



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA (DCET)
CAMPUS II ALAGOINHAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A DIVISÃO DE FRAÇÕES PARA ALÉM DO ALGORITMO: UMA PROPOSTA
DIDÁTICA COM ORIGAMI

RONALD LIMA FARIAS

ALAGOINHAS – BA

2025

RONALD LIMA FARIAS

A DIVISÃO DE FRAÇÕES PARA ALÉM DO ALGORITMO: UMA PROPOSTA
DIDÁTICA COM ORIGAMI

Monografia apresentada à banca examinadora do Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade do Estado da Bahia – Campus II, Alagoinhas, em cumprimento das exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática, sob orientação da Prof. Dr^a Maria de Fatima Costa Leal.

ALAGOINHAS – BA

2025


RONALD LIMA FARIAS

A DIVISÃO DE FRAÇÕES PARA ALÉM DO ALGORITMO: UMA PROPOSTA
DIDÁTICA COM ORIGAMI


Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da
Universidade do Estado da Bahia – UNEB para a obtenção do título parcial de
Licenciada em Matemática.

Alagoínhas, 17 de Dezembro 2025


Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
 **MARIA DE FATIMA COSTA LEAL**
Data: 12/02/2026 16:16:34-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr^a Maria de Fatima Costa Leal – Orientadora
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

Documento assinado digitalmente
 **MARIDETE BRITO CUNHA FERREIRA**
Data: 12/02/2026 15:31:17-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr^a Maridete Brito Cunha Ferreira
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

Documento assinado digitalmente
 **DANIELA BATISTA SANTOS**
Data: 09/02/2026 17:56:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr^a Daniela Batista Santos
Universidade do Estado da Bahia (Campus II)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pela oportunidade que ele me deu de trilhar o caminho da educação, e por ter enviado pessoas que tornaram a jornada mais leve.

Agradeço imensamente à minha mãe e à minha irmã Esther por sempre acreditarem no meu potencial, e por me oferecerem apoio constante. Essa caminhada não teria sequer começado sem vocês.

A minha querida orientadora, professora Maria de Fatima, pela enorme paciência e pela dedicação comigo ao longo da construção deste trabalho e da minha formação acadêmica. O carinho e o cuidado que recebi ficarão gravados em minha memória para sempre.

A minha querida professora Maridete Ferreira, por ter sido como uma mãe em minha trajetória universitária, me aconselhando, motivando, e me colocando de volta nos trilhos quando necessário.

A minha querida professora Daniela Batista, pelo imenso carinho, cuidado e afeto desde a minha entrada na universidade, e por me mostrar que o conhecimento matemático pode ser construído de forma prazerosa.

Aos meus professores do curso, pelo compromisso com a formação acadêmica, dedicação ao ensino e pelos conhecimentos compartilhados.

Aos meus amigos do Matemática é show, por me mostraram que os relacionamentos formados na universidade podem ser mais do que somente acadêmico.

Aos meus caros amigos Josiel, Vilemar, Renata, Tereza Cristiana, Cristiano e ao meu primo Kelvin, que tornaram meus dias mais divertidos, e me ajudaram a superar os momentos mais difíceis dessa caminhada.

Aos meus amigos da residência que, apesar dos trancos e barrancos, fizeram parte de toda a minha história enquanto estudante da graduação. Me proporcionaram diversos momentos de risadas, de aprendizados, e claro, muito estresse. Tenho certeza que levarei muitos para toda a minha vida.

“O primeiro passo é o mais importante na evolução do homem ou nação”

– Oscar Wilder

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – DEFINIÇÃO DA DIVISÃO NOS NÚMEROS RACIONAIS COMO MULTIPLICAÇÃO PELO INVERSO MULTIPLICATIVO	27
QUADRO 2 – ALGORITMOS DA DIVISÃO DE FRAÇÃO.....	29
QUADRO 3 – INTERPRETAÇÃO DE SÍMBOLO E DOBRAS EM DIAGRAMAS DE MODELOS DE ORIGAMIS.	37
QUADRO 4 – PASSO-A-PASSO PARA CONSTRUÇÃO DO CUBO.....	44
QUADRO 5 – ALGUMAS POSSIBILIDADES DE DIVISÕES NO PAPEL.....	47

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - MÉDIA DE PROFICIÊNCIA EM MATEMÁTICA DOS ESTUDANTES DO 9º	19
FIGURA 2 - JUSTIFICATIVAS ALGÉBRICAS DE ALGORITMOS DA DIVISÃO DE FRAÇÕES	31
FIGURA 3 – REPRESENTAÇÕES FIGURAIS PARA DIVISÃO DE FRAÇÕES	32
FIGURA 4 – ORIGAMI DO TSURU	35
FIGURA 5 – VINCOS DA BASE QUADRADA	38
FIGURA 6 – FOTO DO ORIGAMI DO CUBO	44
FIGURA 7 – FACE DO CUBO	47
FIGURA 8 - QUADRADO UNITÁRIO	48
FIGURA 9 – REPRESENTAÇÃO DA PRIMEIRA DOBRA DESCRITA	49
FIGURA 10 – REGISTRO DE 12 EM CADA DIVISÃO	49
FIGURA 11 – REPRESENTAÇÃO DA ÁREA DE 12	49
FIGURA 12 – REPRESENTAÇÃO DA SEGUNDA DOBRA DESCRITA	50
FIGURA 13 – REGISTRO DE 14 EM CADA DIVISÃO	51
FIGURA 14 – REPRESENTAÇÃO DA ÁREA DE 14	51
FIGURA 15 – REPRESENTAÇÃO DA ÁREA DE 24	51
FIGURA 16 – REPRESENTAÇÃO DA ÁREA DE 34	52
FIGURA 17 – REPRESENTAÇÃO DAS ÁREAS 12 E 34	53
FIGURA 18 – REPRESENTAÇÃO DAS ÁREAS 12 E 13 UTILIZANDO A UNIDADE DE MEDIDA 16	53
FIGURA 19 – REPRESENTAÇÃO DA TERCEIRA DOBRA DESCRITA	55
FIGURA 20 – REGISTRO DE 18 EM CADA DIVISÃO	55
FIGURA 21 – ÁREA DE 18 REPRESENTADO COMO PRODUTO DE SUAS MEDIDAS	55
FIGURA 22 – EQUIVALÊNCIA ENTRE 12 E 48 DE ÁREA	56
FIGURA 23 – EQUIVALÊNCIA ENTRE 34 E 68 DE ÁREA	56
FIGURA 24 – RECONFIGURAÇÃO DE 12 E 34 DA ÁREA DO QUADRADO UNITÁRIO	57
FIGURA 25 - OBTENDO PAPEL QUADRADO (PASSO 1)	65
FIGURA 26 - OBTENDO PAPEL QUADRADO (PASSO 2)	65
FIGURA 27 - OBTENDO PAPEL QUADRADO (PASSO 3)	66
FIGURA 28 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 1)	66
FIGURA 29 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 2)	66
FIGURA 30 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 3)	67
FIGURA 31 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 4)	67
FIGURA 32 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 5)	67
FIGURA 33 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 6)	68
FIGURA 34 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 7)	68
FIGURA 35 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 8)	69
FIGURA 36 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 9)	69
FIGURA 37 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 10)	69

FIGURA 38 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 11)	70
FIGURA 39 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 12)	70
FIGURA 40 – CONSTRUÇÃO DO CUBO (PASSO 13)	70

Sumário

INTRODUÇÃO.....	13
OBJETIVO GERAL.....	17
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
CAPÍTULO I – O QUE DIZEM AS PESQUISAS	18
1.1. Desvelando os caminhos sobre números racionais	18
1.2. Fração e suas concepções.....	20
1.3 Representações figurais	22
1.4. Equívocos no ensino	23
CAPÍTULO II – ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO.....	25
2.1. Conceito de divisão - A complexidade que envolve esse conceito.....	25
2.2. O corpo dos racionais.....	26
2.3. Frações e os diferentes algoritmos de divisão.....	27
2.4. A Área do Retângulo, o Princípio da Contagem e a Operação divisão entre Frações - Como estabelecer uma relação entre elas?	33
CAPÍTULO III – ORIGAMI	35
3.1. Papel, origami e História.....	35
3.2. Primeiros passos	36
3.3. Frações na construção do origami	37
CAPÍTULO IV – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	38
4.1. Caracterização do tipo da pesquisa	39
4.2 Estudos de Intervenção: aspectos relevantes	40
4.3 Construção da sequência.....	41
CAPÍTULO V – CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	43
5.1. Primeiros passos para a construção da sequência didática	43
5.2. Construção da sequência do Origami de Cubo.....	44
5.2.1. Etapa diagnóstica	46

5.2.2. ETAPA DE INTERVENÇÃO TUTORADA – A construção de uma das seis faces quadrangulares do cubo	47
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	58
REFERÊNCIAS	61
APÊNDICES	65

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo analisar uma proposta de intervenção ancorada no uso do origami, e seu potencial na ressignificação da divisão de frações, superando uma abordagem estritamente algorítmica e favorecendo a compreensão dos significados matemáticos envolvidos. Inicialmente foi feita uma investigação sobre o ensino da divisão de frações no âmbito da Educação Matemática, considerando as dificuldades conceituais historicamente associadas à aprendizagem dessa operação e sua abordagem baseada na aplicação mecânica de algoritmos. Estudos provenientes de avaliações oficiais, como o SAEB e o PISA, indicam o baixo desempenho dos estudantes em tarefas que envolvem operações com números racionais na forma fracionária, reforçando a necessidade de propostas didáticas que favoreçam a construção de significados conceituais. Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, de caráter exploratório, fundamentada na análise teórica dos significados matemáticos da divisão de frações, bem como na análise a priori de uma proposta de intervenção pedagógica fundamentada no uso do origami. A proposta de intervenção analisada neste estudo foi um aprimoramento de uma proposta didática que utilizava o origami na abordagem da divisão de frações, de modo que relacionasse a área do retângulo, o princípio da contagem e os diferentes algoritmos da divisão entre frações. As dobras do origami, em contextos educacionais, apresentam potencial para atribuir significado a procedimentos algébricos e geométricos, ao favorecer a compreensão das relações parte-todo e da unidade de medida fracionária. Os resultados indicaram que o algoritmo de inverter e multiplicar não constitui um princípio conceitual, mas uma consequência algébrica das relações de equivalência e razão, permitindo compreender a divisão de frações como a razão entre áreas, em que o divisor define a unidade de referência, e evidenciou que o uso do origami favorece a visualização das relações parte-todo, da equivalência de frações e da partição de áreas, além de revelar procedimentos matematicamente válidos pouco explorados no ensino tradicional, que emergiram das representações construídas. A articulação entre representações figurais, manipulação das dobras e questionamentos orientados pode contribuir para a formalização e internalização dos conceitos matemáticos abordados.

Palavras-Chaves: Divisão de Frações; Origami; Algoritmos; Intervenção;

ABSTRACT

This study aimed to analyze an intervention proposal grounded in the use of origami and its potential to re-signify the division of fractions, overcoming a strictly algorithmic approach and fostering the understanding of the mathematical meanings involved. Initially, an investigation was conducted into the teaching of fraction division within the field of Mathematics Education, considering the conceptual difficulties historically associated with learning this operation and its treatment based on the mechanical application of algorithms. Studies derived from official assessments, such as SAEB and PISA, indicate low student performance in tasks involving operations with rational numbers in fractional form, reinforcing the need for didactic proposals that promote the construction of conceptual meanings. This is a qualitative, exploratory study, grounded in the theoretical analysis of the mathematical meanings of fraction division, as well as in the a priori analysis of a pedagogical intervention proposal based on the use of origami. The intervention proposal analyzed in this study consisted of an enhancement of a didactic proposal that employed origami in addressing fraction division, in such a way as to relate the area of the rectangle, the principle of counting, and the different algorithms for dividing fractions. Origami folds, in educational contexts, present potential for attributing meaning to algebraic and geometric procedures by fostering the understanding of part-whole relationships and the fractional unit of measure. The results indicated that the invert-and-multiply algorithm does not constitute a conceptual principle, but rather an algebraic consequence of relations of equivalence and ratio, allowing fraction division to be understood as a ratio between areas, in which the divisor defines the unit of reference. Furthermore, the results showed that the use of origami promotes the visualization of part-whole relationships, fraction equivalence, and area partitioning, in addition to revealing mathematically valid procedures that are little explored in traditional teaching and that emerged from the constructed representations. The articulation between figural representations, manipulation of folds, and guided questioning can contribute to the formalization and internalization of the mathematical concepts addressed.

Keywords: Fraction Division; Origami; Algorithms; Intervention;

INTRODUÇÃO

Quando o estudante chega na universidade para cursar a Licenciatura em Matemática carrega consigo todas as percepções e crenças construídas ao longo de sua formação. Desse modo parece natural que os futuros professores, recém chegados ao curso, acreditem que, para ensinar Matemática é necessário apenas “saber Matemática” e resolver os exercícios. Fico bastante à vontade com essa fala porque foi esse o relato produzido por uma das minhas professoras no curso de licenciatura e que de alguma forma, também poderia ser assumido como meu. Entretanto, ao longo de uma caminhada universitária, passamos a entender que ensinar matemática é muito mais que transmitir regras automatizadas para resolução de exercícios, que muitas vezes se apresentam fora de contextos.

Ao ser inserido no universo das pesquisas, projetos, participação em seminários e congressos oferecidos pela Universidade, as percepções dos licenciandos vão sendo refinadas, principalmente quando direcionadas ao que ele trouxe, ou que acreditava quando aqui chegou. Uma delas diz respeito ao uso de regras que lhe foram apresentadas sem muita clareza e sentido, e que explicarão no futuro aos seus alunos. Uma vez não compreendidas, retornarão para a sala de aula alimentando um ciclo de repetições sem fundamentos.

As dificuldades persistentes na aprendizagem da Matemática, evidenciadas pelo baixo desempenho dos estudantes em avaliações internas e externas, indicam que algo não está indo bem na escola. Neste contexto, concordamos com Zabala (1998) que um dos papéis do professor é propor intervenções pedagógicas que possuam a finalidade de articular práticas educativas reflexivas e coerentes, levando o estudante a ser o protagonista principal, e assim, agir como mediador da atividade mental do estudante tendo em vista a construção de um sujeito autônomo.

Durante o processo de formação pedagógica no curso de licenciatura em matemática ficou entendido que o trabalho teórico-metodológico do professor não pode estar dissociado da sua prática, o que nos leva para o interior de uma formação, onde os sujeitos estão a todo instante percorrendo os corredores de suas memórias enquanto estudantes dos anos iniciais. Para Tardif,

[...] boa parte do que os professores sabem sobre ensino, sobre papéis do professor e como ensinar provém de sua própria história de vida, e, sobretudo de sua história de vida escolar [...] e os alunos passam pelos cursos de

formação sem modificar suas crenças anteriores sobre o ensino (Tardif, 2000, p.32).

Assim podemos extrair a necessidade de haver uma coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro pedagogo. Pires (2002) defende que o futuro professor experencie, como aluno, durante todo o processo de formação, as atitudes, modelos didáticos, capacidade e modos de organização que se pretende, que venha a ser desempenhado nas suas práticas pedagógicas. E acrescenta que *“ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina nem a constituição de significados que não possui ou a autonomia que não teve a oportunidade de construir”* (Pires, 2002, p. 48).

Nesse conjunto de aprendizagens insatisfatórias ou de conteúdos ainda não plenamente compreendidos, que tendem a ser reproduzidos sem modificações em relação àqueles trazidos da escolaridade básica, encontra-se a construção do conhecimento matemático sobre frações. A origem dessa situação pode estar relacionada à maneira com que esse assunto é abordado pelos professores, que por sua vez, nem sempre dominam ou compreendem todos os significados da fração. Nessa direção, *“o método de ensino, ..., simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla - ou seja, contar o número total de partes e então o número de partes pintadas - sem entender o significado deste novo tipo de número”*. (CAMPOS 1997 apud NUNES, BRYANT, 1996, p. 191).

Para KIEREN (1976) o trabalho com frações tem sido tratado como uma sequência de regras a serem aprendidas e processadas, sem devida importância com a compreensão conceitual, e o resultado revela dificuldades para os professores e fracasso para os estudantes até os dias atuais.

O conceito de fração está presente em diversos contextos do nosso dia-a-dia. Na escola, ele é trabalhado a partir da 3ª série do Ensino Fundamental, e mesmo sendo iniciado tão cedo é possível perceber por meio de análises, como a de Moriel Junior (2019), que a aprendizagem sobre fração não é uma tarefa fácil, e que até mesmo professores em formação enfrentam dificuldades com o conceito. Se considerarmos que este objeto matemático prossegue no Ensino Fundamental e Ensino Médio, as pesquisas mostram que o tempo até aqui considerado se mostra insuficiente para que as dificuldades que envolvem a aprendizagem de frações, sejam esclarecidas ou reduzidas.

Por exemplo, enquanto no Ensino Fundamental as frações são trabalhadas no seu conceito, representações, relações e operações, no Ensino Médio esse saber funciona como ferramenta para trabalhar com outros campos da Matemática, tais como: razão, proporção, juros, porcentagens, etc.

Seguindo nessa direção, ensinar frações implica assumir que exige um grau de complexidade e maturidade cognitiva para reconhecê-la em diferentes contextos a partir de subconstrutos como parte-todo, quociente, razão, medida entre outros. Trata-se, portanto, de reconhecer fragilidades tanto no processo de ensino, enfrentado pelos professores, como na aprendizagem revelada por estudantes pontuadas nas avaliações institucionais.

Mesmo na posição de concluinte do curso, permaneço irrequieto quanto a compreensão das dificuldades que circundam a aprendizagem sobre fração. Trago então algumas das minhas inquietações associadas a operação divisão principalmente quando dizemos ou propomos "dividir uma fração". De fato, o que exatamente estamos fazendo quando dividimos as frações, ou seja, o que significa dizer conservar a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração? Walle (2001) defende que esse algoritmo é fácil de ler, de memorizar e de aplicar, e justifica que a simplicidade resulta do fato de não existir a necessidade de alterar as frações antes de operar. No entanto, a memorização não revela que correu uma compreensão sobre a ação solicitada.

Para Flores (2005) a simplicidade operacional da divisão de frações entra em conflito com a dificuldade de encontrar ou formular problemas de divisão que correspondam a ela. Alguns problemas de divisão chegam a nos deixar em dúvida sobre qual fração deve ser o dividendo e qual o divisor (por exemplo, "Que parte de $\frac{2}{3}$ é $\frac{1}{4}$?"). Olhando para inquietações como essa, não é difícil entender por que a concentração no processo de divisão de frações fique no uso do algoritmo, sem qualquer justificativa para esse procedimento.

Assim, um momento significativo da minha trajetória acadêmica foi cursar o componente TCC (Trabalho de Conclusão de Curso), no qual foi possível reunir e articular as contribuições formativas construídas ao longo de diferentes experiências que antecederam e fundamentaram esse percurso, dentre as quais, podem ser citados a participação em palestras e eventos acadêmicos, o projeto Matemática é Show e as disciplinas como Estágio e Laboratório de Matemática. Esse conjunto de

vivências conduziu-me ao lugar de pesquisador do fazer pedagógico, voltado à reflexão sobre conceitos matemáticos que resultem em melhoria do processo ensino-aprendizagem para os números racionais na representação fracionária¹, tendo em vista a operação de divisão. Para tanto, apresentei no anteprojeto, uma proposta de intervenção sobre divisão de fração, que abordava o ensino de frações de maneira mais significativa e menos abstrata.

As leituras revelam o entendimento de que a repetição de algoritmos sem significados, revela um esvaziamento de saberes, que resultam em equívocos que serão repetidos sucessivamente ao longo de um percurso escolar. Para além de uma representação simbólica $\frac{a}{b}$ a divisão entre frações é uma dificuldade que reconheço como minha.

Nessa linha de pensamento, encontro em Leal (2016) argumentos que motivam a avançar.

Teoria e prática se consolidam como ferramentas utilizadas na construção do conhecimento matemático e que, de forma articulada, vão assegurar e convalidar os espaços em que sua utilização teria por objetivo subsidiar a construção de conhecimentos da prática formativa. Não podemos esquecer que o licenciando é o sujeito da formação e, como tal, precisa ser trabalhado para desenvolver suas habilidades e potencialidades tendo em vista sua futura atuação na prática docente. (Leal, 2016, p.68)

Para materializar esses entendimentos, entendo que existe a necessidade de que seja oportunizado ao licenciando, momentos de vivências, experiências e reflexões provenientes de situações que emergem do contexto real da sala de aula, ou de simulações, para que este tenha a oportunidade de incorporar atitudes práticas e adquirir uma visão crítica sobre o saber dos conteúdos necessários para uma atuação profissional.

Diante desse cenário, este trabalho buscou responder à questão central: o que exatamente estamos fazendo quando dividimos frações e como essa operação pode ser compreendida para além da aplicação mecânica do algoritmo de “inverter e

¹ Vamos conduzir nosso trabalho com o entendimento de número racional na representação fracionária como todo número que pode ser representado na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}_+$ e $b \in \mathbb{Z}_+^*$

multiplicar”? Para responder a esse questionamento foram elaborados os seguintes objetivos:

OBJETIVO GERAL

Analisar uma proposta de intervenção ancorada no uso do origami, e seu potencial na ressignificação da divisão de frações, superando uma abordagem estritamente algorítmica e favorecendo a compreensão dos significados matemáticos envolvidos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Analisar os significados matemáticos associados aos algoritmos da divisão de frações, em especial ao procedimento de inverter e multiplicar, à luz de abordagens que superam a execução mecânica do algoritmo
- b) Investigar como a área do retângulo no contexto do origami e o princípio da contagem contribuem para a compreensão da divisão entre frações.
- c) Examinar o papel da unidade de medida fracionária na construção do significado do quociente da divisão, a partir de representações figurais produzidas com dobras de origami.
- d) Analisar o potencial pedagógico de uma proposta de intervenção na ressignificação da divisão de frações.

Para tanto, o trabalho encontra-se organizado da seguinte forma:

O capítulo I apresentará um panorama das principais pesquisas relacionadas ao ensino dos números racionais, com ênfase nas dificuldades históricas e conceituais associadas à aprendizagem das frações. Foram discutidos os caminhos teóricos percorridos por diferentes autores, evidenciando lacunas no ensino do algoritmo da divisão de frações e justificando a relevância desta investigação.

O capítulo II apresentará a fundamentação teórica do estudo, abordando o conceito de divisão e sua complexidade conceitual, a estrutura do corpo dos números racionais, a definição formal de fração e os algoritmos envolvidos na divisão de frações. Esse referencial forneceu a base conceitual necessária para a análise das práticas pedagógicas propostas ao longo do trabalho.

O capítulo III discutirá a história do origami, seus aspectos culturais e seus primeiros passos técnicos, articulando essa prática com o ensino de frações. Demonstrou-se como a construção de modelos em origami possibilita a exploração concreta de conceitos matemáticos, especialmente a partição do todo em partes equivalentes, favorecendo a compreensão significativa das frações.

O capítulo IV descreverá a abordagem metodológica adotada na pesquisa, caracterizando o estudo como uma investigação qualitativa, exploratória e interventiva. Foram apresentados os objetivos, a natureza da intervenção proposta e os procedimentos utilizados no desenvolvimento da sequência didática voltada à compreensão do algoritmo da divisão de frações.

No capítulo V serão apresentados os resultados obtidos a partir da análise da proposta pedagógica acerca do algoritmo da divisão, indicando o potencial do uso do origami como recurso didático.

CAPÍTULO I – O QUE DIZEM AS PESQUISAS

Os primeiros passos desta investigação estiveram centrados em um levantamento bibliográfico, realizado a partir de diferentes leituras selecionadas em bases de dados e repositórios oficiais, tais como o Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), revistas científicas eletrônicas e repositórios institucionais de universidades, com o objetivo de localizar artigos, dissertações e teses que possibilitassem a apropriação do tema em estudo. No que se refere aos dados educacionais, foram considerados os resultados do SAEB/INEP referentes ao período de 2013 a 2023. O recorte temporal adotado para as produções acadêmicas compreendeu trabalhos publicados entre os anos de 2000 e 2024, utilizando como descritores os termos: *números racionais*, *frações*, *divisão*, *origami* e *algoritmos*. Vale ressaltar que, no conjunto das pesquisas analisadas que envolviam o uso do origami no ensino de Matemática, o algoritmo da divisão não se apresentou como objeto central de investigação.

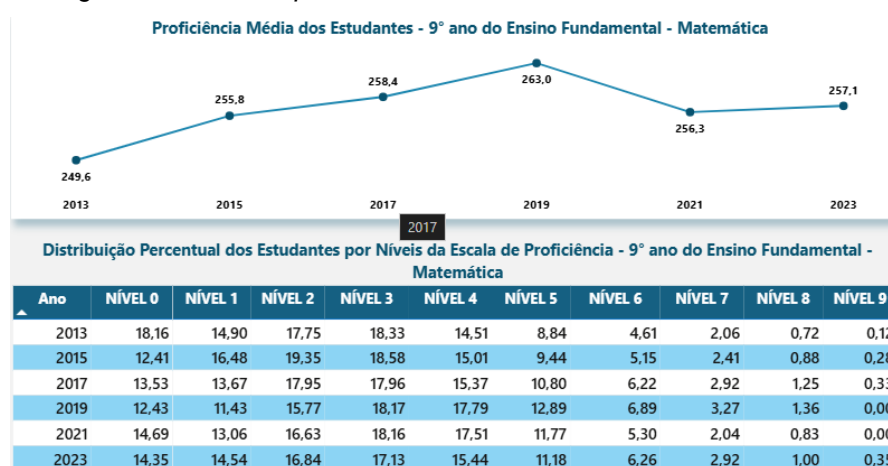
1.1. Desvelando os caminhos sobre números racionais

Nos últimos anos, os relatórios de avaliações oficiais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE),

indicam um consenso sobre as dificuldades de alunos e professores em lidarem com o conceito fração, bem como em executar corretamente as operações. (BERTONI, N. E. 2009), (FÁVERO, M. H.; PINA NEVES, R. D. S. 2012).

As pesquisas do INEP(Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) apontam que entre os anos de 2013 e 2023, menos de 15% dos alunos terminaram o ensino fundamental conseguindo resolver corretamente questões envolvendo operações com frações. A seguir, na Figura 1, apresentam-se a proficiência média e a distribuição percentual dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental nos níveis da escala de proficiência em Matemática.

Figura 1 - Média de proficiência em Matemática dos estudantes do 9º



Fonte: Painel Educacional SAEB.

Observa-se que, ao longo dos anos analisados, menos de 15% dos alunos alcançaram o nível 5 de proficiência, nível associado à realização de operações de adição e multiplicação com números racionais, e a divisão por números inteiros.

Nos estudos de Santos et al (2013), o percentual de acerto em questões sobre números racionais na forma de fração não chegou a 50% em nenhum dos oito primeiros níveis, o que é preocupante, do ponto de vista do ensino pois os alunos começam a aprender sobre frações no 3º ano do Ensino Fundamental e os alunos pesquisados estavam no último ano do fundamental.

Lamon (2001) e Gabriel (2013) afirmam que o currículo de frações se resume na realização de procedimentos algorítmicos com fins computacionais que até ajudam como pré-requisito quando associados às expressões algébricas, mas que não levam os alunos a entenderem que os racionais, são também, números, ou seja, a compreensão sobre o número racional pode ser vista como uma fundação para os

estudos das operações algébricas. Singh(2020) defende uma exploração intuitiva do aprendiz sobre a riqueza de relações lógicas matemáticas envolvidas no conteúdo de frações.

Este cenário de ensino, centrado apenas na execução de algoritmos, não é recente. Lopes (2008) critica que:

O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, 'carroções', cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da matemática. (Lopes, 2008, p. 20–21)

Essa crítica reforça que o problema não está apenas nos alunos, mas na maneira historicamente rígida como o conteúdo tem sido apresentado. Em direção oposta a essa tradição mecanicista, Singh (2020) defende a necessidade de uma exploração intuitiva por parte do aprendiz, valorizando a riqueza de relações lógicas e matemáticas próprias do estudo das frações

Para Kusaka(2021), sem a compreensão do significado dos cálculos que vão realizar, os estudantes são obrigados a recorrer a memorização dos procedimentos e desse modo, passam a ver os conhecimentos com recortes, pedaços, obstáculos de aprendizagem.

1.2. Fração e suas concepções

Nas concepções sobre números fracionários, a multiplicidade de significados representa um desafio significativo para os estudantes. Ao analisar autores como Bezerra (2004), Nunes (2004), Lopes (2008) e Silva (2008), Paula (2013) observa um consenso quanto à dificuldade estudantil em lidar com as diversas interpretações das frações. Esses estudos destacam que esses aspectos não se apresentam de forma evidente, pelo contrário, a complexidade do tema fica tão implícita que geralmente não é percebida de imediato. Como consequência, cria-se a impressão equivocada de que as frações são fáceis de compreender, algo que as pesquisas mostram não corresponder à realidade.

Desse modo os entendimentos se tornam confusos, podendo gerar interpretações distintas para a mesma representação. Por exemplo, dividir um chocolate em 5 partes e comer 3 dessas partes é uma situação diferente quando confrontada a um momento em que eu precisaria dividir 3 chocolates entre 5 pessoas. Mesmo assim, quando vamos fazer o registro numérico, ambos possuem a mesma representação fracionária.

De acordo com Silva (2005) diferenciar fração, número fracionário e número racional pode ser uma tarefa complexa, e essa experiência tem "perseguido os estudos desde o início" (SILVA, 2005, p. 47), devido à "confusão conceitual provocada" (SILVA, 2005, p. 47). Ela percebeu dificuldades por parte dos alunos ao se relacionarem com esses números, além do que professores frequentemente erram ao atribuir a causa dos erros dos alunos à falta de atenção, em vez de falhas no ensino. Além disso, Silva (2009) reforça essa complexidade ao discutir sobre a multiplicidade de significados do termo fração:

Podemos notar que o termo fração significa, tanto uma ação de partição como é sinônimo de número fracionário; ao mesmo tempo, em que significa uma medida na Química ou um quociente na Física, ou ainda, uma sequência na Matemática. [...] O fato nos leva a supor que o ensino de frações deve tentar construir seus inúmeros significados diferenciando, o objeto número fracionário, de sua representação: classe de frações equivalentes. (SILVA, 2009, p. 53–54).

A multiplicidade de significados do termo "fração" (partição, porcentagem, medida, quociente, razão) adiciona complexidade em sua compreensão, daí se torna essencial saber diferenciar o objeto (número fracionário) de sua representação $\frac{a}{b}$.

Avançando um pouco mais nas leituras, sentimos a necessidade de trazer a definição de grandeza matemática, por entender que falar sobre número fracionário não implica necessariamente falar sobre quantidades que possuem, sempre, a mesma natureza. A definição de grandeza nesse trabalho segue o entendimento de Menezes:

Grandeza matemática é tudo quanto for possível de ser medido, direta ou indiretamente, por meio de outra grandeza da mesma espécie, e de valor conhecido considerada como padrão ou unidade que se toma para

comparação. A medida de uma grandeza é denominada valor da grandeza ou quantidade. (MENEZES, 1959, p. 3)

A ação de contar está diretamente associada ao objeto que foi submetido a contagem, podendo ser classificada em grandezas discretas, ou grandezas contínuas. Quantidades discretas são valores inteiros que resultam de contagens, enquanto quantidades contínuas podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo, geralmente através de medições.

Junta a esse entendimento, Piaget et al. (1960) acrescenta que a noção de fração é construída no nível das operações concretas, conduzidas pela noção de conservação de quantidade, independente desta ser contínua ou discreta. Em outras palavras, o número de um conjunto permanece invariável em relação a mudanças de aspectos como forma, posição, etc. No entanto, os números fracionários apresentam particularidades entre a ação e sua representação perceptual e que só se constrói quando ocorre uma articulação operatória entre os seguintes elementos: existência de uma totalidade divisível; existência de um número determinado de partes; esgotamento da divisão do todo; relação entre o número de partes e o número de cortes; igualização das partes; compreensão de que cada fração pode também ser um todo sujeito a novas divisões e atendimento ao princípio da invariância.

Este último elemento, princípio da invariância, diz respeito ao fato de a quantidade (contínua ou discreta) dos objetos não variar em função da variação de suas formas, posições, arranjos... É preciso que o aluno tenha a capacidade de compreender que essas modificações resultam de transformações mentalmente reversíveis.

Vale ressaltar que, quando trabalhamos com uma totalidade que pode ser dividida, a divisão em partes iguais refere-se a situações com quantidades discretas, enquanto que nas situações que envolvem quantidades contínuas, as partes são consideradas equivalentes em medida. Além disso, ao somar as partes, é fundamental reconhecer que o todo não altera seu valor, apenas muda sua forma de representação, permanecendo invariante independentemente do número de partes em que foi dividido.

1.3 Representações figurais

De modo geral, os objetos matemáticos tornam-se cada vez mais abstratos, o que exige um refinamento constante de sua compreensão. Nesse sentido, Duval (1998) parte do pressuposto de que, o objeto de estudo da matemática por ser abstrato, só pode ser acessível por meio de suas representações, e defende que as representações são necessárias como instrumento de comunicação, mas essenciais na atividade cognitiva do pensamento.

Duval, reafirma o papel das representações ao acentuar a abstração do objeto matemático, e o seu tratamento dependente do uso do sistema de representação semiótico. Para tanto, levanta duas questões:

1- Quais operações, são possíveis ou privilegiadas por um registro de representação? 2- Quais são as condições que permite a um sujeito de converter uma representação de um registro a um outro, de tal maneira que ele reconheça o mesmo objeto sob várias formas ou o conteúdo? Esta segunda questão pode ser considerada como uma reformulação, para ser mais precisa a questão: como um sujeito não confundir um objeto e sua representação? (Duval, 1998, p. 19)

Nesse contexto, utilizar diferentes registros de representação no estudo das frações e em particular na operação divisão de frações, encontra nessa teoria, sustentação para produzir conhecimentos significativos.

Ampliando as pontuações até aqui apresentadas, incorporamos a importância das representações no tratamento de um objeto matemático. Duval apresenta três atividades cognitivas fundamentais: formação, tratamento e conversão. A formação diz respeito à necessidade de utilizar as representações para tornar uma ideia clara para si mesmo. A construção de esquemas e fichamentos é um exemplo de uso das representações para auxiliar na compreensão. Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro onde ela foi tomada (transformação interna). Por exemplo, ao realizar a adição $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ é necessário tratar esse registro para se chegar ao resultado 1, ainda no mesmo registro numérico. As conversões são transformações de representações nas quais ocorre a mudança de registros, mas conservando a mesma referência ao objeto.

1.4. Equívocos no ensino

O conceito de divisão transita entre o universo dos conjuntos numéricos, apresentando especificidades que diferenciam seu entendimento e sua resolução. No entanto, é possível que nesses universos, o conceito de divisão possa ser confundido

com o algoritmo da própria operação, o que leva à produção de compreensões equivocadas que se mantêm presentes nos dias atuais, tais como a ideia de que, se o estudante aplica com precisão o algoritmo da divisão, isso passa a ser o parâmetro definidor de sua compreensão sobre o conceito, e vice-versa.

Lautert (2005), destaca a diferença entre os dois objetos, quando afirma que:

Essa ambiguidade ignora as diferenças entre operação e algoritmo, uma vez que “operação faz referência a transformações realizadas sobre os números, quantidades grandezas e medidas; enquanto que o algoritmo refere-se ao conjunto de procedimentos que conduz à execução de uma operação”. (LAUTERT, 2005, p.41).

Quando o ensino da divisão de frações acontece por meio de regras, abre precedente para que os estudantes transfiram o conhecimento que eles possuem sobre os números naturais para fração (MERLINI, 2005), quando indicam, por exemplo que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$, ou ainda $\frac{1}{10}$ é maior que $\frac{1}{8}$. Aqui, numerador e denominador são números naturais separados e não como componente de uma única quantidade fracionária. Essa compreensão equivocada dificulta a compreensão das propriedades e operações envolvendo esse conceito. (Oliveira e Silva, 2014).

Moriel Junior (2014) investigou sobre os conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações e reconheceu três pontos de reflexão: o primeiro é referente a existência de uma lacuna na literatura nacional em relação a exploração de conhecimentos docentes para ensinar divisão de frações; a segunda se fundamenta em perspectivas teóricas sobre conhecimento dos professores que possuem limitações e a terceira, aponta para melhoras significativas no conhecimento procedimental e conceitual dos sujeitos sobre divisão de fração quando eram inseridos em atividades com materiais manipulativos, problemas e representações.

Neste cenário Lubinski, Fox e Thomason (1998) descrevem o percurso de uma licenciatura rumo ao desenvolvimento de uma compreensão profunda da divisão de frações fazendo uso de diferentes instrumentos de representação. O melhor cenário é visto por Isiksal e Cakiroglu (2007) quando em contextos formativos, reconhecem que os sujeitos usavam procedimentos pictóricos retangular.

Nesse sentido, o uso do origami como recurso didático pode contribuir de maneira significativa para o ensino da divisão de frações, pois permite que o aluno visualize concretamente o processo de partição e comparação entre partes de um todo. Por meio das dobras e subdivisões do papel, é possível representar situações

equivalentes às expressas no algoritmo de igualar denominadores, construindo o conceito de forma significativa e visual antes da formalização algébrica. Essa abordagem dialoga com a perspectiva de Ausubel (2003) sobre a aprendizagem significativa e com as reflexões de Moreira (2012), que defendem a importância de conectar novos conhecimentos a experiências prévias e representações concretas.

Todas as abordagens apresentadas anteriormente, apontam para um lugar muito particular do processo ensino e aprendizagem das operações com os números racionais na forma fracionária: a prática docente. É nesse lugar que os estudantes da licenciatura, sujeitos em formação, necessitam ser provocados para discutir sobre temáticas que não reduzam a importância da habilidade técnica no interior dos saberes matemáticos, mas que possa oportunizar espaços para explorar determinados conteúdos por meio de processos de investigação e estudos de intervenções em sala de aula que se voltam para as práticas educacionais

Nesse contexto, queremos contribuir com novos entendimentos frente a operação de divisão de frações, e que enriqueçam o processo de aprendizagem dos estudantes no ensino fundamental.

CAPÍTULO II – ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

2.1. Conceito de divisão - A complexidade que envolve esse conceito.

Quando falamos em divisão, nosso entendimento ancora na divisão euclidiana, ou divisão com resto, que por sua vez, mergulha no conjunto dos números naturais, contexto no qual ela faz sentido. Por exemplo, a divisão de 45 bolas de gude entre 6 amigos vai gerar uma sobra na quantidade de bolas de gudes, uma vez que $42 = 7 \times 6$ é o maior múltiplo de 6 que não ultrapassa 45 e 3 é o resultado da subtração de 45 por 42. Nesse processo, chamamos 7 de quociente e 3 passa a ser o resto da divisão. Os números dados 45 e 6 são chamados, respectivamente de dividendo e divisor.

Assim, o Teorema da Divisão Euclidiana nos diz que; dados dois números naturais a , b sendo $b \neq 0$, sempre existem e são únicos os números naturais q e r tais que $a = qb + r$ e $0 \leq r < b$.

Nas condições do Teorema da Divisão Euclidiana, os números q e r são chamados respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b , e os números

a e b são chamados de dividendo e divisor dessa divisão. Decorre do teorema que o quociente que gera o menor resto é único e, portanto, o resto também é único.

Esse procedimento funciona perfeitamente sempre que queremos dividir números em \mathbb{N} e consideramos a possibilidade de sobrar um resto. Porém, ele apresenta certas limitações quando queremos uma divisão exata, pois nem toda divisão tem resto zero. Por exemplo, ao tentar dividir 1 por 2 dentro de \mathbb{N} , percebemos que não existe nenhum número natural que multiplicado por 2 dê exatamente 1, ou seja, o quociente seria 0 e o resto 1.

Entretanto, isso não resolve o problema de quem quer um resultado exato pra essa divisão. Em outras palavras, a operação de divisão não é fechada² sob \mathbb{N} , o que implica haver pares (a, b) com $b \neq 0$ para os quais não existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a = q \cdot b$. Essa limitação gera a necessidade de ampliar o conjunto numérico para que a divisão seja sempre possível. Essa ampliação nos leva ao conjunto dos números racionais.

2.2. O corpo dos racionais

Como o universo dos números naturais não é suficiente para resolver determinados problemas relacionados à divisão, tornou-se necessário ampliar esse conjunto, inicialmente para o conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}) resolvendo pendências relacionados a subtração e, posteriormente, para o conjunto dos números racionais (\mathbb{Q}), de modo a garantir que equações do tipo $ax = b$ com $a \neq 0$, admitam solução nesse conjunto. Esta característica torna a estrutura algébrica do conjunto dos números racionais especial.

A divisão em \mathbb{Q} , está diretamente vinculada à estrutura multiplicativa da Álgebra. Essa relação decorre do fato de que o conjunto dos números racionais possui a estrutura de corpo³, o que garante, entre outras propriedades, a existência de inverso multiplicativo para todo número não nulo pertencente a ele. Essa característica não se valida no conjunto dos números naturais ou, motivo pelo qual a operação de

² Seja S um conjunto e $*$ uma operação binária em S . Dizemos que $*$ pertence a S (ou que S é fechado sob $*$) se $\forall a, b \in S, a*b \in S$

³ Se $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero, dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um domínio de Integridade, e se satisfaz a propriedade: $\forall x \in A, x \neq 0, y \in A$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$, dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um corpo.

divisão não é sempre possível nesse universo numérico. Desse modo, todo número racional b diferente de zero, admite um inverso multiplicativo, isto é, existe um único número racional que multiplicado por b resulta na unidade (1). A unicidade desse elemento permite representá-lo por b^{-1} . Assim temos:

Quadro 1 – Definição da Divisão nos Números Racionais como Multiplicação pelo Inverso Multiplicativo

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ com } b \neq 0, \exists \text{ único } c \in \mathbb{Q} \text{ tal que } c \cdot b = a \Leftrightarrow c \cdot b \cdot b^{-1} = a \cdot b^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c \cdot 1 = a \cdot b^{-1} \Leftrightarrow c = a \cdot b^{-1}, \quad \text{ou, na notação usual } c = a \div b.$$

Essa compreensão conduz à necessidade de uma representação adequada desses números. Uma forma particularmente relevante de representar os números racionais é por meio das frações.

2.3. Frações e os diferentes algoritmos de divisão

Para compreendermos a estrutura do conjunto dos números racionais, é essencial revisitar como ele é construído a partir dos números inteiros, e como a operação de divisão se insere nesse contexto.

Moriel Junior (2019) aborda a fração como um representante de uma classe de equivalência, e também levanta um ponto importante sobre a diferença entre a abordagem formal da divisão em \mathbb{Q} e como ela é tratada didaticamente nas escolas

Estabelecida a relação de equivalência $(a, b)R(c, d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$, temos como consequência as classes de equivalência por ela gerada em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e o conjunto quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / R$, o qual passa a se denominar conjunto dos números racionais e denotar por \mathbb{Q} . Uma classe de equivalência de \mathbb{Q} é chamada de número racional e denotada por $\overline{(a, b)}$, de modo que $\frac{a}{b}$ seja um representante desta classe de equivalência e chamado fração. (MORIEL JUNIOR, 2019, p 994)

A divisão, que aprendemos inicialmente como a operação inversa da multiplicação, possui uma definição formal e rigorosa no campo dos números racionais.

Definição: Dados $a, b \in \mathbb{Q}$, sendo $b \neq 0$, define-se a divisão de a por b como sendo o número racional $ab^{-1} = \frac{a}{b}$

Apesar de usualmente tratarmos da divisão de frações como uma operação binária em \mathbb{Q} , ela está mais para uma operação externa, pois, usa elementos de um conjunto auxiliar \mathbb{Q}^* para operar sobre elementos do conjunto principal \mathbb{Q} . Apesar de não ser considerada axiomáticamente uma operação nos racionais, a divisão é tratada como tal na Educação Básica, conforme destaca Moriel Junior (2019):

A divisão de frações é um caso particular de uma das operações (a multiplicação) que conferem ao conjunto dos números racionais a estrutura de corpo. Para ser uma operação em um conjunto E não vazio é preciso ser uma aplicação do tipo $f: E \times E \rightarrow E$. Logo, a adição e a multiplicação são operações em \mathbb{Q} ($f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $f(x, y) = x + y$ ou $x \cdot y$), mas a divisão não, pois é caracterizada como $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Assim, a divisão de frações só pode ser considerada uma operação em \mathbb{Q}^* , ou seja, se for definida como $f: \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$ tal que $f(x, y) = \frac{x}{y}$. A implicação prática disto é que a operação de divisão de frações não pode fornecer a resposta para o cálculo envolvendo zeros, como $0 \div \frac{1}{2}$, ou resultar zero, já que isto não está definido pela aplicação. Todavia, enquanto objeto de ensino na Educação Básica, a divisão é considerada uma operação com restrição de que o denominador não seja nulo. (MORIEL JUNIOR, 2019, p 995)

No conjunto dos números racionais \mathbb{Q} , a multiplicação é definida pela aplicação $\cdot: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, tal que, para $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Q}$, tem-se $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$. Nessa estrutura, o inverso multiplicativo de um número racional (c, d) , com $c \neq 0$, é o par (d, c) , uma vez que $(c, d) \cdot (d, c) = (cd, dc) = (1, 1)$, elemento neutro da multiplicação em \mathbb{Q} .

Assim, a divisão de frações, como um objeto matemático, é definida no universo numérico \mathbb{Q} , como a multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor. Isso é expresso como: $\overline{(a, b)} \div \overline{(c, d)} = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)}^{-1} = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, c)} = \overline{(ad, bc)}$. Usando a notação de frações, isso se traduz em: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (CONTRERAS, 2012; GARCÍA, 2013)

Conforme destacado em Moreira e Ferreira (2008), é possível definir a divisão de frações através do subconstruto⁴ de operador e nesta perspectiva, a divisão $p/q \div r/s$ corresponde a encontrar um operador K que, ao ser aplicado a r/s , resulte

⁴ Este termo diz respeito a uma das possíveis interpretações de frações que, embora tenham variado em quantidade e nomenclatura ao longo dos anos, são atualmente cinco as principais: relação parte-todo, medida, razão, quociente indicado e operador (MOREIRA; FERREIRA, 2008).

em p/q . A generalização dessa ideia leva a que $K = p \cdot s / q \cdot r$, o que é demonstrado pela composição de operadores: $(\frac{ps}{qr}) * (\frac{s}{r}) = \frac{p}{q}$.

Rafael Vaz (2016) apresenta uma alternativa pouco discutida nos livros didáticos, mas historicamente relevante, para a divisão de fração por fração. Esse procedimento é baseado na própria operação de divisão, sem recorrer inicialmente ao inverter e multiplicar. Nesse método, divide-se numerador por numerador e denominador por denominador, preservando a estrutura original da fração enquanto se busca frações equivalentes que permitam a realização da divisão. Hoffman et al (2023) exemplifica esse processo com a operação:

$$\frac{14}{3} \div \frac{7}{6} = \frac{14 \div 7}{3 \div 6}, \text{ como } \frac{14 \times 2}{3 \times 2} = \frac{28}{6} \Rightarrow \frac{28}{6} \div \frac{7}{6} = \frac{28 \div 7}{6 \div 6} = \frac{4}{1} = 4$$

Hoffman et al (2023) compactuam com a crítica de Vaz (2016) a respeito de que não são os algoritmos em si o problema, mas a reflexão pedagógica que obtemos sobre o ensino deles, pois, um aluno que tente resolver intuitivamente por esse caminho provavelmente escutará do professor que sua solução está errada, ainda que o procedimento seja matematicamente válido e historicamente documentado. Isso evidencia o problema do ensino excessivamente centrado no “inverter e multiplicar”, tratado como único método legítimo.

Mesmo fazendo uso de algoritmos, não existe a certeza de que seu uso esteja associado a entendimentos matemáticos que validem sua construção. Desse modo, Contreras (2012) identificou e classificou, seis algoritmos associados a divisão de fração, apresentados a seguir na Tabela 1:

Quadro 2 – Algoritmos da divisão de fração.

(continua)

Nomenclatura	Sigla	Algoritmos
Inverter e multiplicar	IM	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
Igualar denominadores	ID	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{cb}{db} = \frac{ad}{bc}$
Produto cruzados	PC	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
Dividir numeradores e denominadores entre si	DND	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} \div \frac{d}{c} = \frac{acd \div c}{bcc \div d} = \frac{ad}{bc}$ (caso geral) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$ (se a é múltiplo de c , e b é de d)

		(conclusão)
Nomenclatura	Sigla	Algoritmos
Conversão de frações em decimais	CD	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ax}{bx} \div \frac{cy}{dy} = \frac{ax}{cy} = \frac{ad}{bc}$ <p>sendo $bx = dx$ potencias de base 10</p>
Uso da unidade fracionada	UF	<p>se $\frac{a}{b}$ equivale a $\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{1}{d}$ equivale a $\frac{a}{bc}$ e $\frac{d}{d}$ equivale a $\frac{ad}{bc}$</p>

Fonte – Autor baseado em Moriel Junior (2019, p 996)

Dentre os procedimentos apresentados, três algoritmos são destacados pelo autor:

A) Inverter e Multiplicar (IM).

Neste a divisão de frações pode ser compreendida, do ponto de vista algébrico, como a operação entre um elemento e o inverso do outro. Assim, para $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, temos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

B) Igualar denominadores e dividir os numeradores (I.D.)

Essa forma parte de uma interpretação intuitiva da fração como parte de um todo. A ideia é comparar frações de mesmo denominador, observando quantas vezes a fração dividendo está contida na fração divisor. Assim, se os denominadores forem iguais:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = \frac{a}{c}$$

Quando os denominadores são diferentes, primeiro iguala-se por meio de um denominador comum, e só então aplica-se o procedimento.

C) Divisão de numeradores e denominadores entre si (D.N.D.)

Aqui, o algoritmo surge de uma analogia com a multiplicação de frações, mas aplicando a relação inversa: em vez de multiplicar, divide-se numeradores e denominadores correspondentes.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$$

Se não for possível dividir diretamente, pode-se multiplicar numerador e denominador do dividendo por $c \cdot d$, obtendo novamente a expressão clássica:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcc \div d} = \frac{ad}{bc}$$

Para o Flores (2008), a escolha do algoritmo mais adequado deve depender do tipo de problema e do significado atribuído à situação de divisão, e não apenas da aplicação mecânica de uma regra, uma vez que todos os algoritmos acabam levando ao mesmo resultado, mas partindo de interpretações conceituais diferentes. Assim, problemas que envolvem razão, relação parte-todo ou área de retângulos podem demandar diferentes formas de abordagem, reforçando a necessidade de uma compreensão conceitual mais ampla (CONTRERAS, 2004).

Por outro lado, pensando no estudante da licenciatura, as contribuições do autor se mostram pertinentes no sentido de chamar atenção para a necessidade de conhecer os procedimentos que vão justificar os algoritmos associados a divisão de frações. Na mesma direção, os argumentos de descrição para um determinado procedimento, fortalece o saber docente, evitando erros de leitura ou desconhecimento sobre o procedimento adotado. A figura 2 apresenta as justificativas algébricas que fundamentam os algoritmos citados sobre a divisão de frações.

Figura 2 - Justificativas algébricas de algoritmos da divisão de frações

ALGORITMO INVERTER E MULTIPLICAR (IM)

$$J1) \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a \times d}{b \times c}}{\frac{c \times d}{d \times c}} = \frac{\frac{a \times d}{b \times c}}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$J2) \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = K \Rightarrow K \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(K \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \Rightarrow K \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \Rightarrow K \times 1 = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \Rightarrow K = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \Rightarrow K = \frac{ad}{bc}$$

$$J3) \text{ Se o inverso de } \frac{c}{d} \text{ é } \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}, \text{ então } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$J4) \text{ Se } \frac{a}{b} \text{ é equivalente a } \frac{acd}{bcd}, \text{ então } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} \div \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcd \div d} = \frac{ad}{bc}$$

ALGORITMO DIVIDIR NUMERADORES E DENOMINADORES ENTRE SI (DND)

$$J5) \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a \times d}{c \times b} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$$

ALGORITMO IGUALAR DENOMINADORES (ID)

$$J6) \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} \text{ é igual a } \frac{bd \times ad}{bd} \div \frac{bd \times bc}{bd} = \frac{ad}{1} \div \frac{bc}{1} = ad \div bc = \frac{ad}{bc} \text{ ou igual a } \frac{ad}{bd} \times \frac{bd}{bc} = \frac{ad}{bc}$$

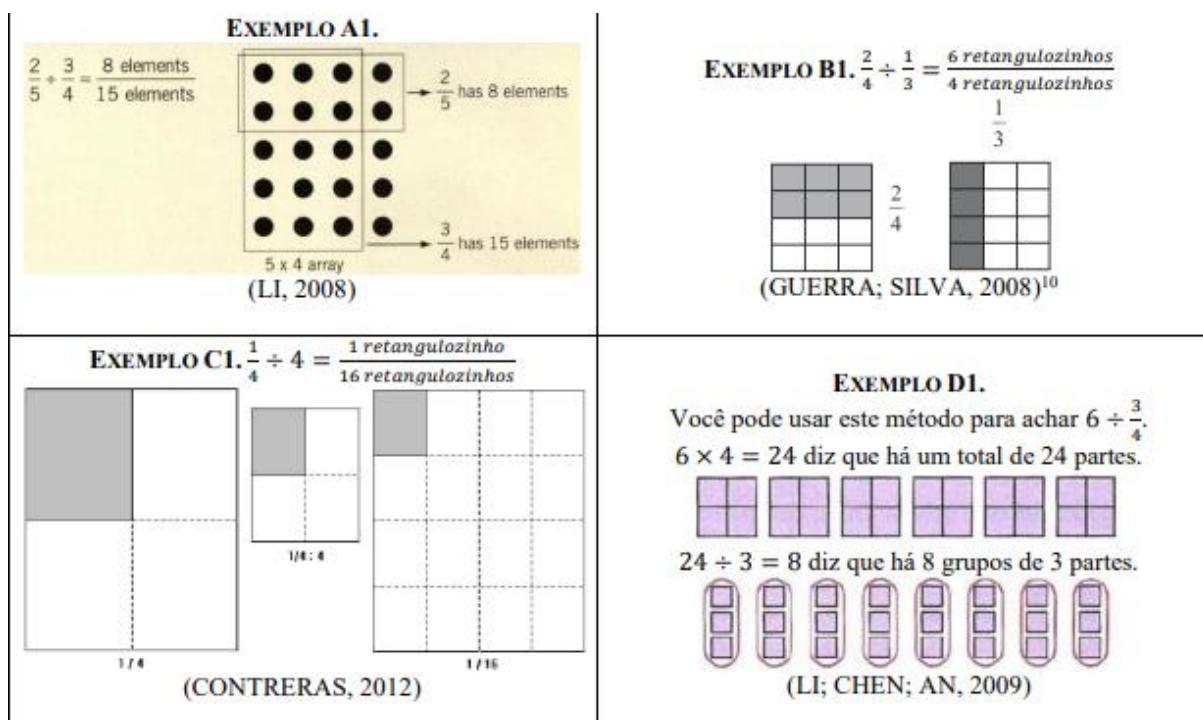
Fonte: Moriel Junior (2019)

Os argumentos explorados para legitimar as construções algébricas emergem de conhecimentos prévios teóricos e de prática. Trata-se, portanto, de uma articulação envolvendo diferentes registros de representação. Nesse universo de possibilidades, para além do entendimento de professores ou estudantes da licenciatura, está a

aproximação desse construto, de maneira compreensível, para os estudantes do Ensino Fundamental.

Então, em atendimento aos sujeitos que conduzem o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, diferentes autores apresentam uma segunda abordagem que envolve o algoritmo da divisão por meio da manipulação de diagramas pictóricos, incluindo formas geométricas (retangulares) com a ação de transformar a divisão de frações em divisão de inteiros (CHEN et al., 2013; CONTRERAS, 2012; GUERRA; SILVA, 2008; LI, 2008; LI; CHEN; AN, 2009; LIMA, 1983; SÁ, 2015; SHARP; ADAMS, 2002; SILVA; ALMOULOU, 2008). Na figura 3 apresentamos alguns exemplos apresentados por alguns desses autores:

Figura 3 – Representações figurais para divisão de frações.



Fonte: Moriel Junior (2019)

As representações aqui apresentadas também exigem uma maturidade cognitiva e processual por parte dos estudantes para a obtenção do resultado das divisões. No Ensino fundamental, o recurso pictórico se mostra mais efetivo na construção do conceito de fração e menos recorrente quando da representação da divisão entre frações. A falta de entendimento do que vem a ser a divisão como “conserva a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda fração” ressoa como um procedimento desprovido de significados.

Para iluminar o sentido desta ação e respeitando a maturidade cognitiva dos alunos, em especial para os que estão cursando o Ensino Fundamental da Educação Básica, vamos mergulhar no universo de transformar a divisão de frações em divisão de inteiros, apoiados no princípio da contagem, acrescido do estudo sobre medidas de áreas e os números relacionados aos números reais.

De acordo com Berge (2003)

“[...] a relação entre número e área nos conduz a pensar que se pode operar com as frações do mesmo modo que se manipulam com as áreas, procurando reconstruir o conceito de número a partir do estabelecimento de um isomorfismo operatório entre números e quantidades, aceitando que se pode operar com os números da mesma forma que se manipulariam as quantidades em geral” (BERGE; SESSA, 2003, p.173)

2.4. A Área do Retângulo, o Princípio da Contagem e a Operação divisão entre Frações - Como estabelecer uma relação entre elas?

De acordo com Guerra e Silva (2008), uma relação entre esses construtos precisa evocar a ideia de área de um retângulo como produto de dois segmentos, ou seja, “quando tomamos um quadrado de lado 1, com medida unitária de área e dividimos esse quadrado em 3 partes iguais, cada parte mede um terço da unidade de áreas” (p.45). Trata-se, portanto, de um entendimento com facilidade de visualização quando recorremos a uma representação figural.

Na divisão de frações reconhecemos que existe uma “nova unidade” que é comum às duas áreas e que pode ser considerada a partir de um referencial utilizado inicialmente⁵. Segundo Bergé e Sessa (2003,p.168) admitir ter uma medida comum para duas áreas A e B, é dizer que se nenhum múltiplo inteiro de A, cabe exatamente em B, é possível dividir a área A em n partes iguais, de modo tal que a área $\frac{A}{n}$ caiba exatamente m vezes na área B e, neste caso, a medida de B em relação a A é $m \frac{A}{n}$ ou que $\frac{B}{A} = \frac{m}{n}$. Isso evidencia a medida por meio de processo de contagem de unidades comuns de retângulos que representam as frações.

⁵ No Livro X (décimo livro) da obra Os Elementos (EUCLIDES, séc. III a.C.), Euclides explicita no teorema 5 que se dois segmentos são comensuráveis, ou seja, têm medida comum, a razão entre eles é igual a razão que guardam entre si dois números

Generalizando por meio da álgebra podemos interpretar a divisão de frações como a medida da superfície de um retângulo tomando o outro retângulo como unidade de referência, ou seja, o quociente da divisão entre frações $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ é tomado como a medida da área $\frac{a}{b}$ por meio da unidade de área $\frac{c}{d}$, e assim escrever: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = m \left(\frac{1}{p}\right) : n \left(\frac{1}{p}\right) = \frac{m}{n}$ ⁶, onde $\left(\frac{1}{p}\right)$ é a unidade comum entre dividendo e divisor, cujas quantidades inteiras m e n são, respectivamente, numeradores e denominadores do quociente que se busca.

Isso permite assumir o princípio da contagem no estudo das operações com frações, em particular a operação divisão por meio da hipótese da existência de uma unidade comum, evidenciada pela representação de frações em retângulos, e, igualmente importante, que a fração m/n , a razão ou quociente entre dois inteiros, pode ser então, interpretado como m unidades de $\frac{1}{n}$.

A partir deste construto podemos justificar o algoritmo para a divisão de frações observando que, pelos procedimentos aqui adotados, a divisão de frações pode ser expressa por:

$$\left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{c}{d}\right) = m \left(\frac{1}{p}\right) : n \left(\frac{1}{p}\right) = \frac{m:n}{p:p} = \frac{m:n}{1} = \frac{m}{n} \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) \times \left(\frac{c}{d}\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{d}{c}\right) = \left[\left(\frac{m}{n}\right) \times \left(\frac{c}{d}\right)\right] \times \left(\frac{d}{c}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{c}{d}\right)$$

Portanto, para efetuar a divisão de duas frações, efetuamos o produto da primeira fração pelo inverso da segunda fração e com isso, evitamos a determinação de uma unidade comum entre elas.

Desse modo, entendemos a necessidade de uma aprendizagem mais significativa para a divisão de frações e juntamente com Moreira (2012), defender a importância de conectar novos conhecimentos a experiências prévias e representações concretas nessa operação. A busca nos levou ao origami, uma arte japonesa que consiste em dobrar papel para criar representações de objetos, seres ou formas abstratas, geralmente utilizando folhas quadradas, sem cortes ou colagem.

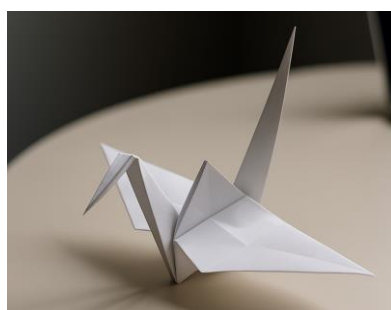
⁶ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = m \left(\frac{1}{p}\right) : n \left(\frac{1}{p}\right) = \frac{m:n}{p:p} = \frac{m:n}{1} = \frac{m}{n}$ ou $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = m \left(\frac{1}{p}\right) : n \left(\frac{1}{p}\right) = \frac{m\left(\frac{1}{p}\right)}{n\left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{m}{n}$

CAPÍTULO III – ORIGAMI

Neste capítulo, apresentam-se aspectos históricos e conceituais relacionados ao origami, desde suas origens e processos de difusão cultural até sua consolidação como prática artística e educativa. Discute-se, ainda, como a construção de modelos de origami possibilita a exploração do conceito de fração por meio da partição do papel em partes iguais.

3.1. Papel, origami e História

Figura 4 – Origami do Tsuru



Fonte: Autor

Segundo Lima (2014), a história do origami está intrinsecamente ligada à invenção e à difusão do papel. Por volta do ano 105 d.C., o chinês Cai Lun desenvolveu a técnica de fabricação de papel a partir de fibras vegetais, cascas de árvores, redes de pesca e restos de tecidos. Durante quase meio milênio, esse conhecimento permaneceu praticamente restrito à China, entretanto no século VI, monges budistas levaram a técnica para a Coreia e, posteriormente, para o Japão, onde o processo foi refinado e o papel passou a ser produzido em maior escala e qualidade.

Os primeiros registros de dobraduras no Japão remontam ao período Heian (794–1185), época em que o papel já era valorizado e estava restrito às camadas mais privilegiadas da sociedade japonesa, uma vez que o papel era considerado um material raro e de alto custo. Contudo, foi somente no período Edo (1603–1868), com a produção em massa de papel e a maior acessibilidade às camadas populares, que o origami se popularizou como atividade recreativa, educativa e artística para crianças e adultos.

Desse modo, a palavra "origami" deriva dos termos japoneses "ori" (dobrar) e "kami" (papel). No século XX, passou por uma transformação significativa. Com a introdução de novas técnicas e a disseminação de padrões e diagramas, tornando-se

mais acessível e difundido internacionalmente. Grandes nomes, como o de Akira Yoshisawa, modernizaram a prática, introduzindo técnicas e notações simbólicas. Um marco crucial na história moderna do origami foi a criação do conceito de "origami modular" na década de 1960. Essa abordagem permitiu a criação de estruturas tridimensionais complexas por meio da combinação de várias unidades de papel dobradas separadamente.

Hoje, o origami combina tradição e inovação, sendo usado não somente como expressão artística, mas também em práticas educativas como uma ferramenta pedagógica de caráter interdisciplinar, que, de forma lúdica, permite explorar conceitos matemáticos, acontecimentos históricos e conteúdos artísticos, possibilitando uma prática educativa e culturalmente rica.

Segundo Oliveira (2005) o uso do origami em sala de aula permite explorar “uma outra linguagem simbólica universal, como a linguagem matemática, para testar uma maneira de comunicar diferente da oral e da escrita formais”. Embora seja frequentemente utilizado para abordagens envolvendo o ensino de geometria, Silva (2014) explora o potencial do origami como ferramenta didática para ensinar conceitos relacionados a frações, destacando sua capacidade de tornar o aprendizado mais visual e intuitivo, mas ressalta que é preciso ter cuidado ao usar ferramentas pedagógicas, pois, embora o momento de dobrar o papel seja prazeroso, a aula de matemática não deve se limitar ao origami. A formalização dos conceitos é essencial para o aprendizado.

3.2. Primeiros passos



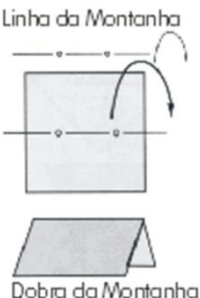
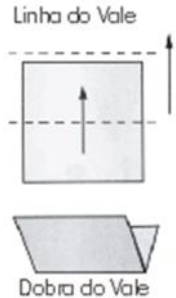
Para iniciar no origami, é recomendável seguir alguns passos básicos. Em primeiro lugar escolher um papel adequado é fundamental para que as dobras sejam executadas com facilidades e para que o produto final seja bem apresentável. Os tipos de papéis variam de acordo com a finalidade do origami, e geralmente possuem uma cor na parte superior e outra cor na parte inferior.

Costa (2007) observa que o uso de papéis com faces diferenciadas favorece a percepção do estudante, pois o contraste ajuda a compreender a sequência das dobras. A autora defende que “o papel espelho 15 cm × 15 cm, colorido de um lado e branco do outro, é ideal para iniciantes”, ressaltando que papéis de cor única “devem ser evitados”, já que podem atrapalhar visualmente a transformações do modelo. Vale

lembrar que papéis comuns também podem ser usados, desde que sejam cortados em formato adequado.

Após a escolha do papel, o próximo passo é aprender a interpretar os diagramas, fazendo a leitura dos símbolos relativos as instruções na construção de modelos, além de dobras básicas que geralmente são utilizadas neles. Familiarize-se com as duas dobras principais que são: a dobra do vale (dobrar o papel deixando uma depressão), e a dobra da montanha (dobrar o papel formando uma elevação). A seguir, o quadro 3 está apresenta símbolos utilizados na construção de um modelo e as duas principais dobras:

Quadro 3 – Interpretação de símbolo e dobras em diagramas de modelos de origamis.

Alguns símbolos utilizados		Principais dobras em modelos de origami	
<p>dobra por cima de outro dobra</p>  <p>Fazer uma Dobra por cima da outra</p>	<p>fazer uma prega</p>  <p>Fazer uma Prega</p>	<p>dobra da montanha</p>  <p>Linha da Montanha</p> <p>Dobra da Montanha</p>	<p>dobra do vale</p>  <p>Linha do Vale</p> <p>Dobra do Vale</p>

Fonte: origami-resource-center.com

Em sequência, é importante definir um modelo que deseja seguir e praticar regularmente: a prática constante aprimora as habilidades e permite avançar para modelos mais complexos.

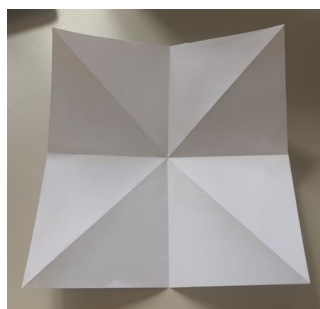
O origami não apenas desenvolve habilidades motoras e cognitivas, mas também proporciona momentos de meditação e relaxamento, concentração, além de ser uma atividade acessível e enriquecedora para pessoas de todas as idades.

3.3. Frações na construção do origami

Para trabalhar com frações, Costa (2007) afirma que é preciso evidenciar as várias dobras no papel que são realizadas, em ordem, na elaboração de um modelo. Essas dobras ficam marcadas sobre a folha e são chamadas de vincos. Elas criam linhas que indicam as áreas dobradas e servem como referência para moldar as

formas desejadas, tornando o processo de construção mais fácil, além de permitirem explorar, entre outras possibilidades, as divisões do papel em partes iguais. Um modelo de origami possui diversos vincos, e algumas dobras são consideradas críticas, pois são elas que formam a parte principal do modelo, conhecida como base.

Figura 5 – Vincos da base quadrada



A base quadrada é a mais comum dentre os modelos mais populares de origamis. Utiliza-se o papel no formato quadrado para sua confecção. Fonte: Autor.

A base de um origami é o conjunto de dobras iniciais que formam a estrutura fundamental sobre a qual as dobras adicionais podem ser feitas para criar diferentes modelos. Elas oferecem uma estrutura geométrica básica, a partir da qual as formas do modelo ganham vida. Existem diferentes tipos de bases, cada uma é definida pelo formato do papel e pelas dobras realizadas.

É importante notar que a menor unidade fracionária, em qualquer formato de papel escolhido para fazer um origami, sempre terá a forma triangular, pois o triângulo é o polígono com menor quantidade de lados, e sempre podemos subdividir outros polígonos a partir do processo de triangulação.

O origami em sua confecção, oferece um campo de investigação matemático favorável ao aprendizado de frações quer seja na função de seus termos, como também nas relações de equivalência, na relação parte-todo, razão, etc. Em particular, vamos fazer uso da construção do cubo com o objetivo de desvelar o algoritmo da divisão de frações.

CAPÍTULO IV – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentam-se os procedimentos metodológicos que nortearam o desenvolvimento deste trabalho. Trata-se de uma investigação de abordagem qualitativa, de natureza aplicada e de caráter exploratório, com foco interventivo-pedagógico. O foco central consiste na construção de significados para a divisão de

frações por meio de uma sequência didática, construída à luz dos estudos de intervenção pedagógica discutidos por Spinillo (1999) e Lautert (2005) e com base em dificuldades recorrentes no ensino desse conteúdo.

4.1. Caracterização do tipo da pesquisa

De acordo com Gil (2023), a pesquisa pode ser compreendida como um processo racional e sistemático voltado para a formulação de respostas a um problema específico, sendo necessária quando não há informações suficientes para esclarecê-los ou quando os dados existentes estão tão desorganizados que não permitem relacioná-los adequadamente ao problema em questão. Dado os aspectos desta presente pesquisa, podemos classificá-la baseado em critérios relativos à área de conhecimento, às abordagens, aos objetivos e a sua natureza.

Trata-se de um estudo de abordagem qualitativa, voltada a interpretar os processos cognitivos envolvidos, as concepções mobilizadas pelos alunos e as relações conceituais que surgem durante a intervenção. Nessa direção, o trabalho segue a compreensão apresentada por Prodanov e Freitas (2013), segundo a qual a pesquisa qualitativa dá prioridade ao processo, aos significados atribuídos pelos participantes e à interpretação dos fenômenos, baseando-se na análise indutiva dos dados.

A partir desta perspectiva, para o desenvolvimento de uma pesquisa sistemática, foi essencial a definição dos objetivos, etapa que, conforme destaca Gil (2023), orienta a organização do estudo e favorece a compreensão dos resultados esperados. Desta maneira, esta pesquisa assume um caráter exploratório, pois esse tipo de estudo

[...] têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado. (GIL, p.41, 2023)

Com base nessa definição, entende-se que este estudo tem caráter exploratório, pois busca aprofundar a compreensão das dificuldades conceituais relacionadas à divisão de frações, fazendo uso de uma metodologia de intervenção, e analisar como esta, pode favorecer avanços na aprendizagem. Além disso, essa investigação possui caráter interventivo-pedagógico, pois se estrutura a partir da

elaboração de uma sequência didática concebida para atuar sobre dificuldades previamente identificadas em estudos sobre o ensino de frações.

4.2 Estudos de Intervenção: aspectos relevantes

De acordo com Spinillo (1994) os estudos de intervenção têm permitido desenvolver novas habilidades cognitivas e auxiliado a superar possíveis dificuldades no entendimento de um dado conceito. Como nosso objetivo busca compreender o algoritmo da divisão de fração, cujo entendimento ficou restrito ao uso de forma mecanizada, reconhecemos para esta ação, o uso da ferramenta de intervenção como forma de investigar o nível de compreensão sobre a divisão de frações com a possibilidade de alterar o curso do entendimento adquirido sobre os algoritmos da divisão de frações, mas que permanecia obscuro.

O processo de intervenção utiliza diferentes contextos, no entanto, em nosso trabalho vamos explorar o contexto **instrução tutorada** pela aproximação com nosso objeto de pesquisa. Assim,

a instrução tutorada caracteriza-se por uma intervenção explícita de algo, em que o adulto tem um papel ativo no processo, chamando a atenção da criança para os aspectos relevantes que deseja ensinar, sem que isto restrinja o papel dos indivíduos-aprendizes neste processo. (LAUTERT, 2005, p. 63)

Os movimentos produzidos a partir desse entendimento apontam para uma maior reflexão sobre os princípios, relações e regras que regulam determinado conceito ou procedimento.

De acordo com Spinillo (2003), a intervenção tutorada pode ocorrer de diferentes formas e dentre elas destacamos:

(a) os indivíduos podem ser colocados em uma situação onde observem o adulto resolvendo um problema,

(b) são ensinadas regras e estratégias necessárias para compreensão de um dado conceito,

(c) é dado um feedback positivo ou negativo (se está correto ou não) aos indivíduos sobre a forma como este resolveu a tarefa,

(d) são dados modelos para orientar ou corrigir as ações executadas pelos os indivíduos,

(e) são fornecidas explicações a respeito dos aspectos que regem cada questão apresentada a fim de que os indivíduos possam compreender os princípios e

aspectos essenciais de um dado conceito. Nesse caso, são intervenções que podem ser conduzidas em sala de aula.

Em nosso estudo, os procedimentos metodológicos seguem a perspectiva de intervenção pedagógica discutida por Spinillo (1994; 1999) e Lautert (2005), que orientam identificar as concepções iniciais dos estudantes, provocar conflitos cognitivos produtivos e oferecer acompanhamento tutorado para favorecer a reorganização conceitual.

Com esse entendimento, o processo de intervenção será organizado em três etapas articuladas: (1) **diagnóstico inicial**; (2) **intervenção pedagógica tutorada**; (3) **avaliação qualitativa do processo**. Ressalta-se, porém, que o presente trabalho contempla a elaboração do diagnóstico inicial e da intervenção pedagógica tutorada, não prevendo a aplicação da sequência didática nem a realização da etapa de avaliação qualitativa do processo.

As três etapas podem ser assim caracterizadas: a primeira, diagnóstico inicial, tem como objetivo fazer o levantamento dos conhecimentos prévios para compreensão do algoritmo “inverter e multiplicar”; a segunda, intervenção tutorada, é apresentada um conjunto de ações que conduza para a compreensão de um determinado campo de saber, como: considerar como ponto de partida para uma discussão as noções iniciais construídas pelos sujeitos; levar o sujeito a pensar, a analisar e refletir sobre as diferentes formas possíveis de realizar uma determinada tarefa e sobre que princípios (matemáticos ou linguísticos) são necessários para a compreensão do conceito que se deseja desenvolver (LAUTERT, 2003); a terceira, avaliação qualitativa do processo, devem ser observadas e analisadas as construções que foram desencadeadas ao longo do processo de intervenção na direção do entendimento do objeto investigado. Entretanto, embora descrita no delineamento metodológico, não será desenvolvida neste trabalho, uma vez que não haverá aplicação da intervenção em contexto escolar.

As etapas assim constituídas, muito embora pareçam distintas, podem ser entrelaçadas ou até mesmo combinadas tendo em vista os objetivos propostos no planejamento da intervenção.

4.3 Construção da sequência

A sequência didática, conforme compreendida por Henriques (2016), constitui-se como um esquema experimental composto por situações, problemas ou tarefas elaboradas com um fim determinado, desenvolvido a partir de análises prévias de natureza institucional e matemática/didática, com objetivos específicos estabelecidos para cada tarefa. Desse modo, a sequência didática se configura como um instrumento do pesquisador, voltado à concepção, organização e análise de situações de ensino, ainda que não necessariamente aplicadas em contexto de sala de aula.

Nessa perspectiva, a sequência didática assume a forma de um conjunto organizado e articulado de atividades, planejadas de modo a favorecer uma progressão conceitual orientada. Cabe ao professor-pesquisador organizá-la de acordo com os objetivos propostos, de modo que as tarefas possibilitem redirecionar, problematizar ou tornar mais explícitas determinadas formas de pensar matematicamente.

Dessa forma, a intervenção proposta terá como instrumento uma sequência didática, organizada de forma que possibilite a compreensão do conceito de divisão de frações para além da memorização do algoritmo de “inverter e multiplicar”, buscando transformar um conhecimento predominantemente mecânico em um conhecimento conceitual. Para isso, as atividades da sequência utilizam como recurso didático o origami, pelo seu potencial em articular ações, representações e formalização matemática.

Nesse construto, faz-se necessário definir o público-alvo da proposta de intervenção, a qual se destina a estudantes do Ensino Fundamental II, a partir do 7º ano. Segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, os números racionais na representação fracionária e a operação de divisão entre eles são exigidos nessa fase de escolaridade.

Sendo assim, a construção da sequência considerou princípios apontados por Spinillo (1999), adaptados ao contexto da proposta, a saber:

- a) Direcionar a ação do sujeito sobre o papel como forma de construção ativa do conceito;
- b) Possibilitar o registro e a análise das representações numéricas associadas às dobras realizadas;
- c) Explorar as representações figurais produzidas, como suporte para a discussão conceitual;

- d) Propor questionamentos que suscitem conflitos cognitivos e promovam reflexão sobre os resultados obtidos.

As ações e intervenções do professor devem favorecer a compreensão participantes sobre a operação de divisão entre frações. Esse fator deve ser evidenciado por meio de das dobras do papel, conforme revelado nas representações figurais construídas ao longo da sequência. No capítulo seguinte, apresentaremos a sequência construída e as fases em que será analisada.

CAPÍTULO V – CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo será apresentado como a sequência didática foi construída e a análise *a priori* das atividades desenvolvidas nessa intervenção.

5.1. Primeiros passos para a construção da sequência didática

Uma ação, no sentido de fazer, carrega consigo um conjunto de intenções pré-estabelecidas. No caso da construção da nossa sequência didática, está vem delimitada pelo desejo de contribuir para o ensino de frações a partir do uso do origami como recurso didático.

Motivado e incentivado a prosseguir no meu objetivo, procurei selecionar origamis com potencial para revelar diferentes concepções sobre fração e suas operações entendendo que as observações e as interações reveladas pelos estudantes poderiam iluminar os entendimentos e contribuir para preencher lacunas de aprendizagem.

A sequência didática foi planejada originalmente para contemplar três modelos de origami: a borboleta, o cubo e o cata-vento. Esses modelos foram selecionados com a intenção de explorar justificativas visuais para o processo de divisão envolvendo frações, evidenciando como esse conceito é compreendido a partir das dobras realizadas em cada construção. No entanto, considerando os objetivos deste trabalho, optou-se por realizar um recorte do planejamento original, direcionando a análise para uma intervenção tutorada centrada exclusivamente na construção do origami do cubo, em função de seu potencial para favorecer a compreensão conceitual da divisão de frações.

O cubo é um sólido que possui representação na história da humanidade até os dias atuais. Suas representações estão presentes nos livros didáticos e são revestidos por diferentes contextos como um jogo, material dourado e atividades artísticas. Como membro da família dos poliedros é um objeto de conhecimento presente no currículo da Educação básica.

5.2. Construção da sequência do Origami de Cubo

Situação-problema: Hoje nosso desafio será a confecção de um cubo fazendo uso da arte do origami.

Figura 6 – Foto do origami do cubo.

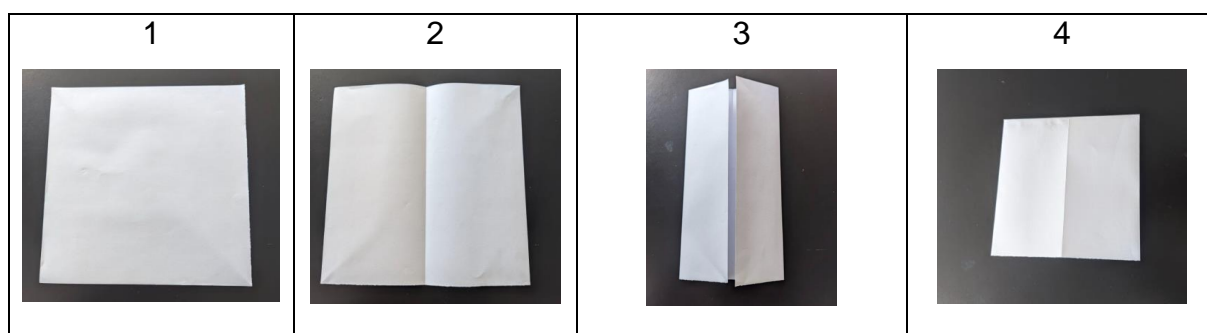


Fonte: Arquivo pessoal do autor

Para transformar nossa folha de papel no modelo origami escolhido, vamos precisar seguir uma sequência de passos aqui ilustrados⁷.

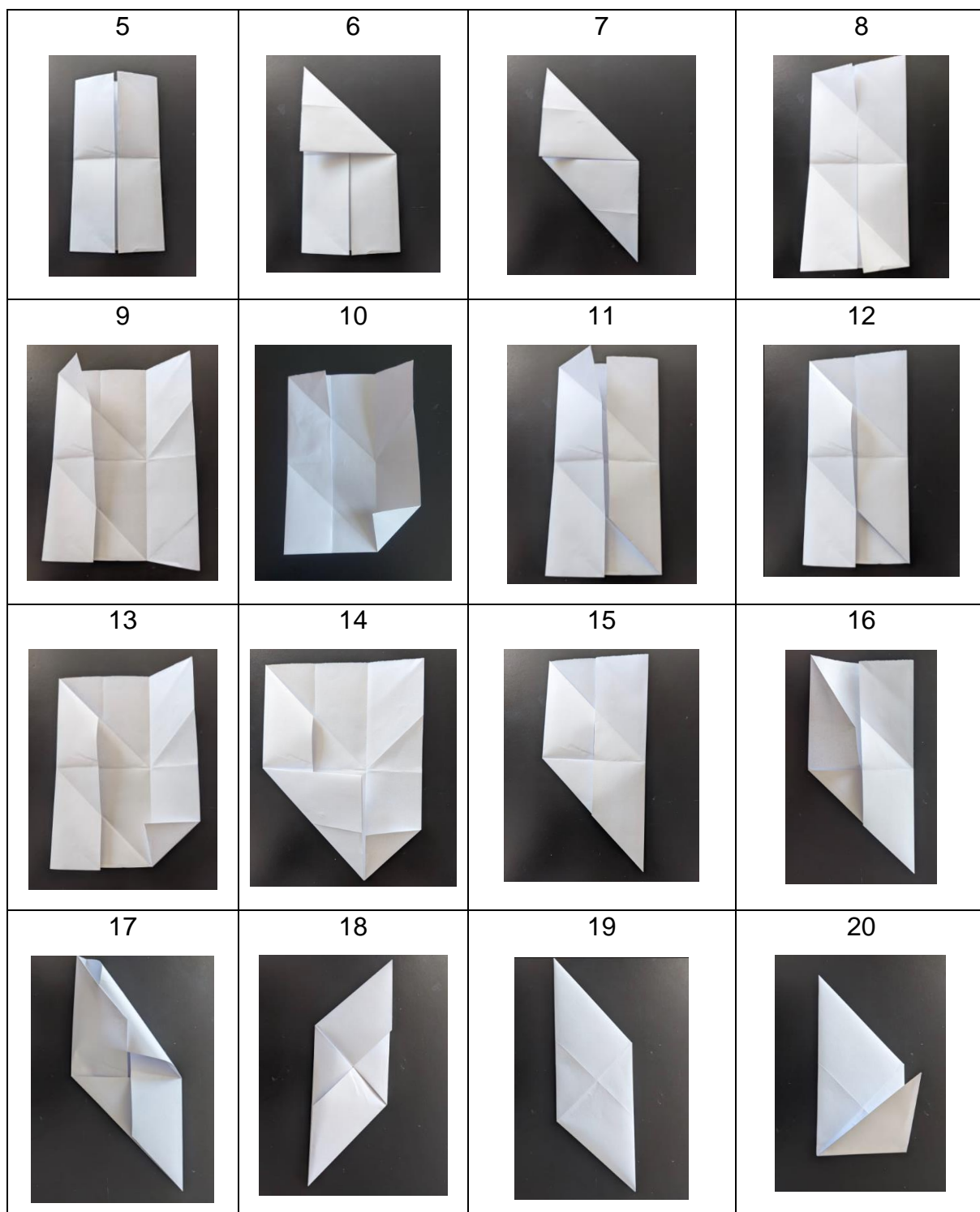
Quadro 4 – Passo-a-passo para construção do cubo

(continua)

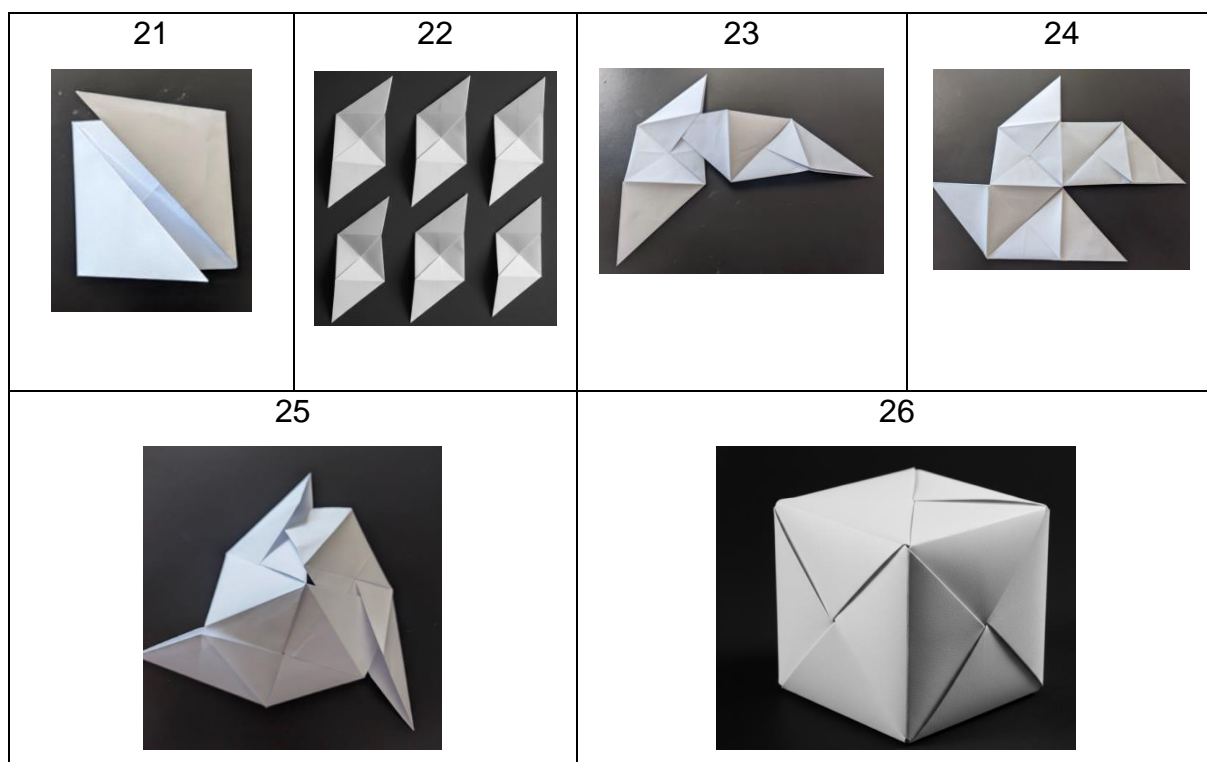


⁷ A sequência de condução para a produção das dobras, em todas as etapas, encontra-se nos Apêndices.

(continuação)



(conclusão)



Fonte: Imagens produzidas pelo autor

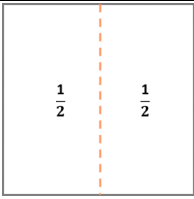
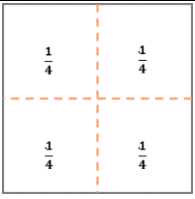
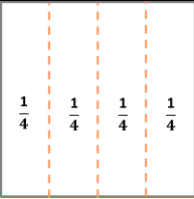
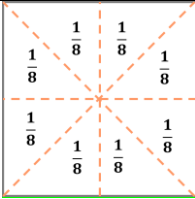
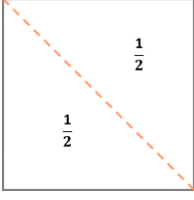
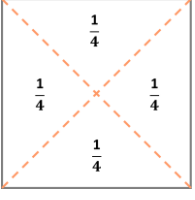
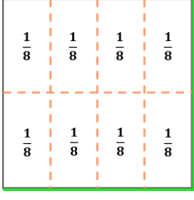
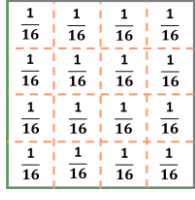
5.2.1. Etapa diagnóstica

Antes de iniciar as atividades de dobradura com o papel para a construção do origami, deve-se realizar uma investigação dos conhecimentos prévios dos alunos acerca do conceito de fração e das diferentes interpretações da divisão no campo dos racionais. Essa etapa diagnóstica busca identificar concepções pré-estabelecidas e possíveis obstáculos que possam interferir na construção do conceito de divisão entre frações. Para tanto será entregue ao estudante um envelope contendo os seguintes materiais: um quadrado, uma folha de papel A4, régua e tesoura.

Objetivo: Para esta ação o objetivo é verificar o que os estudantes compreendem por fração; se ele reconhece a fração como parte de um todo; verificar se o aluno consegue realizar uma divisão no papel de modo que encontre áreas iguais ao pedaço em formato quadrado que foi dado e revelar seu entendimento quanto a forma de registro das divisões efetuadas.

Registros que podem ser evidenciados nessa ação:

Quadro 5 – Algumas possibilidades de divisões no papel

Fonte: Imagens produzidas pelo autor

Alguns entendimentos podem ser revelados como por exemplo, se o estudante conseguir dividir o papel, mas não produzir áreas iguais ao pedaço quadrado oferecido, isso indicará que ainda não compreende a noção de unidade de área, nem o critério de equivalência entre partes. Por outro lado, caso consiga dividir corretamente o papel, justificar o procedimento, mas não estabelecer relação entre a área obtida e uma fração da folha retangular, isso evidenciará compreensão geométrica da equivalência, porém sem integração dessa compreensão ao campo numérico das frações. Finalmente, se o estudante dividir o papel em partes equivalentes, justificar o que fez e relacionar a área do pedaço quadrado a uma fração do todo, demonstrará domínio conceitual e compreensão integrada entre partição, igualdade de áreas e representação fracionária.

5.2.2. ETAPA DE INTERVENÇÃO TUTORADA – A construção de uma das seis faces quadrangulares do cubo

Figura 7 – Face do cubo



Fonte: Autor

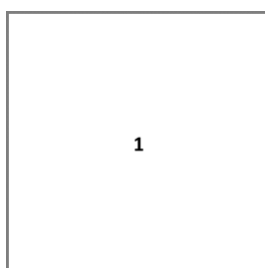
No leque de ferramentas vamos fazer uso de um quadrado unitário, ou seja, um quadrado de área igual a um. Considerando o quadrado de papel escolhido como uma unidade de área, as dobras iniciais dividem o papel em áreas menores que podem ser representadas frações⁸.

O objetivo desta atividade- construção da face do cubo por meio de dobraduras, é revisitar de forma significativa a divisão de frações, trazendo visibilidade e entendimentos para os algoritmos que são apresentados em sala de aula. Para os professores e estudantes da licenciatura, a exploração desse origami chega como um instrumento para fortalecer saberes que serão exigidos no exercício da docência.

Para iluminar o processo de investigação, dividimos as atividades em três momentos chamados de primeira, segunda e terceira dobras, cada uma delas contendo algum passo do modelo e um momento de intervenção, os quais serão apresentados bem como a análise do seu potencial didático.

Passo inicial: Inicie com um quadrado de papel representando uma unidade inteira.

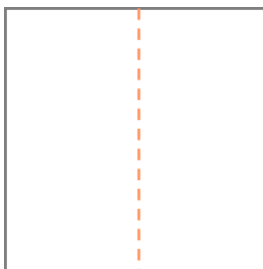
Figura 8 - Quadrado unitário



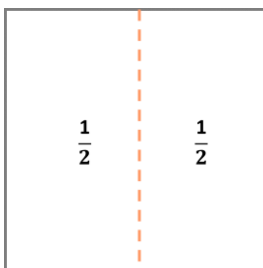
Fonte: Autor

Primeira dobra: Divida a folha ao meio juntando dois lados não consecutivos do quadrado.

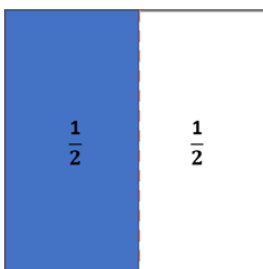
⁸ Os passos para transformar uma folha retangular A4 em um quadrado perfeito estarão descritos no Apêndice A

Figura 9 – Representação da primeira dobra descrita**Fonte: Autor**

Registro: Escreva a fração correspondentes a cada uma das partes do inteiro.

Figura 10 – Registro de $\frac{1}{2}$ em cada divisão**Fonte: Autor**

Explorando a representação: A primeira dobradura tem como objetivo produzir a primeira partição na folha, procurando relacionar a contagem das partes com a área do retângulo. Como exemplificado na *Figura 11* abaixo:

Figura 11 – Representação da área de $\frac{1}{2}$ **Fonte: Autor**

Olhando para o exemplo representado, temos que a **área do retângulo** em destaque será igual a $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ e assim, podemos inferir que $\frac{1}{2}$ cabe 2 vezes na unidade de área e, ao mesmo tempo, escrever que $1 : \frac{1}{2} = 2$.

Questionamento: Qual o sentido dessa operação?

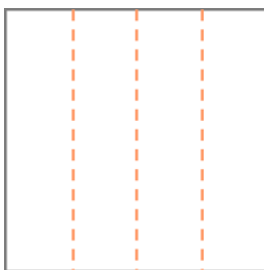
Análise: Neste primeiro momento, a *primeira dobra* estabelece a partição do quadrado unitário, permitindo que o aluno reconheça que a folha (quadrado) dividida ao meio produz duas partes congruentes, onde cada uma das partes corresponde a $\frac{1}{2}$ da unidade de área do quadrado unitário. Essa etapa introduz a ideia de que a divisão de uma fração pode ser interpretada como área, e que " $\frac{1}{2}$ cabe duas vezes em 1", criando uma ponte entre a visualização figural e o sentido fundamental da divisão.

Quando o aluno registra a fração correspondente após a dobra, ele inicia o processo de associar sua ação no material concreto à representação simbólica do objeto matemático abstrato. Ao ser questionado sobre "qual o sentido dessa operação?" o aluno pode refletir que $1 : \frac{1}{2} = 2$ significa que duas unidades de área igual a $\frac{1}{2}$ compõem o inteiro. A consequência formativa desta etapa, é o aluno perceber que $\frac{1}{2}$ pode passar a ser uma nova unidade de medida, permitindo generalizações futuras.

Consequência 1: Obtemos agora uma nova medida que pode ser tomada como unidade de referência

Segunda dobra: Leve agora, os mesmos dois lados do papel utilizados na dobra anterior até o seguimento vertical com extremidades nos pontos médios dos lados opostos construída no passo anterior.

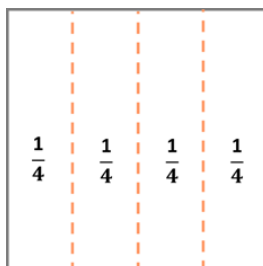
Figura 12 – Representação da segunda dobra descrita



Fonte: Autor

Registro: Escreva a fração correspondentes a cada uma das partes em relação ao quadrado unitário.

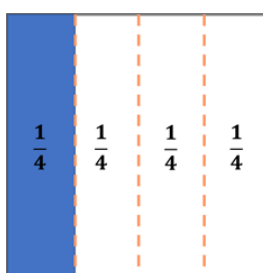
Figura 13 – Registro de $\frac{1}{4}$ em cada divisão



Fonte: Autor

Explorando a representação: A área em destaque na *Figura 14* equivale a $1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{1}{4}$ está contido 4 vezes na unidade quadrada de área 1. Assim, podemos então escrever $1 : \frac{1}{4} = 4$, que conduz ao entendimento de que $\frac{1}{4}$ cabe exatamente, 4 vezes na unidade quadrada.

Figura 14 – Representação da área de $\frac{1}{4}$

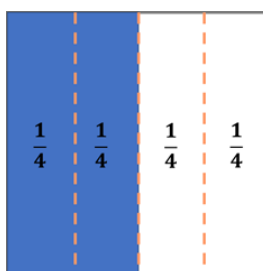


Fonte: Autor

Antes de seguirmos para a terceira dobra, podemos produzir novas percepções. Analisando novas possibilidades no quadrado unitário dividido em 4 partes equivalentes a $\frac{1}{4}$.

Observe a *Figura 15* a seguir:

Figura 15 – Representação da área de $\frac{2}{4}$

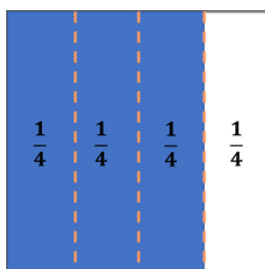


Fonte: Autor

As duas colunas demarcadas representam $\frac{2}{4}$ que pode ser escrito como sendo $2 \times \frac{1}{4}$, logo podemos interpretar que $\frac{2}{4} \div \frac{1}{4} = 2$, que é exatamente o número de vezes que a unidade de medida $\frac{1}{4}$ está contida em $\frac{2}{4}$. O entendimento figural dá visibilidade ao algoritmo (DND)⁹ pela seguinte forma: $\frac{2}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{2:1}{4:4} = \frac{2}{1} = 2$.

Uma ampliação para $\frac{3}{4}$, observe a Figura 16 a seguir:

Figura 16 – Representação da área de $\frac{3}{4}$



Fonte: Autor

Como já vimos anteriormente, podemos dizer que a unidade de medida $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$, e como ação inversa, escrever $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3$, ou seja, 3 é o número de vezes que a unidade de medida $\frac{1}{4}$ cabe, exatamente, em $\frac{3}{4}$.

Iluminando os algoritmos (ID) e (IM) podemos reconhecer que produzem o mesmo resultado:

A1. Igualar denominadores (ID) $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{1} = 3$

A2. Inverter e multiplicar (IM) $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{3}{4} \times 4 = \frac{12}{4} = 3$

Vamos explorar a visualização da divisão entre a partição resultante da primeira dobra ($\frac{1}{2}$), pela segunda dobra, P2 equivalente a $\frac{3}{4}$, ou seja, vamos encontrar o resultado da divisão de $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$.

Observe as representações figurais do dividendo e divisor na Figura 17:

⁹ DND- Dividir Numeradores e Denominadores entre si.

Figura 17 – Representação das áreas $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$

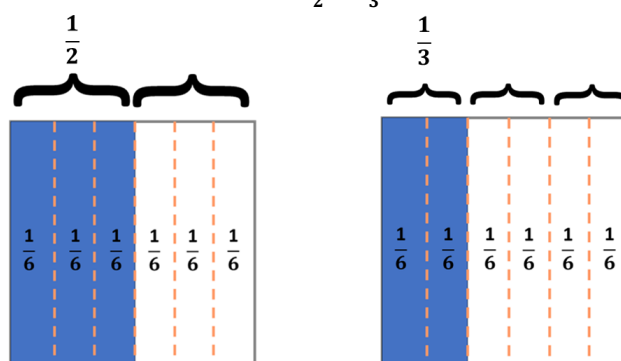


Fonte: Autor

É notável que a área que corresponde a $\frac{3}{4}$ não se encaixa, exatamente, um número inteiro de vezes dentro da área correspondente a $\frac{1}{2}$. Se faz necessário então dividir as representações em unidades menores, de modo que $\frac{3}{4}$ possa caber exatamente em $\frac{1}{2}$, ou alguma parte dele.

Questionamento: Como encontramos o valor correspondente a $\frac{3}{4}$ que se encaixa perfeitamente em $\frac{1}{2}$? **R:** Precisamos de uma área com unidade de medida em comum (u) às duas representações. Por exemplo: tanto $\frac{1}{2}$ quanto $\frac{1}{3}$ podem ser representadas utilizando a unidade de medida $\frac{1}{6}$, como mostra a Figura 18 a seguir:

Figura 18 – Representação das áreas $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ utilizando a unidade de medida $\frac{1}{6}$



Fonte: Autor

Consequência 2: Existem unidades de áreas que são comuns a outros, ou seja, podemos representar uma mesma medida de área do quadrado unitário a partir de diferentes unidades de referência.

Análise: O segundo momento, nomeado *segunda dobra*, produz uma nova partição no quadrado unitário, dividindo-o em quatro partes equivalentes e permitindo ao aluno visualizar a fração $\frac{1}{4}$ como uma unidade que “cabe quatro vezes” no quadrado de área unitária.

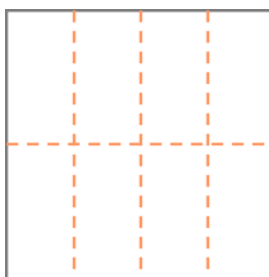
Essa manipulação reforça compreensão da ideia de que a divisão entre frações pode ser interpretada pela contagem de unidades de área equivalentes. Ao utilizar representações figurais para explorar divisões como $\frac{2}{4} \div \frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$, torna possível ao aluno perceber a relação entre a multiplicidade de áreas e o quociente, compreendendo o papel das equivalências para justificar os procedimentos, reconhecendo como a partição do papel se conecta a diferentes interpretações operatórias da divisão.

Nesse processo, também são introduzidos algoritmos formais, como dividir numeradores e denominadores (DND), igualar denominadores (ID) e inverter e multiplicar (IM), os quais deixam de ser regras descontextualizadas para se tornarem consequências naturais das representações construídas.

O objetivo dessa etapa é garantir que o estudante entenda que diferentes partições correspondem a diferentes unidades de medida, além de que frações equivalentes emergem das reconfigurações do papel. Ademais, é imprescindível que ele conclua essa etapa reconhecendo que a divisão de frações depende da relação entre unidades de área e não apenas da manipulação algorítmica. Essa compreensão prepara o aluno para situações em que as unidades não se encaixam exatamente, caminho para a necessidade de estabelecer uma nova unidade comum.

Terceira dobra: Solicite que virem a folha de maneira que as marcações fiquem horizontais. Dobrem em seguida a folha ao meio, unindo dois lados paralelos da folha, diferentes dos utilizados na primeira dobra, conforme pode ser observado na Figura 19:

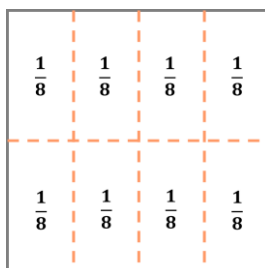
Figura 19 – Representação da terceira dobra descrita



Fonte: Autor

Registro: Escreva a fração correspondentes a cada uma das partes do inteiro.

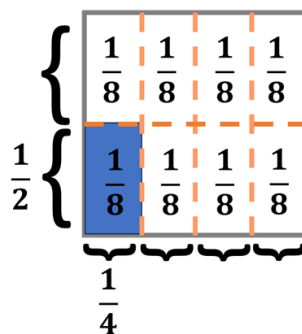
Figura 20 – Registro de $\frac{1}{8}$ em cada divisão



Fonte: Autor

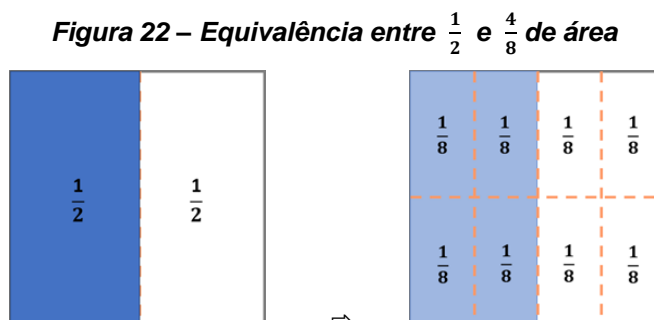
Explorando a representação: Utilizando a unidade de área correspondente a $\frac{1}{8}$ vamos investigar como ficaria a representação da área ocupada por $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$. O quadrado unitário contém 8 unidades de área iguais a $\frac{1}{8}$, e sabemos ainda, que a área da unidade $\frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$, como mostra a Figura 21 a seguir.

Figura 21 – Área de $\frac{1}{8}$ representado como produto de suas medidas



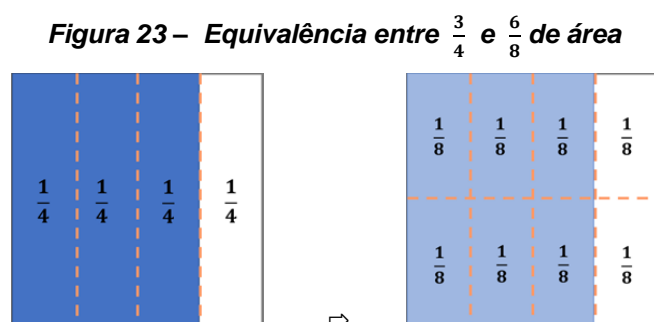
Fonte: Autor

Na Figura 22, é possível observar que pela classe de equivalência, $\frac{1}{2}$ contém 4 unidades de $\frac{1}{8}$, isto é, $\frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{8}$.



Fonte: Autor

De modo análogo, na Figura 23 é possível observar que, pela relação de equivalência, $\frac{3}{4}$ contém 6 unidades de $\frac{1}{8}$, isto é, $\frac{3}{4} = 6 \times \frac{1}{8}$.



Fonte: Autor

Como consequência, reconhecemos nesse construto que existe uma **nova unidade (u)** ($\frac{1}{8}$) que é comum às duas áreas, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$.

Iluminando os algoritmos da divisão (ID) e (IM) a respeito de $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ temos:

$$(ID) \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \div 6 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4 \div 6}{8 \div 8} = \frac{4 \div 6}{1} = \frac{4}{6}, \quad (IM) \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6}.$$

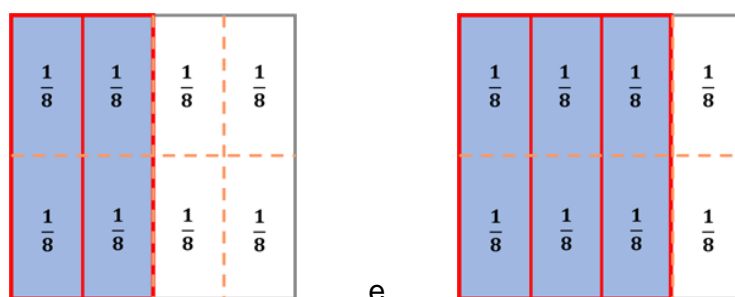
Questionamento: Mas de fato, qual o significado do resultado desta operação

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{4}{6} ?$$

Buscando entendimentos, retomamos às representações reconfiguradas de

$$\frac{1}{2} \text{ e } \frac{3}{4}.$$

Figura 24 – reconfiguração de $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ da Área do quadrado unitário



Fonte: Autor

A área de $\frac{1}{2}$ tomando $\frac{1}{8}$ como referência é dado por: $\left[2 \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 2 \left(\frac{1}{8}\right)\right]$, do modo análogo, a área de $\frac{3}{4}$ tomando $\frac{1}{8}$ como referência é dado por: $\left[3 \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 2 \left(\frac{1}{8}\right)\right]$. Em termos de área, a partir dessa unidade de referência teremos:

$$\left[2 \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 2 \left(\frac{1}{8}\right)\right] \div \left[3 \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 2 \left(\frac{1}{8}\right)\right] = \left[4 \left(\frac{1}{8}\right) \div 6 \left(\frac{1}{8}\right)\right] = \frac{4\left(\frac{1}{8}\right)}{6\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Logo, $\frac{2}{3}$ da área de $\frac{3}{4}$ cabem em $\frac{1}{2}$.

Consequência 3: O quociente dessa divisão corresponde à razão entre a área representada pelo dividendo e a área adotada como unidade de referência, definida pelo divisor.

Análise: No terceiro momento, realizada a *terceira dobra*, o aluno manipula o papel para produzir uma nova partição que gera oito unidades de área equivalentes a $\frac{1}{8}$. Essa redefinição da unidade de medida constitui o ponto central para resolver a divisão entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, pois permite expressar ambas as frações em uma mesma referência comum: $\frac{1}{8}$ que passa a ser representado como 4 unidades de $\frac{1}{8}$, enquanto $\frac{3}{4}$ corresponde a 6 dessas unidades. A partir dessa equivalência, abre-se caminho para a compreensão da divisão entre frações como um processo que corresponde à comparação entre o número de unidades que compõem o dividendo e aquelas que compõem o divisor. Assim, a operação adquire significado material/visual, permitindo observar que $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Essa etapa pode trazer ganhos conceituais importantes, pois possibilita ao aluno reconhecer que comparar frações exige uma unidade de referência comum.

Além disso, pode ser observado no momento de intervenção do professor que a divisão pode representar a unidade que compõem uma determinada região do todo, e os procedimentos da dobradura permitem visualizar mais claramente por que algoritmos formais, como igualar denominadores (ID) ou inverter e multiplicar (IM), produzem o resultado correto. O questionamento final a respeito de “qual o significado de $\frac{4}{6}$?” conduz a uma reflexão essencial, permitindo ao aluno concluir que o resultado expressa quantas vezes a unidade de área correspondente ao divisor ($\frac{3}{4}$) está contida na área representada pelo dividendo ($\frac{1}{2}$).

Ao longo dessa construção, obtemos indícios de que o estudante pode alcançar um nível avançado de compreensão, articulando representação figural, definição de unidade de área, equivalência entre frações, razão entre medidas e interpretação numérica do quociente.

A partir dessa compreensão, as dobras seguintes da construção do origami do cubo passam a cumprir uma função prática, voltada à montagem da peça. Ainda que essas etapas possam possibilitar a abordagem de outros conteúdos matemáticos, essa exploração não é contemplada no escopo deste trabalho. Assim, não é necessário novos elementos referentes à divisão entre frações, uma vez que os significados associados já foram explorados por meio da definição de uma unidade de área comum e da interpretação do quociente como uma relação entre medidas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise do conceito de divisão de frações na literatura científica e em pesquisas no campo da Educação Matemática evidencia um cenário historicamente marcado por dificuldades conceituais, tanto por parte dos estudantes quanto dos professores. Tais dificuldades estão fortemente associadas à recorrente abordagem desse conteúdo de forma estritamente algorítmica, em que a aplicação do procedimento conhecido como “inverter e multiplicar” se sobrepõe à compreensão dos significados matemáticos envolvidos na operação.

Os estudos analisados ao longo desta pesquisa indicam que existem procedimentos matematicamente válidos para a divisão de frações que vão além do algoritmo tradicionalmente difundido como “inverter e multiplicar”. No entanto, observa-se que, em muitos contextos escolares, esses procedimentos alternativos

são pouco explorados, desqualificados, ou mesmo desconsiderados, contribuindo para a consolidação de uma visão reducionista do conteúdo. Diante desse cenário, este trabalho buscou responder à seguinte questão: o que exatamente estamos fazendo quando dividimos frações e como essa operação pode ser compreendida para além da aplicação mecânica do algoritmo de “inverter e multiplicar”?

A análise desenvolvida indica que o algoritmo de inverter e multiplicar (IM) não se configura como um princípio conceitual em si, mas como uma consequência algébrica das relações de equivalência e razão entre frações. Ao dispensar a construção de uma unidade de medida comum, esse algoritmo funciona como um atalho operacional, cujo significado permanece oculto quando o ensino privilegia apenas a técnica.

Nesse contexto, a proposta de intervenção pedagógica analisada neste trabalho, fundamentada no uso do origami, indica potencial para atribuir significado a procedimentos algébricos e geométricos associados à divisão de frações. As dobras do papel, quando articuladas a questionamentos orientados e momentos de formalização, permitem a compreensão da relação parte-todo, reconhecimento sobre a unidade de medida na forma de fração, a equivalência entre frações e diferentes interpretações do quociente. Assim, o origami assume um caráter não apenas construtivo ou lúdico, mas funciona como um recurso didático capaz de tornar visíveis relações matemáticas.

A análise a priori da sequência didática sugere que a divisão entre frações pode ser compreendida como uma razão entre áreas, na qual o divisor define a unidade de referência adotada. Sob essa perspectiva, o algoritmo de inverter e multiplicar é entendido como uma consequência lógica dessas relações, e não como um procedimento arbitrário e que deve ser memorizado. A articulação entre representação figural, manipulação das dobras e reflexão orientada mostra-se promissora para a construção de significados conceituais associados à divisão de frações.

Por fim, as discussões desenvolvidas ao longo deste trabalho apontam para um lugar central no processo de ensino e aprendizagem das operações com números racionais na forma fracionária: a prática docente. É nesse espaço que estudantes da licenciatura, enquanto sujeitos em formação, precisam ser provocados a refletir sobre abordagens pedagógicas que não desconsiderem a importância da técnica matemática, mas que também ampliem os espaços de investigação, problematização

e intervenção em sala de aula. Dessa forma, defende-se a necessidade de práticas educativas que articulem conhecimento conceitual, representação, argumentação e intervenção pedagógica, contribuindo para uma formação docente crítica e comprometida com a aprendizagem significativa dos estudantes.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.
- BERTONI, N. E. A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, 2008.
- BERTONI, Nilza Eigenheer. *Pedagogia: Educação e Linguagem Matemática IV: Frações e Números Fracionários*. Brasília: UnB, 2009.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: MEC/SEB, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 28 jun. 2024.
- CONTRERAS, J. Algoritmos de división de fracciones. Universidad de Valencia, 2004. In: SMITH, D. *The Teaching of Arithmetic: Historical Perspectives*. 1958.
- CONTRERAS, J.; GÓMEZ, P. Algoritmos de división de fracciones. Universidad de Valencia, 2004.
- COSTA, Ângelo Gustavo Mendes et al. Dobraduras e aprendizagem significativa: a inter-relação no processo de ensino e aprendizagem em matemática. In: CONEDU, VI, 2020. Campina Grande: Realize Editora, v. 2, p. 898–912. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/65355>. Acesso em: 07 jul. 2024.
- COSTA, Eliane Moreira da. *Matemática e Origami: Trabalhando Frações*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.
- FÁVERO, M. H.; PINA NEVES, R. D. S. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. *Zetetiké*, v. 20, n. 37, 2012.
- FLORES, P. El algoritmo de la división de fracciones. *Epsilon*, Sevilla, v. 25, n. 70, p. 27–40, 2008.

GABRIEL, Florence et al. A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, v. 4, artigo 715, 2013.

GARCÍA, A. I. M. Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado em Didática da Matemática) — Universidad de Granada, Granada, 2013.

GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 7. ed. Barueri, SP: Atlas, 2023.

GUERRA, R. B.; SILVA, F. H. S. D. As operações com frações e o princípio da contagem. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 41–54, 2008.

HOFFMAN et al. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 25, n. 1, p. 47–77, 2023.

ISIKSAL, M.; CAKIROGLU, E. Pre-service teachers' representations of division of fractions. In: PANTAZI, D. P.; PHILIPPOU, G. (Ed.). *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Cyprus: European Research in Mathematics Education V, 2007. p. 1916-1924.

Kieren, Thomas. On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In: Lesh, Richard (ed.). *Number and measurement: paper from a research workshop*. Columbus: ERIC/Smeac, 1976. p. 101-144.

LAMON, S. J. Presenting and representing: from fractions to rational numbers. In: CUOCO, A.; CURCIO, F. (Org.). *The Roles of Representations in School Mathematics*. Reston: NCTM, 2001. p. 146–168.

LAUTERT, Síntria Labres. As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção. 2005. 325 f. Tese (Doutorado em Psicologia) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.

LEAL, Maria de Fátima Costa. Teoria e prática no processo de formação profissional: o caso de um curso de Licenciatura em Matemática. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — PUC-SP, São Paulo, 2016.

LIMA, Joelma Trindade de. Origami: história e possibilidades pedagógicas. Curitiba: UFPR, 2014.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema*, v. 21, n. 31, 2008.

LUBINSKI, C. A.; FOX, T.; THOMASON, R. Learning to Make Sense of Division of Fractions: One K–8 Preservice Teacher's Perspective. *School Science and Mathematics*, West Lafayette, v. 98, n. 5, p. 247-259, 1998

MOREIRA, Marco Antonio. O que é afinal aprendizagem significativa? *Qurrriculum*, La Laguna (Espanha), n. 25, p. 29-56, 2012

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. A teoria dos subconstrutos e o número racional como operador: das estruturas algébricas às cognitivas. *Bolema*, v. 21, n. 31, 2008.

MORIEL JUNIOR, J. G. Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações. 2014. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), UFMT, Cuiabá, 2014.

MORIEL JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D.; CARRILLO, J. Meta-análise sobre conhecimento para ensinar divisão de frações. *Bolema*, v. 33, n. 65, 2019.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. Crianças Fazendo Matemática. Porto Alegre: Artmed, 1997

PIAGET, J.; INHELDER, B. e SZEMINSKA. The child's conception of geometry. Trad. de E. A. Lunzer, New York, Harper e Torchbooks, 1960.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo, RS: Feevale, 2013.

SILVA, Maria José Ferreira da. Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. 2005. Tese (Doutorado) — PUC-SP, São Paulo, 2005.

SILVA, M. W. X. Ensino básico de frações utilizando origami. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014.

SILVEIRA, E.; SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. Estudo de frações: superficialidades, parcialidades ou equívocos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 38, e230100, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100>.

SPINILLO, A. G. Estudos de treinamentos e variações experimentais. *Temas em Psicologia da SBP (Sociedade Brasileira de Psicologia)*. São Paulo, v. 3, p.43-58, 1994.

SPINILLO, A. G. As relações entre aprendizagem e desenvolvimento discutidas a partir de pesquisas de intervenção. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, Rio de Janeiro, v. 51, n. 1, p. 55–74, jan./mar. 1999.

SPINILLO, A. G. Ensinando Proporção a crianças: alternativas pedagógicas em sala de aula. *Boletim GEPEM*, n. 43, p.11- 48, agost/dez. 2003.

VAZ, R. F. N. Divisão de frações: explorando algoritmos não usuais. *Educação Matemática em Revista*, n. 52, p. 58–66, jul. 2016.

ZABALLA, Antoni. *A prática educativa*. Porto Alegre, ARTMED, 1998

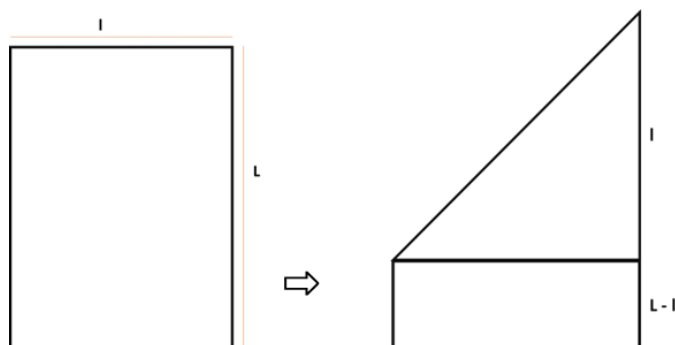
APÊNDICES

APÊNDICE A: OBTENDO UMA FOLHA QUADRADA

A maioria dos modelos de origamis utiliza uma folha quadrada para sua construção. Nesse tópico mostraremos como transformar uma folha retangular A4 em um quadrado perfeito. Caso já esteja usando uma folha no formato quadrado, sintase à vontade para pular esta etapa e dar início às dobraduras.

Tomando uma folha de papel A4, podemos produzir um quadrado realizando algumas dobras simples. Basta levar uma das laterais menores até encostar em uma das laterais maiores, formando um triângulo.

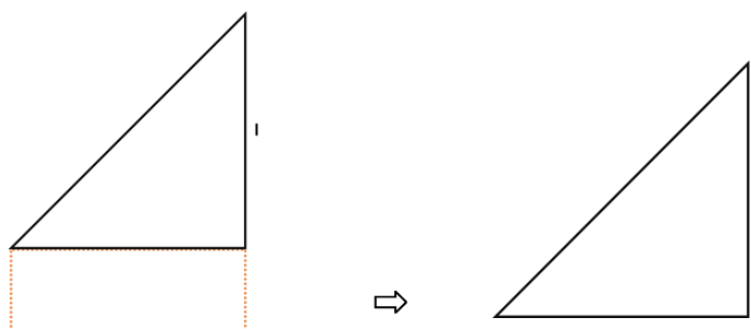
Figura 25 - Obtendo papel quadrado (passo 1)



Fonte: Autor

Em seguida, destacamos a parte retangular que sobra e a removemos.

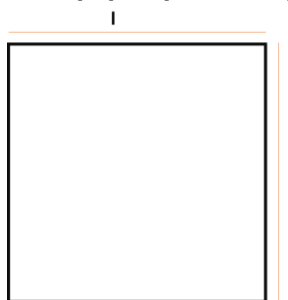
Figura 26 - Obtendo papel quadrado (passo 2)



Fonte: Autor

Abra o pedaço da folha que foi dobrado em formato triangular e o pedaço restante terá o formato de um quadrado perfeito

Figura 27 - Obtendo papel quadrado (passo 3)



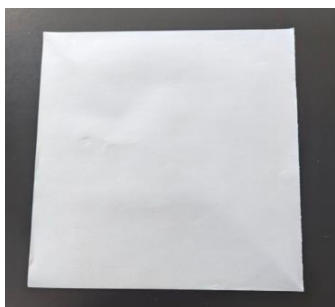
Fonte: Autor

Agora que temos uma folha quadrada e estamos prontos para iniciar as atividades com origamis.

APENDICE B: CONSTRUÇÃO DO CUBO

Passo 1: Para começar, precisamos de uma folha de papel no formato quadrado

Figura 28 – Construção do cubo (passo 1)



Fonte: Autor

Passo 2: Com a folha quadrada em mãos, trace uma mediatriz unindo dois lados não consecutivos do quadrado, faça um vinco e abra novamente. Procure fazer vincos bem precisos.

Figura 29 – Construção do cubo (passo 2)



Fonte: Autor

Passo 3: Leve os mesmos lados usado no passo anterior até a mediatriz criada.

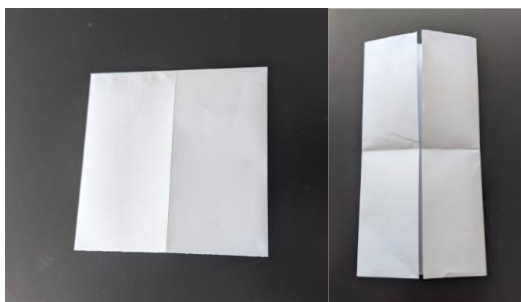
Figura 30 – Construção do cubo (passo 3)



Fonte: Autor

Passo 4: Dobre o papel ao meio de maneira que possamos obter novamente um quadrado, juntando os dois lados menores do retângulo, e desdobre.

Figura 31 – Construção do cubo (passo 4)



Fonte: Autor

Passo 5: A parti do passo anterior, conseguimos identificar o ponto médios dos lados maiores do retângulo. Escolha dois vértices não consecutivos e leve-os até o ponto médio de um lado oposto ao qual eles fazem parte. Certifique-se de ter vincado bem o papel, e após isso desdobre-o para o passo anterior.

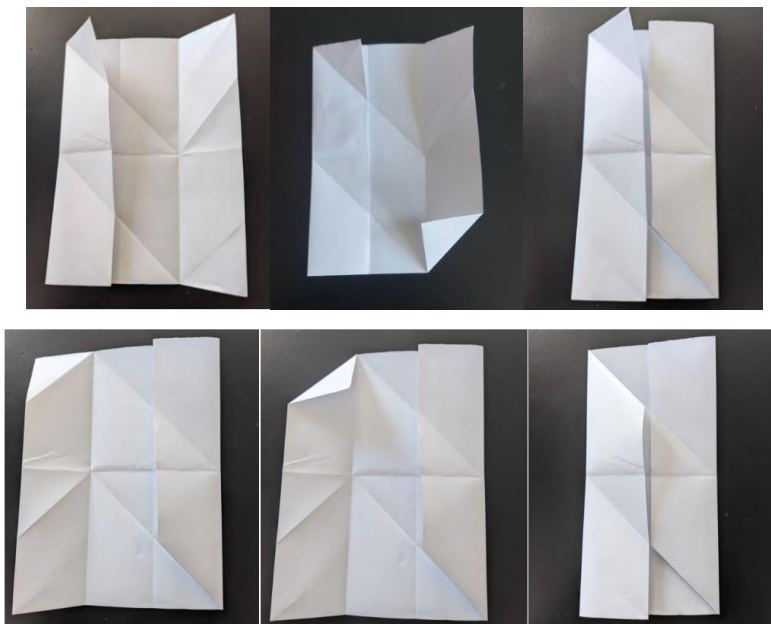
Figura 32 – Construção do cubo (passo 5)



Fonte: Autor

Passo 6: Desdobre um dos lados e verá um pequeno triângulo marcado próximo ao vértice, dobre-o para dentro e redobre o lado do papel. Repita o processo para o outro lado.

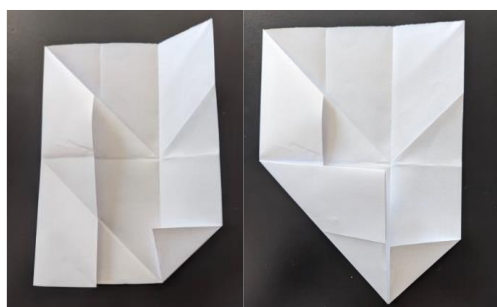
Figura 33 – Construção do cubo (passo 6)



Fonte: Autor

Passo 7: Desdobre um dos lados. Usando os vincos e marcações realizados no passo 5, vamos dobrar para dentro o triângulo formado pelo ponto médio do lado ainda dobrado, o vértice inferior esquerdo, e um dos vértices do triângulo pequeno do passo 6.

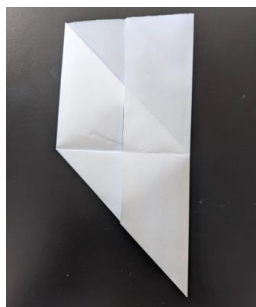
Figura 34 – Construção do cubo (passo 7)



Fonte: Autor

Passo 8: Dobre novamente para dentro o lado desdobrado no passo anterior

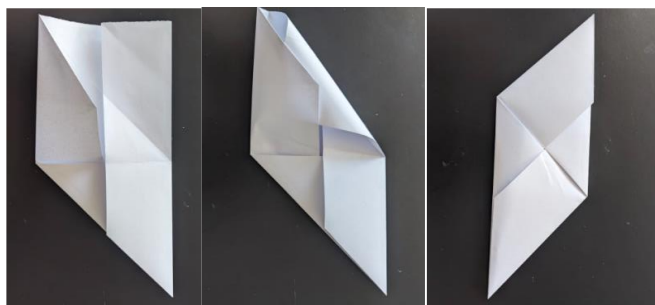
Figura 35 – Construção do cubo (passo 8)



Fonte: Autor

Passo 9: Faça um bolso para encaixar o vértice superior direito.

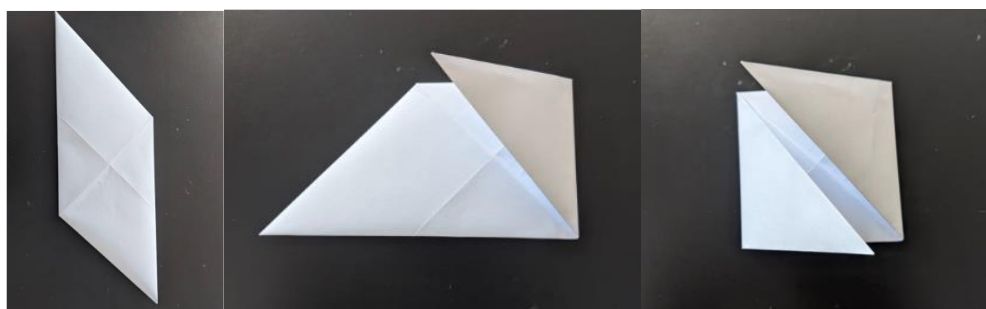
Figura 36 – Construção do cubo (passo 9)



Fonte: Autor

Passo 10: Vire o papel e leve os vértices da diagonal maior do paralelogramo até um os da diagonal menor de modo que o papel fique em formato quadrado

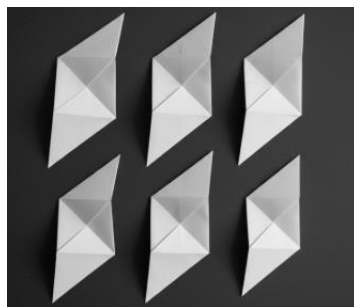
Figura 37 – Construção do cubo (passo 10)



Fonte: Autor

Passo 11: Repita todos os passos anteriores de modo a obter 6 peças iguais

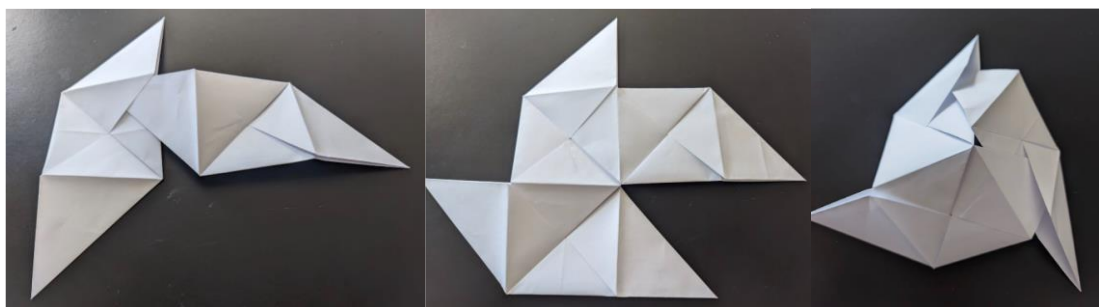
Figura 38 – Construção do cubo (passo 11)



Fonte: Autor

Passo 12: Usando os bolsos na parte frontal das peças, encaixe-as conforme as imagens abaixo:

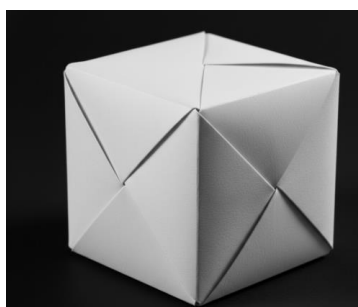
Figura 39 – Construção do cubo (passo 12)



Fonte: Autor

Após encaixar todas as 6 peças, você terá um cubo feito com origami

Figura 40 – Construção do cubo (passo 13)



Fonte: Autor