividade docente, com a gamificação, obtivemos um resultado mais próximo do esperado, com o engajamento do discente especial e apoio dos colegas, indicando que o professor, em grande parte, é o grande responsável pelo sucesso ou insucesso da práxis pedagógica (é claro, se o aprendiz estiver predisposição a aprender).

REFERÊNCIAS

AGUDELO, J. C. **Computação Paraconsistente: Uma Abordagem Lógica à Computação Quântica.** Campinas, SP, 2009.

ALVES, W. M. S; FELIPE, J.C.C.F.; Algoritmos Quânticos usando o Qiskit: Uma abordagem para o ensino de informação e computação quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 44, 2022.

AUSUBEL, D.P. **The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 212 p.2000.

AUSUBEL, David P, NOVAK, Joseph D, HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo**. México: Trillas, 1976.

BARATA, J.C.A. **Notas para um Curso de Física-Matemática.** São Paulo, SP,2024.

BRASIL. Decreto-lei n° 7.611 de 17 de novembro de 2011.Dispõe sobre a educação especial, o atendimento educacional especializado e dá outras providências.

BRASIL. Decreto-lei nº 6.094, de 24 de abril de 2007. Dispõe sobre a implementação do Plano de Metas Compromisso Todos pela Educação, pela União Federal, em regime de colaboração com Municípios, Distrito Federal e Estados, e a participação das famílias e da comunidade, mediante programas e ações de assistência técnica e financeira, visando a mobilização social pela melhoria da qualidade da educação básica.

BRASIL. Lei nº 12.764, de 27 de dezembro de 2012. Institui a Política Nacional de Proteção dos Direitos da Pessoa com Transtorno do Espectro Autista; e altera o § 3o do art. 98 da Lei n. 8.112, de 11 de dezembro de 1990. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, ano 149, 2012.p.3. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/CCivil_03/_Ato2011-2014/2012/Lei/12764.htm> Acesso em 23 nov.2024.

BROD, D.J. ; Bosons vs. Fermions – A computational complexity perspective**. Revista Brasileira de Ensino de Física,** vol. 43, 2021.

BUSHRA, H. Imagem da internet: Medium. Disponível em: https://haquebushra.medium.com/navigating-the-map-of-quantum-computing-ad3a3733a573. Acesso em: 14 de abril de 2023.

CABRAL, G.E.M.; LIMA, A.F.; JR, B.L; Interpretando o algoritmo de Deutsch no interferômetro de Mach-Zehnder. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 26, 2004.

CALDEIRA, A. O.; Feynman, dissipação e computação quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.40, 2018.

CAMARGO, M. C., BARROS, R. M., BRANCHER, J. B., BARROS, V.T.O., SANTANA, M. **Designing Gamified Interventions for Autism Spectrum Disorder: A Systematic Review**, 2019, doi: 10.1007/978-3-030-34644-7_28

CANABARRO, A.; MENDONÇA, T.M.; NERY, R.; MORENO, G.; ALBINO, A.A.; JESUS, G.F., CHAVES, R.; Quantum Finance: um tutorial de computação quântica aplicada ao mercado financeiro. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.44,2022.

CARVALHO, A. M. P.; GIL-PÉREZ, D. **Formação de professores de Ciências:** tendências e inovações. São Paulo: Cortez, 2009.

CARVALHO, A.A.A. (1993). **Utilização e exploração de documentos audiovisuais**. Revista Portuguesa de Educação. Instituto de Educação.p.113-121.

CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. Um ensino fundamentado na estrutura da construção do conhecimento científico**.** Schème: **Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia genéticas**, v. 9, p. 131-158, 2017.

DIMENSIONS. Digital Science Research Solutions. 2018. Disponível em: <https://app.dimensions.ai>. Acesso em: 30 abril 2024.

DISTLER, R. R. Contribuições de David Ausubel para a intervenção psicopedagógica. **Revista Psicopedagogia**, São Paulo, v.32, n.98, p. 191-199, 2015. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/pdf/psicoped/v32n98/09.pdf Acesso em: 3 dez. 2023.

FARDO, M. L. **A gamificação aplicada em ambientes de aprendizagem. Novas Tecnologias na Educação**, Caxias do Sul, v. 11, n. 1, p.1-8, jul. 2011.

FERNANDES, G. P. L. M.; RICARDO, A.C.; CARDOSO, F. R.; VILLAS-BOAS, C.J.; Íons Aprisionados como Arquitetura para Computação Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 45, n. p2023.

FURTADO, J.; **Helayël-NETO, J.A.** Teoria de Grupos e o Papel das Simetrias em Física. Revista Brasileira de Ensino de Física,2020. Disponível em:https://www.scielo.br/j/rbef/a/tx6ZpVfzWmbwNgKFLGznmfJ/?lang=pt#.Acesso em 16 de julho de 2023.

GALVÃO, K.K.; RODRIGUES I.I**. Introdução à Computação Quântica**. [s.d.].

GRIFFITHS, David J. **Mecânica quântica.** Tradução: Lara Freitas. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

GROSMAN, P. H.; BRAGA, D. G.; HUGUENIN, J. A.; Realização experimental da simulação do algoritmo de Deutsch com o interferômetro de Mach-Zehnder**. Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.41, 2019.

IBGE-INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA**. Censo demográfico 2023.**Brasília, DF:IBGE,2023.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar**, Volume 1, Conjuntos e Funções, São Paulo: Editora Atual, 8ª Edição, 2004.

JESUS, G. F.; SILVA, M. H. F. S.; NETTO, T. G. D.; GALVÃO, L. Q.; SOUZA F. G. O. S.; CRUZ, C.; Computação quântica: uma abordagem para a graduação usando o Qiskit. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.43,2021.

JORCUVICH, W. N. S. **Uma introdução à Computação Quântica**. São Paulo-SP,2018.

JOSÉ,M.A.;PIQUEIRA,J.R.C.;LOPES,R.D.; Introdução à programação quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.35, 2013.

LANDI, Gabriel. **Investimentos em tecnologias quânticas 2.0 ganham o mundo. Agência USP de Inovação, 2019.Disponível em:** https://www.inovacao.usp.br/investimentos-em-tecnologias-quanticas-2-0-ganham-o-mundo/

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. **Álgebra Linear**. 4. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

MICHAELIS: dicionário escolar inglês: inglês-português, português-inglês. 2ª. Ed. São Paulo: Melhoramentos, 2009. 838 p. ISBN 978-85-06-06015-5.

MOREIRA M. A. **Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências: A Teoria da Aprendizagem Significativa.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1 ed., 2009.

MOREIRA, M.A., Caballero, M.C. e Rodríguez, M.L. (orgs.). **Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo**. Burgos, España. pp. 19-44,1997.

MOREIRA, Marco Antônio. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área**. Revista Investigações em Ensino de Ciências.** Rio Grande do Sul,1996. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf.

MOREIRA, Marco Antônio. **Desafios no ensino da Física**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 43, 2021.

MOREIRA, Marco Antônio. **I Workshop sobre Mapeamento Conceitual**, São Paulo, Brasil, 2013.Disponível em:http://50anos.if.ufrj.br/MinicursoMoreira_files/Moreira_APRENDIZAGEM_SIGNIFICATIVA_EM_MAPAS_CONCEITUAIS.pdf.

MOREIRA, Marco Antônio. **O que é afinal aprendizagem significativa?** Instituto de Física-UFRGS. Porto Alegre, 2016.

MOREIRA, Marco Antônio. **Pesquisa básica em educação em ciências: uma visão pessoal**. Instituto de Física, Universidade Federal do rio Grande do Sul (UFRGS) 91501-970 Porto Alegre, RS, Brasil, 2004, moreira@if.ufrgs.br http://www.if.ufrgs.br/~moreira.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 2014.

MOREIRA, Marco Antônio. **Uma análise crítica do ensino de Física. Estudos avançados**, v. 32, p. 73-80, 2018. MOREIRA, Marco Antônio. Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares. Editora livraria da Física, 2011.

MOREIRA, Marco Antônio; Massoni, Neusa **Noções básicas de epistemologias e teorias de aprendizagem como subsídios para a organização de sequências de ensino-aprendizagem em Ciências/Física**. Marco Antônio Moreira, Neusa T. Massoni-São Paulo: Editora Livraria da Física,2016.

MOREIRA, Marco Antôno. Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física.Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 23 de abril de 2010.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L**. Quantum Computation and Quantum Information**. Cambridge: Cambridge U.P., 2000.

NOVAK, J.D. and GOWIN, D.B. (1984). Learning how to learn. Cambridge, Cambridge.University Press.

NOVAK, Joseph D. CAÑAS ALBERTO J. 2010. **A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los**. Associate Director – Florida Institute for Human and Machine Cognition (IHMC). E-mail: acanas@ihmc.us.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica 4: ótica, relatividade, física quântica**. São Paulo: Ed. E. Blücher, 1998.VI, 437p.

OLIVEIRA, A. N.; OLIVEIRA, E. V. B.; SANTOS, A. C.; VILLAS-BOAS, C.J.; Algoritmos quânticos com IBMQ Experience: Algoritmo de Deutsch-Jozsa. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.44, 2022.

ONU. Organização das Nações Unidas. **Educação 2030 no Brasil.** 2015. Disponível em: https://pt.unesco.org/fieldoffice/brasilia/expertise/education-2030-brazil. Acesso em: 12 fev 2023.

PAIVA, F.J. Prevalência de autismo: 1 em 36 é o novo número do CDC nos EUA.Disponível em: https://www.canalautismo.com.br/noticia/prevalencia-de-autismo-1-em-36-e-o-novo-numero-do-cdc-nos-eua/.Acesso em:14 ago. 2024.

PLANETMATH.ORG. Disponível em: https://planetmath.org/. Consultado em 25 de agosto de 2023.

PORTILHO, E. **Como se aprende?** Estratégias, Estilo e Metacognição. 2. Ed. Rio de Janeiro:WAK, 2011. 164 p.

PORTUGAL, Renato. **Basic Quantum Algorithms.** 2022. Submitted on 25 Jan 2022 (v1), last revised 12 Apr 2023.

PORTUGAL, Renato. **Uma Introdução à Computação Quântica.** 2ª edição – São Carlos SP: SBMAC, 2012.

PROJETO POLÍTICO PEDAGÓGICO. **Colégio Estadual Polivalente de Camaçari, 2024.** Disponível em:

https://drive.google.com/file/d/1X_zHXO1SIx5LLCo8BN5H-NlwrnrriJZR/view?usp=sharing

RABELO, W. R. M.; COSTA, M. L. M.; Uma abordagem pedagógica no ensino da computação quântica com um processador quântico de 5-qbits. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.40, 2018.

Revista Chilena de Educación Científica, ISSN 0717-9618, Vol. 7, Nº. 2, 2008, pp. 23-30. Revisado em 2012.

Revista Ciência Hoje, Vol. 33, n.193, maio de 2003.

SAKURAI, J.J.; NAPOLITANO, J; **Mecânica Quântica Moderna** (Bookman, Porto Alegre, 2013), 2ª ed.

SANTOS, A. C.; O Computador Quântico da IBM e o IBM Quantum Experience. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.39, 2017.

SENA,V. L. O.;PINTO, D. O. S.; O isomorfismo inesperado entre um sistema de bilhar e um algoritmo quântico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.43, 2021.

SILVA, J. B.; SALES, G.L.; CASTRO, S.B.; Gamificação como estratégia de aprendizagem ativa no ensino de Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol.41,2019.

SOUZA, P.J.P.; MENDONÇA, T.M.; OLIVEIRA, E.V.B.; VILLAS-BOAS, C.J.; Computação Quântica Adiabática: Do Teorema Adiabático ao Computador da D-Wave. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 43,2021.

VERÍSSIMO, Rafael. **Aplicações da Computação Quântica.** Brazil. Quantum, 2020.Disponível em: https://brazilquantum.medium.com/aplica%C3%A7%C3%B5es-da-computa%C3%A7%C3%A3o-qu%C3%A2ntica-891801404cfe.Acesso em 07 de ago de 2024.

APÊNDICE A – MATRIZES DE PAULI:

1 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS:

1.1 Vetores:

Para a compreensão de Computação Quântica, faz-se necessária uma revisão de Álgebra Linear. Os vetores têm magnitude, direção e sentido (GRIFFITHS, 2011, p.2). Definimos quatro operações vetoriais: soma e três tipos de multiplicação.

Primeiro vamos definir o que é uma base de espaço vetorial, segundo (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2011, p. 132).

De início, enunciamos duas maneiras equivalentes de definir uma base de um espaço vetorial V.

Definição 1. Um conjunto $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de vetores é uma base de V se tiver as duas propriedades seguintes:

(i) S é linearmente independente.

(ii) S gera V.

Definição 2. Um conjunto $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de vetores é uma base de V se cada vetor puder ser escrito de maneira única como uma combinação linear dos vetores da base. O seguinte é um resultado fundamental da Álgebra Linear.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS E DEFINIÇÃO:

No início do século XX, o mundo da física tem uma revolução de descobertas com o advento da Mecânica Quântica. Seguindo essas descobertas, nasce Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958) -físico austríaco, posteriormente suíço e norte-americano. Seu prestígio fica evidente ao fazer uma revisão da relatividade geral (reconhecido e muito elogiado pelo próprio Einstein posteriormente). O princípio de exclusão-que leva seu nome foi de enorme importância para a compreensão da estrutura interna da matéria. Outro feito por Pauli, foi a introdução das matrizes que também levam seu nome. Essas matrizes são um conjunto de três matrizes hermitianas consagradas na física pelo estudo dos spins de férmions (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013, p. 167).

São elas:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Uma propriedade importante é que:

$$\sigma_x = \sigma_x{}^{\dagger}; \sigma_x = \sigma_x{}^{\dagger}; \sigma_z = \sigma_z{}^{\dagger}; \quad (2)$$

Assim...

$$\sigma_x . \sigma_x{}^{\dagger} = I = \sigma_y . \sigma_y{}^{\dagger} = \sigma_z . \sigma_z{}^{\dagger}; \quad (3)$$

Logo, são chamadas de Hermitianas (ver ANEXO A).

Podemos considerar que:

> *"As matrizes de Pauli formam uma base (através de coeficientes reais) para o espaço vetorial das matrizes hermitianas 2x2.Assim, qualquer matriz hermitiana 2x2 pode ser escrita como uma combinação linear de matrizes de Pauli (sendo, portanto, Linearmente Independentes), com todos os seus coeficientes sendo números reais."* (*planetmath.org*. 29 de dezembro de 2018). Consultado em 25 de agosto de 2023).

Outra característica peculiar das matrizes de Pauli é que elas fazem parte do grupo SU_2[5] em espaços com dimensão dois.

Matematicamente, pode-se demonstrar que as matrizes de Pauli formam uma base vetorial, sendo linearmente independentes (L.I.). Assim:

$$\alpha_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Fazendo o produto dos coeficientes pelas matrizes de Pauli,

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_x \\ \alpha_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_y i \\ \alpha_y i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_z & 0 \\ 0 & -\alpha_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

---

[5] O grupo SU_2 é o grupo das matrizes ortogonais 2×2 reais com determinante (de módulo) igual a 1. (BARATA,2024).

Aplicando propriedades de matrizes (como no ANEXO A), temos:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0+\alpha_z & \alpha_x-i\alpha_y \\ \alpha_x+\alpha_y i & \alpha_0-\alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Ou, colocando os termos numa matriz "blocada", tem-se:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Assim, chega-se *a*

$$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha_0 = 0. \qquad (8)$$

Tomemos uma matriz arbitrária 2x2 hermitiana:

$\begin{pmatrix} a_1+ib_1 & a_2+ib_2 \\ a_3+b_3 i & a_4+b_4 \end{pmatrix}$. Fazendo b_1 *e* b_4 iguais a zero, temos $\begin{pmatrix} a_1 & a_2+ib_2 \\ a_3+ib_3 & a_4 \end{pmatrix}$, com $a_i\ , b_i \epsilon\ R$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2+ib_2 \\ a_3+ib_3 & a_4 \end{pmatrix} = \alpha_x\sigma_x + \alpha_y\sigma_y + \alpha_z\sigma_z + \sigma I \qquad (9)$$

Assim...

$$\begin{pmatrix} \alpha_0+\alpha_z & \alpha_x-i\alpha_y \\ \alpha_x+\alpha_y i & \alpha_0-\alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2+ib_2 \\ a_3+ib_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

O que implica nas seguintes relações de sistemas lineares:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_z = a_1 \\ \alpha_0 - \alpha_z = a_4 \\ \alpha_x + \alpha_y i = a_2 - ib_2 \\ \alpha_x - \alpha_y i = a_2 + ib_2 \end{cases} \qquad (11)$$

Logo, chegamos às seguintes conclusões:

$$\alpha_x = a_2 \tag{12}$$

$$\alpha_y = -\,b_2 \tag{13}$$

$$2\alpha_0 = a_1 + a_4 \rightarrow \alpha_0 = \frac{\alpha_1+\alpha_4}{2} \tag{14}$$

$$2\alpha_z = a_1 - a_4 \rightarrow \alpha_z = \frac{a_1-a_4}{2} \tag{15}$$

Dados $a_1, a_2, b_2\ e\ a_4$, encontramos $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\ e\ \alpha_0$ tais que:

$$\alpha_x\sigma_x+\alpha_y\sigma_y + \alpha_z\sigma_z + \alpha_0 I = H_2 \tag{16}$$

Logo, as matrizes de Pauli formam uma base no espaço vetorial de dimensão dois.

3 PRODUTOS TENSORIAIS NAS MATRIZES DE PAULI :

As matrizes de Pauli são os geradores do grupo SU_2. A matriz identidade não pertence aos geradores de SU_2 ,pois as matrizes para pertencerem a esse grupo, devem ser hermitianas e ter traço (soma dos elementos da diagonal principal) nulo. (Heläyel-Neto,2020). Como foi dito anteriormente, as matrizes de Pauli são hermitianas. Podemos construir 16 matrizes 4x4, tomando o produto tensorial das matrizes de Pauli. Por exemplo:

Fazendo o produto tensorial de $\sigma_x\ por\ \sigma_x$, temos:

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Similarmente, para as outras matrizes de Pauli e suas combinações:

$$\sigma_x \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\sigma_x \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\sigma_y \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\sigma_y \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Aplicando a transposição ao produto tensorial, temos por propriedade:

$$(\sigma_x \otimes \sigma_y)^t = ({\sigma_x}^t \otimes {\sigma_y}^t) \tag{26}$$

Logo, por propriedade, temos:

$$\sigma_x . {\sigma_x}^t = \sigma_y . {\sigma_y}^t = I \otimes I \tag{27}$$

Podemos considerar todas as combinações possíveis dos produtos tensoriais, a saber. Utilizamos também que:

$$(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t . \tag{28}$$

APÊNDICE B - APOSTILA DE COMPUTAÇÃO QUÂNTICA E LEVANTAMENTO DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Colégio Estadual Polivalente de Camaçari.

Professor: César

Disciplina: Inclusão Digital

Estudantes:

Data:22/05/24

APOSTILA DE COMPUTAÇÃO QUÂNTICA:

A computação quântica é a ciência que estuda as aplicações das teorias e propriedades da mecânica quântica na Ciência da Computação. Dessa forma, seu principal foco é o desenvolvimento do computador quântico. Na computação clássica, o seu processamento é sequencial.

Entretanto, os computadores atuais possuem limitações, como ,por exemplo, na área de Inteligência Artificial (IA), onde não existem computadores com potência ou velocidade de processamento suficiente para suportar uma IA avançada. Dessa forma, surgiu a necessidade da criação de um computador alternativo dos usuais que resolvesse problemas de IA, ou outros como a fatoração em primos de números muito grandes e simulação de problemas da Física Quântica.

A Lei de Moore afirma que a velocidade de um computador é dobrada a cada 12 meses. Assim, sempre houve um crescimento constante na velocidade de processamento dos computadores. Entretanto, essa evolução tem um certo limite, um ponto onde não será possível aumentar essa velocidade e então se fez necessária uma revolução significativa na computação para que este obstáculo fosse quebrado. E, assim, os estudos em Computação Quântica se tornaram muito importantes e a necessidade do desenvolvimento de uma máquina extremamente eficiente se torna maior a cada dia.

História da Computação Quântica: A pesquisa para o desenvolvimento da computação quântica iniciou-se já na década de 50 quando pensavam em aplicar as leis da física e da mecânica quântica nos computadores. Em 1981 em uma conferência no MIT o físico Richard Feynman apresentou uma proposta para utilização de sistemas quânticos em computadores, que teriam então uma capacidade de processamento superior à dos computadores comuns. Assim, disse:

"... seriam os fenômenos da mecânica quântica eficientemente simuláveis numa máquina de Turing clássica? Feynman apresentou boas razões para acreditar que a resposta fosse negativa, argumentando que tal simulação parece impossível sem incorrer num retardo exponencial. Além disso, sugeriu que para poder simular eficientemente a evolução dos sistemas quânticos seriam necessários computadores que funcionassem de acordo com as leis da mecânica quântica; não definiu, porém, um modelo apropriado para tal objetivo.". Feynman (1982) apud AGUDELO (2009. pg.85)

Já em 1985, David Deutsch, da Universidade de Oxford, descreveu o primeiro computador quântico, uma Máquina de Turing Quântica, ele simularia outro computador quântico. Depois de Deutsch, apenas em 1994, houve notícias da computação quântica, quando em Nova

Jersey, no Bell Labs, da AT&T, o professor de matemática aplicada Peter Shor desenvolveu o Algoritmo de Shor, capaz de fatorar grandes números numa velocidade muito superior à dos computadores convencionais. Em 1996, Lov Grover, também da Bell Labs, desenvolveu o Speedup, o primeiro algoritmo para pesquisa de base de dados quânticos. Nesse mesmo ano, foi proposto um modelo para a correção do erro quântico. Em 1999 no MIT, foram construídos os primeiros protótipos de computadores quânticos utilizando montagem térmica. No ano de 2007, surge o Orion, um processador quântico que realiza tarefas práticas foi desenvolvido pela empresa canadense D-Wave. Em 2011 a D-Wave, o D-Wave One, que possui um processador de 128 q-bits. Porém o D-Wave One ainda não é totalmente independente, precisa ser usado em conjunto com computadores convencionais. Em 2017, a D-Wave Systems lançou comercialmente o 2000Q, um computador quântico de 2000 q-bits a módicos US$ 15 milhões. O computador quântico anterior da companhia tinha 1.000 q-bits. Ainda há especulações de que esses computadores não sejam totalmente quânticos.

Em 2017, O físico brasileiro Guilherme Tosi, juntamente com uma equipe de pesquisadores da Universidade de Nova Gales do Sul, na Austrália, inventou uma nova arquitetura radical para a computação quântica, baseada em ‘flip-flop q-bits’ que pode ser usada em um novo tipo de computador quântico permitindo, assim, a fabricação de processadores quânticos em larga escala pode se tornar muito mais barata – e mais fácil – do que se pensava ser possível, sem a necessidade do processo complicado da colocação precisa dos átomos de silício no processador.

Quebras de paradigmas: A computação quântica quebra inúmeros paradigmas da computação clássica, na qual podemos dividir os problemas em "problemas tratáveis" e "problemas intratáveis".

Todos os elementos que mudam as estruturas clássicas vêm das mudanças que a física clássica trouxe. Físicos como: Heisenberg, Bohr, Schrödinger e Einstein estudaram esses novos fundamentos.E foi graças a estes princípios que foi possível o desenvolvimento da Computação Quântica.

Fonte:https://pt.wikipedia.org/wiki/Computa%C3%A7%C3%A3o_qu%C3%A2ntica

Comparação entre os tempos estimados para fatoração de números de tamanhos diferentes com o algoritmo clássico e com o de Shor.

Tamanho do Número a Ser Fatorado (em bits)	Tempo de Fatoração por Algoritmo Clássico	Tempo de Fatoração por Algoritmo Quântico
512	4 dias	34 segundos
1024	100 mil anos	4,5 minutos
2048	100 mil bilhões de anos	36 minutos
4096	100 bilhões de quatrilhões de anos	4,8 horas

Fonte: Revista Ciência Hoje, Vol. 33, n.193, maio de 2003.

Questões:

1) O que você já leu, ouviu, ou viu sobre Mecânica Quântica?

2) Onde a Mecânica Quântica é aplicada atualmente?

3) O que difere a Mecânica Quântica das outras áreas da Física (Mecânica, Termodinâmica Eletromagnetismo Clássicos)?

4) É possível que a Mecânica Quântica seja aplicada em computadores para torná-los mais rápidos e com uma capacidade de processamento maior? Por quê?

APÊNDICE C – Produto Educacional

UNEB-UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA

INSTITUTO/DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA-DCET
CAMPUS I-SALVADOR
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA
POLO 60

Autor: César Alexandre Oliveira Malta

Coautores: José Carlos Oliveira de Jesus
Marco Antônio Silva Trindade

PRODUTO EDUCACIONAL

"Q-MATRIX":

Salvador
2024

César Alexandre Oliveira Malta

"Q-MATRIX":

Este produto educacional é parte integrante da dissertação: "Q-Matrix: um jogo de tabuleiro integrado a uma unidade de ensino potencialmente significativa para uma abordagem de conceitos de computação quântica no ensino médio" desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, polo 60 – UNEB -BA, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Coautores:

Marco Antônio Silva Trindade

José Carlos Oliveira de Jesus

Salvador
2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Biblioteca Professor **Edivaldo Machado Boaventura - UNEB – Campus I**
Bibliotecária: Patricia Morena Batista da Sila – CRB5/1662

M261q Malta, César Alexandre Oliveira

Q-Matrix: / César Alexandre Oliveira Malta Moreira, Marco Antônio Silva Trindade, José Carlos Oliveira de Jesus. - Salvador, 2024.

27f.: il.

Este produto educacional é parte integrante da dissertação: "Q-Matrix um jogo de tabuleiro integrado a uma unidade de ensino potencialmente significativa para uma abordagem de conceito de computação quântica no ensino médio."

1. Jogo de tabuleiro - Educação. 2. Computação quântica. 3. Criança autista - Educação 4. Tecnologia educacional. I. Trindade, Marco Antônio Silva. II. Jesus, José Carlos Oliveira de. III. Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Exatas e da Terra. Campus I. IV. Título.

CDD: 371.337

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais que me deram a dádiva da vida, a companhia da minha irmã, que é minha referência, à minha ex-companheira que compartilhou os momentos turbulentos e laminares deste caminho e às minhas filhas que me dão a alegria de viver.

Agradeço também aos colegas do Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF) e aos professores do programa que me auxiliaram durante essa jornada em busca de uma melhor formação.

Agradeço ao meu coorientador José Carlos Oliveira de Jesus por sua paciência e esforço nas orientações semanais (mesmo fora do escopo do MNPEF) e ao nosso orientador Marco Antônio Silva Trindade pela compreensão, atenção e gentileza nas sugestões para a construção de um trabalho mais essencial.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL E MANUAL

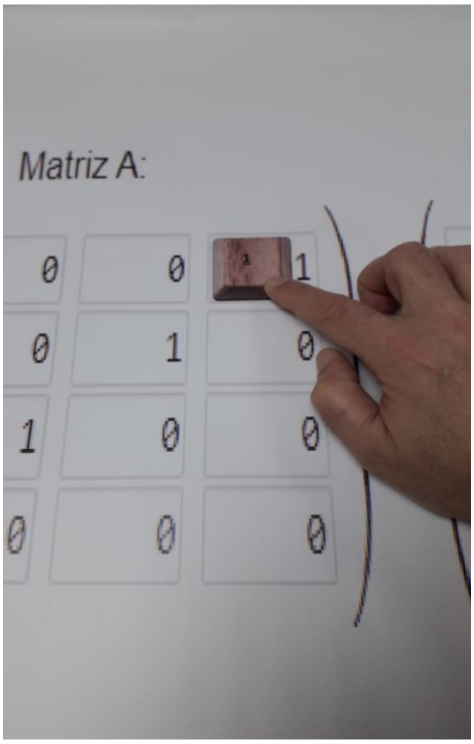
1.1 APRESENTAÇÃO DO PRODUTO

O jogo refere-se a um “quiz” de perguntas e respostas, envolvendo estudantes do terceiro ano do Ensino Médio-incluindo discentes do espectro autista. À medida que os discentes avançam no jogo de tabuleiro, os elementos do produto de duas matrizes são descobertos, revelando os elementos das matrizes A e B, sendo que cada matriz 4x4 é um produto tensorial de duas Matrizes de Pauli e elas formam uma base com coeficientes reais para o espaço vetorial das matrizes hermitianas e unitárias 2x2. O jogo terminará quando a 32ª casa da matriz B for descoberta e ganhará o game quem descobrir o maior número de casas. O jogo corresponde ao produto de duas matrizes A e B, dando uma terceira matriz identidade I, fixa. Os elementos de cada matriz A e cada matriz B estão encobertos por fichas numeradas de 1 a 32, pois as matrizes A e B possuem 16 elementos cada.

1.2 MANUAL DO PRODUTO

O game compõe-se de um tabuleiro de 1,0 metro de comprimento e 50 cm de largura, 01 dado de seis faces, com 32 peças numeradas progressivamente. Para jogar, os estudantes devem dispor as 32 peças sobre o tabuleiro (com “zeros” e “uns” inspirados no filme *Matrix*) de modo ordenado, indo do primeiro elemento da primeira matriz do produto ao último elemento da segunda matriz do produto, encobrindo seus numerais. O jogo também é composto por 32 fichas que correspondem às perguntas (vide detalhamento do jogo), pois elas serão as perguntas do jogo com o enredo como exemplificado. Recomenda-se jogar com dois participantes.

Figura 1-Proporção tecla versus elemento da matriz a ser descoberto pelo jogador.



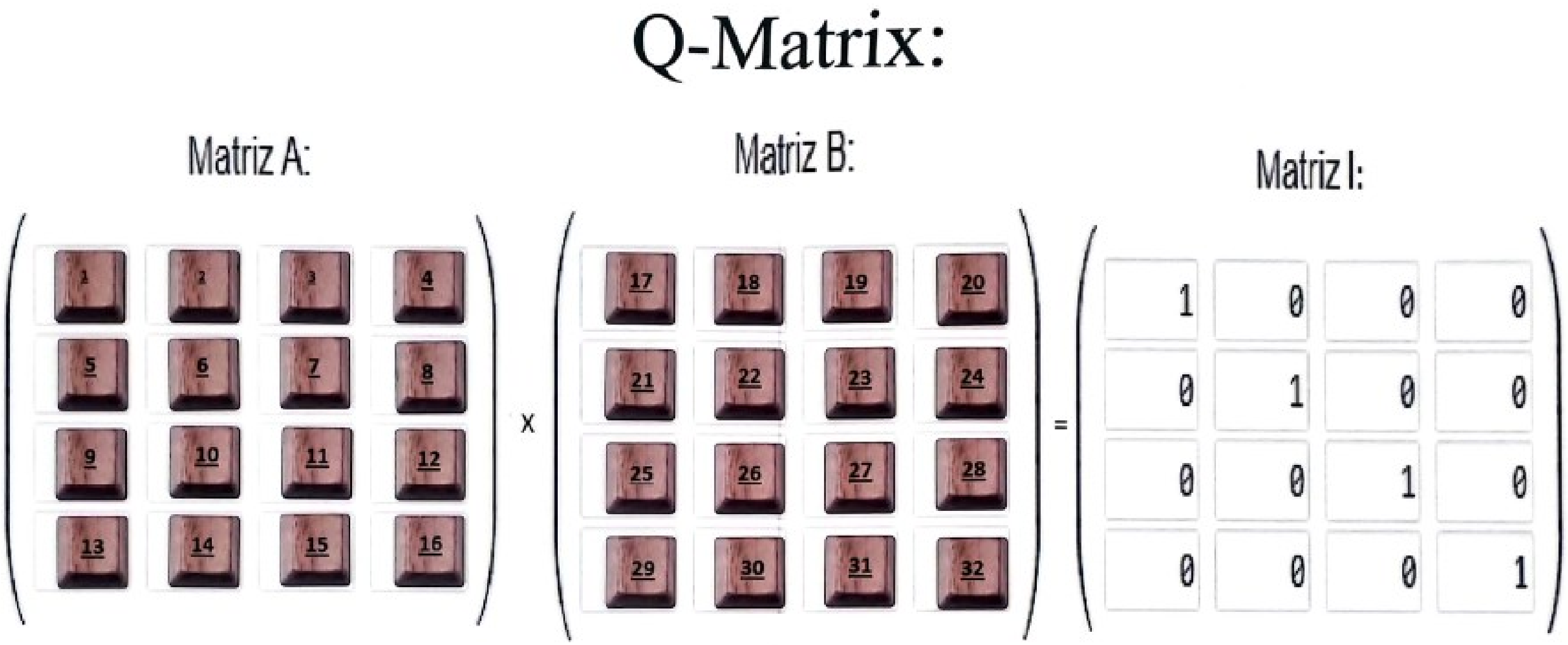
Fonte: Próprio Autor.

2 ENREDO DO PRODUTO: "JOGO Q-MATRIX”

Alt é um especialista em computação quântica dotado de altas habilidades que é mal interpretado por ser autista e fica desanimado com o preconceito e exclusão na Q-Matrix (mundo das aparências), até entrar num mundo paralelo (quando começa o jogo).À medida que começa a jogar nesse novo mundo, **Alt** é procurado por um grupo de pessoas que se dizem “experts” em quântica (**End, Del, *Morpheus***) e afirmam saber de uma verdade que a maioria não sabe, deixando a critério do protagonista: jogar e optar por conhecer a verdade e mudar sua vida para sempre ou continuar sendo enganado pela Q-Matrix e esquecer todas as suas descobertas. **Alt** decide então conhecer a verdade e jogar. Assim, **Alt** vai percebendo que também é capaz de vencer as dificuldades impostas pelos desafios do jogo. Com o passar das fases, **Alt** recebe estímulos e incentivos para continuar a sua saga. Ao fim do jogo, **Alt** desvenda uma propriedade muito interessante da quântica matricial, sendo libertado da antiga Q-Matrix com as essências puras das coisas do mundo (vide Platão).

3 DETALHAMENTO DO PRODUTO

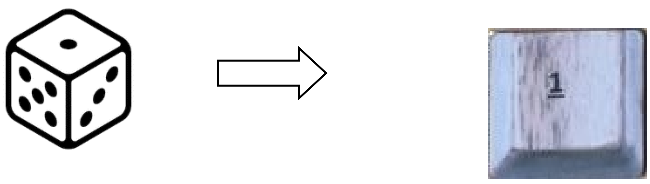
Figura 2: Tabuleiro antes do início do jogo:



Fonte: Próprio Autor.

Para o primeiro passo, um dado não viciado é jogado. Aquele que atingir o maior número, começa a jogar.

Descobrindo a tecla 1:



Alt é um programador autista especialista em computação quântica que entra em um novo mundo chamado Q-Matrix.

Ajude Alt a desvendar o primeiro segredo desse novo mundo, respondendo a primeira pergunta. Mas, para conhecer o "Novo Mundo”, ele precisa ter confiança do “Velho Mundo”. Ajude a responder a seguinte questão...

Quem foi o criador do computador Clássico?

a) Alexander Graham Bell.

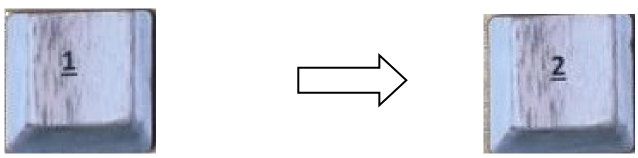
b) Guglielmo Marconi.

c) Charles Babbage.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 2:

Alt está entediado, pois já conhece a computação clássica. Ajude-o a aumentar a sua autoestima, respondendo à pergunta:



O que é um Computador Clássico?

a) É um computador que utiliza as leis da mecânica quântica.

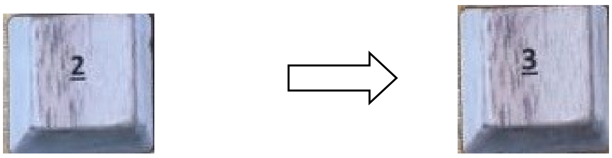
b) É um computador que opera utilizando os bits zeros e uns.

c) É um computador no qual o 1 é um estado de baixo potencial elétrico e 0 é um estado de alto potencial elétrico.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 3:

Vamos Alt! Continue! Alguém muito sábio disse: “A persistência é o caminho do êxito!”



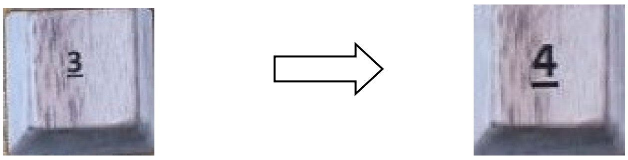
Qual físico renomado apontou para a existência futura de computadores quânticos?

a) Albert Einstein.
b) Isaac Newton.
c) Richard Phillips Feynman.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 4:

Alt encontra um indivíduo incomum na Q-Matrix chamado Del. Del quer que Alt apague o "Mundo Clássico" (Para Del a Computação Quântica é melhor em todos os aspectos do que as ditas "velhas máquinas") e desafia Alt com a seguinte pergunta:



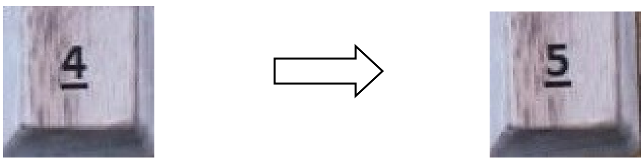
Qual é a utilidade de um computador quântico?

a) capaz de fazer jogos pesados rodar.
b) capaz de estudar o desenvolvimento de algoritmos e softwares.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 5:

Alt retruca Del e afirma que as duas computações podem caminhar juntas, num paralelismo, talvez quântico. Del diz: Você é autista! Isso não pode acontecer. É coisa da sua imaginação! Para convencer Alt de que a computação quântica é melhor ele desafia Alt a responder à pergunta:



Qual é o significado de tecnologia quântica?

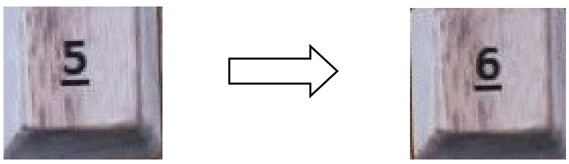
a) Antigo campo da física e da engenharia, que dá a algumas das estranhas características da mecânica quântica.

b) Novo campo da física e da engenharia, que dá a algumas das estranhas características da mecânica quântica.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 6:

Alt quer saber se esse Novo Mundo é realmente bom. Para isso, desafia Del com a seguinte questão:



Quem foi a primeira pessoa que desenvolveu o primeiro algoritmo quântico para decompor grandes números inteiros em fatores primos?

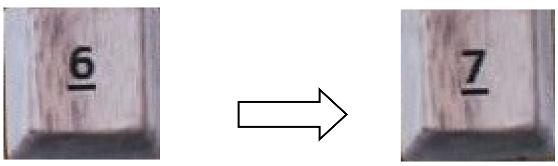
a) Peter Shor, no Bell Labs da AT&T em Nova Jersey.

b) David Deutsch, na Universidade de Oxford.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 7:

Del está certo de que a computação quântica é melhor. Assim, insiste:



Qual conceito NÃO é importante para o entendimento da teoria quântica:

a) Nenhuma as alternativas.

b) Superposição

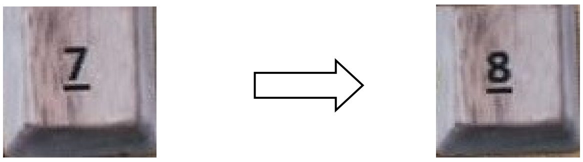
c) Equação de Erwin Schrödinger

d) Constante de Planck

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 8:

Humm...Realmente, Del. Existe muita gente boa por trás da computação quântica. Alt tem uma dúvida e pergunta para Del...



As portas lógicas quânticas são reversíveis em computadores quânticos?

a) Nunca.

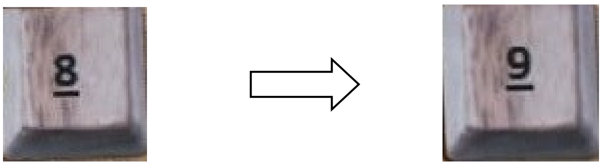
b) Sim.

c) Depende.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 9:

Alt encontra End (também uma especialista de computação quântica) na Q-Matrix. Parece que ele se interessou pela garota. Vai tentar impressioná-la com a seguinte pergunta:



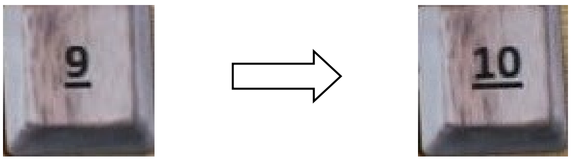
Os bits quânticos diferem dos bits clássicos em qual aspecto?

a) Nos bits clássicos, a informação pode estar tanto no bit zero quanto no bit 1.
b) Nos bits quânticos, a informação só pode estar no estado zero ou no estado 1.
c) Nos bits quânticos, a informação pode estar tanto no estado zero quanto pode estar no estado 1.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 10:

Nossa, End é uma garota inteligente! Alt está mais interessado. Para matar a sua curiosidade, pergunta:



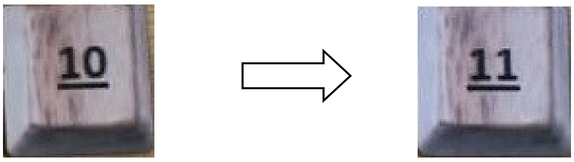
O que é um algoritmo?

a) Uma sequência de passos para resolver um determinado problema.
b) Uma linguagem de programação.
c) Um mecanismo de pesquisa.
d) Um software.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 11:

Nossa! Alt está voltando seu “hiperfoco” para End. Assim, pergunta:



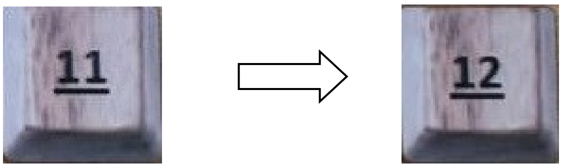
O que é um q-bit?

a) É um “objeto matemático” que armazena as informações da computação quântica.
b) É o mesmo que o bit clássico.
c) Refere-se a um valor de elevado potencial elétrico ou a um valor de baixo potencial elétrico.
d) É uma sequência de zeros e uns.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 12:

Del interessou-se por End também. Para mostrar a sua expertise em computação quântica e impressioná-la em falar de grandes empresas, pergunta para End para puxar conversa.



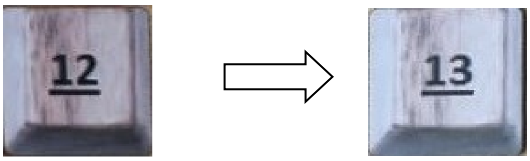
Que empresa deve ter sido a pioneira na comercialização de computadores quânticos?

a) IBM
b) GOOGLE
c) Microsoft
d) APPLE

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 13:

End percebe que Del só fala em computação quântica e percebe que os dois estão numa disputa para conquistá-la. Só que os dois não sabem que End veio por intermédio de "Morpheus" para dar "fim" na disputa de ambos! E está interessada na amizade dos dois pretendentes. Mas, disfarça e pergunta:



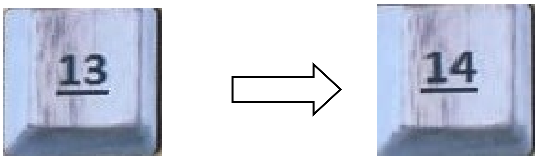
Na computação quântica, a informação pode estar presente em mais de um q-bit (diferentemente da computação clássica). Que princípio físico está por trás dessa condição?

a) Superposição.
b) Interferência.
c) Paralelismo.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 14:

End, continua para verificar a habilidade matemática dos garotos:



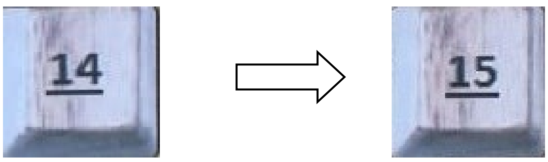
Para garantir a existência de um produto matricial entre duas matrizes, é necessário que:

a) A quantidade de elementos da primeira matriz seja igual ao número de elementos da segunda matriz.
b) O número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.
c) A quantidade de elementos da primeira matriz seja igual ao número de elementos da segunda matriz e o número de linhas da primeira matriz seja igual ao número de colunas da segunda matriz.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 15:

Del, continua a testar as habilidades quânticas de Alt com a pergunta...



O que é a Mecânica Quântica?

a) é a teoria que descreve o comportamento físico de sistemas microscópicos, como fótons, átomos e moléculas.
b) é a teoria que descreve o comportamento de corpos macroscópicos somente.

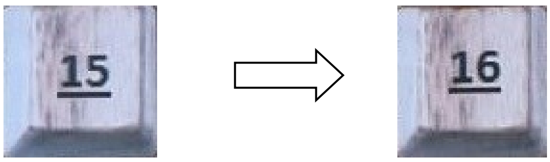
c) é a teoria que descreve o comportamento de corpos macroscópicos em movimento somente.

d) é a teoria que descreve com exatidão a posição e o momento linear de corpos microscópicos.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 16:

Wow! Alt acerta e sente-se mais confiante. End passa a admirá-lo por sua coragem diante de Del. Alt, é preciso reagir! Teste os conhecimentos de computação clássica de Del...



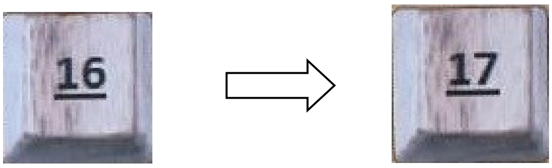
O Computador Clássico é também chamado:

a) Máquina de Hilbert.
b) Máquina de Turing.
c) Máquina de Schrödinger.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 17:

Del realmente está confiante em derrotar o Velho Mundo clássico. E quer tentar impressionar End num "golpe baixo" em Alt...



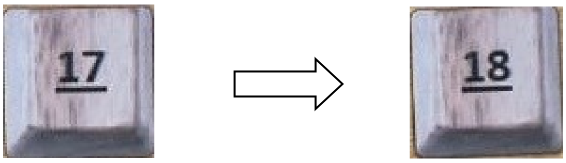
Quem publicou o primeiro algoritmo quântico?

a) Shor.
b) Grover.
c) Deutsch.
d) Turing.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 18:

Opa! Alt acerta mais uma vez. End fica extasiada com tamanho conhecimento. Del continua na sua saga para derrotar Alt.



Os computadores quânticos atuais funcionam seguindo essas condições:

a) Elevadas temperaturas.
b) Baixas temperaturas, majoritariamente.
c) Altas pressões.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 19:

Alt acerta mais uma. E, de fato, sua cognição está a mil. End passa a perceber as qualidades de Alt (a sua resistência diante de tantos questionamentos de Del). End passa a temer a segurança de Alt e lembra de um assunto presente na computação quântica. E indaga...

Qual é a área que envolve segurança na computação quântica?

a) Simulação Quântica.

b) Criptografia Quântica.

c) Pesquisa Quântica.

d) Otimização Quântica.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 20:

Alt lembra que pode criptografar quanticamente a Q-Matrix e protegê-lo dos perigos de Del. Del, insistente, desafia Alt mais uma vez com a pergunta:

Sobre os componentes de um computador quântico, podemos afirmar (há apenas uma alternativa correta!):

a) Possuem hardware e software, como um computado clássico.

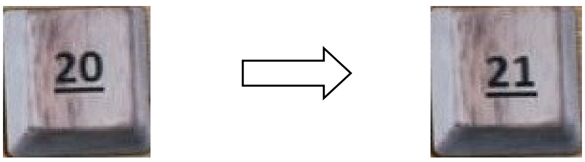
b) Possuem componentes diferentes, pois operam segundo as leis da Mecânica Quântica.

c) Possuem componentes diferentes, pois a unidade básica de um computador quântico é o q-bit.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 21:

Alt está impossível! Isso gera inveja em Del. End percebe e pergunta para Del na tentativa de despistá-lo da sua intenção em convencer Alt de que a computação clássica não serve mais!



Sobre a computação quântica, pode-se afirmar (há apenas uma alternativa correta):

a) Computadores quânticos só podem resolver questões vinculadas à física.

b) Computadores quânticos podem solucionar problemas futuramente em outras áreas do conhecimento como: medicina, economia, ciências naturais e tecnologia da informação, por exemplo.

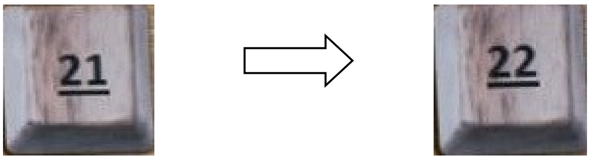
c) Computadores quânticos são lentos ao processar as informações.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 22:

Del acerta! Isso pode comprometer a convivência harmônica entre os dois mundos!

End lembra que computadores quânticos também têm seus pontos fracos. E pergunta para Del:



Sobre as dificuldades encontradas para a implementação de computadores quânticos, podemos citar:

a) Os computadores quânticos operam em elevadas temperaturas, por isso é necessário aquecê-los.

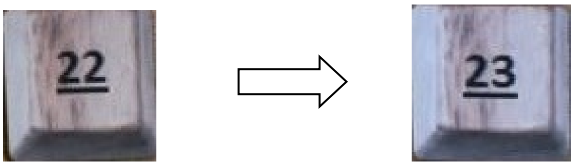
b) Os computadores quânticos são influenciados por perturbações externas, mas sua construção é simples.

c) A construção de computadores quânticos é complexa, as máquinas devem operar em baixas temperaturas e são muito sensíveis quando ocorrem perturbações externas.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 23:

End diz: Está vendo, Del! Computadores quânticos têm problemas também.



Alt fica inseguro se a computação quântica tem realmente solidez e pergunta para Del....

O termo “Computação Quântica” foi criado por:

a) Peter Shor e Lov Grover.

b) Richard Feynman e Deutsch.

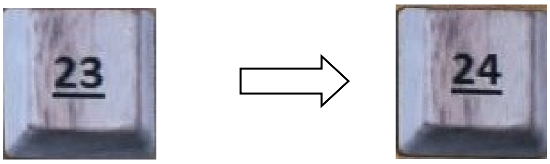
c) Peter Shor e Deutsch.

d) Lov Grover e Deutsch.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 24:

Mas Alt acredita tanto na coexistência entre os dois mundos que lembra de um grande feito e pergunta a Del.



O primeiro cientista que deve ter demonstrado fisicamente através de um experimento o funcionamento de um q-bit foi:

a) Isaac Chuang.

b) Peter Shor.

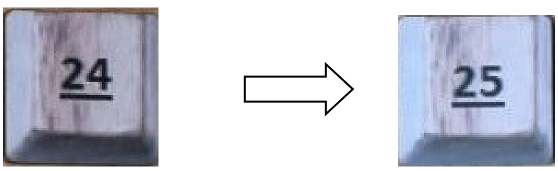
c) David Deutsch.

d) Lov Grover.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 25:

Del acerta, mas ainda acredita que só a computação quântica vai vigorar. E devolve a pergunta para Alt:



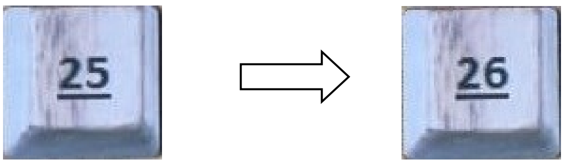
Sobre computação quântica, assinale a alternativa falsa:

a) Existem inúmeros computadores quânticos operando atualmente, dada a sua elevada capacidade de processamento.
b) Poucos computadores quânticos operam no mundo e estão sob o domínio de grandes corporações ou governos, pois podem representar uma ameaça (dada a sua elevada capacidade de processamento), podendo "quebrar" códigos criptografados pela computação clássica.
c) Apesar das informações promissoras acerca da computação quântica, existem poucos computadores quânticos em operação no mundo.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 26:

Alt acerta! Na certeza na harmonia entre os mundos, pergunta sobre uma correspondência entre a computação quântica e a clássica para End...



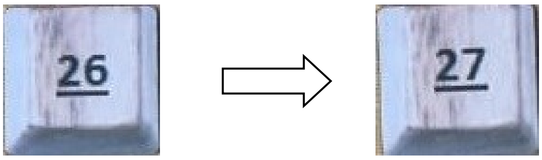
Um q-bit corresponde a 2^n bits. Assim, 1 q-bit é...

a) 3 bits.
b) 2 bits.
c) 4 bits.
d) 6 bits.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 27:

End consegue responder positivamente. Del está cada vez mais convencido da coexistência entre as computações. Porém, ainda resiste, perguntando para Alt:



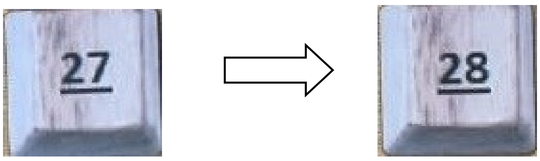
Um q-bit correspondem a 2^n bits. Assim, 2 q-bits são...

a) 2 bits.
b) 3 bits.
c) 16 bits.
d) 4 bits.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 28:

Alt acerta e, com essa resposta, Del está menos convencido de que a computação quântica vai substituir por completo a clássica. O certo é que “rolou uma química” entre End e Alt. End lembra dessa disciplina e pergunta para Alt...



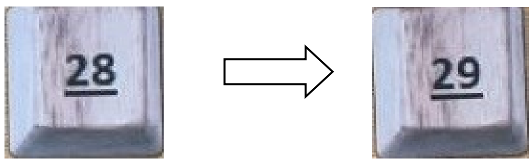
Que elementos químicos podem ser utilizados na refrigeração de computadores quânticos?

a) Nitrogênio e Argônio.
b) Oxigênio e Hélio.
c) Nitrogênio e Hélio.
d) Nitrogênio e Oxigênio.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 29:

Alt acerta o coração de End. Del, irritado, no último recurso, pergunta para Alt:



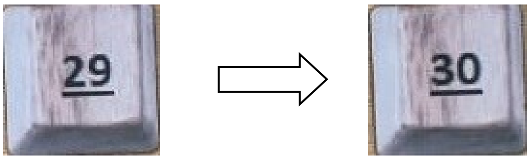
Quais os países que estão na frente das pesquisas em computação quântica?

a) Brasil, França e Portugal.
b) Canadá, Estados Unidos e China.
c) Rússia e Brasil.
d) Hungria, Chile e Brasil.

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 30:

Alt acertou a pergunta e, com isso, vai mostrando que mundos diferentes podem conviver, países diferentes podem estar unidos e, pesquisando juntos, pessoas diversas podem conviver sem agressão e respeitando umas às outras. Del, no seu último desafio, pergunta para Alt:



Um q-bit correspondem a 2^n bits. Assim, 10 q-bits são...

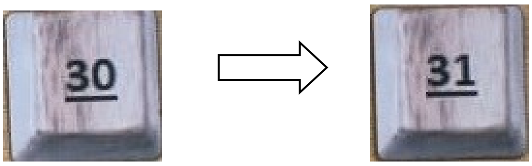
a) 1.048.576
b) 1024
c) 10
d) 32

Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 31:

Del convenceu-se de que Alt é especial. End põe fim à disputa, como foi orientada por *Morpheus*. Alt agora tem a certeza de que...De perto, ninguém é normal! Nem a Física!

End, Alt e Del respondem juntos a pergunta 31. Ou seja, a união faz a força!



Sobre o futuro da computação, é correto afirmar:

a) Os computadores clássicos serão substituídos rapidamente pelos computadores quânticos.

b) Os computadores clássicos e quânticos vão coexistir, pois existem tarefas específicas para cada tipo de máquina.
c) Os computadores quânticos são menos sensíveis às condições de temperatura e influências de perturbações externas, se comparados aos computadores clássicos.

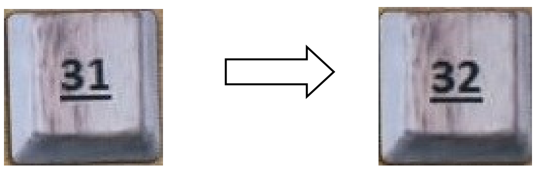
Se acertou, avance 1 casa. Se errou, passe a vez.

Descobrindo a tecla 32:

End, Alt e Del precisam responder essa última pergunta para irem fazer pesquisas no país que primeiro apresentou um computador com princípio de funcionamento quântico.

A empresa que primeiro anunciou a existência de um computador quântico fica sediada nesse país:

a) Estados Unidos da América.
b) Canadá.
c) China.
d) Índia.
e) Alemanha.



Se acertou, ganhou o Jogo (Parabéns!).

Happy End!

Figura 3-Tabuleiro Visto de Cima no Pós-Jogo:

Q-Matrix:

Matriz A: Matriz B: Matriz I:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fonte: Próprio Autor.

ANEXO A – MATRIZES

1 DEFINIÇÃO

Como em (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2011, p. 35), matrizes podem ser vistas como tabelas retangulares de elementos, em que cada entrada depende de dois índices (diferente, portanto, dos vetores, em que cada entrada depende de apenas um índice).

Uma *matriz A sobre um corpo K* ou, simplesmente, uma matriz *A* (quando *K* estiver subentendido) é uma tabela retangular de escalares, costumeiramente apresentada no formato seguinte.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

As *linhas* de tal matriz *A* são as *m* listas horizontais de escalares dadas por

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

e as *colunas* de *A* são as *n* listas verticais de escalares dadas por

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observe que o elemento a_{ij} , denominado *ij-ésima entrada*, ou *elemento*, aparece na linha *i* e na coluna *j*. Em geral, denotamos uma tal matriz simplesmente escrevendo $A = [a_{ij}]$. Dizemos que uma matriz com *m* linhas e *n* colunas é uma *matriz m por n*, que escrevemos "m x n". O par de números *m* e *n* é dito o *tamanho* da matriz. Duas matrizes *A* e *B* são iguais, e escrevemos *A* = *B*, se ambas tiverem o mesmo tamanho e se as entradas correspondentes forem iguais. Assim, a igualdade de duas matrizes m x n é equivalente a um sistema de *mn* igualdades, uma para cada par de entradas correspondentes.

Uma matriz com apenas uma linha é denominada *matriz linha*, ou *vetor linha*, e uma matriz com apenas uma coluna é denominada *matriz coluna*, ou *vetor coluna*. Dizemos que uma matriz que tem todas as entradas nulas é uma *matriz nula* ou *matriz zero*, sendo denotada por 0.

As matrizes com todas as entradas dadas por números reais são ditas *matrizes reais*, ou *matrizes sobre* ℝ. Analogamente, as matrizes com todas as entradas dadas por números complexos são ditas *matrizes complexas*, ou *matrizes sobre* ℂ. Neste texto, tratamos praticamente só com matrizes reais e complexas.

Soma de matrizes e multiplicação por escalar:

Sejam *A* = $[a_{ij}]$ e *B* = $[b_{ij}]$ duas matrizes de mesmo tamanho, digamos, A *soma* de *A* e *B*, denotada por *A*+*B*, é a matriz obtida pela soma de elementos correspondentes de *A* e *B*, ou seja,

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

O *múltiplo* da matriz *A* pelo escalar *k*, denotado por ou, simplesmente, *kA*, é a matriz obtida pelo produto de cada elemento de *A* por *k*, ou seja,

$$k.A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & & ka_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Observe que ambas, *A* _ *B* e *kA*, são matrizes mxn. Também definimos

$$-A = (-1).\,A \text{ e } A - B = A + (-B)$$

Dizemos que "- A" é a matriz *simétrica* de *A* e que *A* - *B* é a matriz *diferença* de *A* e *B*. Não se define a soma de matrizes de tamanhos distintos.

Sejam *A*, *B* e *C* matrizes quaisquer (de mesmo tamanho) e *k* e escalares quaisquer. Então

$$(i)\ (A+B)+C = A+(B+C)$$

$$(ii)\ A + 0 = 0 + A$$

$$(iii)\ A + (-A) = -A + A = 0$$

$$(iv)\ A + B = B + A$$

$$(v)\ k(A + B) = Ak + Bk$$

$$(vi)\ (k + k')A = Ak + Ak'$$

$$(vii)(kk')A = k(k'A)$$

$$(viii)\ 1. A = A$$

Observe que, nos itens (ii) e (iii) do teorema, o 0 se refere à matriz nula. Também, por (i) e (iv), podemos escrever qualquer soma finita de matrizes

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

sem utilizar parênteses, sendo que essa soma não depende da ordem das matrizes. Além disso, usando (vi) e (viii), também temos:

$$A + A = 2A, A + A + A = 3A$$

E assim por diante.

2 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

O *produto* das matrizes *A* e *B*, denotado por *AB*, é um pouco mais complicado. Por isso, começamos com um caso especial.

O produto *AB* de uma matriz linha $A = [a_{ij}]$ e uma matriz coluna $B = [b_{ij}]$ com o mesmo número de elementos é definido como o escalar (ou a matriz) obtido pela soma dos produtos das entradas correspondentes, ou seja,

$$AB = [a_1, a_2, \dots, a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$$

Enfatizamos que, nesse caso, *AB* é um escalar (ou, então, uma matriz).

Definição: Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes tais que o número de colunas de *A* seja igual ao número de linhas de *B*, digamos *p*. Ou seja, supomos que *A* seja uma matriz m x p e *B* uma matriz p x n. Então o *produto AB* de *A* e *B* é a matriz cuja *ij*-ésima entrada é dada pelo produto da *i*-ésima linha de *A* com a *j*-ésima coluna de *B*. Assim,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ . & \cdots & . \\ a_{i1} & \vdots & a_{ip} \\ . & & . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Em que:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Sejam *A*, *B* e *C* matrizes. Sempre que os produtos e somas envolvidos estiverem definidos, valem:

$(i)(AB).C = A.(BC)$ (associatividade do produto),

$(ii)A.(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda),

$(iii)(A + B).C = AC + BC$ (distributividade à direita),

$(iv)k(AB) = (kA)B = A(kB)$, onde *k* é um escalar.

Observe que *A*.0=0 e 0. *B*= 0, onde 0 é a matriz nula.

3 TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ

A *transposta* de uma matriz A, denotada por A^T, é a matriz obtida escrevendo as colunas de A, na mesma ordem, como linhas. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$e$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Em outras palavras, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz, então $A^T = [b_{ij}]$ é a matriz n x m dada por $b_{ij} = a_{ij}$.

Observe que a transposta de um vetor linha é um vetor coluna. Analogamente, a transposta de um vetor coluna é um vetor linha. O teorema a seguir enumera as propriedades básicas da transposição.

Teorema- Sejam A e B matrizes e k um escalar. Então, sempre que os produtos e somas envolvidos estiverem definidos, valem:

$$(i)\ (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(ii)\ (A^T)^T = A$$

$$(iii)\ (kA)^T = kA^T$$

$$(iv)\ (AB)^T = B^T A^T$$

Enfatizamos que, por (iv), a transposta de um produto é o produto das transpostas, só que na ordem inversa.

4 MATRIZES QUADRADAS

Uma matriz é dita *quadrada* se tiver o mesmo número de linhas e colunas. Dizemos que uma matriz quadrada n x n é de ordem n.

Vimos que nem sempre é possível somar ou multiplicar duas matrizes quaisquer. No entanto, considerando apenas matrizes quadradas de alguma dada ordem *n*, esse inconveniente desaparece. Em outras palavras, as operações de adição, multiplicação, multiplicação por escalar e transposição podem sempre ser efetuadas com matrizes quadradas n x n, e o resultado da operação é uma matriz quadrada n x n.

Exemplo:

Duas matrizes quadradas de ordem 3 são as seguintes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

5 DIAGONAL E TRAÇO

Seja *A* = $[a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem *n*. A *diagonal*, ou *diagonal principal* de *A* consiste nos elementos com índices iguais, isto é,

$$a_{11}, a_{22}, a_{33,} \dots, a_{nn}$$

O *traço* de *A*, denotado por $tr(A)$, é a soma dos elementos da diagonal principal, a saber,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

Sejam *A* e *B* matrizes quadradas de mesma ordem e *k* um escalar. Então valem:

(i) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

(ii) $tr(kA) = k\, tr(A)$

(iii) $tr(A^T) = tr(A)$

(iv) $tr(AB) = tr(BA)$

6 MATRIZES INVERTÍVEIS (OU NÃO SINGULARES)

Uma matriz quadrada *A* é dita *invertível*, ou *não singular*, se existir uma matriz *B* tal que

$$AB = BA = I$$

Em que I é a matriz identidade.

Suponha que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.3 + 5(-1) & 2.(-5) + 5.2 \\ 1.3 + 3.(-1) & 1.(-5) + 3.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B.A = \begin{bmatrix} 3.2 + (-5).1 & 3.(5) + (-5).3 \\ (-1).2 + 2.1 & (-1).5 + 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, B é inversa de A e A é a inversa de B.

7 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES QUADRADAS

São tipos de matrizes quadradas:

7.1 Matrizes diagonais e triangulares

Dizemos que uma matriz quadrada $D = [d_{ij}]$ é *diagonal* se todos os seus elementos fora da diagonal principal forem nulos. Às vezes, denotamos tal matriz por

$$D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$$

em que alguns d_{ii}, ou todos, podem ser nulos. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

são matrizes diagonais que podem ser representadas, respectivamente, por:

$$diag(3,-7,2)\ e\ diag\ (4,-5).$$

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é *triangular superior* ou, simplesmente, *triangular* se todas as suas entradas abaixo da diagonal (principal) forem nulas, ou seja, se a_{ij}= 0, para *i* > *j*. Algumas matrizes triangulares superiores arbitrárias de ordens 2, 3 e 4 são dadas a seguir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}\ e\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Assim como nas matrizes diagonais, é costume omitir padrões de zeros.

8 MATRIZES SIMÉTRICAS

Dizemos que uma matriz *A* é *simétrica* se $A^T = A$. Equivalentemente, $A = [a_{ij}]$ é simétrica se seus *elementos simétricos* (aqueles que são espelhados pela diagonal) forem iguais, ou seja, se $a_{ij} = a_{ji}$, para cada *ij*.

Uma matriz *A* é dita *antissimétrica* se $A^T = -A$ ou, equivalentemente, se $a_{ij} = -a_{ji}$, para cada *ij*. Claramente, os elementos diagonais de uma tal matriz devem ser, todos, nulos, pois,

$$a_{ii} = -a_{ii}$$

implica

$a_{ii} = 0$. Observe que, se $A^T = A$ ou $A^T = -A$, então *A* necessariamente é quadrada.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, A é simétrica e B é antissimétrica.

9 MATRIZES ORTOGONAIS

Uma matriz real é *ortogonal* se $A^T = A^{-1}$ ou, ou seja, se $AA^T = A^TA = I$. Assim, necessariamente, toda matriz ortogonal é quadrada e invertível.

Exemplo: Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \; e \; A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$AA^T = I$$

Logo, A é Ortogonal.

10 MATRIZES COMPLEXAS ESPECIAIS: HERMITIANAS, UNITÁRIAS, NORMAIS:

Considere uma matriz complexa *A*. A relação entre *A* e sua transposta conjugada $A^\dagger$ fornece espécies importantes de matrizes complexas (análogas às espécies de matrizes reais que já vimos). Dizemos que uma matriz complexa *A* é *hermitiana* ou *antihermitiana* se

$$A^\dagger = A \;\; ou \;\; A^\dagger = -A$$

Claramente, A=$[a_{ij}]$ é hermitiana se, e só se, seus elementos simétricos forem conjugados, ou seja, se cada $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, caso em que cada elemento a_{ii} da diagonal deve ser real. Analogamente, se A for *antihermitiana,* então cada elemento da diagonal deve ser nulo, $a_{ii} = 0$. (Observe que se $A^\dagger = A \;\; ou \;\; A^\dagger = -A$, então A necessariamente é quadrada.)

Uma matriz complexa é *unitária* se $AA^\dagger = A^\dagger A = I$, ou seja, se $A^\dagger = A^{-1}$.

ANEXO B - PROPOSIÇÕES COMPOSTAS-CONECTIVOS "e” e “ou”

Como em (IEZZI; MURAKAMI,2004), a partir de proposições dadas, podemos construir novas proposições mediante o emprego de dois símbolos lógicos chamados: conectivo $\wedge$ (lê-se “e”) e o conectivo $\vee$ (lê-se “ou”).

1 CONECTIVO $\wedge$

Colocando o conectivo $\wedge$ entre duas proposições e p e q, obtemos uma nova proposição $p \wedge q$, denominada conjunção das sentenças p e q.

Exemplos:

1°) p: $2 > 0$
q: $2 \neq 1$
$p \wedge q$: $2 > 0$ e $2 \neq 1$

2°) p: $-2 < -1$
q: $(-2)^2 < (-1)^2$
$p \wedge q$: $-2 < -1$ e $(-2)^2 < (-1)^2$

3°) p:um quadrado de lado a tem diagonal medindo 2.a
q: um quadrado de lado a tem área a^2
$p \wedge q$: um quadrado de lado a tem diagonal medindo 2.a e área a^2.

4º) p: 2 |5 {2 é divisor de 5}
q: 3 |5 {3 é divisor de 5}
$p \wedge q$: 2 |5 e 3 |5 {2 e 3 são divisores de 5}

Vamos postular um critério para estabelecer o valor lógico (V ou F) de uma conjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições p e q:

A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

Este critério está resumido na tabela abaixo, onde são examinadas todas as possibilidades para p e q. Esta tabela é denominada tabela-verdade da proposição p ∧ q.

Tabela B1-Tabela verdade do operador lógico “e”.

P	Q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Reexaminando os exemplos anteriores, temos:

1°) p é V e q é V, então p ∧ q é V

2°) p é V e q é F, então p ∧ q é F

3°) p é F e q é V, então p ∧ q é F

4°) p é F e q é F, então p ∧ q é F

2-CONECTIVO ∨

Colocando o conectivo ∨ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, p ∨ q, denominada disjunção das sentenças p e q.

Exemplos:

1°) p: $5 > 0$

q: $5 > 1$

p ∨ q: $5 > 0$ ou $5 > 1$

2°) p: $3 = 3$

q: $3 < 3$

p ∨ q: $3 \leq 3$

3°) p: 10 é número primo

q: 10 é número composto

p ∨ q: 10 é número primo ou número composto.

4°) p: $3^4 < 2^6$

q: $2^2 < (-3)^5$

p ∨ q: $3^4 < 2^6$ ou $2^2 < (-3)^5$

Vamos postular um critério para decidir o valor lógico (Vou F) de uma disjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições p e q:

A disjunção p ∨q é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira; se p e q são ambas falsas, então p ∨q é falsa.

Este critério está resumido na tabela ao lado, denominada tabela-verdade da proposição p ∨ q.

Tabela B2-Tabela verdade do operador lógico "ou".

P	Q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Existem outros conectivos em proposições compostas (como se...então e a equivalência), entretanto colocamos especificamente o conectivo "ou" e "e" para estabelecer a fundamentação teórica das considerações finais do produto e para esta obra.

ANEXO C – PRODUTO ALTERNATIVO

Esse jogo de tabuleiro pode ser utilizado em outras áreas do conhecimento (como em ciências humanas, sociais ou até mesmo em língua portuguesa) que envolvam, por exemplo, portas lógicas clássicas como "AND" e "OR". Ou relações de raciocínio lógico como os conectores "e" e "ou" com proposições em verdadeiro ou falso nas matrizes A e B, de modo que o resultado vai coincidir com os elementos da matriz identidade (por exemplo). Atribuindo "0" para falso e "1" para verdadeiro.

Situação Hipotética:

MATRIZ A		MATRIZ B		MATRIZ I
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	X	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$0.\ 0 + 0.\ 0 + 0.\ 0 + 1.\ 1 = 1$ (Obtenção do elemento I_{11})

Vamos supor que as perguntas que encobrem o fundo do tabuleiro possuem os seguintes valores lógicos:

$$(V \wedge V) \vee (F \wedge F) \vee (V \wedge V) \vee (F \wedge F)$$

$$\downarrow$$

$$(V \vee F) \vee (V \vee F)$$

$$\downarrow$$

$$(V \vee V)$$

$$V = 1$$

(Elemento I_{11} da matriz I para a operação lógica)

∧-CONECTOR "E" e ∨-CONECTOR "OU".

Assim, abre-se um grande leque de possibilidades para a aplicação do jogo em sala de aula. Espera-se ter contribuído com uma abordagem criativa e atrativa e serve como sugestão aos colegas para aplicação do jogo.