UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA

JECIENE ROSA NASCIMENTO DA SILVA

A FÍSICA E A MATEMÁTICA ATRAVÉS DA MÚSICA: UM ENSAIO SOBRE SEUS VÍNCULOS EM PRODUÇÕES CIENTÍFICAS

BARREIRAS/BA
2021

JECIENE ROSA NASCIMENTO DA SILVA

A FÍSICA E A MATEMÁTICA ATRAVÉS DA MÚSICA: UM ENSAIO SOBRE SEUS VÍNCULOS EM PRODUÇÕES CIENTÍFICAS

Trabalho de conclusão de curso para obtenção do título de graduação de Licenciatura em Matemática apresentado a Universidade do Estado da Bahia - UNEB Campus IX, Departamento de Ciências Humanas.

Orientadora: Profª Ma. Keila Lopes Viana Novais

BARREIRAS/BA
2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Sistema de Bibliotecas da UNEB

S586f Silva, Jeciene Rosa Nascimento da

A Física e a Matemática através da música: um ensaio sobre seus vinculos em produções cientificas / Jeciene Rosa Nascimento da Silva. - Barreiras, 2021.

50 fls : il.

Orientador(a): Prof. Keila Lopes Viana Novais.

Inclui Referências

TCC (Graduação - Matemática) - Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Humanas. Campus IX. 2021.

1.Matemática . 2.Física. 3.Música.

CDD: 511

JECIENE ROSA NASCIMENTO DA SILVA

A FÍSICA E A MATEMÁTICA ATRAVÉS DA MÚSICA: UM ENSAIO OBRE SEUS VÍNCULOS EM PRODUÇÕES CIENTÍFICAS

Trabalho de conclusão de curso, apresentado a Universidade do Estado da Bahia como Requisito parcial para obtenção do Título de licenciada em matemática.
Área de concentração: Matemática

Barreiras - BA, 04 de dezembro
Banca Examinadora:

Keila Lopes Viana Novais
Prof ª Ma. Keila Lopes Viana Novais (orientadora) UNEB

Pedro Dias Pinto
Prof º Dr. Pedro Dias Pinto - UFOB

Suêde Santos Barbosa
Prof ª Esp. Suêde Santos Barbosa – IFBAIANO

Dedico esse trabalho a toda minha família, e amigos pessoas que contribuíram para que esse sonho fosse realizado, especialmente a Natália Reges da Silva e Andressa Souza, amigas que sempre esteve presentes me apoiando e ajudando, e principalmente a Luciene Rosa do Nascimento, a quem devo tudo.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo no qual se estabelece uma relação entre a música e a matemática e como esta proximidade pode contribuir no processo de ensino aprendizagem. Tendo como objetivo investigar na literatura produtos acadêmicos que versam sobre interdisciplinaridade entre matemática, física e música, foi realizado um levantamento de textos de língua portuguesa, de livros, artigos, dissertação e teses e feita uma relação deste material. Apresentado assim uma análise aprofundada desta relação, abarcando conteúdos como: razão e proporção, função exponencial, funções logarítmicas, funções trigonométricas e progressões geométricas. Abordaremos ainda definições acerca de sons e ondas sonoras conteúdo abordado dentro do contexto da física, expondo conceitos de suas propriedades e propondo um trabalho diversificado e esclarecedor.

Palavras chave: matemática, física, musica, ondas sonoras.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - O Monocórdio..15
Figura 2 - Notas de um Violão 16
Figura 3 - Marin Mersenne..16
Figura 4 - John Napier 17
Figura 5 - René Descartes..18
Figura 6 - Pierre de Fermat..19
Figura 7 - Leonhard Euler 20
Figura 8 - Jean Baptiste Joseph Fourier 21
Figura 9 - Condições de crescimento da função exponencial da forma $f(x) = a^x$ 25
Figura 10 - Condições de crescimento da função exponencial da forma $f(x) = a^x$ 26
Figura 11 - Condições de crescimento da função logarítmica da forma $f(x) = \log_a x$ 27
Figura 12 - Condições de decrescimento da função logarítmica da forma $f(x) = \log_a x$ 28
Figura 13 - Círculo Trigonométrico 30
Figura 14 - Refração..32
Figura 15 - Difração 33
Figura 16 - Qualidades do Som 33
Figura 17 - Onda Senoidal...35
Figura 18 - Monocórdio...37
Figura 19 - Características do Violão 42

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 9

1.0. CONTEXTO HISTÓRICO 11

1.1. A música na Grécia antiga 12

1.2. A Escola Pitagórica e o Experimento do Monocórdio 13

1.3. Matemáticos e a Música 16

1.3.1. Marin Mersenne 16

1.3.2. John Napier 17

1.3.3. René Descartes 18

1.3.4. Pierre de Fermat 19

1.3.5. Leonhard Euler 20

2.0. CONTEÚDOS MATEMÁTICOS E FÍSICOS ABORDADOS 23

2.1. Razão e Proporção 23

2.2. Função Exponencial 24

2.3. Função Logarítmica 26

2.4. Progressão Geométrica 29

2.5. Funções Trigonométricas 30

2.6. Natureza do Som 31

2.7. Propriedades da Onda Sonora 31

2.8. Qualidades Fisiológicas do Som 33

2.9. Ondas Harmônicas 35

2.9.1. Série Harmônica e Série de Fourier 36

3.0. RELAÇÕES ENTRE A FÍSICA, A MATEMÁTICA E A MÚSICA 37

3.1. Escalas Musicais 37

4.0. A MÚSICA PRESENTE NOS PRODUTOS EDUCACIONAIS DE FÍSICA E MATEMÁTICA 40

4.1. Análise dos Produtos Educacionais em Monografias, Mestrados Profissionais do Ensino de Física e Matemática 40

CONCLUSÃO 45

REFERÊNCIAS 46

INTRODUÇÃO

O que é Música? O que determina o ritmo, a harmonia ou a melodia? A música pode ser encarada como “a arte de combinar sons, com ordem, com regras, com equilíbrio e proporção” e que podem variar dependendo do momento histórico e seu contexto social. Claro que esta definição não abarca o verdadeiro significado da música, mas expõe de antemão uma relação que muitas vezes não é notada. Os conceitos de ordem, proporção e equilíbrio revelam o quão íntimo é a relação entre a música e a matemática. Mas não se engane, não é apenas a matemática que está envolvida nesta efusão de sons que transformam momentos, a música possui natureza física e pode também ser compreendida melhor através do estudo da acústica, campo da física que se preocupa com os fenômenos e propriedades das ondas sonoras.

Devido a sua importância, presença e potencial transformador, a música pode assumir diversos papeis como: expressão de sentimento, prazer estético, entretenimento, comunicação, podem impor conformidade às normas sociais, que são àquelas músicas que denotam controle social e, como exemplos, podemos citar as músicas de protesto. Ela ainda pode ser usada na validação das instituições sociais e ritos religiosos e contribuir para continuidade e estabilidade de uma cultura, contribuindo para a integração da sociedade (MERRIAM, 1964).

Ao reconhecer todas estas funções da música, que ainda podem ser expandidas, admite-se a importância da música na educação básica, como ela pode influenciar na formação plena do indivíduo. Mas, apesar de todos os papeis, o mais importante neste momento é que ela fascina os alunos. Trazê-la para o trato de determinados conteúdos matemáticos e físicos, que muitas vezes são vistos de forma distorcida, como “monstros”, poderá apresentar um ganho de significância e relevância para o público jovem.

Sendo a música a arte dos sons e a consonância das ondas, ela pode ser considerada “onipresente” em nosso cotidiano. Considerando sua natureza: a música é um fenômeno físico e intimamente relacionada a matemática. Este trabalho é organizado em quatro capítulos. O capítulo um aborda sobre o contexto histórico da música. Presente na Grécia antiga, grandes filósofos a consideravam com grande importância e influência. Pitágoras um reconhecido filosofo e matemático da época realizou um estudo mais aprofundado sobre o tema, e por meio dos seus estudos sobre cordas vibrantes e intervalos musicais criou o primeiro instrumento musical o monocórdio. Ainda dentro do contexto histórico será apresentado a vida e obra de matemáticos da época que contribuíram para a música. O capítulo dois apresenta conteúdos físicos e matemáticos que podem se relacionar com a música sendo eles: natureza do som, qualidades fisiológicas do som, ondas sonoras, ondas harmônicas, series harmônicas e series de Fourier, razão e proporção, funções logarítmicas, funções exponenciais, funções trigonométricas e progressões geométricas. O capítulo três abordará sobre a relação entre a física, matemática e música apresentando a música como uma ciência, e como as escalas musicais consistem em uma divisão e sequência de notas.

E por fim no último capítulo será apresentada por uma pesquisa bibliográfica, que busca em meio aos produtos acadêmicos, como a relação entre física, matemática e música vem sendo tratadas nas disciplinas de física e matemática e como a sua incorporação pode ser benéfica e prazerosa.

1.0. CONTEXTO HISTÓRICO

> A vida é som... A natureza está cheia de sons, de música: há milhões de anos, antes que houvesse ouvidos humanos para captá-la, borbulhavam as águas, ribombavam os trovões, sussurravam as folhas ao vento... Quem sabe quantos outros sons não se propagaram! (PAHLEN, 1965, p. 122).

A música é um dos principais elementos da nossa cultura e, apesar de não haver registros, há evidências arqueológicas de sua presença e influência desde a pré-história. Provavelmente surgiu como consequência da observação dos sons da natureza e a tentativa de reproduzir o que se ouvia e, inclusive, a percepção de ritmo vem de eventos que muitas vezes não associamos a música: como ritmo cardíaco, as estações do ano e outros fenômenos periódicos. Candé (1994) traz uma sequência de eventos que demonstram o surgimento e aperfeiçoamento da música na pré-história e na antiguidade:

> **Antropoides do período terciário** (Australopithecus): Organização rítmica rudimentar. Batidas com bastões, percussão corporal e objetos entrechocados.
> **Paleolítico Inferior** (Pitecanthropus, entre outros): Gritos e imitação de sons da natureza pela boca e laringe.
> **Paleolítico Médio** (Homo musicus): Desenvolvimento do controle da altura, intensidade e timbre da voz à medida que as demais funções cognitivas se desenvolviam. Há emoção ou intenção expressiva.
> **Paleolítico Superior** (Homo sapiens): Aquisição de consciência musical. Desenvolvimento da linguagem falada e do canto e domínio da linguagem abstrata. Criação dos primeiros instrumentos musicais para imitar os sons da natureza, de caráter mágico (imitam a chuva para atraí-la, por exemplo).
> **Paleolítico Superior e Mesolítico**: Criação de instrumentos mais controláveis, feitos de pedra, madeira e ossos (xilofones, litofones, tambores de tronco e flautas) que permitem emissão de altura determinada. Há distinção entre canto e a fala e entre dança e música instrumental da expressão gestual sonorizada.
> **Neolítico:** Criação de membranofones e cordofones, após o desenvolvimento de ferramentas mais refinadas. Primeiros instrumentos afináveis.
> **Idade do Cobre e Idade do Bronze:** Desenvolvimento da metalurgia. Criação de instrumentos de cobre e bronze permite a execução mais sofisticada. Surgimento das primeiras civilizações musicais com sistemas próprios (escalas e harmonia). (CANDÉ apud PIRES, 2019, p. 8).

Os instrumentos mais antigos datam do Paleolítico Inferior. Foram encontrados vestígios de flauta de ossos que datam de cerca de 60.000 a.C., instrumentos estes que poderiam ser utilizados durante caçadas para imitar o os sons de animais. Já na antiguidade, com o desenvolvimento da escrita que revolucionou todos os aspectos sociais, a música se torna linguagem de culto aos deuses, ao sagrado e a natureza. É deste período que encontramos diversos instrumentos de corda, como a harpa e a lira que datam de 3.000 a.C. na Mesopotâmia (ALENCAR, 2008).

Desde então a música foi ocupando cada vez mais espaços e ganhando mais importância. A partir de 2.000 a.C., na Babilônia, a música se associa a animação de tropas de batalha, banquetes e festas e o canto era utilizado nos mais diferentes contextos: na caça, no amor, na guerra, para evocar os mortos, entre outros. Mas a sua relação direta com a matemática tem início com os Pitagóricos na Grécia Antiga.

Pitágoras foi o primeiro a relacionar razões de cordas vibrantes a intervalos musicais e construiu o monocórdio, um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma tábua, possuindo um cavalete móvel colocado sob a corda para dividi-la em duas seções.

A música é uma forma de arte que se constitui na combinação de vários sons e ritmos, é umas das artes mais populares e conhecidas na história da humanidade. Onde apresenta combinações harmonias e está presente no dia a dia. Está inserida com a matemática desde os primeiros experimentos pitagóricos com o monocórdio fixando uma corda em dois pontos para variar sons produzidos, onde é possível dividir a corda em várias frações.

1.1. A música na Grécia antiga

Os gregos estabeleceram as bases para a cultura musical do Ocidente. A própria palavra música nasceu na Grécia, onde "Mousikê" significava "A Arte das Musas". Percebemos a formação da arte grega na civilização cretense, a partir das ruínas de cidades como Tirinto, Micenas e Cnossos. Essa arte abrangia, ao mesmo tempo, a poesia e a dança, e todas essas expressões eram praticadas de modo integrado (RECCO, 1999).

Na Grécia antiga, a música estava presente em todas as manifestações sociais. Possuía importância de cunho religioso até educacional, poderia curar, elevando o homem ao divino ou, ao contrário, afastá-lo do que é bom. Deste modo, a música poderia ser utilizada como meio para alcançar virtudes e moldar o caráter e, inclusive, segundo a mitologia grega, os criadores e intérpretes da música foram os deuses e semideuses: Apolo era considerado o deus da música, Heres, o criador da lira e Orfeu, cuja música poderia encantar até seres inanimados (PIRES, 2019).

Foi no período clássico que os gregos procuraram cultivar a beleza e a virtude desenvolveram as artes da música, pintura, arquitetura, escultura etc. A cultura grega estava ligada a religião onde a literatura e música contavam histórias de heróis e deuses do olimpo. A música alegrava banquetes e acompanhava atos religiosos onde os principais instrumentos usados eram: flautas, tambores e harpas (PIRES, 2019).

Com o desenvolvimento da música paralelamente ao próprio desenvolvimento das cidades gregas, surgiram novas teorias filosóficas que procuravam compreender seu significado e importância. Platão considerava que a música tinha grande poder de influência sobre o homem, por isso deveria estar sob controle do Estado, responsável por garantir o bem social. A música grega se baseava em oito escalas diatônicas descendentes- os modos gregos e se fundamentava na ética e na matemática. Pitágoras estabeleceu proporções numéricas para cada intervalo musical. Sendo eles: tetracorde, monodia, canto conjunto e o solo instrumental. (RECCO, 1999).

1.2. A Escola Pitagórica e o Experimento do Monocórdio

Fundada por Pitágoras de Samos, a escola pitagórica era um ambiente de harmonia e tranquilidade, voltada para meditações e cuidados com a alma. Os pitagóricos iniciantes eram ensinados a dividir comunitariamente seus bens faziam caminhadas solitárias e meditativas preferindo sempre lugares calmos, faziam reuniões sobre doutrinas sagradas e tinham tendências místicas religiosas.

Para se tornar um pitagórico era necessário se submeter a um período de iniciação de pelo menos cinco anos, os iniciantes não podiam falar somente ouvir, a escola dava ordens para manter um período fixo de silencio o silêncio que guardava os ensinamentos do mestre ainda era obrigatório (ALVES, 2018).

O monocórdio foi criado por Pitágoras por volta do século VI a. C., a história nos afirma que Pitágoras ao passar em frente ao ateliê de ferreiros parou-se para ouvir os sons que os martelos faziam batendo em um denso metal foi então que ele reconheceu com nitidez os intervalos musicais e pode descobrir que havia uma relação da matemática e os sons das batidas dos martelos. Ele analisou os martelos e descobriu que aqueles que eram harmoniosos entre si tinham uma relação matemática simples, ou seja, martelos que possuíssem a metade, dois terços, ou três quartos do peso de um determinado martelo produziam sons harmoniosos. Com isso então ele refez a experiência utilizando uma corda tensionada dividindo-as em partes iguais. No começo seu experimento destacou a relação entre o comprimento de uma corda estendida e à altura musical do som emitido quando tocada. Pitágoras buscava relações de comprimento, ou seja, razões de números inteiros que produzissem determinados intervalos sonoros. Pitágoras então começou a investigar a relação entre o comprimento da corda vibrante e o tom musical produzido por ela, “acontecendo assim a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial" (ABDOUNUR,1999).

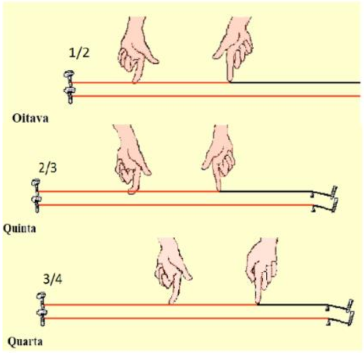
Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a 3/4 do comprimento da corda em relação a sua extremidade e tocando a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira, da mesma forma, exercida a pressão a 2/3 do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a 1/2 obtinha-se a oitava do som original. A partir de então os intervalos de quarta, quinta e oitava passam a denominarem-se consonâncias pitagóricas. Esta experiência mostra-se presente em qualquer instrumento de corda.

Segundo Santos (2014) Pitágoras esticou uma corda sobre uma caixa de ressonância e começou a tocar essa corda. Primeiramente solta e depois dividindo em frações, sempre destacando quais frações representavam sons consonantes, sons que melhor se combinam, com o som produzido pela corda solta, e com isso Pitágoras elaborou a escala pitagórica, ao observar que a corda vibra primeiro em sua extensão e depois em sua metade depois em seu terço e etc. a corda se divide naturalmente durante a vibração. E ao colocar o traste móvel de um monocórdio em um dos nós é possível visualizar os ventres da corda em vibração assim a corda é dividida em frações da corda original.

As frações que foram notadas produziam sons consonantes com a corda solta e as principais foram:

- A Tônica, de razão $1:1$ → Comprimento L (a tônica faz referência a primeira nota da escala musical);
- A Oitava, de razão $1:2$ → Comprimento $\frac{L}{2}$ (a oitava indica a mesma nota que a tônica, o que diferencia é que ela é mais aguda);
- A Quinta, de razão $2:3$ → Comprimento $\frac{2L}{3}$ (a quinta corresponde ao intervalo entre a primeira e a quinta nota da escala maior);
- A Quarta, de razão $3:4$ → Comprimento $\frac{3L}{4}$ (a quarta segue a lógica da quinta)

Figura 1 - O Monocórdio



Fonte: https://auladeviola.com/aula-de-viola-para-iniciantes-a-matematica-dos-acordes-musicais/

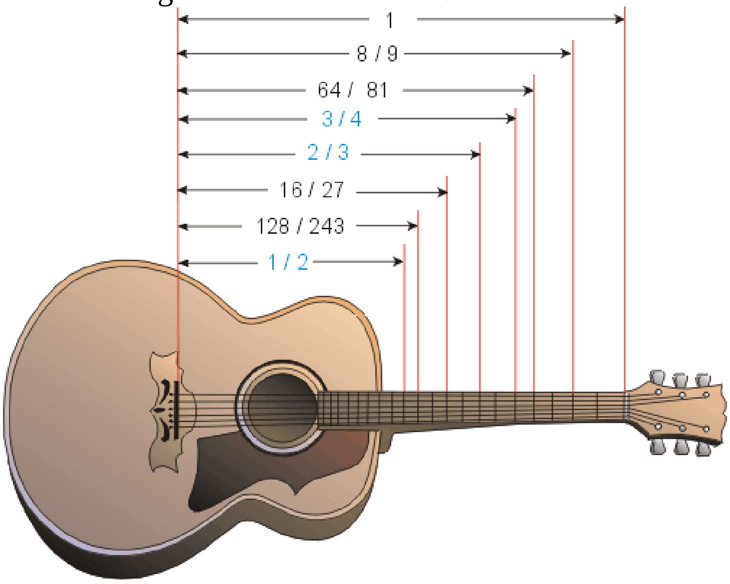
Os Pitagóricos perceberam que todas as notas poderiam ser obtidas a partir do ciclo de quintas, gerando assim a chamada Escala Diatônica Pitagórica. Esta é a primeira escala a ser construída usando a matemática e segue a três princípios: Princípio da equivalência, uma nota é equivalente a outra se a corda que originou a primeira for dividida pela metade. Princípio da unidade, a corda pode ser dividida progressivamente na razão $2/3$ de seu tamanho, gerando o ciclo de quintas. E, por fim, Princípio do limite, toda a escala deve ser construída entre a corda toda e a sua metade. A tabela abaixo apresenta a obtenção desta escala partindo da tônica Dó:

Tabela 1 - Obtenção da Escala Diatônica Pitagórica, partindo da tônica Dó

Largura da corda $(\boldsymbol{L_i})$ Dó	Ciclos de quinta $\left(\frac{\boldsymbol{2L_i}}{\boldsymbol{3}}\right)$	Largura resultante $(\boldsymbol{L_R})$	Condição de existência: $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} < \boldsymbol{L_R} < \boldsymbol{1}$	Fração equivalente (oitava: $\boldsymbol{x\ 2}$)	Nota
1	$\frac{2}{3}\ x\ 1$	$\frac{2}{3} = 0{,}66 \ldots$	Sim		Sol
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\ x\ \frac{2}{3}$	$\frac{4}{9} = 0{,}44 \ldots$	Não	$\frac{4}{9}\ x\ 2 = 0{,}88 \ldots$	Re
$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}\ x\ \frac{8}{9}$	$\frac{16}{27} \sim 0{,}59$	Sim		La
$\frac{16}{27}$	$\frac{2}{3}\ x\ \frac{16}{27}$	$\frac{32}{81} \sim 395$	Não	$\frac{32}{81}\ x\ 2 \sim 079$	Mi
$\frac{64}{81}$	$\frac{2}{3}\ x\ \frac{64}{81}$	$\frac{128}{243} \sim 0{,}53$	Sim		Si
$\frac{128}{243}$	$\frac{2}{3}\ x\ \frac{128}{243}$	$\frac{256}{729} \sim 0{,}35$	Não	$\frac{256}{729}\ x\ 2 \sim 0{,}70$	Fa
$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}\ x\ \frac{512}{729}$	$\frac{1024}{2178} \sim 0{,}35$	Sim		

Fonte: Autoria própria, 2021.

Figura 2 - Notas de um Violão



Fonte: http://www.upscale.utoronto.ca

Analisando a tabela acima, percebemos que a escala pitagórica não é perfeita. O ciclo de quintas não alcança a oitava. Mas a nota Fá é a nossa quarta justa e pode ser obtida facilmente pela fração $\mathbf{3/4}$ do comprimento da corda e a oitava com a metade. Todas as outras notas são obtidas perfeitamente pelo ciclo de quintas. Sendo assim, surgiu a necessidade de construção de outras escalas e escala temperada vem como possível solução a este problema.

Pitágoras foi o pioneiro a se interessar pelo estudo da música do ponto de vista matemático, mas desenvolvimentos posteriores foram realizados por outros matemáticos.

1.3.Matemáticos e a Música

1.3.1. Marin Mersenne

Figura 3 - Marin Mersenne

Fonte: Carta de Marin Mersenne a Antoine d'Rebours em Paris (1932, p. 570).

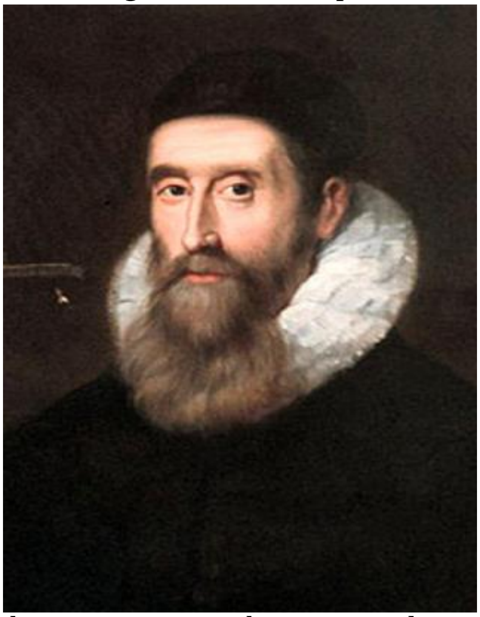
Marin Mersenne, (1558 -1648), foi um padre teólogo, matemático, teórico musical e filosofo francês, estudou no colégio jesuíta *Collège de La Flèche* em Paris, (CHAQUIAM, 2017). Segundo Rooney (2012), Mersenne considerava que difundir o conhecimento científico era sua função cristã, entretanto apesar de concordar com diversas descobertas cientificas, sua obediência à autoridade religiosa não o permitia admitir publicamente algumas teorias, todavia seu espirito inquisidor colocava questões e apresentava ao mundo científico.

A primeira obra de Mersenne relacionada à música, *Traité de l'harmonie universelle,* foi publicada em 1627. Em 1634, publicou as *Questions harmoniques* e *Les Préludes* de *l'harmonie* universelle, e já no final de 1636 e início de 1637 publicou a obra *Harmonie Universelle*, onde discute questões relacionadas à música, mecânica e acústica. Tratando de temas como a natureza do som, o problema da queda dos corpos, a vibração das cordas e dos tubos, os instrumentos musicais e regras de composição (CHAQUIAM, 2017).

Marin Mersenne, considerava o monocórdio como suporte fundamental à compreensão de toda ciência musical (CAMPOS, 2009).

1.3.2. John Napier

Figura 4 - John Napier



Fonte:https://matematicahistoria.wordpress.com/

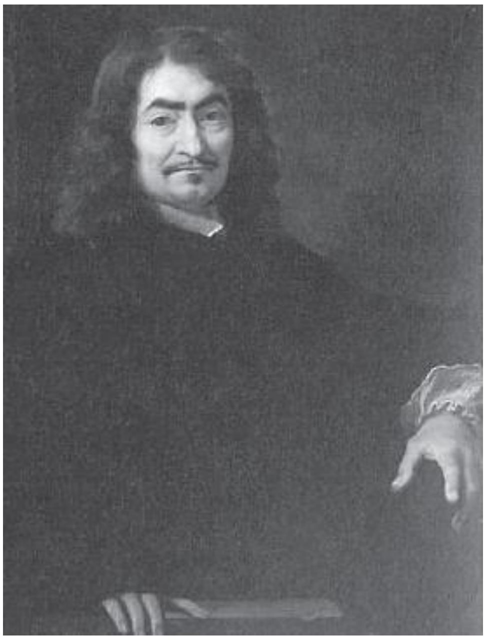
John Napier (1550-1617) foi um matemático escocês, o inventor dos logaritmos, é importante ressaltar que, sem esta invenção, toda a produção musical do nosso tempo teria sido impossível, considerando que ela teve origem na escala temperada do compositor Johann Sebastian Bach, da qual teve sua criação baseada no conceito do logaritmo (MIRITZ, 2015).

Ele foi educado na universidade de St. Andrew na Europa. Onde estudou teologia e aritmética. Ele era um protestante fervoroso e publicou a influente Descoberta de Plaine de toda revelação de St.John (1593). Seu estudo de matemática era, portanto, só um passatempo.

Segundo Boyer (1974), John Napier não foi somente um matemático profissional. Ele escrevia sobre diversos assuntos, e os conteúdos matemáticos que mais lhe interessava era computação e trigonometria onde fez grandes contribuições para funções trigonométricas e também foi importante na introdução decimal para frações, conhecido como inventor do Logaritmo em 1614, publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma Descrição do Maravilhoso Cânon de Logaritmos) que conteve uma descrição de logaritmos, um conjunto de tabelas, e regras para o uso dos mesmos. Por meio desses três contemporâneos de Viète é possível inferir sobre o desenvolvimento científico noutros ramos do conhecimento, bem como, o desenvolvimento da Matemática.

1.3.3. René Descartes

Figura 5 - René Descartes



Fonte: Carta de René Descartes a Constantin Huygens (1637, p. 431).

René Descartes (1596 – 1650) foi um filosofo e matemático, sendo percussor da filosofia moderna estudou na renomada Escola Jesuíta *La Flèche* e também fez faculdade e cursou Medicina e Direito. Período em que foi se interessando ainda mais pelos estudos dos elementos matemáticos. Suas contribuições na matemática foram: geometria analítica, solucionou problemas de pappus onde através desta solução criou o sistema de coordenadas cartesianas, e na física (SANTOS; CRUZ, 2016).

Destacando o seu trabalho na construção da matemática moderna, Descartes deu uma importância fundamental a elaboração de hipóteses abrangentes e detalhadas das operações matemáticas do universo material, Descartes era fascinado pela ciência acreditava que a matemática era a única chave para desvendar os mistérios da natureza (SOUZA, 2003).

Descartes tentava explicar a base da harmonia e da dissonância em termos matemáticos onde concluiu sua primeira obra chamada Compendium Musicae, em sua obra Descartes uma teoria generalizada para os sentidos, através de preliminares em forma axiomática.

1.3.4. Pierre de Fermat

Figura 6 - Pierre de Fermat

Fonte: https://portais.univasf.edu.br/

Pierre de Fermat (1601-1665) estudou no Monastério Franciscano de Grandselve, onde demonstrou grande interesse pela matemática, entretanto devido a formação de sua família, optou por seguir a carreira de advogado. Apesar disso Fermat reservava parte do tempo para se dedicar às suas investigações científicas, estudou Literatura Clássica, a Física e principalmente a Matemática, embora não se dedicava exclusivamente ao estudo da Matemática, isso não o impediu de realizar grandes descobertas para essa área do conhecimento.

Suas primeiras pesquisas matemáticas estavam relacionadas ao cálculo infinitesimal, uma matemática moderna que estava sendo explorada naquela época. Sua maior contribuição na matemática foi no campo da Teoria dos Números, e foi considerado o fundador das bases da Teoria dos Números, o que lhe proporcionou maior reconhecimento como matemático. Suas contribuições o tornaram o maior matemático francês do século XVII (BASTO et al., 2016).

Segundo Miritz (2015), sua relação com a música não foi descrita de forma muito detalhada, entretanto seu auxilio com a teoria dos números, serviu de base para o desenvolvimento nas ideias de Euler que aplicou inúmeros conceitos e teorias da matemática na música.

1.3.5. Leonhard Euler

Figura 7 - Leonhard Euler

Fonte: https://media.sciencephoto.com

Leonard Euler (1707 – 1783) foi um grande matemático e cientista e também considerado um grande estudioso da matemática de todos os tempos, sua contribuição teve como um dos pilares o tratado sobre a Introdução à Análise dos Infinitos, obra que constitui um dos fundamentos da matemática moderna. Apendeu os primeiros conceitos matemáticos com o seu pai (FRAZÃO, 2020).

Estudou teologia na cidade de Brasileia, estudou também artes onde recebeu o grau em mestre e também contribuiu na comparação dos sistemas de Filosofia Natural de Newton e

Descartes. Estudou matemática com o incentivo de Bernoulli, descobrindo seu talento, e suas obras mais eminentes que foram: introdução da função gama, a analogia entre o cálculo infinitesimal e o cálculo das diferenças finitas e ainda discutiu aspectos do cálculo diferencial e integral. Trabalhou com as funções seno e cosseno, dando início aos estudos das linhas de curvatura, iniciando o desenvolvimento de um novo ramo da matemática denominado Geometria Diferencial (FRAZÃO, 2020).

De acordo com Miritz (2015) Euler inventou acordes musicais buscando satisfazer o cálculo, e aos 19 anos planejava escrever um tratado sobre os aspectos da música incluindo forma Composição, como acústica e harmonia, baseou-se na teoria musical para mostrar a possibilidade de utilizar números para se obter intervalos consonantes, encontrando um critério para separar consonâncias de dissonâncias (KNOBLOCH, 2008).

1.3.6. Jean Baptiste Joseph Fourier

Figura 8 - Jean Baptiste Joseph Fourier

Fonte: http://mateeduc.blogspot.com/

Jean Baptiste Joseph Fourier, (1768 - 1830). Foi um matemático e físico francês. Fourier frequentou a escola militar dirigida por monges beneditinos e mostrou habilidades para a matemática.

Conhecido pela sua contribuição à análise matemática do fluxo de calor, também reconhecido por iniciar a investigação sobre decomposições de funções periódicas em series trigonométricas convergentes, chamadas series de Fourier. De acordo com Miritz (2015) foi dado todo o mérito a Fourier por ter criado esse instrumento matemático com o qual as funções periódicas descontínuas pudessem ser representadas por meio de funções contínuas. Porém este assunto já havia sido estudado antes por Euler, D'Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange.

Segundo Abdounur (2002), a decomposição de uma nota em série de Fourier mostra-se prudente por desvendar vários mistérios da harmonia musical observados, estabelecidos e sistematizados, a partir da prática, como regras desprovidas de justificativas convincentes.

2.0. CONTEÚDOS MATEMÁTICOS E FÍSICOS ABORDADOS

Neste capitulo serão abordados os conteúdos básicos de matemática e física que podem ser relacionados com a música em um contexto de ensino no nível básico.

2.1. Razão e Proporção

Razão e proporção são conceitos matemáticos que estão relacionados, neste sentido, a razão representa uma comparação entre duas grandezas, enquanto a proporção é a comparação entre duas ou mais razões. Razão é utilizada para comparar dois valores de uma mesma grandeza e é expressa através de uma divisão. De acordo com Bianchini (2015) a razão entre dois números é o quociente entre eles, com o segundo diferente de zero.

Segundo Sodré (2010) A palavra razão provém do latim ratio e significa a divisão ou o quociente entre dois números A e B, denotada por:

$$\frac{A}{B}$$

Exemplo: a razão entre 18 e 2 é 9 por que:

$$\frac{18}{2} = 9$$

Proporção

Segundo Biachini (2015) proporção é uma igualdade entre duas razões

Exemplo: se a razão entre a e b for igual a razão dos números c e d, logo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Segundo Sodré (2010) numa proporção os números a e d são os extremos já os números b e c são os meios logo vale a propriedade

$$a.d = c.b$$

Exemplo: em uma fração 2/6 está em proporção com 3/9

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$$

Segundo Barnabé (2011), o estudo dos conceitos de razão e proporção se torna peça fundamental para a compreensão das mudanças ocorridas durante a história da música e a diferenciação de alguns termos matemáticos, como razão, proporção, quociente, fração e números decimais

2.2. Função Exponencial

De acordo com Iezzi et al. (2010) o conteúdo de funções exponenciais se define que qualquer função *f* de R em R_{+}^{*}. A caracterização de uma potência de expoente natural é descrita da seguinte maneira:

Dados um número real *a* e um número natural *n*, com n ≥ 2, chama-se potência de base *a* expoente *n* o numero a^n que é o produto de *n* fatores iguais a *a*

$$a^n = a.a.a.\dots\ .a$$

Logo essa definição resulta que:

$a^2 = a.a,\quad a^3 = a.a.a,$ etc.

Apresentando dois casos especiais temos que:

- Para n = 1, definimos a^1 = a,
- Para n = 0 e sendo a ≠ 0, definimos que $a^0 = 1$

  Exemplos de potencias

  - $2^3 = 2.2.2 = 8$
  - $0^3 = 0$
  - $4^1 = 4$
  - $5^0 = 1$
  - $\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{4}{16}$

Expoente inteiro

Dados um número real *a*, não nulo, e um número *m* natural, chama-se potência de base *a* e expoente –*m* o numero a^{-m} que também é o inverso de a^m.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

a^{-m}, sendo $\neq 0$, logo é o inverso de a^m

Exemplo:

$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

Expoente racional

Podemos escrever potências de base positiva e expoente fracionário por meio de radicais. Dados um número real e positivo a, um número inteiro p e um número natural q, (n ≥ 1) chamamos de base *a* e expoente $\frac{p}{q}$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemplos:

$$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}$$

$$6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{36}$$

De acordo com Souza e Garcia (2016) a função exponencial pode ser definida da seguinte maneira:
Seja f: R→ R_+^*, definida por *f*(*x*)= a^x ou y= a^x, com a $>$ 0 e a ≠ 1, logo é denominada como função exponencial.

Segundo Xavier e Barreto (2009), as funções exponenciais, descrevem situações do nosso cotidiano como, por exemplo, o crescimento populacional, os rendimentos obtidos em uma aplicação a juros compostos e a formação de uma escala musical.

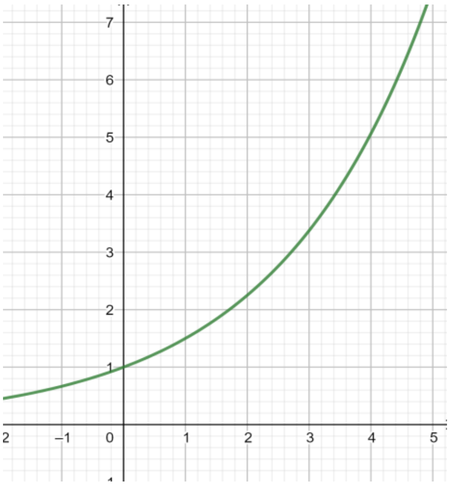
Função Exponencial é aquela que a variável está no expoente *a* e a base é sempre maior que 0 e diferente de um. Segundo Lima et al. (1997) uma função exponencial pode ser definida da seguinte maneira:

Uma função exponencial de base $a\, f: R \to R^+$, definida por $f(x) = a^x$ onde pode ser definida de modo em que as seguintes propriedades podem ser validas para $x, y \in R$

- $a^x . a^x = a^{x+y}$
- $a^1 = a$
- $x < y \to a^x < a^y \, quando \; a > 1 \; e$
  $x < y \to a^y < a^x \; quando \; 0 < a < 1.$

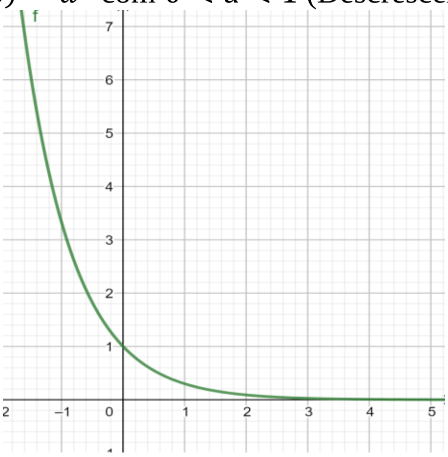
Uma função $f: R \to R^+$ é uma função monótona e injetiva, ela pode ser crescente e decrescente, como é possível observar na figura a seguir:

Figura 9 - Condições de crescimento da função exponencial da forma $f(x) = a^x$
$f(x) = a^x$ com $a > 1$ (Crescente)



Fonte: Autoria própria, 2021.

Figura 10 - Condições de crescimento da função exponencial da forma $f(x) = a^x$
$f(x) = a^x$ com $0 < \text{a} < 1$ (Descrescente)



Fonte: Autoria própria, 2021.

2.3. Função Logarítmica

Segundo Miritz (2015) através do estudo de ondas sonoras, percebesse que o som apresenta características como a altura, a intensidade e o timbre. No caso da intensidade (I), que representa a potência de uma onda sonora por unidade de área ($\frac{w}{m^2}$) , apresenta detalhes importantes como é o caso da limitação auditiva. Para perceber a onda sonora, o tímpano humano necessita que ela tenha, no mínimo, uma intensidade $I_0 = 10^{-12}$ $(\frac{W}{m^2})$, chamado de limiar de audibilidade e, no máximo, de I = 1 ($\frac{w}{m^2}$) , chamado de limiar da dor. O nível sonoro (N) representa a comparação entre a intensidade sonora (I) e o limiar da audibilidade (I_0). A sua unidade mais prática é o decibel (dB). A grandeza nível sonoro (N) obedece a uma escala logarítmica, sendo definida por: $N = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

A função logarítmica baseia-se nas seguintes igualdades, se log$b$ $a = x$ então b $x = a$. Nesse caso a e b devem ser positivos e, além disso, b deve ser diferente de 1, pois do contrário, a função logarítmica não existirá.

Segundo Iezzi et al. (2010), seja a e b números reais positivos sendo $a \neq 1$. É chamado de logaritmo de b na base a o expoente x é elevado a base a de maneira que a potencia a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

- a é a base do logaritmo
- b é o logaritmando
- x é o logaritmo

Propriedades

Para $0 < a \neq 1, b > 0 \; e \; c > 0$ logo vale as seguintes propriedades:

Logaritmo de um produto:

$$\log_a(b \, . \, c) = \log_a b + \log_a c$$

Logaritmo de um quociente:

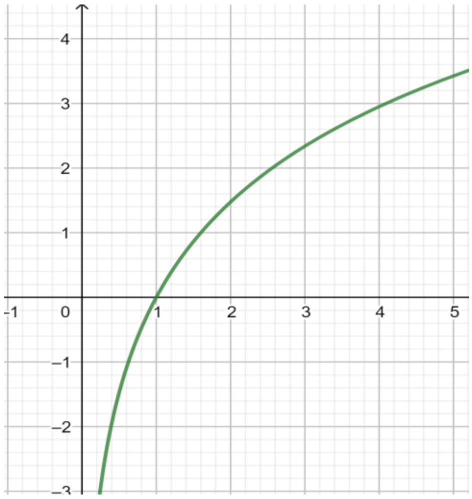
$$\log_a \frac{a}{c} = \log_a a - \log_a c$$

Logaritmo de uma potência:

$$\log_a b^c = c \, . \log_a b$$

Figura 11 - Condições de crescimento da função logarítmica da forma $f(x) = log_{\;a} x$

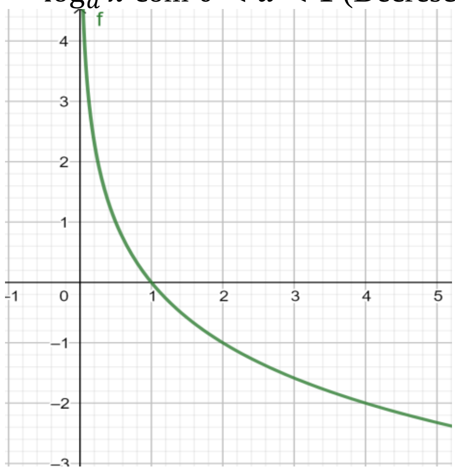
$f(x) = \log_a x$ com $a > 1$ (Crescente)



Fonte: Autoria própria, 2021

Figura 12 - Condições de decrescimento da função logarítmica da forma $f(x) = log\ _a x$

$f(x) = \log_a x$ com $0 < a < 1$ (Decrescente)



Fonte: Autoria própria, 2021

Para Souza e Garcia (2016), função logarítmica pode ser definida da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\log_a a = 1}$$

Dessa maneira: $\log_a a = x, temos\ que\ a^x = a^1 \rightarrow x = 1.$

Uma função f:$R_+^* \rightarrow R$, definida por: $\log_a x$ ou y = $\log_a x$, sendo $a > 0\ e\ a \neq 1$, portanto será uma função logarítmica.

De acordo com Iezzi et al. (2010) John Napier foi quem fez a descoberta dos logaritmos embora outros matemáticos também tenham dado grandes contribuições, causou grandes impactos no meio cientifico, que representou um poderoso instrumento e cálculos numéricos.

Segundo Carvalho et al. (1998), a importância de uma função logarítmica é definitiva, sendo ela a inversa da função exponencial, está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado.

2.4. Progressão Geométrica

Progressões Geométrica é uma sequência numérica e que, multiplicando uma mesma constante a cada termo, obtemos o termo seguinte

De acordo com Miritz (2015), a sequência numérica Progressão Geométrica (PG.) também é aplicada na formação da escala temperada na música, onde as frequências das notas musicais são os termos de uma PG.

Segundo Xavier e Barreto (2005) abordam que uma progressão geométrica pode ser descrita da seguinte maneira:

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, quando $n \geq 1$.

De acordo com Souza e Garcia (2016) é chamado progressão geométrica toda sequência numérica em que no 2^0 termo o quociente entre um termo e seu antecessor é igual a uma constante, que se chama razão de uma progressão e indicada por q.

Classificações de uma PG:

Se q = 1, → é uma PG constante.

Se $q > 1$ e $a_1 > 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$, a PG é crescente

Se $q > 1$ e $a_1 < 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$, a PG é decrescente

Se $q < 0$, → a PG é alternante.

- Formula Geral: $a_n = a_1 . q^{n-1}$

Sendo a_n o enésimo termo, a_1 o primeiro termo, n a ordem do termo e q a razão.

A formula para calcular a soma dos n primeiros termos de uma PG quando $q \neq 1$ é:

$$s_n = \frac{a_1 . (q^n - 1)}{q - 1}$$

A formula para calcular a soma dos termos infinitos de uma PG quando $-1 < q < 1$:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Segundo Miritz (2015) A aplicação de Progressões Geométricas na música está na formação da escala temperada logo se pode calcular frequências de notas anteriores e posteriores à nota

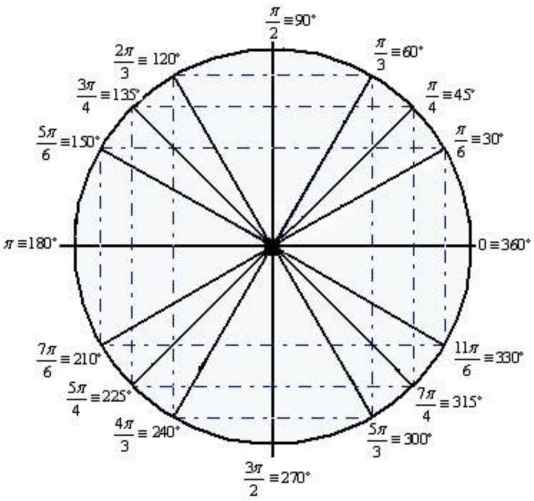
Lá (440 Hz) através do uso da fórmula do termo geral. Assim, sabendo as frequências de duas notas não consecutivas, pode-se inserir notas entre elas.

2.5. Funções Trigonométricas

São chamada funções trigonométricas ou circulares, funções em que um número real está associado a um ponto da circunferência. Gouveia (2006) aborda que: funções trigonométricas, também chamadas de funções circulares, estão relacionadas com as demais voltas no ciclo trigonométrico. As principais funções trigonométricas são:

- Função Seno
- Função Cosseno
- Função Tangente

Figura 13 - Círculo Trigonométrico



Fonte: https://www.todamateria.com.br/

Definição:

Segundo Lima el al. (1997) funções trigonométricas tiveram ainda mais importância com a descoberta de Joseph Fourier onde toda função periódica é uma soma finita ou infinita de funções $a\ cosx\ nx + b\ sen\ nx$.

Ferreira (2014) aborda que a música pode ser transformada em senóides chamadas de onda senoidal, sinusoidal ou onda sinusoidal que são formas de onda cujo gráfico é idêntico ao da função seno e que a trigonometria é capaz de estudar o desenvolvimento, intensidade e frequência das ondas, sem ela seria mais difícil harmonizar os sons, pois é ela que nos faz identificar qual tom será necessário.

2.6. Natureza do Som

A acústica é um campo da física responsável pelo estudo das ondas sonoras, bem como seus fenômenos ondulatórios: reflexão, refração, difração, ressonância, absorção entre outros. O som faz parte das ondas mecânicas e, deste modo, se propagam apenas através de meios materiais, sejam eles líquidos, sólidos ou gasosos. Quando tocamos a corda de um instrumento musical ou perturbamos o meio de modo a surgir ondas de uma determinada faixa de frequência, estamos produzindo o que chamamos de som.

A propagação do som no espaço deve-se ao fato de algumas partículas transmitirem o seu movimento às suas partículas vizinhas e assim sucessivamente, levando a que a oscilação inicialmente produzida nas nossas cordas vocais ou instrumento musical se propague através do espaço aberto, até chegar aos nossos ouvidos (FONSECA et al, 2002).

Segundo Grillo e Perez (2013) o som pode ser definido como uma variação da pressão ambiente detectável pelo sistema auditivo, ou seja, uma onda sonora que percorre um caminho em um meio material

2.7. Propriedades da Onda Sonora

Segundo Tipler e Mosca (2009) uma onda mecânica é causada por uma perturbação em um meio. Por exemplo, quando uma corda esticada é tocada, a perturbação produzida se propaga ao longo da corda como uma onda. A perturbação, neste caso, é a mudança da forma da corda, a partir de sua forma de equilíbrio. A propagação é consequência da interação entre cada segmento da corda e os segmentos adjacentes.

De acordo com Telles e Netto (2013) as ondas sonoras são perturbações periódicas longitudinais que se propagam em meio material e compreendem, o som, o infrassom e o ultrassom.

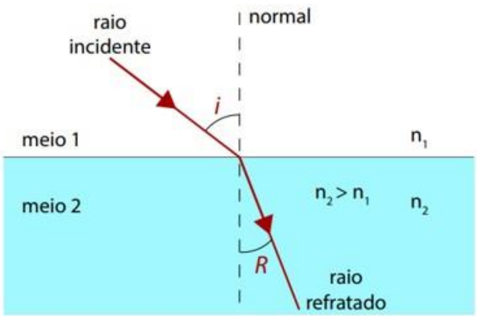
Nesse sentido entende-se como ondas oscilações que transportam energia, sendo elas perceptíveis pelo ouvido humano, de forma que o ouvido normal é excitado por ondas sonoras de frequência entre 20 Hz a 20.000 Hz, os chamados sons audíveis, que são aqueles no qual o ouvido humano consegue identificar.

Ao contrário dos sons audíveis, as ondas infrassom constituem é uma frequência sonora grave, estando abaixo da frequência de 20Hz dentro de uma escala de mediação, enquanto as ondas de ultrassom possuem uma frequência de sons agudos de ultrapassam 20.000 Hz, configurando ondas inaudíveis ao ouvido humano.

Uma onda possui as seguintes propriedades: reflexão, refração e difração. A reflexão de onda acontece sempre que ela encontrar um obstáculo. Quando isso ocorre, a onda incidente sofrerá reflexão, o que dará origem à onda refletida. O eco é um exemplo de ondas sonoras, isso acontece quando o som direto é refletido e recebido num intervalo de tempo maior que 0,1 segundo, possibilitando então uma percepção distinta dos sons. Logo, para ouvir o eco da própria voz é necessária uma distância de no mínimo 17 metros de um objeto que irá refletir esse eco. (LOPES, 2018).

Segundo Alonso e Finn (2014) uma onda refletida é uma nova onda que se propaga em sentido contrário e no mesmo meio em que a onda inicial estava se propagando. A Refração é o fenômeno que consiste em uma onda passar de um meio para outro diferente, com alteração na sua velocidade de propagação. Segundo Hetem J. e Hetem (2016) a refração é formada como um fenômeno que ocorre na superfície de separação entre dois meios. Seu formalismo está descrito na lei de Snell, e relaciona os ângulos formados pelas linhas de propagação das ondas incidente e transmitida (ou refratada) isso ocorre quando as ondas mudam de propagação, alterando sua velocidade $\frac{sen\theta_1}{sen\theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$.

Figura 14 - Refração

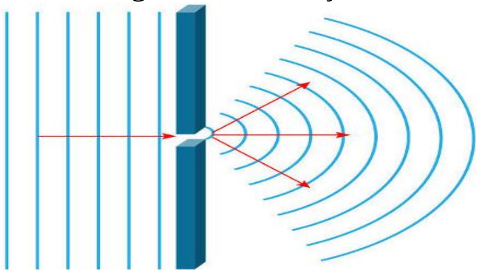


Fonte: http://engrenagensdouniverso.blogspot.com/

E ocorre quando as ondas mudam de meio e propagação alterando a velocidade, exemplo: quando uma onda sonora incide na agua, nessa situação de refração sonora a onda aumenta a velocidade

De acordo com Alonso e Finn (2014) a difração é observada quando uma onda é deformada por um obstáculo que tem dimensões comparáveis ao seu comprimento de onda. O obstáculo pode ser um anteparo com uma pequena abertura, ou fenda, que permite a passagem de somente uma pequena fração da frente de onda.

Figura 15 - Difração



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/

Nesse sentido a difração é uma capacidade que a onda tem de contornar obstáculos. A dimensão do orifício por onde a onda passará deve ser da mesma ordem de comprimento da onda para que isso aconteça. Por isso, diz-se que o orifício, no caso de uma difração sonora, pode variar de 1,7 cm a 17 metros para que ocorra a difração do som. Um exemplo de difração de ondas seria quando uma onda de água passa entre duas pedras e sai em forma de arco do outro lado, ou quando duas pessoas conversam do outro lado do muro e, ainda sim, por causa do fenômeno da difração sonora, é possível escutá-las (LOPES, 2018).

2.8. Qualidades Fisiológicas do Som

O som pode ser definido como uma variação da pressão ambiente detectável pelo sistema auditivo, ou seja, uma onda sonora que percorre um caminho em um meio material (como ar, água e parede) até aos ouvidos humanos.

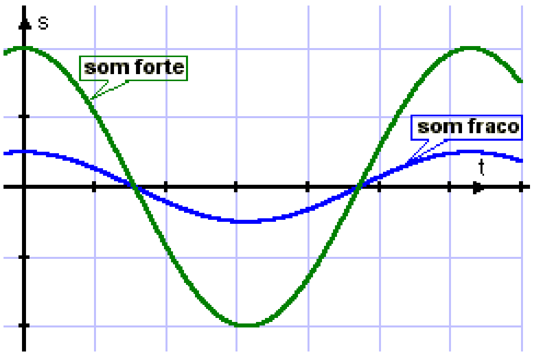
As qualidades fisiológicas do som são o que ajuda a diferenciar um som do outro, e estão relacionadas com a sensação que o som pode produzir no ouvido humano: altura, intensidade, timbre.

Altura – é uma qualidade sonora que está associada a frequência da onda sonora, quanto maior for a frequência da onda maior a altura do som, onde é distinguido o conceito de som alto e som baixo, ou seja, agudo ou grave

Exemplo:

A nota DÓ (260 Hz) é mais baixa que a nota SI (493 Hz).

Figura 16 - Qualidades do Som



Fonte: https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola

Segundo Nishida e Troll o ouvido humano interpreta a variação de frequencia dos sons como transições de altura que vai do agudo (frequência alta) ao grave (frequência baixa).

A intensidade diz respeito a amplitude da onda sonora. Quanto maior a amplitude da onda sonora maior será a sua intensidade (SANTOS, 2014).

Está relacionada ao nível de energia de uma onda sonora, a intensidade é a potência do som dividido pela área:

$$I = \frac{P}{A}$$

Limiar de audibilidade: $I_0 = 10^{-12} \quad \frac{W}{M^2}$

Limiar de dor: I = 1 $\frac{W}{m^2}$

O nível de uma intensidade sonora relaciona a uma intensidade de um som qualquer com uma intensidade mínima que é capaz de perceber logo a definição do nível de intensidade sonora é:

$$\beta = 10 \, . log \frac{I}{I_0}$$

Timbre – Dois sons musicais de mesma intensidade e altura ainda podem diferir por outra qualidade, que chamamos de timbre do som. Assim, nosso ouvido distingue claramente a diferença entre a mesma nota lá emitida por um piano, violino, flauta ou pela voz humana, por exemplo. O timbre representa uma espécie de "coloração" do som

é a qualidade de som que permite diferenciar sons de uma mesma altura ao se ouvir uma mesma nota musical é possível identificar o tipo de instrumento que emitiu a nota se uma flauta e um violino produzirem a mesma nota, de mesma altura, identificaremos o instrumento pelo seu timbre característico (SANTOS, 2014).

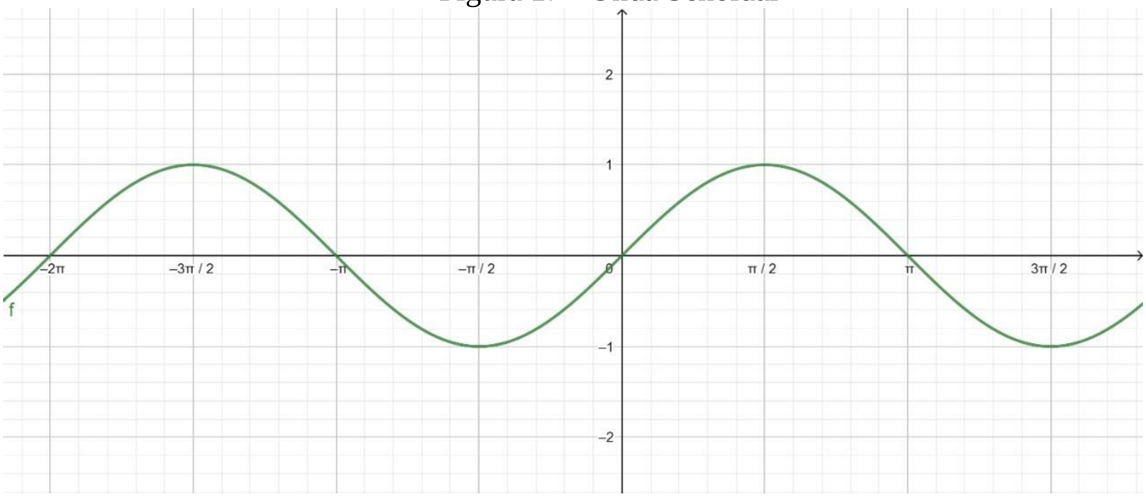
> Toda nota musical, ao ser tocada num instrumento qualquer, fornece não apenas um som puro, mas uma série de frequências sonoras que, soando em sequência, produzem a característica que nos permite identificar a fonte sonora: o timbre. Essa série de sons é chamada de série harmônica. Quando se ouve uma nota, numa determinada frequência, na verdade, ouve-se também uma série de outras frequências secundárias mais agudas que a principal, que não podem ser percebidas isoladamente. Esse conjunto de sons é 'interpretados' por nossos ouvidos como sendo o timbre que caracteriza o instrumento musical. (PEREIRA, 2013, p.55).

2.9. Ondas Harmônicas

Ondas harmônicas são o tipo mais básico de ondas periódicas.

Todas as ondas, periódicas ou não, podem ser modeladas como uma superposição de ondas harmônicas. Possui um formato senoidal, a função que descreve a onda também deve ser senoidal, como pode-se observar na figura a seguir:

Figura 17 - Onda Senoidal



Fonte: Autoria própria, 2021

$$y(x,t) = A\cos(kx + wt)$$

Y (t) - posição ao longo do eixo y

A – Amplitude da onda

K- Número de onda

X – Posição ao longo do eixo x

W – Velocidade angular da onda

T – Tempo

2.9.1. Série Harmônica e Série de Fourier

Série harmônica é um conjunto de sons que acompanha um tom fundamental, suas notas próximas do tom gerador produzem consonâncias e as afastadas produzem dissonâncias

De acordo com Pereira (2013) a serie harmônica é uma serie de frações de numerador unitário e os denominadores são sequenciados por números naturais. É soma dos inversos dos sucessivos números naturais de 1 até n. As series harmônicas são representadas da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- Series de Fourier

As séries de Fourier são uma ferramenta que permite representar um sinal periódico como uma soma infinita de componentes senoidais (senos e cossenos). As séries de Fourier são utilizadas para transformar para o domínio da frequência um sinal representado originalmente no domínio do tempo. Essa mudança de domínio pode trazer grande vantagem para análise, principalmente quando certas características do sinal não forem observáveis no domínio original.

Segundo Serway (2014) os padrões de ondas sonoras produzidos pela maioria dos instrumentos musicais são não senoidais. Padrões característicos produzidos por um diapasão, uma flauta e um clarinete, cada um tocando a mesma nota.

Os padrões de ondas não senoidais parece ser uma tarefa desafiadora. Entretanto, se o padrão de onda é periódico, ele pode ser representado pela combinação de um número suficientemente grande de ondas senoidais que formam uma série de harmônicos. Na realidade, podemos representar qualquer função periódica como uma série de termos de seno e cosseno usando uma técnica matemática baseada no Teorema de Fourier. A soma de termos que representam o padrão de onda periódica é chamada série Fourier.

Considere y(t) como qualquer função periódica no tempo com período T de modo que y(t + T) = y(t). O Teorema de Fourier diz que essa função pode ser escrita como:

$$y(t)\sum=(A_n \text{ sen } 2\pi\, f_n\, t + B_n \cos 2\pi\, f_n\, t)$$

3.0. RELAÇÕES ENTRE A FÍSICA, A MATEMÁTICA E A MÚSICA

A matemática e a música estão presentes no nosso dia a dia, as atividades cotidianas movidas pelos cálculos e pela música que as vezes nem se dão conta da presença. A relação entre as duas áreas vai muito além dos verbos contar e cantar. Os gregos, no século VI a.C. consideravam que a música encerrava uma aritmética oculta.

De acordo com Museu WEG de Ciência e Tecnologia (2020), os acordes são divididos em consonantes ou dissonantes, sendo que os primeiros são normalmente aprendidos antes de tudo, e os segundos, são usados por instrumentistas que já possuem mais conhecimento, prática e técnicas avançadas. Os acordes consonantes são agradáveis aos ouvidos e são suficientes para executar qualquer música, já os dissonantes parecem fora de combinação melódica, são mais complexos e enriquecem a composição.

3.1. Escalas Musicais

Escalas musicais são, sobretudo, a divisão da sequência de notas contidas dentro de uma oitava, e são base para melhor entender como tocar instrumentos. É uma serie de notas sendo elas sucessivas ascendentes e descendentes que são separadas por tons e semitons

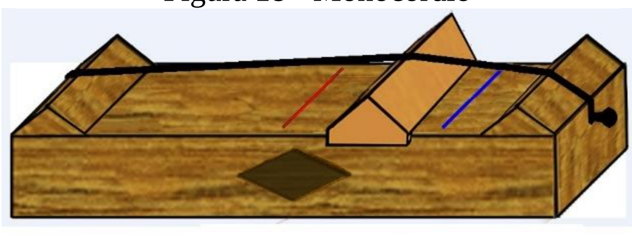
As escalas ascendentes ocorrem é quando as notas sobem do som grave para o agudo

Exemplo: DO- RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO.

Já as escalas descendentes são as notas que descem do som grave para o som agudo. Exemplo: DO-SI-LA-SOL-FA-MI-RE-DO.

Pitágoras ao esticar uma corda em diferentes pontos percebeu que o som alterava de notas mais graves a mais agudas, logo ele dividiu ao meio o fio depois em um quarto e em seguida em um oitavo e assim por diante com isso foi criado o instrumento monocórdio, Pitágoras usou a fração e seus conhecimentos matemáticos para determinar notas musicais.

Figura 18 - Monocórdio



Fonte: https://ceejamarilia.wordpress.com/

As escalas são formadas por sete notas que estão entre si em graus conjuntos, e são usadas em um sistema tonal e as escalas mais usadas são a Maior e Menor. Segundo Juliani (2003), a escala maior é baseada na escala de dó maior. Na escala maior há cinco tons e dois semitons os quais obedecem a sequência tom, tom, semitom, tom, tom, tom e semitom. Subindo um semitom da terceira, da sexta e da sétima nota da escala maior forma-se a escala menor natural. Sua sequência é tom, semitom, tom, tom, semitom, tom e tom. E com base no conhecimento físico da natureza do som, obtemos para esta escala a seguinte relação:

Tabela 2 - Relação entre o comprimento de onda a frequência da onda sonora produzida

Notas	**Razão do comprimento de corda**	**Frequência (Hz)**
Dó	$1:1$	$f = 264$
Ré	$8:9$	$\frac{9}{8}f = 297$
Mi	$64:81$	$\frac{81}{64}f = 330$
Fá	$3:4$	$\frac{4}{3}f = 352$
Sol	$2:3$	$\frac{3}{2}f = 396$
Lá	$16:27$	$\frac{27}{16}f = 440$
Si	$128:243$	$\frac{128}{243}f = 495$
Dó	$1:2$	$2f = 528$

Fonte: Autoria própria, 2021.

A tabela (2) apresenta a relação entre o comprimento de onda a frequência da onda sonora produzida. Aqui percebemos uma relação inversa, medida que reduzimos o comprimento da corda, o som se torna cada vez mais agudo, ou seja, a frequência é acrescida.

Como foi visto no capítulo (2) a escala pitagórica não consegue alcançar com perfeição a oitava da tônica. Mesmo percebendo esta falha, não foi possível ajustar este modelo de escala, já que Pitágoras e os pitagóricos só trabalhavam com números inteiros e racionais. Deste modo, tornou-se necessário construir um novo modelo de escala e a solução encontrada foi o temperamento dela, ou seja, foi realizada novas divisões de intervalos para que as notas estivessem igualmente espaçadas entre si. Esta nova escala passou de sete notas para doze, sendo conhecido por escala temperada.

A escala temperada pode ser definida como uma progressão geométrica onde o primeiro termo é a frequência da nota escolhida. De acordo com Santos (2014) a escala temperada surgiu de ideias simples onde o intervalo de uma oitava e a frequência do som é dobrada. Esses intervalos não podem ser iguais pois possibilita criar problemas para a próxima oitava que envolve um intervalo com o dobro da frequência da nota original até o quadruplo dessa frequência. A ideia consistiu em inserir frequências de 11 notas restantes em uma progressão geométrica do qual o ultimo termo tem o dobro da nota do primeiro termo

Seja a_1,a_2,...,a_{13} os termos que $a_{13} = a_1.q_{12}$, sendo q representando a razão dessa progressão, logo ao mesmo tempo em que temos $a_{13} = 2.a_1$. assim temos que $a_1.q_{12} = 2.a_1$. dividindo os dois membros da igualdade por a_1 veremos que $q_{12} = 2,$ e portanto q = $\sqrt[12]{2}$ Encontramos por tanto a razão da progressão.

O som é uma onda em que a frequência define a nota musical, e essa frequência é uma repetição com referências de tempo. Quando escutamos músicas estamos ouvindo o som das frações exemplo: considerando uma corda essa corda sendo DÓ tocando nessa corda musical ela vibrará em uma certa frequência ao dividirmos ao meio e tocar novamente ela vibrará com o dobro da frequência

De acordo com Miritiz (2015) é importante o estudo das escalas pois reside um fato de que elas constituem a base musical, as partes que constituem a música são:

1) Melodia - conjunto de sons dispostos em ordem sucessiva (concepção horizontal da música);
2) Harmonia - conjunto de sons dispostos em ordem simultânea (concepção vertical da música);
3) Contraponto - conjunto de melodias dispostas em ordem simultânea (concepção ao mesmo tempo horizontal e vertical da música);
4) Ritmo - ordem e proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e a harmonia.

4.0. A MÚSICA PRESENTE NOS PRODUTOS EDUCACIONAIS DE FÍSICA E MATEMÁTICA

A música está presente nos mais diferentes contextos e momentos do nosso cotidiano. É utilizada em ritos religiosos, em momentos comemorativos, no entretenimento ou como forma de expressão. Ela possui grande poder de influência, podendo despertar lembranças e emoções (ROCHA; BOGGIO, 2013), sendo inclusive utilizada como recurso na ativação de memórias de pacientes diagnosticados com a Doença de Alzheimer (CUNHA, 2007) e na educação não é diferente, a muito vem se discutindo sobre a importância pedagógica da música no desenvolvimento motor afetivo devido a sua forma de linguagem que se manifesta pelos sentidos, tornando o ambiente de sala de aula mais criativo e possibilitando várias experiências sociais afetivas (BRÉSCIA, 2003).

A música está presente em diferentes contextos sociais, em vários momentos e em diversos lugares ao mesmo tempo, sejam eles no rádio, na TV, na internet, na natureza ou mesmo no meio social (sons de máquinas, buzinas de carros e etc.). Com tantos sons ao redor, temos a opção de escolher que tipo de canção queremos ouvir. Em meio ao avanço da tecnologia e de tantos aparelhos móveis, a música circula rapidamente ao acesso de todos.

A música também está presente no contexto da educação através da sua linguagem, e pode ser aplicada em vários conteúdos abordados nas disciplinas em sala de aula, é uma ferramenta capaz de criar hábitos, atitudes e comportamentos que serão vivenciados no dia-a-dia dos alunos

4.1. Análise dos Produtos Educacionais em Monografias, Mestrados Profissionais do Ensino de Física e Matemática

Em vista da grande necessidade de um ensino contextualizado e interdisciplinar que denotem sentido aos conhecimentos de modo a tornar a aprendizagem mais significativa, e entendendo a música surge como ferramenta capaz de trazer experiências diversas e por vezes pouco explorado, apresentaremos uma análise de alguns trabalhos encontrados que abordam diferentes formas de se trabalhar a matemática e a física envolvendo a música.

Neste capítulo iremos apresentar algumas análises coletadas que estão relacionadas ao ensino da física e matemática através da música, por meio destas análises de trabalhos científicos sendo elas pesquisas de campo e também bibliográficas, os resultados encontrados foram baixos do que se esperava onde demonstra um campo de ainda pode ser explorado.

O trabalho de Pereira (2013), traz o contexto histórico da música desde a antiguidade aos dias atuais, onde apresenta Pitágoras como o primeiro matemático a estudar música, o qual também é fundador da escola pitagórica e recebe os créditos pela construção do monocórdio, um instrumento usado para afinar voz e instrumentos musicais. Pereira (2013) expõe conceitos de progressões geométricas com um novo olhar didático, ele mostra que a partir temperamento de escalas é possível calcular a razão de uma PG. Santos (2014) também nos proporciona em sua pesquisa uma viagem histórica do início da relação da música com a matemática com foco nos conceitos de progressões geométricas que dialogam com a música, mas ele não para por aqui. Seu trabalho visa sensibilizar estudantes e professores de matemática do ensino médio, onde, através da música, é possível despertar interesses nos alunos com conteúdo matemáticos. Santos (2014) foi a campo e, exemplificou de forma lúdica, como o conteúdo de PG se relaciona com a música. Em uma proposta de modelagem, o professor mostrou aos alunos que através de um cano PVC é possível construir uma flauta Pã e caracterizar funções de maneira mais palpável.

Já Miritz (2015) versa sobre grandes matemáticos e suas contribuições, o autor abordou também, atividades para estabelecer uma aproximação entre música e matemática, ainda afirmou que a matemática está presente no desenvolvimento de escalas e teorias musicais onde essas relações entre ambas, junto com características próprias de ondas sonoras serve de base para harmonias na colocação de sons musicais. Na tentativa de explicar a relação entre a matemática e a música tanto Miritz (2015), quanto Cabral (2015) aplicaram conceitos matemáticos utilizando conteúdos matemáticos, como funções exponenciais, logarítmicas e progressões geométricas.

Miritz (2015) em seu relado de atividades, apresenta resultados realizados em cada encontro, com uma turma de 2ª série do ensino médio. No primeiro encontro foi realizado uma breve introdução sobre a matemática e a música, no segundo encontro foi aplicado, um questionário individual. Ainda neste encontro foram orientados a construir um monocórdio e executar a experiência de obtenção das notas musicais a partir das frações de cordas almejando esboçar a escala natural e, posteriormente, a formação da escala temperada, com o uso dos logaritmos e o estudo de Mersenne. Por fim, no terceiro encontro, foi modelado um xilofone a partir de garrafas de vidro e água. Os estudantes examinaram a relação da quantidade de água em cada garrafa e a frequência musical produzida por ela. Ao colocar determinadas quantidades de água em cada garrafa, os alunos puderam perceber os conceitos de progressões geométricas relacionados a formação de escala temperada.

Cabral (2015) em seu trabalho, explana a relação entre conteúdos de matemática e música a partir de 10 problemas propostos a cada aluno em um trabalho sistemático desenvolvido em aulas expositivas ou em debates, com o objetivo de apresentar para professores e alunos que é possível tornar o ensino de matemática mais interessante e também sugere para os alunos um trabalho, como uma como proposta de ensino.

Na primeira aula apresentar aos alunos um texto ressaltando sobre as partes de um violão e uma atividade onde os alunos conheceram o violão com as próprias mãos e com o auxílio de um diapasão eletrônico aprender afina-lo. Na segunda aula apresenta a relação entre matemática e música, aplicando um problema na segunda atividade, com um auxílio de uma fita métrica medir o comprimento da corda de um violão e calcular o comprimento da corda que produz, produz a oitava, a quarta e a quinta de cada uma das seis cordas do violão.

Rever os principais conceitos de progressões geométricas, nessa atividade o aluno necessita de materiais básicos para anotações e instrumento de medidas onde o professor irá pedir aos alunos para medir distancias de 20 trastes até o rastilho de um violão, com anotações e resultados obtidos e que se as medidas formam uma progressão geométrica determinado a razão da mesma.

Figura 19 - Características do Violão

Fonte: http://oficinadevioloes.blogspot.com/p/apostila-do-curso.html

Cabral (2015), apresenta a importância da matemática na vida de todos, e que ela sempre nos acompanha e que ao estudar música seja possível ainda mais facilitar o estudo da matemática.

Baptista (2013) descreve que a música é um fenômeno físico explicado pela matemática e também pela própria física. E aborda uma linguagem física, matemática e musical com suas particularidades enfocando aplicações do dia a dia

A física é um componente curricular apontado pelos estudantes como uma disciplina desinteressante Baptista (2013) ainda aponta que projetos interdisciplinares são utilizados com uma tentativa de estudar física por traz de assuntos que são do interesse dos alunos e que esteja em partes do dia a dia deles, a relação física e música é bastante rica neste contexto e explora conceitos importante da física. Baptista (2013) também fala do estudo de ondas e suas propriedades sendo elas: frequência, período, velocidade e amplitude e da sua importância pois abrange várias áreas, apresenta características de sons musicais como: altura, intensidade timbre e duração como análises qualitativas, já as características são consideradas quantitativas da física com: frequência, amplitude, tempo. É analisado por instrumentos musicais e possui uma abordagem mais prática. O autor discute que os sistemas de vibrações podem vibrar de várias formas diferentes

E cada caso é uma frequência diferente e portanto, um modo de vibração pode ser excitado individualmente por algum tipo de perturbação relacionado a uma certa frequência, uma vibração indica quando e quais frequências entram em ressonância e com a intensidade que cada uma vibra, e esta análise é também chamada de análise de Fourier e cada uma destas frequências quando perturbadas é representada como uma serie de Fourier e que quanto maior os números de frequência em ressonância mais rico é o som. O autor obteve com alguns instrumentos acústicos não eletrônicos e com a ajuda de um programa de computador experiências aplicadas com alunos e seus resultados através destas experiências foi visualizar as frequências presentes ao ser emitida determinada nota, pois essa frequência fundamental dá nome a nota. Já o autor Jaime (2010) apresenta no seu trabalho a relação da física do som no ensino médio, e afirma que é comum pessoas não serem atentas aos acontecimentos cotidianos que ocorre a relação entre física e música mesmo existindo no ensino médio o tema da Física acústica. Aborda também o vínculo entre essas áreas do conhecimento nos livros de física, em que apresentou contribuições culturais com compreensões de fenômenos sonoros no cotidiano. Onde também analisou conteúdos físicos em livros didáticos que tenha relação com ondas sonoras apresentando conceitos e grandezas que possam evidenciar um elo entre as áreas, seus resultados apresentam que foram feitas analises de livros didáticos no quais os resultados foram adquiridos com sucesso apresentando para o autor um reflexo de interpretação e abordagens realizadas no livro didático, Jaime (2010) apresenta as análises feitas nos livros apresentando fenômenos e princípios, e sua pesquisa propõe proporcionar uma reflexão sobre a relação da física e a música apresentando conteúdos relativos movimento harmônico e movimento ondulatório por outros autores de livros didáticos de física.

Gama (2006) apresenta em sua pesquisa elaborações de um curso de física e música para o ensino médio no ensino a distância, exibindo teorias de aprendizagens e o quão grande a produção de material didático para curso de física no ensino médio, onde a preparação deste material foi baseado alguns teóricos mencionados, e constatou uma conexão entre a linguagem aplicada na produção do material para o ensino médio a distância e a linguagem mais apropriada para efetivação de aprendizagem significativa.

Já o autor Lerias (2016), apresenta uma proposta de sequência didática que explora conteúdos de ondulatória, acústica e conteúdo relacionados a compreensão e todos, os elementos da música é motivacional ao aprendizado da física sendo recursos didático e o objetivo de oferecer uma pluralidade didática a partir dos fundamentos, no qual seus resultados apresentam participação de alunos e professores na elaboração e estrutura do projeto e sequência didática onde auxiliou na confecção e montagem dos experimentos, segundo Lerias (2016) a pluralidade didática é uma proposta de grande desempenho apresentando liberdade de escolhas de recurso necessários para ações educacionais diferenciadas.

CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo apresentar um estudo sobre a relação entre a matemática e a física associadas as teorias musicais, cujo enfoque se dá no ensino interdisciplinar e contextualizado. Ao retratar a história da música sob a perspectiva da sua conexão com a matemática, foi possível entendê-la como uma construção que vai além da intuição, ela possui regras e ordens que nos permite, por exemplo, construir escalar, relacionar as notas musicais com determinadas frequências e, por consequência, afinar um instrumento musical sem necessidade de "dom".

Registra-se, como pioneiros da teorização da música, os pitagóricos, tendo como personagem principal o Pitágoras. A ele é creditado o primeiro experimento cientifico que possibilitou que o elo entre a matemática e a música fosse formado. Foi mostrado como a partir da observação e experimentação com o monocórdio a construção da primeira escala, a escala diatônica pitagórica, baseada no ciclo de quintas. Em decorrência destes primeiros passos, outros pesquisadores também buscaram tornar o vínculo matemática e música ainda mais íntimo e fizemos menção aos nomes, Marin Mersenne, John Napier, René Descartes, Pierre de Fermat, Leonhard Euler, Jean Baptiste Joseph Fourier.

Por fim foi realizado um ensaio sobre os trabalhos acadêmicos que apresentavam a música como uma poderosa ferramenta pedagógica quando utilizada no processo de ensino aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos e físicos. Neste estudo destacam-se os autores: Baptista (2013), Cabral (2015), Gama (2006), Jaime (2010), Lerias (2016), Miritz (2015), Pereira (2013), Santos (2014).

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar. **O experimento de Pitágoras com o monocórdio: uma abordagem histórico-didática**. Anais IV CONAPESC. Campina Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57030>. Acesso em: 15 de setembro 2021.

ABDOUNUR, O. J. Matemática e Música - O pensamento analógico na construção de significados. 4. ed. **São Paulo: Escrituras**, 2002.

ALENCAR, Marcelo; QUEIROZ, Wamberto. Ondas Eletromagnéticas e Teoria de Antenas. **São Paulo: Erica**, 2010. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788536521992/. Acesso em: 07 nov. 2021.

ALMEIDA, Luan Xavier. **Matemática e Música**: uma abordagem através do monocórdio de Pitágoras. Monografia - Universidade Federal do Pará, 2018. Trabalho de conclusão de curso. Disponível em: https://bdm.ufpa.br:8443/jspui/bitstream/prefix/617/1/TCC_MatematicaMusicaAbordagem.pdf. Acesso em: 04 out. 2021.

ALMEIDA, Ricardo. **Razão e Proporção para Além da Sala de Aula**. Orientador: Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, p. 58. 2015.

ALONSO, Marcelo; FINN, Edward. Física: um Curso Universitário. **São Paulo: Editora Blucher**, 2014. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521208341/. Acesso em: 07 nov. 2021.

ALVES, Leonardo Marcondes. A educação pitagórica. **Ensaios e notas.** Rio Grande do Sul, 2018. Disponível em: https://ensaiosenotas.com/2018/05/07/a-educacao-pitagorica/. Acesso em 27 setembro. 2021.

BARNABÉ, Fernando Moreira. **A Melodia das Razões e Proporções: A Música Sob o Olhar Interdisciplinar do Professor de Matemática**. Orientador: Dr. Abdounur, Oscar Joao. 2011. p. 68. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação – USP, São Paulo, 2012.

BASTO, José, et al.. **As principais contribuições de pierre de fermat para o estudo de teoria dos números**. Anais VI SETEPE - Semana de Estudos, Teorias e Praticas Educativas. Campina Grande: Realize Editora, 2016. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/26207>. Acesso em: 13 set 2021.

BERTULANI, Carlos. Movimento Ondulatório. **Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, 12 nov. 1999. Disponível em: https://www.if.ufrj.br/~bertu/fis2/ondas1/ondulatorio.html. Acesso em: 15 out. 2021.

BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. **História da matemática**. Editora Blucher, 2018.

BRÉSCIA, Vera Lúcia. Educação musical: bases psicológicas e ação preventiva. **Campinas: Átomo**, 2003.

CABRAL, Rafayane Barros. **Matemática e Música: Uma Proposta de Aprendizagem.** Orientador: Dr. Claudiney Goulart. 2015. p.65. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2015.

CALAROTA, Bruna. **História da Matemática**. Disponível em: https://matematicahistoria.wordpress.com/2017/12/08/john-napier-e-os-logaritmos/. Acesso em 23 de novembro de 2021.

CAMPOS, G. P. da S. Matemática e Música: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo, abrill 2009. Disponível em: Disponível em: http://portais4.ufes.br/posgrad/teses/nometese_165_

CARLA, Regina. Jean Baptiste Joseph Fourier e sua contribuição cientifica para a humanidade; **Matemática & Educação**. Disponível em: http://mateeduc.blogspot.com/2015/03/jean-baptiste-joseph-fourier-e-sua.html. Acesso em 23 de novembro de 2021.

CHAQUIAM, Miguel. Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula. 1 Edição, **Belém: Sbem-pa**, 2017.

CUNHA, Rosemyriam. Musicoterapia na abordagem do portador de doença de Alzheimer. **Revista Científica/FAP**, 2007. Disponível em: http://periodicos.unespar.edu.br/index.php/revistacientifica/article/view/1733. Acesso em: 26 set. 2021.

DONATELLI, Marisa Carneiro de Oliveira Franco. Carta de René Descartes a Constantin Huygens. **SciELO**, São Paulo, 28, setembro. 2009. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ss/a/CKhFyQtG4PTVVcJ79F8DPRK/?lang=pt. Acesso em: 09 de out. de 2021.

FERREIRA, Bruna. Trigonometria na música. **Trigonoblog.** Ceará,2014. Disponível em: http://trigonoblog.blogspot.com/2014/06/trigonometria-na-musica_28.html. Acesso em: 27 nov. 2021.

FRAZÃO, Dilva. Leonhard Euler. **E-Biografia**. 19 de março de 2020. Disponível em: https://www.ebiografia.com/leonhard_euler/. Acesso em: 23 de setembro 2021.

GAMA, Eduardo. **Física e Música no Ensino Médio a Distância**. Orientador: Daniel Sasaki. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Sukow da Fonseca. Rio De Janeiro, p. 73. 2006.

GOUVEIA, Rosimar. Razão e Proporção. **Toda Matéria**. 2006. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/razao-e-proporcao/. Acesso em: 07 de outubro 2021.

GRILLO, Maria Lúcia; PEREZ, Luiz Roberto. A Física na Música. **Editora da Universidade do Rio de Janeiro – EDUERJ**, 1ª **Edição.** Rio de Janeiro, p. 196, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/340385993_A_Fisica_na_Musica. Acesso em: 20 nov. 2021.

HENRIQUE, Luís. Acústica Musical. 3 Ed. **Lisboa: Fundação Galouste Gulbenkian**, 2009.

HETEM J, Anibal; HETEM, Gregorio. *Fundamentos de Matemática - Física para Licenciatura - Ondulatória*. **Rio de Janeiro: Grupo GEN**, 2016. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521631262/. Acesso em: 30 out. 2021.

JAIME, Pedro. **Física do Som e Sua Relação com a Música e o Ensino Médio: Um Olhar nos Livros Didáticos**. Orientadora: Dra. Maria Cristina Penido. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Salvador, p. 99, 2010.

JULIANI, Juliana. **Matemática e música**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, dezembro 2003. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/~dplm/TGMatematicaMusica.pdf. Acesso em: 02 nov. 2021.

KNOBLOCH, E., Euler transgressing limits: The in_nite and music theory, Quaderns d'Historia de l'Enginyeria volum IX, Berlin, 2008.

SILVA JUNIOR, Joab Silas. "O que é difração"; **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-difracao.htm. Acesso em 23 de nov. de 2021.

LERIAS, Washington**. A Física da Música e a Pluralidade Didática**. Orientador: César Henrique Lenzi. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, p. 54. 2016.

LIMA, Elon, et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 3. Ed, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

LOPES, Diego. Ondas Sonoras: Refração do Som, Reflexão, Difração, Interferência. **Ipatinga: Cultura Livre**. 23 março 2018. Disponível em: https://culturalivre.com/ondas_sonoras_refracao_do_som_reflexao_difracao_interferencia/. Acesso em: 26 out. 2021.

"Matemática e Música (parte 8)" em *Só Matemática*. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2021. Disponível na Internet em *https://www.somatematica.com.br/mundo/musica8.php,* Acesso em: 13 set 2021.

MIRITZ, José Carlos. **Matemática e Música.** Orientador: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez. 2015. p. 94. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande do Sul, 2015.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Reflexão de uma onda**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/reflexao-uma-onda.htm. Acesso em: 17 out. 2021.

MUSEU ESCOLA DO IB. C**omo ouvimos o mundo? As propriedades do som**. Disponível em: https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/2_qualidade_vida_humana/Museu2_qualidade_corpo_sensorial_audicao3.htm. Acesso em: 24 out 2021.

NETTO, Luiz. Escala Musical Temperada – Frequências das Notas Musicais. **Música Sacra e Adoração**. São Paulo, 2021. Disponível em: https://musicaeadoracao.com.br/25371/escala-musical-temperada-frequencias-das-notas-musicais/. Acesso em: 19 nov. 2021.

NUNES, Edmilson Soares. **Uma Proposta de ensino de geometria analítica na 3ª série do ensino médio com o uso do geogebra**. Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva. 2019. p 98. Dissertação- mestrado em matemática, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro- BA.

PEREIRA, Marcos. **Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de Hoje**. Orientador: Leonardo Tadeu Silvares Martins. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, p. 95, 2013.

PIRES, Débora. História da Música: Antiguidade ao Barroco **Indaial: Uniasselvi**, , 2019. Disponível em: file:///C:/Users/pc/Downloads/livro.pdf Acesso em: 16 set. 2021.

PITANGA, Daniel. Oficina de Violão para pais e filhos. **Oficina de Violões**. Brasília, 20 de março de 2014. Disponível em: http://oficinadevioloes.blogspot.com/p/apostila-do-curso.html. Acesso em: 23 nov. 2021.

RECCO, Claudio. A Música na Grécia Antiga. **HistoriaNet**. São Paulo, 1999. Disponível em: http://www.historianet.com.br/conteudo/default.aspx?codigo=545. Acesso em: 16 set. 2021.

ROCHA, Viviane Cristina; BOGGIO, Paulo Sérgio. A música por uma óptica neurocientífica. **Per Musi**, Belo Horizonte, n.27, 2013, p.132-140. Disponível em: https://www.scielo.br/j/pm/a/4MYkTmWFfsG4P9jfRMdmh4G/?lang=pt#. Acesso em: 26 set. 2021.

ROONEY, Anne. A História da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. **São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda**, 2012.

RUSSELL, Grigg. Leonhard Euller**. Creation. Com**. Disponível em: https://creation.com/euler. Acesso em 23 de novembro de 2021.

SANTOS, Jefferson. Grandes Matemáticos: John Napier. **Matemática é fácil**, São Paulo, jun. 2014. Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2014/06/grandes-matematicos-john-napier_14.html. Acesso em: 15 out. 2021.

SANTOS, Leniedson. **Progressões Geométricas e Música: Uma Proposta de Modelagem**. Orientador: Pedro Alexandre da Cruz. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins, Tocantins, p. 63, 2014.

SANTOS, Robson; CRUZ, Fernanda. A Matemática De René Descartes. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 8, p. 30-47, 2016.

SERWAY, Raymond; JEWETT JUNIOR, John. Princípios de física Vol. 2 – Oscilações, ondas e termodinâmica. 5. ed. **São Paulo: Cengage Learning Brasil**, 2014. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522116874/. Acesso em: 14 set. 2021.

SILVA, Paulo Tadeu. Carta de Marin Mersenne a Antoine d'Rebouurs em Paris. **São Paulo: SciELO**, 16 de junho de 2010. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ss/a/HVSyzCC75xPHVVzxkSYgkDL/?lang=pt. Acesso em: 09 de out. de 2021.

SILVA, Silmara. Leis da refração. **Engrenagens do Universo.** Disponível em: https//http://engrenagensdouniverso.blogspot.com/2019/07/leis-da-refracao.html. Acesso em 23 de nov. de 2021.

SODRÉ, Ulysses. Razão e proporção. **Matemática Essencial.** Londrina- PR, 2010. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/matzoo/razoes.pdf. Acesso em 15 out. 2021.

SOUZA, Jaime Luiz. A Matemática Metafísica de René Descartes. **Revista Traços**, Belém, vol. 6, n. 12, p. 83-96, dez 2003. Disponível em: http://revistas.unama.br/index.php/revistatracos/article/view/902/459. Acesso em: 13 set 2021.

TELECOM INESCTEC. **O Som: A natureza do som**. Disponível em: http://telecom.inesctec.pt/research/audio/cienciaviva/natureza_som.html. Acesso em: 17 out. 2021.

TELLES, Dirceu; NETTO, João. Física com aplicação tecnológica: Eletrostática, eletricidade, eletromagnetismo e fenômenos de superfície. **São Paulo: Editora Blucher**, 2013. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521207566/. Acesso em: 30 out. 2021.

TIPLER, Paul Allen; MOSCA, Gene. Física para Cientistas e Engenheiros - Vol. 1 - Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica, 6ª edição. **Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2009**. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2618-3/. Acesso em: 30 out. 2021.

XAVIER, Cláudio; BARRETO, Benigno. Matemática aula por aula. 3 ed., **São Paulo: FTD**, 2009.