



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

---

LUCAS LIMA FERREIRA

**GEOMETRIA DESCRITIVA E GEOGEBRA 3D : UMA  
PRÁTICA PARA DESENVOLVIMENTO DA VISUALIZAÇÃO**

Alagoinhas-BA

2022

LUCAS LIMA FERREIRA

**GEOMETRIA DESCRITIVA E GEOGEBRA 3D : UMA  
PRÁTICA PARA DESENVOLVIMENTO DA VISUALIZAÇÃO**

**Versão Original**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade do Estado da Bahia como parte dos  
requisitos necessários para obtenção do grau de  
Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Correia da Conceição

Coorientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maridete C. Brito Ferreira

Alagoinhas-BA

2022

Sistema de Bibliotecas da UNEB  
Biblioteca Carlos Drummond de Andrade – Campus II  
Manoela Ribeiro Vieira  
Bibliotecária – CRB 5/1768

F383g      Ferreira, Lucas Lima  
Geometria descritiva e geogebra 3D: uma prática para desenvolvimento da  
visualização – Alagoinhas, 2022.  
86 f.: il

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Jefferson Correia da Conceição.  
Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Maridete Cunha Brito Ferreira

Monografia (Graduação) – Universidade do Estado da Bahia, Departamento  
de Ciências Exatas e da Terra. Licenciatura em Matemática. Alagoinhas, 2022.

1. Projeções Geogebra 2. Visualização 3. Geometria Descritiva I.  
Conceição, Jefferson Correia da. II. Ferreira, Maridete Cunha Brito III.  
Universidade do Estado da Bahia – Departamento de Ciências Exatas e da Terra  
IV. Título.

CDD – 516.6

# **GEOMETRIA DESCRITIVA E GEOGEBRA 3D : UMA PRÁTICA PARA DESENVOLVIMENTO DA VISUALIZAÇÃO**

LUCAS LIMA FERREIRA

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à Universidade do Estado da Bahia como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Aprovado por:

---

Prof. Dr. Jefferson Correia da Conceição  
Orientador (DCET/UNEB)

---

Prof. Dr. Antônio Teófilo A. do Nascimento  
Membro (DCET/UNEB)

---

Prof<sup>a</sup>. Ms<sup>a</sup>. Érica Nogueira Macêdo  
Membro (DCET/UNEB)

Alagoinhas-BA, 13 de Dezembro de 2022.

## AGRADECIMENTOS

Sou grato a Deus pela minha existência, pela saúde espiritual e material, assim como, pelo discernimento entre o bem e o mal. Também sou agradecido a Ele pela família que me deu, pelos meus pais, em especial pela minha mãe Nair, pelo meu irmão Danilo, pela minha companheira e esposa Lili e infinitamente agradecido pela minha amada filha Laura. Juntos eles são a minha felicidade.

A Universidade do Estado da Bahia por me ofertar uma vaga para cursar a Licenciatura em Matemática.

A meu Orientador professor Jefferson, pela enorme disposição e paciência em me orientar, pelo profissionalismo que teve ao ouvir e entender nossas ideias nos apontando um bom caminho a ser trilhado.

A professora Maridete, por me coorientar com bastante dedicação e profissionalismo, indicando leituras certas que deveriam ser feitas.

A professor Angel Gutiérrez, pelos seus escritos e por me alertar acerca da necessidade de na Atividade de Investigação registrar tudo em áudio, pois isso traria melhores resultados.

A professor Erivelton, que para além dos conteúdos específicos, com palavras e ações foi um grande incentivador nessa jornada.

A todos os professores do curso, os quais contribuíram com minha formação. Um agradecimento especial ao professor Teófilo - pelo Xadrez, pelo Latex e pela Geometria Fractal - e a professora Érica, por juntos aceitarem participar desta banca examinadora e contribuir com a qualidade do meu trabalho.

A toda equipe que mantém o Campus II em plena atividade.

Aos colegas que aceitaram fazer parte da Atividade de Investigação que realizamos nessa pesquisa, pois sem eles, esse trabalho não seria jamais o mesmo.

*Amigo, quando olho para trás agora e me pergunto, o que, propriamente falando, fiz pela educação da humanidade? - Acho o seguinte: estabeleci o mais alto princípio básico da educação ao reconhecer que a observação perceptual sensorial (visualização) é a base absoluta de toda cognição.*

*(Johann Heinrich Pestalozzi citado em (ANTONOVSKII et al., 1990, p.4))*

## RESUMO

Este trabalho teve como objetivo geral investigar se a prática em construir e projetar por meio do Software Geogebra 3D, objetos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) em planos pode contribuir para o desenvolvimento da Visualização. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, pré-experimental e qualitativa, realizada inicialmente com uma revisão de literatura que buscou entender o fenômeno da Visualização do ponto de vista matemático, compreender também a importância do ensino e aprendizagem da Geometria Descritiva, assim como verificar quais os benefícios da utilização dos Softwares de Geometria Dinâmica no ensino e aprendizagem das Geometrias. O referencial teórico está fundamentado nos estudos de Angel Gutiérrez, com relação a caracterização da Visualização, e Bernard Parzysz, a respeito da prática em projetar objetos 3D em planos. Recorremos a uma Atividade de Investigação, envolvendo conhecimentos das Geometrias Plana, Espacial e Descritiva, composta por três etapas, aplicada com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia. Na primeira etapa, aplicamos questões de própria autoria, elaboradas com base em nossos objetivos; na segunda, realizou-se uma oficina de prática no Geogebra 3D; na terceira, foram reaplicadas as mesmas questões utilizadas anteriormente, com o propósito de confrontar as respostas da primeira e terceira etapas. Em suma, detectamos indícios de desenvolvimento nas Habilidades de Visualização dos participantes quando realizamos a análise dos dados coletados. Esses ganhos são bastante importantes, pois, como a Visualização é um dos tipos de raciocínios que compõem o Pensamento Matemático, conclui-se que este também foi beneficiado.

### **Palavras-chave:**

Pensamento Matemático, Visualização, Geometria Descritiva, Projeções e Geogebra.

# ABSTRACT

The general objective of this work was to investigate whether the practice of building and designing through Geogebra 3D Software, two-dimensional (2D) and three-dimensional objects (3D) in planes can contribute to the development of Visualization. Its about a bibliographical, pre-experimental and qualitative research, carried out initially with a literature review that sought to understand the phenomenon of Visualization of the point from a mathematical point of view, also understand the importance of teaching and learning of Descriptive Geometry, as well as verifying the benefits of using the Dynamic Geometry Software in the teaching and learning of Geometries. The re- theoretical framework is based on the studies of Angel Gutiérrez, regarding characterization of Visualization, and Bernard Parzys regarding the practice of designing 3D objects on planes. We resorted to an Investigation Activity, involving cknowledge of Plane, Spatial and Descriptive Geometries, consisting of three stages, applied with students of the Degree in Mathematics at the University of State of Bahia. In the first stage, we applied questions of our own authorship, elaborated based on our goals; in the second, a practice workshop was held in Geogebra 3D; in the third, the same questions used previously were reapplied, with the purpose of comparing the responses of the first and third stages. In short, we detected signs of development in the participants Visualization Skills when we performed the analysis of the collected data. These gains are quite important because, as Visualization is one of the types of reasoning that make up the Mathematical Thinking, it is concluded that this was also benefited.

**Keywords:**

Mathematical Thinking, Visualization, Descriptive Geometry, Projections and Geogebra.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Gaspar Monge (1746 - 1818). . . . .	18
Figura 2	Método de Monge. . . . .	20
Figura 3	Sistema de Projeção Cônico. . . . .	21
Figura 4	Sistema de Projeção Cilíndrico Ortogonal. . . . .	21
Figura 5	Sistema de Projeção Cilíndrico Oblíquo. . . . .	22
Figura 6	Cubo projetado através de um Sistema de Projeção Cilíndrico Ortogonal. . . . .	22
Figura 7	Cubo projetado através de um Sistema de Projeção Cônico. . . . .	23
Figura 8	Planos de Projeção dividindo o espaço em quatro regiões. . . . .	23
Figura 9	Plano Lateral de Projeção ou Plano de Perfil. . . . .	24
Figura 10	Escola Politécnica do Rio de Janeiro. . . . .	25
Figura 11	Colégio Pedro II, Rio de Janeiro. . . . .	26
Figura 12	Angel Gutiérrez. . . . .	30
Figura 13	Principais elementos da Visualização integrando a solução de uma tarefa matemática. . . . .	35
Figura 14	Bernard Parzysz . . . . .	37
Figura 15	Níveis de Representação . . . . .	38
Figura 16	Markus Hohenwarter . . . . .	47
Figura 17	Interface do Geogebra 3D. . . . .	48
Figura 18	Registro figural criado pela dupla AB como auxílio à resolução da questão 2 . . . . .	60
Figura 19	Registro figural criado pela dupla AB como auxílio à resolução da questão 3 . . . . .	63

Figura 20	Registro figural criado pelo participante F como auxílio à resolução da questão 1 . . . . .	64
Figura 21	Registro figural criado pelo participante E como auxílio à resolução da questão 1 . . . . .	64
Figura 22	Registro figural relacionado a resolução da questão 2 por parte do grupo EFG . . . . .	67
Figura 23	Triângulo ABC oblíquo em relação ao PV e PL, e perpendicular ao PH, projetado nos três planos auxiliares . . . . .	82
Figura 24	Triângulo ABC oblíquo em relação ao PV e PH, e perpendicular ao PL, projetado nos três planos auxiliares . . . . .	82
Figura 25	Triângulo ABC oblíquo em relação ao PH e PL, e perpendicular ao PV, projetado nos três planos auxiliares . . . . .	83
Figura 26	Triângulo ABC paralelo em relação ao PH e perpendicular ao PV e PL, projetado nos três planos auxiliares . . . . .	83
Figura 27	Triângulo ABC paralelo em relação ao PV e perpendicular ao PH e PL, projetado nos três planos auxiliares . . . . .	83
Figura 28	Triângulo ABC paralelo em relação ao PL e perpendicular ao PH e PV, projetado nos três planos auxiliares . . . . .	84
Figura 29	Triângulo ABC oblíquo em relação ao PL, PH e PV, projetado nos três planos auxiliares . . . . .	84
Figura 30	Tronco de pirâmide projetado nos três planos auxiliares . . . . .	84
Figura 31	Prisma com base triangular projetado nos três planos auxiliares . . . . .	85

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Habilidades de Visualização por McGee . . . . .	32
Tabela 2	Habilidades de Visualização por Gutiérrez . . . . .	33
Tabela 3	Habilidades de Visualização por Bishop . . . . .	34
Tabela 4	Habilidades de Visualização por Kosslyn . . . . .	34

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

GD	Geometria Descritiva
PG	Pensamento Geométrico
GE	Geometria Espacial
DG	Desenho Geométrico
2D	Duas Dimensões
3D	Três Dimensões
PH	Plano Horizontal de Projeção
PV	Plano Vertical de Projeção
PL	Plano Lateral de Projeção

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>HISTÓRIA DA GEOMETRIA DESCRITIVA</b>	<b>17</b>
2.1	Origens - Gaspar Monge . . . . .	17
2.2	O método Mongeano e seus fundamentos . . . . .	19
2.3	Primórdios e quadro atual de ensino no Brasil . . . . .	24
<b>3</b>	<b>BASE TEÓRICA</b>	<b>29</b>
3.1	Angel Gutiérrez . . . . .	29
3.2	Bernard Parzysz . . . . .	37
3.3	Visualização, Pensamento Geométrico, Pensamento Matemático e Educação Matemática . . . . .	41
<b>4</b>	<b>SOFTWARE GEOGEBRA 3D</b>	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>49</b>
5.1	Caracterização da pesquisa . . . . .	49
5.2	Procedimentos metodológicos . . . . .	50
5.3	Atividade de Investigação . . . . .	52
<b>6</b>	<b>ATIVIDADE DE INVESTIGAÇÃO</b>	<b>56</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>76</b>
	<b>Referências</b>	<b>78</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>82</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso trata-se de uma pesquisa no âmbito da Educação Matemática, especificamente acerca do tema Visualização. A motivação para essa realização está associada à nossas próprias vivências na Universidade como aluno e como monitor de ensino das disciplinas Geometria Descritiva (GD) e Desenho Geométrico (DG). Essas experiências trouxeram-nos à vista obstáculos existentes concernentes à capacidade de Visualização de objetos geométricos no Espaço, por parte do estudante.

Os obstáculos a que nos referimos, estão associados às dificuldades dos alunos em interpretar as situações propostas nos componentes GD e Geometria Espacial (GE) e estabelecer relações entre o enunciado de determinadas questões e a representação do objeto requerido - que, nesse caso, poderia ser representado de alguma maneira - para a solução do problema exposto. Observe que, "um dos principais problemas encontrados no ensino de Geometria é a dificuldade de Visualização de objetos geométricos, sejam eles planos ou espaciais, sendo importantes na construção e exploração de conceitos matemáticos"(PALLES; SILVA, 2012, p.2).

Nesse contexto, entendendo que as dificuldades em transpor o enunciado da questão para chegar na representação dos objetos trata-se de um problema que envolve Visualização, e que essas dificuldades podem ser amenizadas, é que surge uma de nossas inquietações, a saber: como contribuir no processo de ensino e aprendizagem em Geometria com o desenvolvimento da Visualização ? Essa inquietação se desdobra em outras inquietações como: o aprimoramento da Visualização contribui para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico e Matemático? Quais as reais dimensões do alcance da aplicabilidade de uma atividade que de fato potencialize a capacidade de "ver mentalmente"no aluno? Qual o papel do professor de Matemática nessa conjuntura?

Todas essas inquietações surgiram das experiências vivenciadas e sentimos a necessidade de partir para leituras que nos permitissem verificar o que as pesquisas dizem sobre esse tema e assim justificar a relevância de pesquisar sobre ele e, além disso, focar nossos objetivos.

Dessa forma, iniciamos por investigar se e como a utilização de Softwares de Geometria Dinâmica, <sup>1</sup> em específico o Geogebra 3D, poderia potencializar o interesse do aluno para o estudo de Geometria, e, além disso, se essa utilização tem alguma influência no processo de desenvolvimento da Visualização de quem o faz. Em relação ao uso dessas novas tecnologias no ensino e aprendizagem de Geometria Gutierrez (1991, p.4, tradução nossa) afirma que "essas novas possibilidades precisam ser investigadas e analisadas em profundidade, como primeiro passo para sua implementação nas salas de aula".

Sobre a importância do ensino e aprendizagem da Geometria temos que:

[...]deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida[...] (BRASIL, 2006, p.75) .

Além disso, Lorenzato (1995, p.75) afirma que "a Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a matemática possui". Assim como, Gutierrez (1991, p.4, tradução nossa) apresenta que "a Geometria pode ser considerada como a origem da Visualização em Matemática".

Logo, tendo como base a busca por respostas para às questões colocadas e consequentemente por uma maneira de contribuir com o desenvolvimento da Visualização, verificamos por meio de uma pesquisa bibliográfica nos estudos antecedentes acerca do tema que, a Visualização e o Raciocínio Visual constituem-se atualmente como temas de grande importância dentro dos campos de pesquisas relacionadas ao ensino da Geometria. Sendo inclusive "a Visualização em Geometria um dos principais assuntos de interesse atualmente nos estudos do Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG <sup>2</sup>"(CORRADI; FRANCO, 2020, p.33) .

---

<sup>1</sup>Esse termo comumente é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, não devendo ser visto como referência a uma nova Geometria, (ALVES; SOARES, 2005).

<sup>2</sup>É um grupo liderado pelo Professor Dr<sup>o</sup> Valdeni Soliani Franco dentro da Universidade Estadual de Maringá que tem por objetivo melhorar o ensino e aprendizagem da Geometria em geral.

Ademais, Palles e Silva (2012, p.1) afirmam que a partir do fim da década de 1990 a Visualização foi colocada no centro do debate acerca do ensino de Geometria. Nessa mesma década os Parâmetros Curriculares Nacionais<sup>3</sup> – PCN, destacam a importância da área de Geometria nos diferentes níveis da educação escolar, uma vez que, por meio de seu ensino o aluno desenvolve competências e Habilidades de Visualização, argumentação lógica e compreensão de formas geométricas, além de relações e propriedades que são imprescindíveis para a percepção, interpretação e compreensão do espaço físico em geral.

Daí, frente às nossas percepções e a relevância dada atualmente ao tema, iniciamos uma busca na literatura específica, no sentido de mapear a importância, as delimitações, as interrogações, as propostas e os resultados já encontrados, que de alguma forma contribuem com o desenvolvimento dos estudos sobre Visualização. Encontramos diversos trabalhos, no entanto as pesquisas de Angel Gutiérrez nos chamaram a atenção, principalmente porque ele organiza ideias e resultados postos por diversos pesquisadores importantes nessa área com o intuito de mostrar a grande diversidade de resultados que podem ser encontrados na literatura e mostrar também a diversidade de interpretações, significados e campos de aplicação que circunscrevem esse tema.

Um dos pontos em específico que nos chama à atenção está posto em *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework*, onde ele afirma que um dos elementos integradores da Visualização, a saber: as Habilidades de Visualização podem ser adquiridas e desenvolvidas, e para além disso, ele afirma que a Visualização é uma das bases da cognição (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.3).

Diante do que diz a literatura entendemos ser oportuno apresentar ideias e construir atividades que potencializem o desenvolvimento dessa capacidade tão importante na vida de qualquer sujeito, conforme, inclusive pontua a própria Base Nacional Comum Curricular<sup>4</sup> - (BNCC). Nesse mesmo sentido Gutierrez (1991, p.44, tradução nossa) traz que "A percepção visual é um elemento importante em inúmeras atividades da vida, não apenas aquelas relacionadas ao aprendizado escolar ou à Geometria".

As primeiras leituras feitas permitiram focar nosso objetivo geral:

---

<sup>3</sup>Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual.

<sup>4</sup>A Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

Investigar se a prática em construir e projetar, por meio do Software Geogebra 3D, objetos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) em planos, pode contribuir para o desenvolvimento da Visualização.

Esta investigação se desenvolveu em busca de responder à seguinte questão de pesquisa:

Em que medida a utilização do Software Geogebra 3D, para construir e projetar objetos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) em planos, pode contribuir para o desenvolvimento da Visualização?

Tendo por hipótese que a prática em construir e projetar objetos em 2D e 3D em planos contribui para o desenvolvimento da Visualização, e conseqüentemente com o ensino e aprendizagem da Geometria, usamos também como aporte teórico os trabalhos de Bernard Parzysz, que em específico realizou um estudo de caso e concluiu que a falta de prática por parte de alunos da educação básica em projetar objetos tridimensionais em planos dificulta o entendimento pleno nos estudos da Geometria Espacial (PARZYSZ, 1988, p.90).

Além disso, como a prática de projetar é uma das ferramentas de estudo na GD, pensamos que esta, através das representações das projeções dos objetos geométricos nos planos de projeção ocupa lugar de destaque no currículo da licenciatura em matemática, justo que, "A GD se presta para desenvolver a habilidade de imaginar objetos ou projetos no espaço e não apenas a leitura ou interpretação de desenhos", afirma (MONTENEGRO, 2015).

Com essa perspectiva, de aperfeiçoar a capacidade de Visualização, em específico o processo de construção mental de objetos geométricos ou de situações que envolvam objetos geométricos, é que buscamos desenvolver uma atividade de intervenção. Atividade essa, com fins de investigar nossa hipótese, e caso obtivéssemos resultados positivos, propor em pesquisas futuras, uma abordagem introdutória aos elementos da Geometria Descritiva no Ensino Médio, sendo essa abordagem introdutória um incentivo à prática em projetar objetos em 2D e 3D em planos.

Optamos por realizar essa pesquisa com caráter experimental com relação aos objetivos e bibliográfico com respeito aos procedimentos técnicos, visto que, além de buscar na literatura existente as bases teóricas para nos embasar em análises, decidimos agir ativamente sobre o objeto de estudo, no sentido de criar caminhos para contribuir com o desenvolvimento da Visualização. No entanto, do ponto de vista da experimentação, como os dados coletados se restringem a um pequeno grupo, nesse sentido, temos uma pesquisa pré-experimental conforme detalha (GIL, 2002, p.47).

Assim, a próxima seção trata dos aspectos históricos e atuais a respeito da Geometria Descritiva e seu ensino no Brasil. Em sequência discorremos a base teórica que fundamenta nosso trabalho. Posteriormente sobre como Softwares de Geometria Dinâmica podem contribuir no ensino da Geometria e além disso apresentamos o Software Geogebra 3D. Em seguida discorremos sobre a metodologia norteadora que foi empregada em nossa pesquisa. E, no penúltimo capítulo, apresentamos a atividade que construímos e aplicamos, junto às análises respectivas, encerrando com as considerações finais.

## 2 HISTÓRIA DA GEOMETRIA DESCRITIVA

Nesta seção apresentaremos um breve resumo acerca da História da Geometria Descritiva trazendo essencialmente informações sobre Gaspar Monge o criador da GD, bem como, de maneira sucinta em que consiste o Método Mongeano e logo após, como se deu os primeiros ensinamentos acerca dessa disciplina no Brasil, finalizando com um relato sobre a situação atual de seu ensino no Brasil.

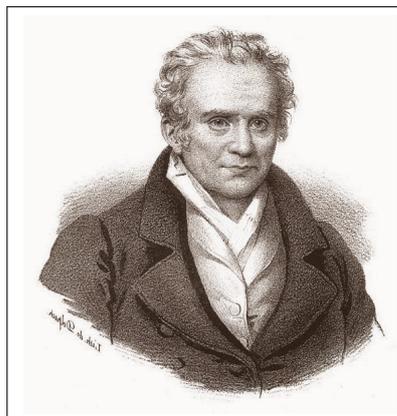
### 2.1 Origens - Gaspar Monge

De origem humilde, Gaspar Monge nasceu em 10 de maio de 1746 na região da Borgonha, na cidade de Beaune, sendo esta uma das mais antigas da França, tendo sua origem nos antigos povoados e vilas da Idade Média. Incentivado por seu pai Jaques Monge - que foi um Mascate<sup>1</sup> amolador de facas - , Gaspar fez seus estudos primários e secundários no *Collège d'Oratoriens*, uma instituição francesa de grande prestígio. Desde cedo se destacou na escola, elaborando um instintor de incêndios, cujos efeitos foram admiráveis (GANI, 2004, p.23).

---

<sup>1</sup>Espécie de mercador ambulante, que percorre lugares diversos em busca de promover os mais variados tipos de negócios.

Figura 1: Gaspar Monge (1746 - 1818).



Fonte: (ALBERTO, 2017)

Aos 16 anos concluiu as etapas iniciais de sua formação escolar e foi enviado ao *Collège d'Oratoriens de Lyon* para seguir carreira religiosa. Dois anos mais tarde, em 1764 retorna a sua cidade natal e entra para a *Ecole Royale du Génie* em Mézières,<sup>2</sup> sendo esta uma escola de formação de engenheiros militares para as obras de fortificações e para todos os trabalhos relativos aos ataques e defesas de territórios. No entanto, por não ser nobre, Monge é deslocado para uma sucursal desta escola onde foi vinculado como desenhista e aluno.

Curiosamente, por ironia do destino, essa sucursal ao qual Gaspar foi vinculado, era chamada desdenhosamente de *Gâcheur*, que significa aquele que coloca tudo a perder. E foi nela que, encarregado de resolver um problema de desfilamento ligado a construções de novas fortificações, Monge desenvolveu uma técnica gráfica que substituiu as tentativas empíricas, utilizadas até então, reduzindo uma questão prática a um problema essencialmente teórico. Ao longo dos anos esse método viria a ser aprimorado e ampliado, passando a se chamar Geometria Descritiva (GANI, 2004, p.23).

A partir desse episódio em *Gâcheur*, Monge passou a ser conhecido no meio acadêmico e aos 22 anos assumiu uma cadeira de professor de matemática em Mézières. Três anos depois acumulou um vaga como professor de física, substituindo Jean-Antoine Nollet<sup>3</sup> falecido naquele ano. Tendo sua atuação como professor bastante elogiada, conseguiu um lugar na *Académie Royale des Sciences*, sendo nesta mesma Academia alçado ao cargo de geômetra em 1780 (TRAVAIN, 2014, p.1).

<sup>2</sup>Cidade antiga situada ao norte da França.

<sup>3</sup>Foi membro da Royal Society de Londres em 1734 e, em seguida, foi professor de física experimental na Universidade de Paris.

A essa altura da vida, Gaspar vivia com sua esposa Marie-Catherine Huart entre Mezières e Paris, em sua cidade natal mantinha o cargo de Professor e em Paris assistia na *Académie Royale des Sciences*. Com a morte de Etienne Bézout<sup>4</sup> em 1783, Monge foi nomeado examinador de alunos da marinha e logo após Ministro da Marinha Francesa. Com essa nova função, passou a conhecer de perto aspectos geográficos e militares da França, assim como envolver-se diretamente nas questões políticas da Revolução Francesa. Além de tornar-se amigo pessoal de Napoleão Bonaparte<sup>5</sup> e dele receber o título de *Conde de Péluse* em 1808 (TRAVAIN, 2014, p.1).

Gaspar também participou da criação da *École Normale Supérieure* e da *École Polytechnique de Paris*, nas quais lecionou Geometria Descritiva, Analítica e Diferencial. Durante o tempo em que lecionou no *Ecole du génie* em Mézières, entre 1766 e 1784, Gaspar ampliou e aprimorou seu método e finalmente em 1799 publica *Géométrie descriptive. Leçons données aux écoles normales*, sendo esta obra uma das suas principais nos campos da Geometria Descritiva. Seus diversos trabalhos nas diferentes áreas do conhecimento científico o tornaram um cientista de grande reputação em matemática, física e química (GANI, 2004, p.27).

## 2.2 O método Mongeano e seus fundamentos

A Teoria de Gaspar Monge, de maneira resumida consiste em conhecer tudo que diz respeito a forma, dimensão e a posição de um determinado objeto a partir das suas projeções. Basicamente, cada ponto é representado por suas projeções ortogonais em dois planos perpendiculares entre si; em seguida, um plano é rebatido sobre o outro, girando em torno da interseção entre eles, de maneira que as duas projeções fiquem em um mesmo plano. A essa representação das projeções do ponto dada no mesmo plano - figura 2 - deu-se o nome de *Épura Descritiva* (GANI, 2004, p.37).

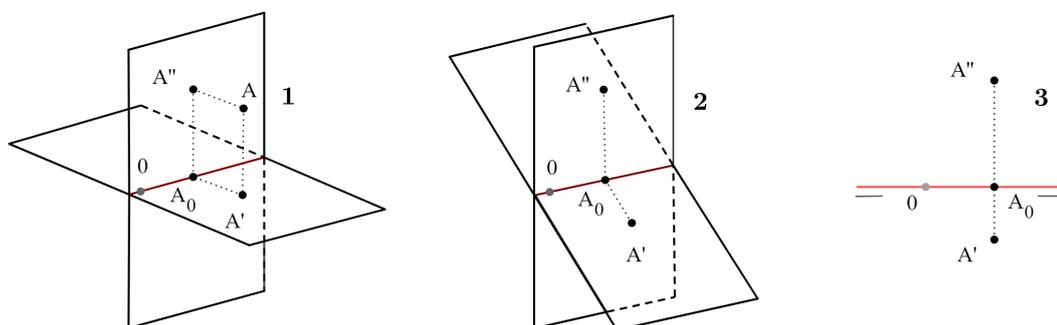
Para o leitor não habituado aos objetos e vocabulário próprio da Geometria Descritiva, para leitura dessa seção verifique as figuras 8 e 9 com as respectivas legendas e informações, a fins de tornar o discorrer das informações mais agradável.

---

<sup>4</sup>Professor de mecânica da *Académie des Sciences*, contribuiu tanto na matemática pura como na didática. Suas contribuições na didática foram tão importantes que à época, quando queriam explicar algo melhor, diziam que iriam dar um "Bézout" (WIKIPEDIA, 2022).

<sup>5</sup>Imperador da França entre 1804 e 1814, e durante 100 dias em 1815 durante o período dos Cem dias.

Figura 2: Método de Monge.



Fonte: (GANI, 2004, p.37, construção via Geogebra 3D e Classic)

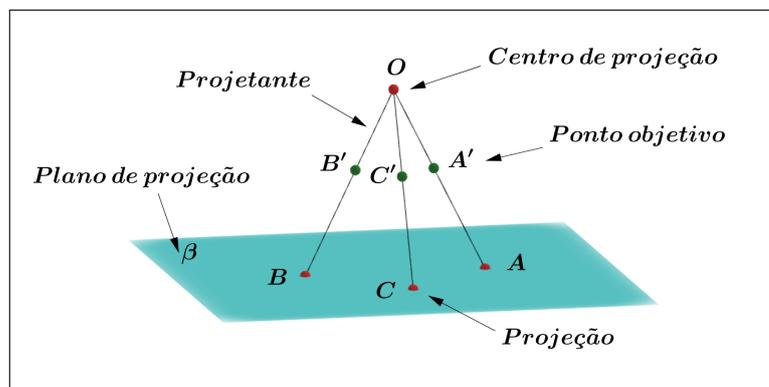
- Em (1) o ponto A está projetado em dois planos auxiliares que são ortogonais entre si;
- Em (2) o Plano Horizontal é rotacionado em torno da interseção entre ele e o Plano Vertical de maneira que ambos devem coincidir. A essa interseção dá-se o nome de Linha de Terra;
- Em (3) as duas projeções do ponto A encontram-se representadas em um único plano, é a Épura Descritiva.

Tratando-se especificamente a respeito das relações de grandeza que existem entre o objeto a ser projetado e suas projeções, faz-se necessário apresentar nessa pesquisa a estrutura de um sistema de projeção, assim como mostrar as diferenças entre os três tipos de sistemas mais conhecidos, que são: Sistema de Projeção Cônico, Cilíndrico Oblíquo e Cilíndrico Ortogonal.

Um sistema de projeção é constituído por cinco elementos: o objeto ou ponto objetivo, a projeção, o centro de projeção, as projetantes e o plano de projeção. Do centro de projeção partem as projetantes, que passam pelos pontos objetivo e interceptam o plano de projeção. Os pontos onde as projetantes interceptam o plano de projeção correspondem às projeções dos pontos objetivo (COELHO; AMARAL, 2012, p.5).

Na figura 3 o centro de projeção está situado a uma distância finita do objeto, as projetantes nesse caso, não são paralelas entre si, isto é, são divergentes, dando origem à chamada projeção cônica.

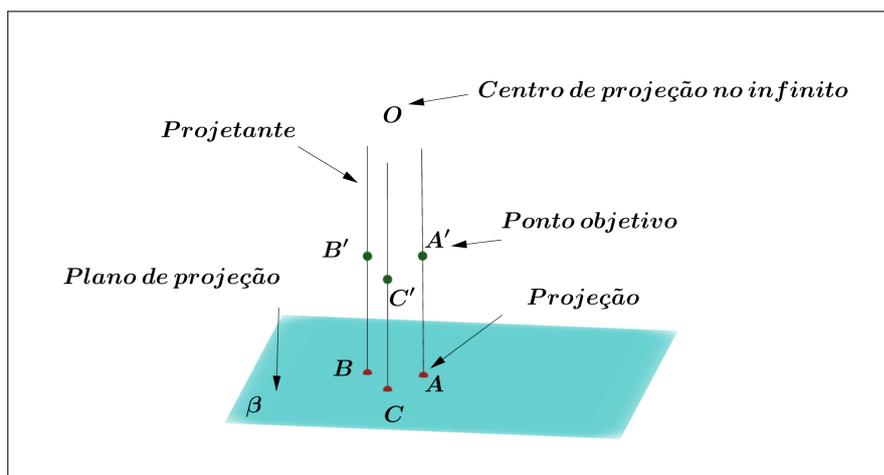
Figura 3: Sistema de Projeção Cônica.



Fonte: (COELHO; AMARAL, 2012, p.6, construção via Geogebra 3D e Classic)

De maneira distinta, temos o Sistema de Projeção Cilíndrico que pode ser Ortogonal ou Oblíquo. Nesse sistema o centro de projeção está a uma distância infinita, e isso faz com que as projetantes agora estejam paralelas entre si. Caso as projetantes estejam perpendiculares ao plano de projeção, trata-se de um Sistema de Projeção Cilíndrico Ortogonal, veja na figura 4:

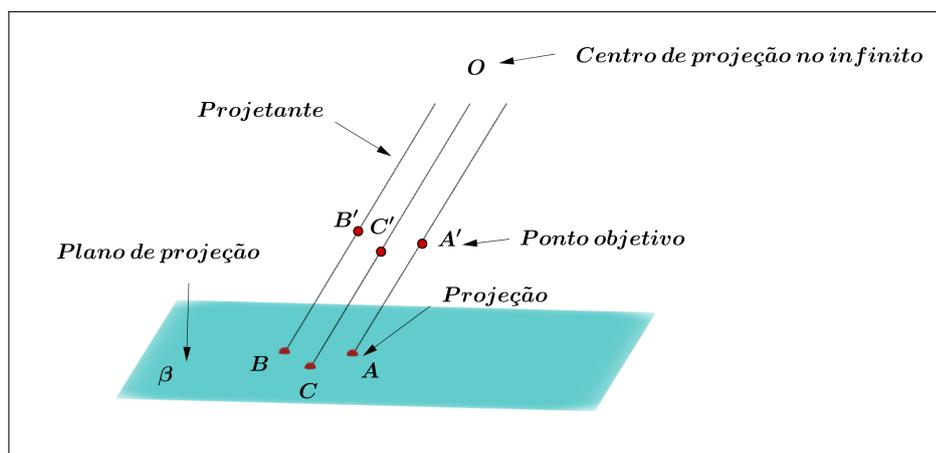
Figura 4: Sistema de Projeção Cilíndrico Ortogonal.



Fonte: (COELHO; AMARAL, 2012, p.6, construção via Geogebra 3D e Classic)

Quando as projetantes estão oblíquas em relação ao plano de projeção, trata-se de um Sistema de Projeção Cilíndrico Oblíquo, observe na figura 5:

Figura 5: Sistema de Projeção Cilíndrico Oblíquo.

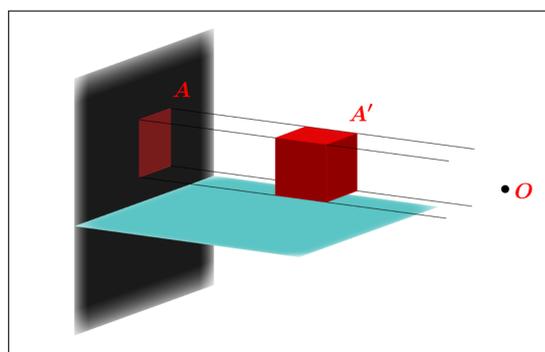


Fonte: (COELHO; AMARAL, 2012, p.6, construção via Geogebra 3D e Classic)

Se quisermos que a forma e as dimensões de um objeto sejam compreendidas de modo satisfatório, segundo Coelho e Amaral (2012, p.7) "é necessário que as dimensões da projeção correspondam às dimensões reais do objeto". Ou seja, o objeto deve ser representado em sua *verdadeira grandeza*<sup>6</sup>. Assim, na Geometria Descritiva clássica, são utilizados, como já posto acima, dois planos de projeção para se representar um objeto, sendo que o sistema de projeção adotado é o Sistema de Projeções Cilíndricas Ortogonais.

Vejamos um exemplo de um cubo na figura 6 - objeto geométrico tridimensional - projetado através de um Sistema de Projeções Cilíndricas Ortogonais no Plano Vertical de projeção, note que a projeção do cubo é a sua verdadeira grandeza:

Figura 6: Cubo projetado através de um Sistema de Projeção Cilíndrico Ortogonal.

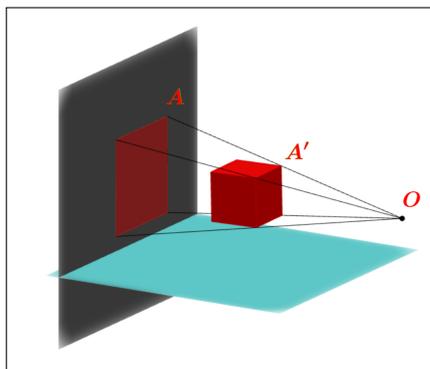


Fonte: Própria autoria, construção via Geogebra 3D e Classic.

<sup>6</sup>É um termo utilizado em GD para descrever a dimensão real de um ente geométrico.

Note agora que no Sistema de Projeção Cônico, a projeção do cubo representado na figura 7 não está em verdadeira grandeza quando projetado no Plano Vertical de projeção:

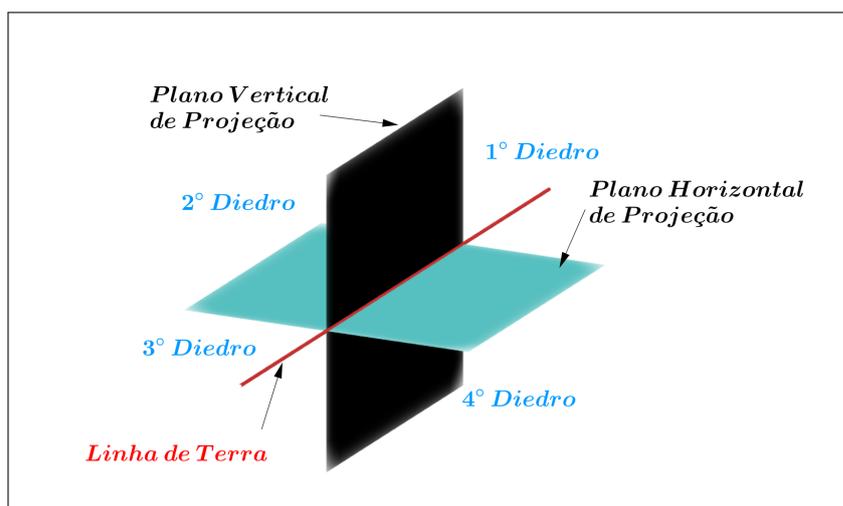
Figura 7: Cubo projetado através de um Sistema de Projeção Cônico.



Fonte: Própria autoria, construção via Geogebra 3D e Classic.

Qualquer objeto quando representado no Sistema Mongeano poderá ter duas projeções, uma no Plano Horizontal de projeção e outra no Plano Vertical de projeção. Sendo que esses dois planos de projeções dividem o espaço em quatro regiões, observe na figura 8:

Figura 8: Planos de Projeção dividindo o espaço em quatro regiões.

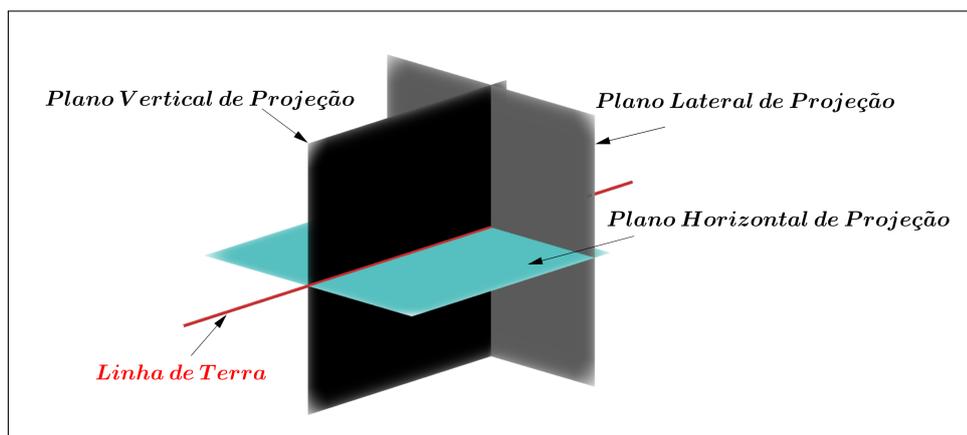


Fonte: (COELHO; AMARAL, 2012, p.8, construção via Geogebra 3D e Classic).

Neste sistema de projeção, por convenção considera-se que o centro de projeção que dá origem à projeção horizontal está localizado acima do plano horizontal, a uma distância infinita, enquanto o relativo à projeção vertical está localizado na frente do plano vertical, também a uma distância infinita (COELHO; AMARAL, 2012, p.8).

Apesar de Monge ter desenvolvido e sistematizado seu método, no final do século XIX um matemático italiano chamado *Gino Benedetto Loria* nascido em 19 de maio de 1862 na cidade de Gênova na Itália implementa ao Sistema Mongeano um terceiro plano de projeção, que ficou conhecido como Plano Lateral ou Plano de Perfil. Esse acréscimo - que pode ser visualizado na figura 9 - possibilitou conhecer ainda mais os objetos a serem projetados, pois houve o ganho de conhecer uma terceira vista do objeto (WIKIWAND, 2022).

Figura 9: Plano Lateral de Projeção ou Plano de Perfil.



Fonte: Própria autoria, construção via Geogebra 3D e Classic.

## 2.3 Primórdios e quadro atual de ensino no Brasil

O ensino de GD no Brasil remota ao segundo ano do curso para Oficiais Engenheiros e para os de Artilharia da Academia Real Militar<sup>7</sup> criada pela Carta-Régia de 4 de dezembro de 1810. O programa desse curso se baseava na proposta da *Ecole Polytechnique de Paris* e o primeiro professor a ministrar Descritiva foi José Victorino dos Santos e Souza graduado na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. A orientação dada aos professores era que preparassem um material de autoria própria ou traduzissem algum livro de Gaspar Monge sobre Geometria Descritiva (GANI, 2004, p.86).

Mais tarde, em 1874 foi criada a Escola Politécnica<sup>8</sup>, - figura 10 - era composta

<sup>7</sup>A Academia Real Militar foi criada pela carta de lei de 4 de dezembro de 1810 e tinha por objetivo ministrar na colônia um curso completo de ciências matemáticas, de ciências de observações, quais a física, química, mineralogia, metalurgia e história natural que compreenderá o reino vegetal e animal, e das ciências militares em toda a sua extensão, tanto de tática como de fortificação e artilharia, (BRASIL, 2022)

<sup>8</sup>Uma escola politécnica é um título comum a diversas instituições universitárias especializadas no

de um Curso Geral com período de dois anos e cursos especiais como Ciências Físicas e Naturais ou Matemáticas, de igual período. Sendo que a GD ocupava a segunda cadeira do segundo ano desse curso e era vista por todos que entrassem na Politécnica. Em 1937 a Escola Politécnica passou a se chamar Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, atual Universidade Federal do Rio de Janeiro (GANI, 2004, p.89).

Figura 10: Escola Politécnica do Rio de Janeiro.



Fonte: (POLITÉCNICA, 2022)

Em 1837 é criado o Colégio Pedro II<sup>9</sup> - figura 11 - como escola de ensino secundário, no entanto é apenas em 1895 que a Geometria Descritiva surge explicitamente no programa do Colégio, com indicação do livro *Elementos de Geometria Descritiva*, "obra traduzida e adaptada para o ensino secundário brasileiro pelo professor Eugenio de Barros Raja Gabaglia", aponta<sup>10</sup> Gani (2004, p.90). Essa, portanto, é a introdução do ensino de Geometria Descritiva no ensino secundário brasileiro.

ensino e pesquisa das diversas engenharias. São genericamente inspiradas no modelo de escola proposto pela *École Polytechnique* de Paris, a primeira instituição do tipo no mundo, fundada no século XVIII.

<sup>9</sup>É uma tradicional instituição de ensino público federal, localizada no estado do Rio de Janeiro. É o terceiro mais antigo dentre os colégios em atividade no país, depois do Ginásio Pernambucano e do Atheneu Norte-Riograndense.

<sup>10</sup>O professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia foi catedrático da Escola Politécnica e diretor do Colégio Pedro II, entre outras atribuições.

Figura 11: Colégio Pedro II, Rio de Janeiro.



Fonte: (AFIADA, 2022)

No final do século XIX e início do século XX a educação formal no Brasil era dividida entre ensino primário, secundário e superior, sendo que no curso primário havia a disciplina Desenho como uma prática em Geometria, e no curso secundário havia Geometria Descritiva e Perspectiva. Inclusive houve nessa época uma grande valorização nos dois primeiros níveis de ensino dos componentes que estão circunscritos a Geometria, valorização essa que foi incentivada por Rui Barbosa, um defensor da educação técnica como instrumento de desenvolvimento da indústria e conseqüentemente do Brasil como um todo, descreve (VIEIRA, 2005, p.109).

Em 1942 o Decreto de Lei nº 4.244 de 9 de abril, nomeado de Lei Orgânica do Ensino Secundário, estabeleceu para o ensino secundário dois ciclos: o primeiro seria o curso Ginásial que compreendia um período de 4 anos, o segundo com uma duração de 3 anos seria dividido em duas possibilidades, um curso clássico<sup>11</sup> e um científico<sup>12</sup>, aponta o documento Brasil (1942, p.1). Sendo que o componente Desenho Geométrico era presente em todo período do Ginásio e a Geometria Descritiva presente no segundo ciclo.

Ja na segunda metade do século XX, precisamente em 20 de dezembro de 1961 foi promulgada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - (LDB) instituindo que caberia ao Conselho Federal de Educação indicar até cinco disciplinas obrigatórias para todos os sistemas de ensino secundário, cabendo aos conselhos estaduais indicar quais outros componentes deveriam ser abordados, descreve o documento Brasil

<sup>11</sup>No curso clássico, o foco era para a formação intelectual, além de um maior conhecimento de filosofia e um acentuado estudo das letras antigas (BRASIL, 1942, p.1).

<sup>12</sup>Essa formação seria marcada por um estudo maior de ciências (BRASIL, 1942, p.1).

(1961, p.1). Dentre esses havia Desenho Geométrico para todo o Ginásio e Geometria Descritiva para o segundo ciclo do ensino secundário, também chamado de Colégio (SILVA, 2006, p.19).

No entanto, como a Lei nº 5.540 de 28 de dezembro de 1968, nomeada por Lei da Reforma Universitária - (LRU) indicava que os exames para acesso ao ensino superior - vestibulares - deveriam conter apenas conteúdos que estivessem presentes em todos os sistemas de ensino secundários, assim afirma a Câmara dos Deputados Federais em Brasil (1968, p.1), e como alguns estabelecimentos de ensino já praticavam desde a LDB 4.024/61 o DG e a GD como disciplinas optativas, os conteúdos dessas foram eliminados de todos os concursos do país . Com isso, tanto instituições públicas como privadas retiraram esses componentes de seus currículos.

Assim, a LDB 5692/71 instituiu a inserção da Educação Artística em lugar do DG e GD no currículo das instituições públicas tanto no ensino primário quanto no secundário, atuais ensino fundamental e médio, aponta o documento Brasil (1971, p.1). Vale salientar que algumas instituições públicas e privadas mantiveram esses componentes em suas grades em vistas de manter uma boa qualidade de ensino, além disso, os cursos técnicos e industriais não deixaram de ministrar DG e GD.

Segundo Silva (2006, p.23) não é possível afirmar com precisão de data quando que iniciou-se o declínio ou o abandono do ensino de Desenho, em específico de Geometria Descritiva na educação básica brasileira. No entanto, ele traz que, a retirada dos conteúdos de GD e DG dos vestibulares a partir da Lei da Reforma Universitária em 1968 é um fato marcante nesse processo, pois isso foi um incentivo muito forte para a retirada desse componente do ensino básico.

Além do mais, após a implantação da LRU em 1968, sobre o ensino de Geometria Descritiva e Desenho Geométrico, aconteceu que:

Nas licenciaturas em matemática, os programas passaram a reservar carga horária diminuta para as disciplinas Desenho Geométrico e Geometria Descritiva. Com isso a formação dos professores nessas áreas tornou-se precária. Logo eles que necessitam tanto de raciocínio lógico-matemático e visão espacial desenvolvidos para aprofundar seus conhecimentos nas demais disciplinas do curso. (SILVA, 2006, p.23).

Diante dessa conjuntura, referindo-se ao abandono do ensino da Geometria em geral no ensino básico, Rabello (2005, p.50, *apud* Silva, 2006, p.25) coloca que "[...] é

possível calcular a dimensão do problema. Salvo raras exceções, os alunos que ingressam no ciclo básico, especialmente os do curso de engenharia, não distinguem ângulos de um esquadro". Para amenizar essa situação e por necessidade universidades que ofertam cursos de engenharia, arquitetura, licenciatura em matemática e desenho industrial, incluem em seus currículos GD e DG.

Sobre essa oferta nos cursos acima mencionados, Cláudio Itacir Nella da Silva, professor de GD desde 1992 no curso de Engenharia Elétrica na PUCPR afirma:

Duas constatações pode-se fazer: os alunos, exceção feita aos que provinham de cursos técnicos, não dispunham de conhecimentos mínimos de DG e GD e apresentavam dificuldades para aprende-los num prazo tão curto. Por outro lado, não conseguiam desenvolver raciocínio espacial adequado para abordar os conteúdos de Desenho II. (SILVA, 2006, p.25).

Segundo Silva (2006, p.26) aumentar a carga horária no ensino superior a propósito de suprir a carência que a falta dos componentes DG e GD fizeram ao não serem ofertados no ensino fundamental e médio, pode causar outros transtornos, um deles seria perda de horas aulas na programação principal de outras disciplinas básicas e aplicativas. Outro seria o apendizado em pouco tempo, gerando conhecimentos superficiais do conteúdo.

Portanto, esse é um resumo dos aspectos históricos e o quadro atual do ensino de Geometria Descritiva no ensino fundamental e médio no Brasil, salvo os cursos técnicos e industriais, uma vez que, não há previsões em leis que orientem a educação brasileira na inserção da GD nos currículos atualmente.

### 3 BASE TEÓRICA

Nesta seção apresentaremos os trabalhos de Angel Gutiérrez e Bernard Parzysz, eles servem como base norteadora desta pesquisa, que é essencialmente voltada a investigação sobre como o professor de Matemática pode implementar ações em sala de aula, no sentido de contribuir com o desenvolvimento das Habilidades de Visualização do aluno. No nosso caso, essas ações a que nos referimos converge para a prática já posta em nossa hipótese.

Além disso, nesta seção, a partir de pesquisas desenvolvidas por nomes importantes dentro do campo voltado aos estudos sobre Visualização, tais como: Angel Gutiérrez, Efraim Fischbein, Raymond Duval, Luiz Carlos Pais, David Orme Tall, Tommy Dreyfus e Ubiratan D'Ambrósio, este último mais voltado a Educação Matemática, procuramos estabelecer uma relação entre o aprimoramento das Habilidades de Visualização e progressos na Educação Matemática, passando necessariamente pelo desenvolvimento do Pensamento Geométrico e do Pensamento Matemático.

#### 3.1 Angel Gutiérrez

Angel Gutiérrez - figura 12 - atualmente é professor de Educação Matemática no Departamento de Didática da Matemática da Universidade de Valência na Espanha. Angel faz investigação em Educação Matemática, particularmente relacionada com: - ensino e aprendizagem da Geometria, em particular, o modelo de raciocínio Van Hiele, a saber: <sup>1</sup>, Visualização e Geometria 3d, ensino e aprendizagem da prova, uso da tecnologia no ensino da Geometria, pré-álgebra na escola primária, e as características dos alunos matematicamente superdotados e/ou talentosos. Seu principal projeto atualmente é "Análise do Comportamento de Alunos Matematicamente Talentosos".

---

<sup>1</sup>*Pierre van Hiele* foi casado com *Dina van Hiele-Geldof*, juntos eles publicaram *Structure and Insight: A theory of mathematics education*, livro base para a Teoria van Hiele, que constitui-se como uma das mais influentes Teorias dentro do ensino de Geometria.

Figura 12: Angel Gutiérrez.



Fonte: (ACADÊMICO, 2022)

Os trabalhos de Angel Gutiérrez nos serve como base teórica primeiro porque dentro dos estudos sobre Visualização, ele apresenta uma estrutura com a finalidade de organizar o campo da Visualização em Matemática. E essa organização traz muitos benefícios, uma vez que segundo ele, como distintas áreas do conhecimento admitem a importância da Visualização e são muitas as pesquisas relacionadas ao tema, surgem diversos termos que por vezes causam muita confusão, sendo de caráter urgente diminuir ou evitar alguns equívocos (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.3, tradução nossa).

Um exemplo de termos que são comumente protagonistas de certas ambiguidades são os termos Visualização e Pensamento Espacial, e que na verdade, quando analisado os contextos em que estão inseridos trata-se do mesmo significado. O outro ponto que nos chama a atenção em suas pesquisas é o fato dele atribuir a Visualização um papel central na cognição do indivíduo, para ele "é verdade que a Visualização é uma de suas principais bases"(GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.3, tradução nossa).

Isto posto, Gutierrez revela que muito embora *Pestalozzi*<sup>2</sup> tenha atribuído à Visualização o papel de *base absoluta* da cognição ainda no século XVIII, somente recentemente a Visualização foi alçada a uma posição de reconhecimento pelos educadores matemáticos. No entanto, em pesquisas dentro de outras áreas do saber são encontradas conclusões surpreendentes acerca da Visualização, segundo ele; "a Visualização é importante para muito mais atividades do que poderíamos suspeitar [...], embora cada especialidade esteja interessada apenas em certas habilidades e ambientes específicos, aqueles estreitamente relacionados aos seus problemas de pesquisa"(GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.4, tradução nossa).

---

<sup>2</sup>Johann Heinrich Pestalozzi foi um educador e pedagogo suíço que se destacou nos campos da educação no século XVIII.

Além disso, ele afirma que o campo da Visualização é tão amplo e diversificado que é contraproducente tentar abrangê-lo por completo. Por isso, ele identifica prioritariamente qual é o seu foco de estudo, sendo exatamente a utilização de programas de computador em sala de aula no ensino de Geometria, justamente porque esses programas:

[...] dão uma representação tridimensional de objetos espaciais e permitem que os usuários transformem esses objetos dinamicamente (transformações como rotações, translações, ampliações ou cortes por planos). Apesar do aspecto tridimensional dos objetos apresentados na tela, eles, assim como as figuras, são representações planas de objetos espaciais, de modo que algumas das conhecidas dificuldades que os alunos têm ao interpretar representações planas tradicionais de sólidos também aparecem em ambientes computacionais (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.5, tradução nossa).

Assim, em seu artigo intitulado *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework*, publicado a partir da Universidade de Valença em 1996, Gutiérrez define Visualização em Matemática como sendo um "tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizados para resolver problemas ou provar propriedades". Para ele, a Visualização é integrada por quatro elementos principais, a saber: Imagens Mentais, Representações Externas, Processos de Visualização e Habilidades de Visualização (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.9, tradução nossa).

O primeiro elemento, a Imagem Mental, segundo Gutiérrez *et al.* (1996, p.9, tradução nossa) "é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais" inclusive, o autor o considera como o elemento básico da Visualização. A respeito do significado de Imagem Mental, matemáticos e educadores matemáticos geralmente tendem a tê-la como uma representação mental de um conceito ou propriedade matemática contendo informações baseadas em elementos pictóricos, gráficos ou diagramáticos (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.6, tradução nossa).

O elemento básico central em todas as concepções de percepção visual são as Imagens Mentais, ou seja, as representações mentais que as pessoas podem fazer de objetos físicos, relacionamentos, conceitos, etc...[...](GUTIERREZ, 1991, p.44, tradução nossa)

Ainda a respeito do conceito de Imagem Mental Gutiérrez compartilha dentro de uma classificação desenvolvida por Presmeg (1986, *apud* Gutiérrez, 1996, p.7, tradução nossa) um tipo específico de Imagem Mental, que é a imagem dinâmica, esta em

particular muito nos interessa. Esses tipos de imagens são aquelas que possuem movimento na mente. Assim, permeando essa ideia de movimento na mente McGee (1979, *apud* Gutiérrez, 1996, p.8, tradução nossa) lista Habilidades de Visualização apontadas como necessárias para se processar essas Imagens Mentais, dividindo-as em duas classes: Habilidades de Visualização Espacial e Habilidades de Orientação Espacial.

Tabela 1: Habilidades de Visualização por McGee

<b>Habilidades de Visualização Espacial</b>
1 - Capacidade de imaginar a rotação de um objeto representado, o (des)dobramento de um sólido e as mudanças relativas de posição dos objetos no espaço.
2 - Capacidade de visualizar uma configuração em que haja movimento entre suas partes.
3 - Capacidade de compreender movimentos imaginários em três dimensões e manipular objetos na imaginação.
4 - Capacidade de manipular ou transformar a imagem de um padrão espacial em outro arranjo.
<b>Habilidades de Orientação Espacial</b>
5 - Capacidade de determinar relações entre diferentes objetos espaciais.
6 - Capacidade de reconhecer a identidade de um objeto quando visto de diferentes ângulos, ou quando o objeto é movido.
7 - Capacidade de considerar relações espaciais onde a orientação corporal do observador é essencial.
8 - Capacidade de perceber padrões espaciais e compará-los entre si.
9 - Capacidade de não se confundir com as orientações variadas em que um objeto espacial pode ser apresentado.
10 - Capacidade de perceber padrões espaciais ou manter a orientação em relação a objetos no espaço.

(MCGEE, 1979, *apud* Gutiérrez, 1996, p.8, tradução nossa).

O segundo elemento integrador da Visualização posto por Angel Gutiérrez é a Representação Externa, ela "é qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo fotos, desenhos, diagramas e etc, que ajudam a criar ou transformar Imagens Mentais e a fazer raciocínio visual"(GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa).

Com relação aos Processos de Visualização, trata-se de ações mentais ou físicas onde as Imagens Mentais estão envolvidas. Ele afirma que existem dois processos realizados na Visualização: Interpretação Visual de Informações para criar Imagens

Mentais e Interpretação de Imagens Mentais com a finalidade de gerar informações (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa).

Gutiérrez traz acerca do quarto elemento integrador da Visualização, a saber: as Habilidades de Visualização que "Os indivíduos devem adquirir e aprimorar um conjunto de Habilidades de Visualização para realizar os processos necessários com Imagens Mentais específicas para um determinado problema" Gutiérrez *et al.* (1996, p.10, tradução nossa). Em sua concepção são pertinentes as seguintes Habilidades:

Tabela 2: Habilidades de Visualização por Gutiérrez

<b>Habilidades de Visualização</b>
<p><b>1 - Percepção figura-fundo:</b> A capacidade de identificar uma figura específica, isolando-a de um fundo complexo.</p>
<p><b>2 - Constância perceptiva:</b> A capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma Imagem Mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer sem confusão quando um objeto ou imagem é percebido em diferentes orientações .</p>
<p><b>3 - Rotação mental:</b> A capacidade de produzir Imagens Mentais dinâmicas e de visualizar uma configuração em movimento.</p>
<p><b>4 - Percepção de posições espaciais:</b> A capacidade de relacionar um objeto, imagem ou Imagem Mental a si mesmo.</p>
<p><b>5 - Percepção de relações espaciais:</b> A capacidade de relacionar vários objetos e Imagens Mentais entre si, ou simultaneamente consigo mesmo.</p>
<p><b>6 - Discriminação visual:</b> A capacidade de comparar vários objetos, imagens e imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre elas.</p>

(GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa).

Ainda em *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework* Gutiérrez traz a concepção de Bishop com relação a duas Habilidades de Visualização:

Tabela 3: Habilidades de Visualização por Bishop

<b>Habilidades de Visualização</b>
<p><b>1 - O processamento visual da informação :</b> Tradução de relações abstratas e dados não figurativos em termos visuais, a manipulação e extrapolação de imagens visuais e a transformação de uma imagem visual em outra.</p>
<p><b>2 - A interpretação da informação figurativa:</b> Envolve o conhecimento das convenções visuais e vocabulário espacial usado em trabalhos geométricos, gráficos, tabelas e diagramas de todos os tipos ... e a leitura e interpretação de imagens visuais, seja mental ou física, para obter deles qualquer informação relevante que possa ajudar a resolver um problema.</p>

(BISHOP, 1983, *apud* Gutiérrez, 1996, p.7, tradução nossa) .

Kosslyn (1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p.8, tradução nossa) identifica quatro Habilidades aplicáveis à Visualização e Imagens Mentais:

Tabela 4: Habilidades de Visualização por Kosslyn

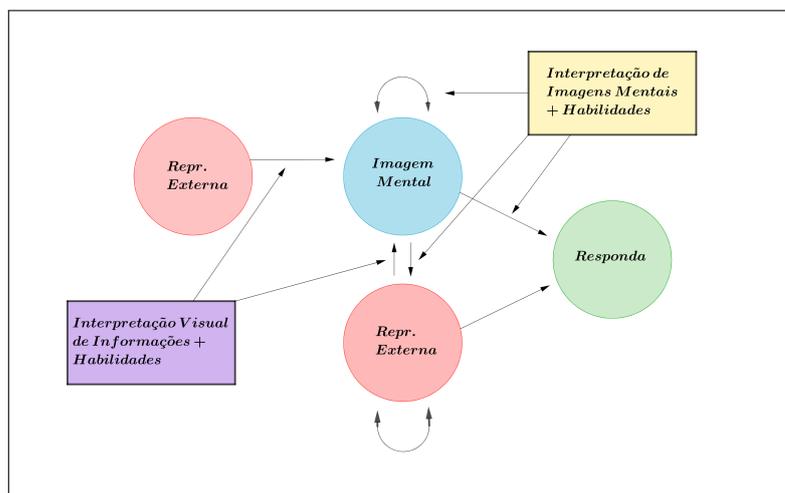
<b>Habilidades de Visualização</b>
1 - Gerar uma Imagem Mental a partir de alguma informação.
2 - Inspeccionar uma Imagem Mental para observar sua posição ou a presença de partes ou elementos.
3 - Transformar uma Imagem Mental girando, traduzindo, dimensionando ou decompondo-a.
4 - Usar uma Imagem Mental para responder uma pergunta.

(KOSSLYN, 1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p.8, tradução nossa).

Hoffer (1977, *apud* Gutiérrez, 1996, p.9, tradução nossa) identifica também a **Habilidade de Memória Visual** que serve para lembrar de Imagens Mentais e objetos que não são mais vistos. E isso é essencial pois, segundo Yakimanskaya (1991, *apud* Gutiérrez, 1996, p.11, tradução nossa ) "quanto mais rico e diversificado o estoque de representações espaciais, mais aperfeiçoados são os métodos de criação de representações e mais fácil é o uso de Imagens", e se ter um estoque de Imagens Mentais diversificado é importante, conseguir acessá-lo é tão importante quanto, analisando do ponto de vista de que Imagens Mentais mais complexas são constituídas de Imagens Mentais mais elementares.

O diagrama representado na figura 13 descreve os passos a serem seguidos ao usar a Visualização para resolver uma tarefa:

Figura 13: Principais elementos da Visualização integrando a solução de uma tarefa matemática.



Fonte: (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.11, construção via Geogebra Classic.)

No diagrama acima, Gutiérrez descreve que dado um enunciado de alguma tarefa, ele é interpretado pelos alunos como uma Representação Externa adequada para gerar uma Imagem Mental. Essa primeira imagem inicia um processo de raciocínio visual onde, dependendo da tarefa e das habilidades dos alunos, eles usam algumas de suas habilidades visuais para realizar diferentes processos, e outras Imagens Mentais e/ou Representações Externas podem ser geradas antes que os alunos cheguem a resposta final (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.11, tradução nossa).

Em suma, com relação ao entendimento acerca dos elementos integradores da Visualização, podemos considerar o seguinte: quando acessamos a representação de um objeto matemático - seja ele geométrico ou não - para estudá-lo, se essa representação está sendo acessada dentro de nossa mente, então essa representação é uma Imagem Mental do objeto matemático, mas, se acessamos essa representação em alguma plataforma ou meio físico, então essa representação é uma Representação Externa do objeto matemático. Esse acesso em meios físicos poderá se dar através da visualização ocular, da audição pois as Representações Externas podem ser postas verbalmente ou através da Percepção Cinestésica<sup>3</sup>.

Com relação aos Processos de Visualização e Habilidades de Visualização, pode-

<sup>3</sup>Conjunto de reações determinadas pelas sensações e percepções do movimento humano.

mos considerar que os Processos são responsáveis por movimentar as Imagens Mentais e as Habilidades configuram-se como um tipo de "alimento" que nutre os Processos, a propósito de fortifica-los e torna-los mais dinâmicos e eficientes com respeito a movimentação das Imagens Mentais.

Tratando-se especificamente do uso de Softwares de Geometria Dinâmica no ensino e aprendizagem de Geometria e para além disso, no desenvolvimento da Visualização, Gutiérrez descreve as vantagens que podem ser observadas usando-se esse tipo de ferramenta, principalmente porque "a única maneira que os livros didáticos têm de apresentar Geometria tridimensional aos alunos é por meio de representações planas, geralmente projeções em perspectiva, paralelas ou ortogonais ". Ou, quando muito, alguns professores usam modelos concretos para tentar apresentar a Geometria tridimensional (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.11, tradução nossa).

Portanto, o uso de Softwares configura-se como uma novidade nos últimos anos, e dentre as vantagens descritas por Gutiérrez *et al.* (1996, p.11, tradução nossa) está o fato de que "agora eles podem ter acesso a uma terceira forma de representação". E mais ainda, sobre os Softwares de Geometria Dinâmica " dão uma representação tridimensional de objetos espaciais e permitem que os usuários transformem esses objetos dinamicamente (transformações como rotações, translações, ampliações ou cortes por planos) "(GUTIERREZ, 1991, p.5).

Inclusive um sólido pode ser representado de várias maneiras possíveis somente na tela do computador, podendo até ser transformado. Nesse sentido Gutiérrez *et al.* (1996, p.11, tradução nossa) trazem que:

Os alunos verão poliedros e outros sólidos em muito mais posições diferentes na tela do que nos livros didáticos. Como consequência, eles ganharão uma rica experiência que lhes permitirá formar imagens mentais mais ricas do que nos livros didáticos. Em particular, os alunos melhorarão muito sua capacidade de criar imagens mentais dinâmicas.

Essa variabilidade de maneiras - plataformas - de representar o objeto geométrico caracteriza-se como central no desenvolvimento da Visualização pois Yakimanskaya (1991, *apud* Gutiérrez, 1996, p.11, tradução nossa ) afirma:

[...]a criação de imagens é possível pelo acúmulo de representações que servem como ponto de partida e como condições necessárias para a realização do pensamento. Quanto mais rico e diversificado o

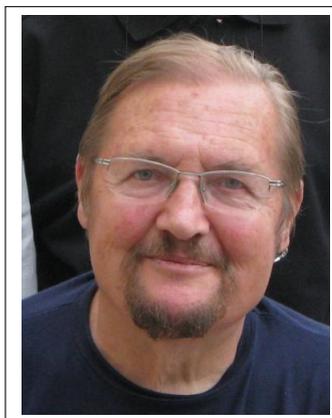
estoque de representações espaciais, mais aperfeiçoados são os métodos de criação de representações e mais fácil é o uso de imagens. Os computadores podem desempenhar um papel muito relevante para ajudar os alunos a adquirir e desenvolver habilidades de visualização no contexto da Geometria Espacial.

Concluimos essa seção admitindo que pensamos ser pertinente em nossa pesquisa utilizar dessa estrutura desenvolvida por Gutiérrez que define a Visualização e estabelece os tipos de Habilidades e Processos de Visualização responsáveis por movimentar as Imagens Mentais. Diante das reflexões teóricas apresentadas, inferimos que as Habilidades são passíveis de aprimoramento, inclusive com Softwares de Geometria Dinâmica, no nosso caso o Geogebra 3D.

## 3.2 Bernard Parzysz

Bernard Parzysz é atualmente professor da *Universidade de Paris Diderot*, sendo pesquisador especialista nos campos da Didática Matemática.

Figura 14: Bernard Parzysz



Fonte: (LEA.FR, 2022)

Parzysz em seu artigo intitulado *"Saber" vs "Ver". Problemas da Representação do Plano de Figuras da Geometria Espacial*, traz que, na França e provavelmente em outros países os problemas que envolvem o ensino e aprendizagem de Geometria estão relacionados desde a falta de prioridade que se dá a tal disciplina até a concepção por parte de alunos e professores de que a Geometria é difícil. Mas não somente isso, Bernard aponta que uma das dificuldades específicas é a representação material (desenhos), isto é, representar os objetos geométricos, que ele chama de figura (PARZYSZ, 1988, p.79, tradução nossa).

Em se tratando especificamente da representação do objeto geométrico ele tem por suposição que existe uma relação entre "aquisição (ou reforço) de conhecimento em Geometria Espacial e o domínio de representações 3D" Parzysz (1988, p.80, tradução nossa). O autor supõe ainda que, no ensino médio, após as Imagens Mentais estarem configuradas diante dos alunos, é necessário que estes tenham acesso a representações de objetos em 3D. No entanto coloca que esse acesso seja norteado por regras para desenhar figuras do espaço e inclusive contendo propriedades geométricas projetivas. Esse norteamento propiciará a dialética entre o conhecimento em Geometria Espacial e o domínio de representações 3D.

Para Parzysz há dois elementos essenciais quando se trata de desenhar figuras geométricas, são eles: a codificação, que é o processo de desenho ou produção da figura e a decodificação que é ler ou interpretar o desenho. A respeito da natureza desse objeto, ele afirma que uma figura ou um desenho é uma fantasia, uma criação, uma ideia (PARZYSZ, 1988, p.80, tradução nossa).

Com relação às representações de figuras planas no plano bidimensional ele as trata como desenhos e com relação a representações de figuras 3D no plano ele as trata como modelo. O esquema a seguir representado na figura 15 traz considerações acerca de figuras e suas representações em 2D e 3D com relação a dois níveis de representação:

Figura 15: Níveis de Representação

		<i>Geometria</i>	
		<i>2D</i>	<i>3D</i>
	<i>Nível 0</i>	<i>Figura</i>	
<i>Representação próxima</i>	<i>Nível 1</i>	<i>Desenho</i>	<i>Modelo</i>
<i>Representação distante</i>	<i>Nível 2</i>	X	<i>Desenho</i>

↓  
*Perda de informações*

Fonte: (PARZYSZ, 1988, p.80, tradução nossa e construção via Geogebra Classic.)

No nível 1 - (representação próxima): a representação se assemelha à figura geométrica, isto é, mesma dimensão, exceto pela passagem do abstrato ao concreto. No nível 2 - (representação distante): a dimensão da representação é estritamente inferior ao da figura. Ou seja, para o autor há perdas de informação ao passar para um nível superior (PARZYSZ, 1988, p.80, tradução nossa).

Essas perdas, segundo o autor, nas passagens do nível 0 para o nível 1 estão associadas ao fato de que nem tudo pode ser mostrado em uma representação. Dentro disso, o fato é que algumas propriedades da representação só aparecem graças à boa vontade do leitor (restituição do sentido). "Tal restituição não poderia ocorrer sem uma convivência entre o autor da representação (o transmissor) e seu leitor (o receptor), sendo possível apenas por causa de uma cultura geométrica"(PARZYSZ, 1988, p.81, tradução nossa).

A cultura geométrica que Parzysz admite ser a responsável por permitir que o receptor consiga decodificar a figura ou representação do objeto mesmo que as perdas de informação tenham sido significativas está associada ao fato de que:

[...] em primeiro lugar, à natureza dos objetos representados, que pertencem a um número restrito de tipos, constituindo, por assim dizer, um estoque de referência de arquétipos (ponto, linha reta, triângulo, círculo, plano, pirâmide, cilindro. . .); qualquer representação pode então ser vinculada a uma "montagem" de tais arquétipos. Isso é particularmente evidente com imagens criadas por computador: por exemplo, uma linha reta ou um círculo são mais excepcionalmente representados por um desenho que pode realmente representar visualmente o que deveria representar, não tanto por causa da espessura da linha e a partir das "falhas de empuxo"<sup>4</sup>, que ela mostra. E, no entanto, na grande maioria dos casos, é corretamente identificado [...]. (PARZYSZ, 1988, p.81, tradução nossa).

Por outro lado, dentro dessa questão da cultura geométrica, ele afirma que existem elementos que não podem ser representados sem que se crie ambiguidades dentro da Geometria, por exemplo, representar reta e plano sendo eles objetos ilimitados pode trazer contradições para o receptor, uma vez que, usa-se de porções limitadas para tais representações. No caso do plano usa-se paralelogramos e no caso das retas segmentos. Assim, no sentido de contribuir com o entendimento por parte do receptor, a tradição, ou seja a cultura geométrica cumpre papel fundamental (PARZYSZ, 1988, p.81, tradução nossa).

<sup>4</sup>Trata-se de falhas - distorções - rupturas - na imagem, que podem ser ocasionadas por diversos motivos, inclusive baixa resolução da tela.

Já as perdas ocasionadas na passagem do nível 0 para o nível 2 tratam-se de desenhos tentando representar figuras espaciais. Nesse caso as perdas são tantas que muitas vezes uma figura tridimensional torna-se irreconhecível e quando não, suas propriedades elementares estão comprometidas. Portanto, tanto para desenhos como modelos, tratando-se de representações distantes, Parzysz (1988, p.82, tradução nossa) sugere "pelo menos uma legenda acompanhando a representação, e compensando a perda de informação inerente a qualquer representação".

Com vistas a convergir em direção a Geometria Espacial, Parzysz chama a atenção para as questões da codificação e da decodificação, colocando que existe o perigo do leitor não identificar e confundir uma figura 3D desenhada com uma 2D tendo a mesma representação. Esse problema não é imaginário, é real, segundo ele foi na pesquisa que embasa esse artigo que estamos discutindo que ele observou em alunos do sexto ano da Escola Básica na França a seguinte situação:

[...] em um exercício pedindo, de um desenho em perspectiva paralela representando um sólido acompanhado de uma legenda que o identifica, para contar a natureza de um determinado lado. Este lado, um quadrado, era representado por um paralelogramo. E, embora todos os alunos soubessem que era de fato um quadrado, e embora o professor várias vezes insistisse em lembrar que se tratava de um quadrado no espaço, e não de seu desenho, no entanto, vários alunos deram a resposta "paralelogramo". (PARZYSZ, 1988, p.81, tradução nossa).

Os problemas relacionados a codificação de uma figura geométrica 3D em um único desenho, segundo o autor têm sua gênese na impossibilidade de construir uma representação mais próxima, restando apenas o acesso a uma representação distante, em que há uma perda imensa de informação. Dessa maneira, um confronto torna-se inevitável e um dilema insolúvel, devido ao fato de que o que se sabe de um objeto 3D entra em conflito com o que se vê desse objeto (PARZYSZ, 1988, p.90, tradução nossa).

Isto posto, ele conclui que é de fundamental importância gerenciar, tomar parte desse conflito "*Ver vs Saber*", além disso, o autor aponta que esse conflito é responsável direto pela "tradição" aludida acima. Assim, Parzysz (1988, p.90, tradução nossa) sugere "[...]trabalhar pelo menos no ensino médio, nos próprios princípios da representação do plano de figuras espaciais, para conseguir dominá-las, e não ser escravo de desenhos estereotipados, que finalmente perderam grande parte de seu poder".

Pelo exposto, consideramos que esta admoestação feita por Bernard Parzysz está em completa conformidade com os interesses, objetivos e hipóteses estabelecidos para esta pesquisa, de que - através dos elementos da Geometria Descritiva - a prática em projetar a partir do Geogebra 3D objetos geométricos 2D ou 3D em planos contribui para o desenvolvimento da Visualização e do Pensamento Geométrico, conseqüentemente com o Pensamento Matemático.

Uma vez que, se Bernard Parzysz acredita que a prática - sendo essa prática tomada a partir de regras geométricas projetivas - de alunos em projetar objetos 3D em planos pode fazer com que a aprendizagem de Geometria seja potencializada, e a nossa investigação se propõe a exatamente incentivar práticas projetivas, pensamos que a Teoria de Parzysz é também uma das bases teóricas desse nosso trabalho.

### **3.3 Visualização, Pensamento Geométrico, Pensamento Matemático e Educação Matemática**

Nesta seção, desenvolvemos uma série de reflexões baseadas numa revisão bibliográfica, com o intuito de associar o aprimoramento de Habilidades de Visualização ao desenvolvimento do Pensamento Matemático. Desta maneira, considerou-se a Teoria de Angel Gutiérrez a respeito da Visualização, uma vez que ele a coloca como uma das principais bases da cognição humana e a define como um tipo de atividade de raciocínio, sendo por esse motivo que se buscou investigar qual a relação entre a Visualização e o Pensamento Matemático.

Estas reflexões se justificam justamente pelo fato de estarmos propondo como professor de Matemática, intervenções no ensino e aprendizagem de Geometria a propósito de aprimorar a Visualização do aluno, e isso poderar impactar positivamente também no Pensamento Matemático do indivíduo, se caso existir uma relação entre o desenvolvimento da Visualização e o aprimoramento do Pensamento Matemático.

Isto posto, Stacey (2006, p.1) afirma que "ser capaz de usar o Pensamento Matemático na resolução de problemas é um dos objetivos mais fundamentais do ensino de matemática [...]", assim como, segundo ele, um dos objetivos finais do ensino é que os alunos sejam capazes de conduzir investigações matemáticas em variados contextos por si mesmos e que sejam capazes de identificar onde a matemática que aprenderam é aplicável em situações do mundo real.

Sobre a relação entre Visualização e Pensamento Matemático percebemos ser necessário buscar entendimento sobre o que se trata o Pensamento Geométrico, uma vez que, Costa (2020, p.152) apresenta o Pensamento Geométrico como uma "instância do Pensamento Matemático". Esse mesmo autor, em busca de caracterizar o Pensamento Geométrico traz três concepções, cada uma delas embasadas em uma Teoria diferente.

A luz de *Efraim Fischbein*<sup>5</sup> ele coloca que:

[...]o Pensamento Geométrico pode ser definido como a capacidade mental que permite considerar a Geometria como um conjunto de entidades mentais (as chamadas figuras geométricas) que possuem simultaneamente características conceituais e figurativas. Essas características interagem entre si (COSTA, 2020, p.157).

Embasado por *Raymond Duval*<sup>6</sup> ele afirma acerca do Pensamento Geométrico:

[...]é a capacidade de reconhecer um objeto geométrico no plano ou no espaço, de construir uma figura geométrica ou descrever essa construção, de analisar essa figura em termos de suas propriedades e de operar sobre as figuras geométricas por meio de manipulação, decomposição, transformação etc (COSTA, 2020, p.166).

Com relação a suas concepções baseadas em *Luiz Carlos Pais*<sup>7</sup> ele traz que:

[...]o Pensamento Geométrico pode ser definido como a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos a partir de intuição, experimentação e teoria, correlacionados com objeto, desenho, imagem mental e conceito (COSTA, 2020, p.174).

Mediante as três concepções percebemos que em comum há o fato de que nelas o Pensamento Geométrico é caracterizado como uma capacidade mental que esta associada a construção e compreensão dos objetos geométricos. Por outro lado, Gutiérrez *et al.* (1996, p.9, tradução nossa) afirmam que Visualização é um "tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizados para resolver problemas ou provar propriedades". Esses elementos visuais

<sup>5</sup>Efraim Fischbein nasceu em 20 de janeiro de 1920 em Bucareste na Romênia, dentre seus campos de pesquisa está o estudo sobre a natureza dos Objetos Geométricos e do Pensamento Geométrico.

<sup>6</sup>Raymond Duval é filósofo, psicólogo de formação e professor emérito da *Université du Littoral Côte d'Opale* em *Dunkerque* na França. Duval investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático.

<sup>7</sup>Luiz Carlos Pais é Mestre em Matemática Pura pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, defendeu uma tese de doutorado em Educação Matemática na *Université de Montpellier* na França. Atualmente é professor do Departamento de Educação da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Coordena a linha de pesquisa Educação em Ciências, Matemática e Novas Tecnologias.

ou espaciais que podem ser mentais ou físicos são considerados por Gutiérrez como os representantes dos objetos geométricos, que na verdade são a representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.9, tradução nossa).

Assim sendo, o próprio Gutiérrez traz como um dos elementos integradores da Visualização, as Habilidades de Visualização, que para ele podem ser aprimoradas, no sentido de que essas Habilidades são necessárias para se processar e compreender as Imagens Mentais Gutiérrez *et al.* (1996, p.9, tradução nossa). Logo, conjecturamos que, se a Visualização pode ser desenvolvida através do aprimoramento das Habilidades que a integram e se o aprimoramento dessas habilidades está associado ao fato de compreender e processar melhor as Imagens Mentais - que podem ser objetos geométricos - o desenvolvimento da Visualização amplia o Pensamento Geométrico.

Trilhando esse mesmo caminho, só que agora buscando estabelecer uma "ponte" entre o Pensamento Geométrico e o Pensamento Matemático analisamos os estudos de David Orme Tall<sup>8</sup>, que propõe duas naturezas para o Pensamento Matemático, uma elementar e outra avançada. Segundo Tall (1995, p.1), o Pensamento Matemático elementar "começa a partir de percepções e ações sobre objetos no ambiente". Complementando essa ideia sobre o Pensamento Matemático elementar:

[...]essa forma de pensar ocorre antes da criança iniciar o processo de escolarização. No âmbito geométrico, tarefas como observar o espaço, analisar os objetos físicos e estabelecer as primeiras relações espaciais são atributos do pensar em Geometria que emergem em espaços informais, nos primeiros anos de vida de uma criança (COSTA, 2020, p.176).

Ja o Pensamento Matemático avançado, a luz de Dreyfus (1991, *apud* Menezes;Neto, 2017, p.28 ) e Tall (1991, *apud* Menezes; Neto, 2017, p.28 ) está associado à aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que podem aparecer nos mais variados níveis escolares, manifestando-se inclusive com maior intensidade nos anos finais do ensino secundário e ao longo do ensino superior. Nessa mesma linha, o Pensamento Matemático avançado com relação a sua caracterização pode ser entendido "como uma série de processos de representação, visualização, generalização e outros, com o intuito de classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar"(DREYFUS, 1991, *apud* Menezes;Neto, 2017, p.28 ).

<sup>8</sup>Tall é nascido em 15 de maio de 1941, atualmente é professor emérito de Pensamento Matemático na Universidade de Warwick.

Dentro dessa caracterização, em específico relacionado aos processos de visualizar e representar, lembramos de dois elementos integradores da Visualização apresentados por Gutiérrez *et al.* (1996, p.9, tradução nossa) que são as Representações Externas e os Processos de Visualização, eles são respectivamente qualquer tipo de representação que contribua com transformações de Imagens Mentais e a fazer raciocínio visual, e ações mentais onde as Imagens Mentais estão envolvidas. Assim sendo, encontramos elementos integradores da Visualização compondo o Pensamento Matemático avançado.

Isto posto, considerando Costa (2020, p.152) quando diz que o Pensamento Geométrico trata-se de uma "instância do Pensamento Matemático" e como aponta Gutiérrez, que adquirir e aprimorar Habilidades de Visualização influencia diretamente na realização de processos de Imagens Mentais, e como também a representação de objetos geométricos pertence ao conjunto dessas Imagens Mentais assim como das "muitas definições matemáticas" colocadas por Dreyfus (1991, *apud* Menezes; Neto, 2017, p.28) e Tall (1991, *apud* Menezes; Neto, 2017, p.28) como objetos de aprendizagem via Pensamento Matemático, entendemos que o desenvolvimento da Visualização esta ligado ao aprimoramento das Habilidades de Visualização que por sua vez está diretamente associado ao Pensamento Matemático avançado.

Por sua vez, a Educação Matemática segundo D'Ambrosio (1993, p.7) "é multifacetada e assume diversas posições e compromissos, ela é um ramo da Educação, uma especialização da Matemática, é o estudo de técnicas ou modos mais eficientes de se ensinar Matemática, é também o estudo do ensino e aprendizagem da Matemática ou estudo da metodologia de seu ensino em sentido amplo". Ainda segundo D'Ambrosio (1993, p.7) "a Educação Matemática é a única disciplina que chegou, aos sistemas educacionais, a atingir um caráter de universalidade".

Neste sentido, corroborando com o propósito de dar efetividade ao ensino e aprendizagem da Matemática o Pensamento Matemático assume função de ferramenta essencial na resolução de problemas, ou seja, ele caracteriza-se como instrumento que contribui para alcançar um dos principais objetivos do ensino da Matemática. Isto é, temos o Pensamento Matemático como elemento central no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo que, o ensino e aprendizagem dessa disciplina é um dos objetos de estudo ou ainda um dos elementos que compõe a Educação Matemática.

## 4 SOFTWARE GEOGEBRA 3D

Diante do avanço das tecnologias digitais, surge uma oportunidade que não deve ser desperdiçada com relação a educação, especificamente com respeito ao ensino de Geometria, conforme salienta Gravina (2012, p.12)"[...]nossas rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influem nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir [...]". Isto posto, conforme trouxemos na introdução, estamos buscando uma maneira de auxiliar na qualidade de professor de Matemática, no desenvolvimento da capacidade de Visualização de nossos alunos, daí pensamos que, introduzir esse desenvolvimento tecnológico nessa tarefa pode nos ajudar.

Essa nossa busca fundamenta-se na crença de que a atividade de projetar objetos bidimensionais e tridimensionais em planos contribui com o desenvolvimento da Visualização. Dito isto, procuramos investigar como poderíamos utilizar das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs)<sup>1</sup>, em específico do Software de Geometria Dinâmica Geogebra 3D e quais as vantagens disto, no desenvolvimento de atividades que despertassem no aluno interesse pelos estudos da Geometria Espacial e em específico o ajudasse a desenvolver sua Visualização através da prática em projetar.

Dentro disso, entre diversos Softwares de Geometria Dinâmica escolhemos o Geogebra 3D para essa investigação por ser um Software de uso gratuito e assim facilitar o uso por alunos da rede pública de ensino. Além disso, Sampaio (2016) coloca que o Geogebra 3D"permite focar o ensino da Geometria interrelacionando aspectos da Álgebra com elementos Geométricos"e mais ainda, segundo ele o dinamismo do Geogebra 3D permite explorar situações didáticas nas quais seja possível a construção de objetos espaciais que, por meio de exploração, favoreçam a Visualização.

Sendo assim, nesta seção apresentaremos de maneira sucinta o Software Geoge-

---

<sup>1</sup>São tecnologias que têm o computador e a Internet como instrumentos principais.

bra 3D - sua interface e ferramentas - e a opinião de estudiosos do tema acerca dos pontos positivos e negativos na utilização do aplicativo no ensino de matemática e em específico no ensino de Geometria. Apresentaremos também alguns resultados de pesquisas que investigaram as potencialidades no uso do Geogebra 3D com relação ao desenvolvimento da Visualização.

Em uma pesquisa realizada no âmbito da pós-graduação no PPGEMAT/UFRGS<sup>2</sup>, que buscou responder a seguinte pergunta: *Quais as contribuições do GeoGebra no processo de desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, quando se faz uso de atividades envolvendo rotação?* Os autores afirmam que:

[...]encontramos contribuições do GeoGebra para o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial[...]. [...] ao longo das atividades, percebemos que os alunos gradualmente foram se apropriando das habilidades de visualização descritas por Gutiérrez, em particular das habilidades de rotação mental e percepção de relações espaciais, bem como o exercício das habilidades de constância perceptual e percepção do fundo da figura, conforme iniciaram os trabalhos com rotações de objetos geométricos e superfícies de revolução. (OLIVEIRA, 2021, p.9).

Nesta mesma pesquisa Oliveira (2021, p.9) aponta contribuições observadas com relação ao uso do Geogebra 3d que estão vinculadas a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, a saber : com relação as transformações percebe-se indícios de realização de tratamentos e conversões, os tratamentos foram observados na passagem das representações do tridimensional para o bidimensional e vice-versa, as conversões ocorreram entre os registros gráficos e algébricos. Esta constante mobilização de registros está de acordo com o que enfatiza a teoria, para que ocorra a aprendizagem de matemática.

Assim, no sentido de despertar a atenção do aluno com relação aos conteúdos trabalhados nos componentes relacionados a Geometria, Sampaio (2016) aponta que"[...]a incorporação na sala de aula de atividades com uso de tecnologias poderá favorecer o desenvolvimento de novas competências que impulsionam a curiosidade, a exploração, a iniciativa e o aumento da autoestima". Nessa toada ele também considera ser"significativo investigar as possibilidades de desenvolvimento da habilidade de Visualização que, além de manipular imagens na tela, favorece o desenvolvimento da competência leitora e de comunicação".

---

<sup>2</sup>Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Trazemos também as contribuições de Lima, Lins e Pereira (2018) que a partir do Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL que tinham dentre seus objetivos investigar tipos de provas e demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º ano do Ensino Médio a partir de uma proposta didática em ambientes lápis e papel e GeoGebra. Eles colocam que em sua pesquisa optaram por trabalhar com um aplicativo de Geometria Dinâmica pois:

[...] uma vez que esse tipo de aplicativo torna as aulas mais dinâmicas e interativas; possibilita que o aluno interligue a Geometria com a Álgebra, já que para uma figura geométrica há sua representação algébrica e vice-versa. Podemos aplicar movimento a seus elementos e as relações geométricas impostas à figura são preservadas, como enriquecem também as imagens mentais associadas às propriedades geométricas[...].(LIMA; LINS; PEREIRA, 2018).

O Software Geogebra foi desenvolvido em 2001 pelo austríaco *Markus Hohenwarter*<sup>3</sup>, produto de seu doutorado na *University of Salzburg* e que continua a desenvolvê-lo na *Florida Atlantic University* com uma equipe internacional de programadores para a Educação Matemática nas escolas. O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação.

Figura 16: Markus Hohenwarter



Fonte: (VIENA, 2022)

O GeoGebra é usado atualmente em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de trezentos mil downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para

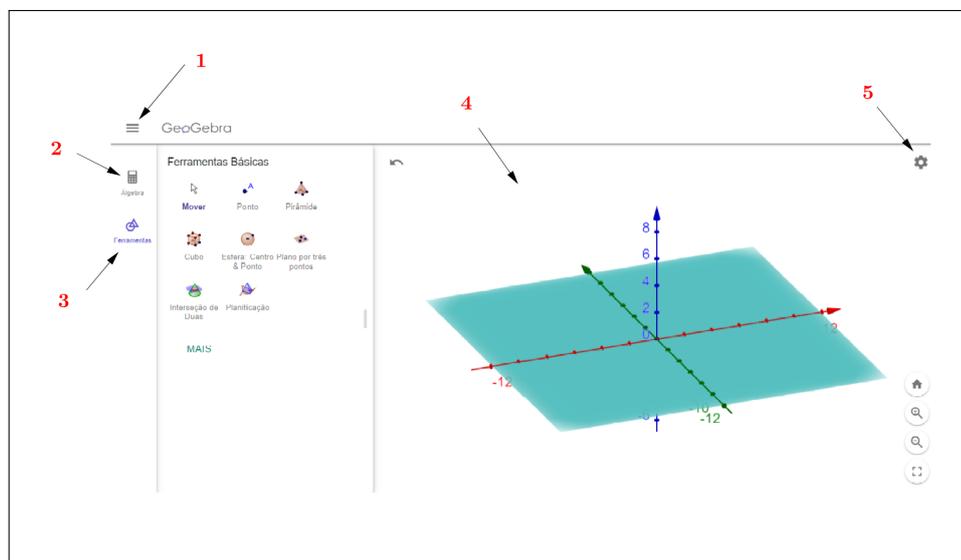
---

<sup>3</sup>É um professor de matemática nascido em 24-05-1976 em Salzburgo na Austria, atualmente leciona na Universidade Johannes Kepler (JKU) Linz, dentre outras ocupações.

dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e já foi instalado em milhões de laptops e computadores em vários países ao redor do mundo, inclusive o Software está disponível gratuitamente em <http://www.geogebra.org> (GEOGEBRA, 2022).

A interface padrão do GeoGebra 3D instalado em um computador, ao ser carregado, apresenta a seguinte configuração, segundo Geogebra (2022, p.1) : **1** - Barra de Menus, disponibiliza opções para salvar o projeto e para controlar configurações gerais, **2** - Janela de entrada de comandos algébricos, **3** - Janela de acesso à barra de ferramentas geométricas. A barra de ferramentas geométricas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito, **4** - Janela de visualização de tudo que pode ser construído via comandos algébricos ou que podem ser desenhados com o mouse, após clicar nos ícones da barra de ferramentas, **5** - Configurações da janela de visualização.

Figura 17: Interface do Geogebra 3D.



Fonte: Autoria própria, print do próprio Geogebra 3D.

## **5 METODOLOGIA**

Neste tópico, além de caracterizar a pesquisa, apresentaremos o percurso seguido e os procedimentos metodológicos que adotamos para cumprir o objetivo deste trabalho.

### **5.1 Caracterização da pesquisa**

Esta pesquisa, com relação aos objetivos, caracteriza-se como pré-experimental, uma vez que investimos sobre a hipótese a propósito de aprimorar nossa ideia e prová-la através de uma atividade de própria autoria. E pré-experimental também no sentido de selecionar um objeto de estudo e agir como pesquisador através de formas de controle sobre as variáveis que podem influenciá-lo, testando hipóteses e observando quais modificações ocorrerão no objeto de estudo, "sendo o pesquisador um agente ativo em tal atividade "(GIL, 2002, p.49).

Além disso, Fontenelles (2009, p.6) coloca a respeito de pesquisas pré-experimentais que, "pelo fato das variáveis, ou da variável, poderem ser manipuladas pelo pesquisador, equívocos e vieses praticamente desaparecem, sendo, por esta razão, considerada como o melhor tipo de pesquisa científica, pois proporciona maior confiabilidade em seus resultados".

Com relação ao delineamento técnico que foi desenvolvido, optamos por realizar uma pesquisa bibliográfica, tendo como base livros, artigos científicos, teses e dissertações. Gil (2002, p.44), traz que, além de que a pesquisa bibliográfica seja considerada o primeiro passo de toda pesquisa científica, "há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas".

A respeito do método utilizado, como o fenômeno em estudo, no caso a Visualização, é algo de natureza cognitiva e não tende em geral a quantificação, e além disso, como estivemos envolvidos em todo o trabalho tendo uma intuição gerada por obser-

vações e experiências, e a partir de uma base teórica culminamos em uma hipótese, trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, sendo que, optamos por um trabalho de ação e participação.

Salientando que "a pesquisa de cunho qualitativo prevê um corte temporal-espacial por parte do pesquisador permitindo uma maior aproximação junto ao objeto de estudo, esse cenário nos permite ter o ambiente natural como fonte de coleta de dados e o pesquisador como agente ativo", assim afirma Godoy (1995, p.58). Essa aproximação é essencial pois precisa haver interação entre o pesquisador e o objeto de estudo. Dentro disso, a pesquisa qualitativa confere muita importância sobre a interpretação dos eventos em observação.

## **5.2 Procedimentos metodológicos**

Esta pesquisa visa investigar as contribuições da prática em construir e projetar objetos geométricos bidimensionais e tridimensionais em planos, por meio do Geogebra 3D, com o desenvolvimento das Habilidades de Visualização.

Para alcançar este objetivo foi necessário eleger um referencial teórico que fundamentasse a noção de Visualização e conhecer os elementos que estão envolvidos nessa atividade. Para isso, iniciamos com uma pesquisa bibliográfica para conhecer os trabalhos que tratavam desse tema e assim, além de justificar a importância desta pesquisa, conhecer os principais autores que definem e discutem a atividade de Visualização. Após leituras, encontramos em (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996) elementos que permitirão apoiar nossas análises e esclarecer a concepção de Visualização adotada nesta pesquisa.

Além do estudo da teoria, na fase da pesquisa bibliográfica, buscamos entender melhor os elementos da Geometria Descritiva e as possibilidades do Software Geogebra 3D. Assim, todos esses estudos foram imprescindíveis para a elaboração de situações-problema, envolvendo construção e projeção de figuras planas e espaciais em planos, as quais serão aplicadas seguindo a seguinte estrutura:

- **1ª Etapa**

Os alunos que participarão da investigação serão solicitados a resolverem três problemas com recurso papel e lápis, sendo disponibilizados instrumentos de construção geométrica para a realização das situações-problema envolvendo construções e projeções de figuras planas e espaciais em planos. Os problemas serão apresentados logo a seguir na seção 2.3.

- **2ª Etapa**

Apresentaremos uma oficina em que os alunos serão envolvidos em tarefas que interrelacionam conhecimentos da Geometrias Plana, Espacial e Descritiva, especificamente trata-se de construir e projetar figuras planas e espaciais em planos, em um ambiente de Geometria Dinâmica a saber; o Software Geogebra 3D, sob a mediação do investigador. Embora os problemas que serão trabalhados nesta etapa envolvam os mesmos elementos integradores da GD, não serão apreciadas as mesmas situações-problema apresentadas na 1ª etapa.

- **3ª Etapa**

Será solicitado aos mesmos alunos a resolverem os mesmos problemas da primeira etapa, com recurso papel e lápis, sendo disponibilizados instrumentos de construção geométrica para a realização das situações-problema envolvendo projeção de figuras planas e espaciais em planos. Nesta etapa, observaremos se haverá influência da oficina realizada na etapa anterior, ou seja, se houve ou não indícios de ganhos no que diz respeito ao desenvolvimento das Habilidades de Visualização.

Participarão da pesquisa 10 (dez) alunos de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia, que já cursaram o componente Geometria Descritiva e já cursaram ou estão cursando o componente Geometria Espacial no período da pesquisa.

As etapas dessa Atividade de Investigação serão realizadas no laboratório 1 de informática do DCET no Campus II da Universidade do Estado da Bahia. Os participantes realizarão as tarefas em duplas e trios, e o tempo disponibilizado para a realização da 1ª etapa será de 40 minutos, para 2ª etapa será de 60 minutos e para última etapa mais 40 minutos.

Para possibilitar as análises, faremos registros em áudio e recolheremos os escritos dos alunos. Os registros serão analisados seguindo a técnica de emparelhamento ou associação que, conforme Lorenzato (2006, p.138,139) "Essa estratégia consiste em analisar as informações a partir de um modelo teórico prévio. Isso pode ser feito por intermédio de um emparelhamento ou associação entre o quadro teórico e o material empírico, verificando se há correspondência entre eles".

Essa técnica será aplicada relacionando as estratégias utilizadas na resolução dos problemas por parte dos alunos às Habilidades de Visualização definidas por Kosslyn, Hoffer, McGee, Bishop e Gutiérrez, descritas por (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996), apresentadas na fundamentação teórica, especificamente nas tabelas 1, 2, 3 e 4 postas na seção 3.1.

Para isto, seguiremos o seguinte procedimento:

- Verificaremos a estratégia utilizada por cada dupla para resolução de cada problema e identificaremos a Habilidade de Visualização correspondente;
- Discutiremos os resultados obtidos baseado no quadro teórico e revisão de literatura, especialmente em se tratando das Habilidades de Visualização conforme (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996).

No próximo tópico, apresentaremos os problemas elaborados para a investigação e detalharemos sua aplicação.

### **5.3 Atividade de Investigação**

Guiados pela revisão de literatura e fundamentação teórica e conjecturando que atividades envolvendo elementos da Geometria Descritiva no Geogebra 3D, pode contribuir para melhorar a Visualização de licenciandos de matemática, elaboramos situações-problema envolvendo objetos em 2D e 3D juntamente com elementos da Geometria Descritiva.

Nas situações propostas, trouxemos elementos da GD, em que os estudantes foram solicitados a construir mentalmente situações em que propomos, por exemplo: posições relativas dos objetos aos planos de projeção, posições relativas dos objetos entre si, relação desses objetos com suas respectivas projeções, relação dessas projeções com

a linha de terra, rotações e translações desses objetos juntamente com a relação entre esses comportamentos e as respectivas projeções nos planos de projeção.

Na elaboração das questões, com relação ao enunciado foi levado em conta o desenvolvimento de situações-problema onde possamos observar se os alunos possuem as Habilidades de Visualização - essas Habilidades estão postas em tabelas na seção 3.1 - envolvidas na atividade de Visualização, nas perspectivas de McGee, Hoffer, Bishop, Kosslyn e Gutiérrez, todas elas postas em (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, tradução nossa).

Para a resolução da atividade proposta na **1ª etapa**, solicitaremos aos alunos envolvidos na pesquisa que procurem mediante as questões oferecidas - exclusivamente na forma de texto, sem qualquer representação figural - que tentem "mentalmente ver" cada situação abordada, para assim responder o que se pede e justificar sua resposta. Através das respostas e justificativas investigaremos as Habilidades que estarão implícitas nas estratégias utilizadas pelos alunos participantes da pesquisa. As atividades envolvidas nesta etapa são:

**Responda o que se pede e justifique como achar adequado, seja com textos, áudios ou desenhos.**

### **1ª Questão**

Seja um triângulo qualquer  $ABC$  no espaço, projeta-se esse triângulo simultaneamente nos três planos auxiliares de projeção. Comente sobre cada uma das situações descritas abaixo:

- a** - A projeção de  $ABC$  no plano horizontal é um segmento
- b** - A projeção de  $ABC$  no plano horizontal é um triângulo congruente a  $ABC$
- c** - A projeção de  $ABC$  no plano horizontal é um triângulo que não é congruente a  $ABC$
- d** - Ao projetarmos o triângulo  $ABC$  nos três planos de projeção simultaneamente obtemos em suas projeções pelo menos dois triângulos congruentes a  $ABC$
- e** - Existe pelo menos uma posição de  $ABC$  no espaço que ao o projetarmos nos planos de projeção podemos obter simultaneamente a projeção no plano horizontal como um traço, no plano vertical em verdadeira grandeza e no plano de perfil a projeção é um triângulo não congruente a  $ABC$

### 2ª Questão

Seja um tronco de pirâmide de base quadrada no espaço. De maneira que sua base é paralela ao plano vertical de projeção, e além disso duas de suas arestas da base que são paralelas entre si são também paralelas ao Plano de Perfil. Então, qual é o formato da projeção do tronco de pirâmide no Plano de Perfil? E no Plano Horizontal? Justifique sua resposta.

### 3ª Questão

Sabemos que um prisma é constituído por duas bases que são congruentes entre si e faces laterais que são paralelogramos. Seja no espaço um prisma cujas bases são triângulos retângulos, a face lateral de maior área desse prisma é paralela ao plano vertical de projeção e as bases do prisma são paralelas ao plano de perfil. Em quantos graus é necessário rotacionar esse prisma a propósito de que a face lateral de maior área passe a ser paralela ao Plano de Perfil e as bases paralelas ao Plano Vertical de projeção? Descreva como chegou a sua resposta.

Na **2ª etapa** dessa atividade de investigação se dará uma oficina usando-se do Software Geogebra 3D em que desenvolveremos com os participantes atividades com a finalidade de proporcionar situações que exercitem a Visualização dos alunos com respeito à construção de objetos 2D e 3D no espaço, sua posição com relação aos planos de projeção, a relação entre as projeções desses objetos e a Linha de Terra, assim como, a relação entre os objetos e suas respectivas projeções.

Vale salientar que o sistema de projeção que será usado para projetar esses objetos é o Sistema de Projeção Cilíndrico Ortogonal, o mesmo utilizado na Geometria Descritiva. Esse é um dos motivos que justificam a importância da GD em nossa prática.

A seguir, as tarefas que serão desenvolvidas nesta etapa via construção no Geogebra 3D:

- Sejam no espaço dois segmentos distintos  $AB$  e  $CD$  com mesmo comprimento, sendo que eles se interceptam exatamente em seus respectivos pontos médios. Projetamos ambos simultaneamente nos três planos de projeção, de maneira a responder aos seguintes questionamentos:

As projeções de  $AB$  e  $CD$  estão em verdadeira grandeza pelo menos em dois planos de projeção simultaneamente?

Se as projeções de  $AB$  e  $CD$  no Plano Horizontal forem um único traço e no

Plano de Perfil também um único traço, o plano que contém essas projeções é oblíquo em relação ao plano de projeção vertical? Nesse caso, se uma reta  $r$  contém a projeção de  $AB$  e  $CD$  no Plano Horizontal, qual a posição relativa entre a reta  $r$  e a Linha de Terra?

As projeções de  $AB$  e  $CD$  estão em verdadeira grandeza no Plano Horizontal se, e somente se, as projeções no Plano Vertical estão reduzidas a um traço?

Na **3ª etapa** pretendemos aplicar as mesmas questões colocadas na 1ª etapa e solicitar que reconsiderem cada resposta, se caso acharem que devem, e reconsiderem cada justificativa, caso achem necessário. A percepção de cada um, de que devem ou não mudar suas respostas ou complementá-las assim como as justificativas se dará, caso o que foi apresentado na 2ª etapa for útil para isso. A ideia é confrontar as estratégias e justificativas de cada questão em cada etapa, para assim extrair as diferenças entre elas e analisar se houve ou não ganhos no que diz respeito às Habilidades de Visualização.

## 6 ATIVIDADE DE INVESTIGAÇÃO

Aplicamos a Atividade de Investigação no dia 10 de novembro de 2022 as 13h:30 no Laboratório 1 de informática do DCET no Campus II da Universidade do Estado da Bahia. Inicialmente haviam confirmado presença nessa atividade 10 (dez) participantes, no entanto compareceram 7 (sete), mesmo assim iniciamos com a explicação do que se tratava a pesquisa e dividimos o grupo em duas duplas e um trio. Solicitamos que na medida do possível quando estivessem discutindo as questões entre si, que tudo fosse registrado em áudio, e assim foi feito, alguns registraram os áudios via gravador digital e outros em um aplicativo de mensagem.

Posicionamos os grupos em assentos um pouco separados a propósito de que as conversas entre si não prejudicassem a qualidade das gravações dos áudios dos demais. Iniciamos a aplicação das questões referentes a 1<sup>o</sup> etapa, e reforçamos que quanto mais registros em áudio acerca das conjecturas, pensamentos, estratégias e idéias que eles tivessem seria melhor para nosso trabalho, pois assim poderíamos entender de onde estavam partindo - com relação a cada questão - onde estavam chegando e qual caminho trilharam para chegar a cada resultado, assim, pedimos que eles "pensassem alto", isto é, tudo que pensassem falassem um com o outro para que ficasse registrado nos áudios.

Enquanto eles resolviam as questões procuramos ligar os computadores com o propósito de findando a 1<sup>a</sup> etapa iniciar logo em seguida a próxima, assim fizemos, no entanto, a máquina que é usada para projetar no laboratório 1 não aceitou login no Geogebra 3D, solicitamos ao pessoal da informática que nos ajudassem e eles prontamente nos atenderam e mudamos de máquina, no entanto, a nova máquina também não aceitou login no Geogebra 3D. Logar no Geogebra 3D seria importante pois já existia construções prontas a serem usadas na oficina, mas já que não havíamos conseguido, resolvemos construir mesmo sem acessar as construções já prontas.

Assim, para a realização da 1ª etapa estava previsto um tempo de 40 minutos, mas os participantes precisaram de 60 minutos para tal. Quando terminaram essa primeira parte recolhemos os registros escritos e as gravações e iniciamos em seguida a 2ª etapa.

Ao iniciar a 2ª etapa, cada participante acessou o Geogebra 3D em alguma máquina e tentamos iniciar as construções no Geogebra 3D à medida que íamos dando um passo a passo aos colegas, no entanto foi inviável trabalhar nas máquinas que acessamos, todas elas muito lentas ao serem projetadas, não houve condição alguma de prosseguir. Mas, como precisávamos concluir essa etapa da pesquisa decidimos realizar a oficina sem projetar via equipamento multimídia, assim solicitamos que todos se assentassem ao redor de uma máquina e faríamos ali a oficina.

Esses acontecimentos representaram uma grande perda em nosso trabalho, uma vez que a Atividade de Investigação não foi planejada para acontecer dessa forma. Todas as etapas foram pensadas para acontecer em um único dia e para além disso, a ideia era que cada participante da oficina realizasse suas próprias construções, o que não ocorreu porque não foi possível exibir o passo a passo numa projeção onde todos pudessem ver. Esse ocorrido servirá de experiência para pesquisas futuras. Ou seja, verificar se o aparato tecnológico à disposição corresponde ao que foi planejado.

Dessa forma, com todos ao redor de uma única máquina realizamos as construções já citadas na metodologia desse trabalho, sendo que nessa construção dialogamos bastante acerca de conhecimentos específicos das Geometrias Plana, Espacial e Descritiva que interessam à nossa prática, por exemplo, relacionar a ideia de congruência geralmente muito vista em Plana e Espacial com a ideia de Verdadeira Grandeza vista em Descritiva no sentido de medida de segmento, ângulo, área e etc.

Como o tempo já tinha se esgotado com relação às possibilidades de alguns participantes, combinamos de prosseguir as oficinas de maneira remota, e posteriormente a 2ª etapa eles também realizariam a 3ª de maneira remota seguindo as mesmas condições da 1ª etapa, isto é, registrando tudo o que pudessem em áudios e escritos. Assim, foi realizado no dia 18 de novembro de 2022 três oficinas - no formato remoto - via Teams com 4 participantes no total. Eles participaram dessas oficinas e nos enviaram os seus registros com relação a realização da 3ª etapa.

Ressalto a minha gratidão aos colegas que, mesmo com tantos afazeres - em final de semestre - se colocaram à disposição para participar dessa pesquisa de maneira tão proativa e agradável.

A seguir apresentaremos os dados coletados tanto na 1ª etapa como na 3ª, assim como as nossas análises com base na fundamentação teórica. Não apresentaremos tudo que coletamos e analisamos pois tornaria esse texto bastante longo, traremos as partes que consideramos mais relevantes.

Vamos nomear os 7 (sete) participantes por A,B,C,D,E,F e G, sendo que A fez dupla com B , C fez dupla com D e o trio foi formado por E,F, e G.

### **Análise dos registros da dupla AB em relação a 1ª etapa**

**Questão 1** - Seja um triângulo qualquer ABC no espaço, projeta-se esse triângulo nos três planos auxiliares de projeção. Comente sobre cada uma das situações descritas abaixo:

**a** - A projeção de ABC no plano horizontal é um segmento

Registros de áudio, questão 1, item a:

- B - "não"
- A - "o triângulo?"
- B - "3D? "
- A - "se é no espaço"
- A - "no plano seria um triângulo, mas se tá no espaço seria uma pirâmide né não? "
- A - "seja um triângulo ABC no espaço, se é no espaço, então é uma pirâmide"
- A - "como é que você vai ter a figura plana no espaço, tem como?"
- A - "no espaço o triângulo não vai ser representado por uma pirâmide não?"

No diálogo acima ficou evidente uma confusão acerca da natureza e caracterização do triângulo ABC, notamos que a dupla AB não concebe a ideia de que uma figura plana pode estar no espaço, com isso, baseado em Gutiérrez *et al.* (1996, p.10, tradução nossa) percebe-se que a Habilidade Constância Perceptiva está prejudicada ou não desenvolvida.

Constancia Perceptiva - A capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (Representação Externa ou Imagem mental) são independentes de tamanho,

cor, posição ou textura e permanecer sem confusão quando um objeto ou imagem é percebido em diferentes orientações (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa).

Um outro trecho do diálogo entre A e B a ser analisado foi o seguinte:

- B - "depende, porque aí seria um diedro, diedro não, aquele poliedro, poliedro não, como é o nome dele?"
- A - "eu esqueci"
- A - "mas mesmo assim, olhe , ele ta no espaço, ele é um sólido"

Nesse trecho do diálogo revela-se que uma outra Habilidade de Visualização esta comprometida em AB, pois fazem confusão novamente atribuindo a natureza de sólido ao triângulo ABC. Essa confusão está associada à carência de desenvolvimento da Habilidade Constância Perceptiva ou da Habilidade de Interpretação da Informação Figurativa definida por (BISHOP, 1983, *apud* Gutiérrez, 1996, p.7, tradução nossa).

Interpretação da Informação Figurativa - Habilidade que envolve o conhecimento das convenções visuais e vocabulário espacial usado em trabalhos geométricos, gráficos, tabelas e diagramas de todos os tipos... e a leitura e interpretação de imagens visuais, seja mental ou física, para obter deles qualquer informação relevante que possa ajudar a resolver um problema (BISHOP, 1983, *apud* Gutiérrez, 1996, p.7, tradução nossa).

Ainda no diálogos da dupla AB com relação ao item a da questão 1 registrou-se :

- B - "mas se a gente for olhar ele aqui nesse sentido"
- A - "a projeção dele vai ser o próprio triângulo, nos três perfis"

No trecho acima afirmam que a projeção de ABC será o próprio ABC nos três planos de projeção, no entanto, ainda que tivessem a intenção de afirmar - na expressão "o próprio ABC - que as projeções seriam a verdadeira grandeza ou triângulos congruentes ao triângulo ABC nos três planos de projeção e apenas não utilizaram termos mais apropriados, ainda assim, como não existe a possibilidade de que essas projeções sejam simultaneamente a verdadeira grandeza do triângulo ABC, há indícios de carência de desenvolvimento de mais algumas Habilidades:

Percepção de Posições Espaciais - Capacidade de relacionar um objeto, imagem ou Imagem Mental a si mesmo (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa).

Percepção de Relações Espaciais - Capacidade de relacionar vários objetos, imagem e/ou Imagem Mentais entre si, ou simultaneamente consigo mesmo (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa).

Vamos analisar as respostas da dupla AB com relação a questão 2:

**Questão 2** - Seja um tronco de pirâmide de base quadrada no espaço. De maneira que sua base é paralela ao plano vertical de projeção, e além disso duas de suas arestas da base que são paralelas entre si são também paralelas ao plano de perfil. Então, qual é o formato da projeção do tronco de pirâmide no plano de perfil ? E no plano horizontal ? Justifique sua resposta.

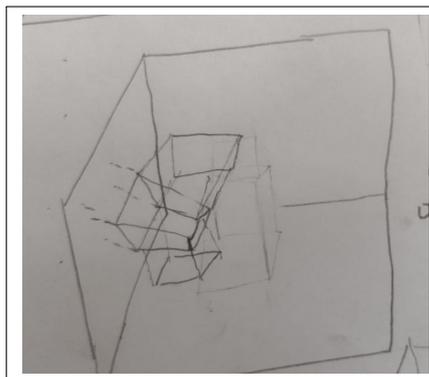
Ao discutirem essa questão registra-se o seguinte diálogo:

- A - "então não vai ser um retângulo, vai ser um trapézio "
- B - "mas aqui como fica o trapézio"
- A - "ai agora confundi, não tem régua aqui pra ver"
- A - "vamos deixar um retângulo então ?"

Ao fim do diálogo como registro escrito responderam que o formato da projeção do tronco de pirâmide nos planos horizontal e de perfil seria um retângulo.

Segue abaixo, na figura 18 o registro que criaram a respeito da situação abordada na questão:

Figura 18: Registro figural criado pela dupla AB como auxílio à resolução da questão 2



Fonte: Registro obtido a partir das respostas da dupla AB

Observamos na análise do trecho acima, relacionando o registro figural elaborado pela dupla - esse registro é uma outra Representação Externa para a situação abordada no enunciado - e o diálogo captado, que a dupla AB conseguiu decodificar a Representação Externa da situação posta no enunciado da questão, criando uma Imagem Mental e através dos Processos de Visualização via Habilidades movimentou as Imagens Mentais conseguindo representar a configuração em forma de figura. Esses passos seguidos no uso da Visualização para realização de uma tarefa está posto em (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.11, tradução nossa).

Demonstrando assim desenvolvimento e aptidão com relação a algumas Habilidades que trouxemos na fundamentação teórica, a saber: gerar uma Imagem Mental a partir de alguma informação; inspecionar uma imagem mental para observar sua posição ou a presença de partes ou elementos, assim como a Habilidade de usar uma Imagem Mental para responder uma pergunta (KOSSLYN, 1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p.8, tradução nossa).

No entanto, resolveram responder ao fim do diálogo que as projeções solicitadas na questão seriam retângulos e não trapézios, e isso se deu pelo fato de que a Representação Externa em forma de figura não manteve os aspectos conceituais e figurais a respeito do tronco da pirâmide e de suas projeções. Notamos esse fato no seguinte trecho do diálogo: B - "mas aqui como fica o trapézio", A - "ai agora confundiu, não tem régua aqui pra ver", B - "vamos deixar um retângulo então?"

Isto é, tinham chegado à conclusão de que as projeções seriam trapézios, mas preferiram se basear pelo registro figural, como vemos no trecho "mas aqui como fica o trapézio", "agora confundiu" referindo-se ao desenho que fizeram e isso foi o que culminou na resposta incorreta da questão. Essa situação é o exemplo típico do conflito abordado por *Bernard Parzysz*, denominado por ele de *Saber x Ver* (PARZYSZ, 1988, p.90, tradução nossa).

Registra-se nos diálogos que elas sabiam que o quadrilátero que se constituía como face do tronco de pirâmide não possuía as características de retângulo, pois para isso, os lados desse quadrilátero segundo a dupla "deveriam ser dois a dois congruentes", palavras ditas pelo participante A nos diálogos captados com relação a um retângulo, isso fica claro na Imagem Mental que tinham a respeito do tronco de pirâmide quando conjecturam que:

- A - "mas mesmo assim, se aqui vai afunilando, é um tronco de uma pirâmide,

aqui vai afinando, então aqui vai diminuindo, entendeu?"

Ou seja, tinham dois caminhos a seguir para concluir a questão, um caminho era o que sabiam e o outro, o que estavam vendo, optaram pelo segundo.

O conflito a que Parzysz se refere tem relação com problemas relacionados à codificação de uma figura geométrica 3D em um único plano. Segundo o autor, tem sua gênese na impossibilidade de construir uma representação mais próxima, restando apenas o acesso a uma representação distante, em que há uma perda imensa de informação. Dessa maneira, esse confronto torna-se inevitável e um dilema insolúvel, devido ao fato de que o que se sabe de um objeto 3D entra em conflito com o que se vê desse objeto (PARZYSZ, 1988, p.90, tradução nossa).

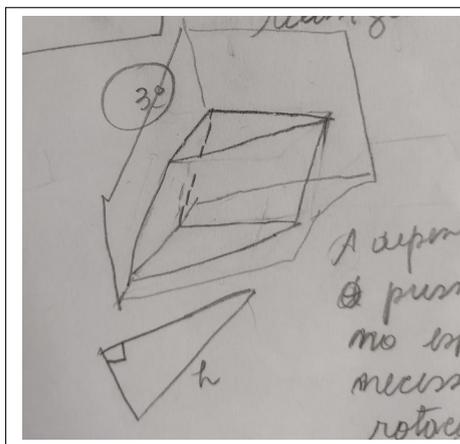
Assim, conjecturamos que se essa configuração posta no enunciado da questão tivesse sido contruída no Geogebra 3D, às perdas de informações relacionadas as propriedades conceituais e figurais teriam sido bastante reduzidas, levando a quem realizasse essa construção a ter uma melhor percepção do problema, em vista de sua solução. A figura 30 situada no apêndice dessa pesquisa é um dos possíveis modelos de construção no Geogebra 3D que representa a situação abordada na questão 2, considerando-se que a pirâmide seja truncada regularmente, pois também existe a possibilidade de ser seccionada obliquamente.

Vamos analisar as respostas da dupla AB com relação à questão 3:

**Questão 3** - Sabemos que um prisma é constituído por duas bases que são congruentes entre si e faces laterais que são paralelogramos. Seja no espaço um prisma cujas bases são triângulos retângulos, a face lateral de maior área desse prisma é paralela ao plano vertical de projeção e as bases do prisma são paralelas ao plano de perfil. Em quantos graus é necessário rotacionar esse prisma a propósito de que a face lateral de maior área passe a ser paralela ao plano de perfil e as bases fiquem paralelas ao plano vertical de projeção? Descreva como chegou a sua resposta.

Registro figural:

Figura 19: Registro figural criado pela dupla AB como auxílio à resolução da questão 3



Fonte: Registro obtido a partir das respostas da dupla AB

Observando a construção da figura 19 há indícios de movimentação dos Processos de Visualização colocados por (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa) no que diz respeito a leitura do enunciado da questão e a transformação da Representação Externa numa Imagem Mental e posteriormente na transformação dessa Imagem Mental em outra Representação Externa que representa a mesma situação exposta no enunciado.

No entanto, nota-se que as Habilidades relacionadas a transformação das Imagens Mentais não estão plenamente desenvolvidas, pois, apesar de nos diálogos ficar registrado que conseguiram identificar que a face lateral de maior área será definida pelas hipotenusas e pela altura do prisma, e que essa face deveria estar paralela ao PV conforme enunciado, construíram o prisma com a face mencionada não paralela ao PV.

Com relação à resposta em registro escrito para essa questão colocaram que:

"A depender de como o prisma estiver no espaço será necessário uma rotação de  $90^\circ$ . No nosso caso será necessário uma rotação de  $90^\circ$  de baixo para cima e outra de  $90^\circ$  para que a face de maior área fique paralela ao plano de perfil"

Analisando a resposta final dada pelos participantes, nota-se que particularizaram o caso tomando como referência as suas construções e não o enunciado da questão. Não conseguimos entender com precisão quais seriam essas duas rotações de  $90^\circ$  a que a dupla AB se refere.

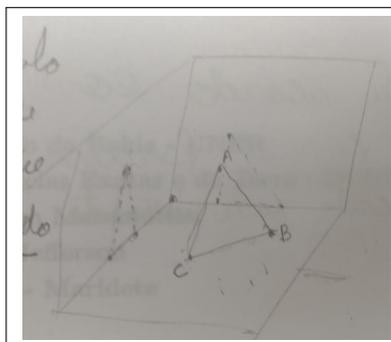
### Análise dos registros do trio EFG em relação a 1º etapa

**Questão 1** - Seja um triângulo qualquer ABC no espaço, projeta-se esse triângulo nos três planos auxiliares de projeção. Comente sobre cada uma das situações descritas abaixo:

**a** - A projeção de ABC no plano horizontal é um segmento

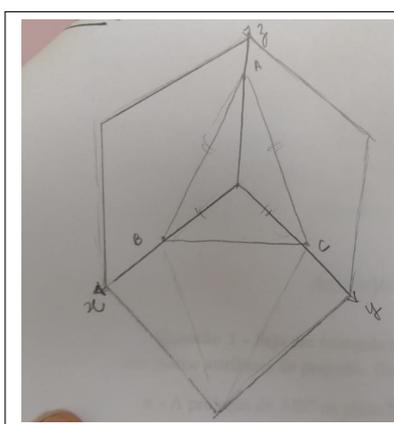
O grupo EFG produziu dois registros figurais a propósito de iniciar as discussões acerca da questão 1 item **a**, segue as figuras:

Figura 20: Registro figural criado pelo participante F como auxílio à resolução da questão 1



Fonte: Registro obtido a partir das respostas do grupo EFG

Figura 21: Registro figural criado pelo participante E como auxílio à resolução da questão 1



Fonte: Registro obtido a partir das respostas do grupo EFG

Analisando as construções produzidas pelos participantes F e E nas figuras 20 e 21 respectivamente, percebemos que as Habilidades de Visualização possuem níveis de desenvolvimento distintos em cada um deles, uma vez que, o participante E representa

apenas o triângulo ABC sem a concepção das projeções desse objeto nos planos auxiliares, enquanto o participante F consegue "imaginar" e representar a Imagem Mental criada a partir do enunciado da questão de maneira mais satisfatória, representando o triângulo e duas de suas projeções, uma no Plano Lateral e outra no Plano Vertical.

Pelo exposto, consideramos baseando-nos em Kosslyn (1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p.8, tradução nossa) que o participante F gerou uma Imagem Mental que mais se aproxima da Representação Externa posta no enunciado, em relação ao participante E.

No trecho a seguir o participante E mostra sua representação ao participante F, e o participante F, mesmo sem ter feito sua construção, já afirma ter visualizado a situação de maneira distinta, vejamos:

- E - "ele disse que tá no espaço o triângulo, então um pé tá aqui, outro aqui, acho que vai sair meio torto, e o outro aqui, ele tá no espaço"
- F - "engraçado que eu vi diferente de você"

Essa diferença entre a maneira como cada um deles visualizou a situação e tentou representá-la retrata níveis distintos de desenvolvimento também na seguinte Habilidade: Processamento Visual da Informação posto por Bishop (1983, *apud* Gutiérrez, 1996, p.7, tradução nossa) que significa a capacidade de traduzir relações abstratas e dados não figurativos - nesse caso o enunciado da questão - em termos visuais.

Outro ponto necessário a se chamar a atenção na tentativa de resolução da questão 1 por parte do grupo EFG é o seguinte trecho das gravações:

- E - "faz favor"
- F - "falando-se de projeção, nós estamos falando de quando o triângulo toca aqui o plano, ou é a sombra?"

Essa dúvida por parte dos componentes do grupo evidencia carência de desenvolvimento com relação a Habilidade de Interpretação da Informação Figurativa posta por Bishop (1983, *apud* Gutiérrez, 1996, p.7, tradução nossa) que diz respeito ao conhecimento das "convenções visuais e vocabulário espacial usado em trabalhos geométricos, gráficos, tabelas e diagramas de todos os tipos... e a leitura e interpretação de imagens

visuais, seja mental ou física, para obter deles qualquer informação . . . relevante que possa ajudar a resolver um problema".

Com relação à resposta final dada pelo grupo EFG aos itens a, b e c da primeira questão, argumentaram que existe a possibilidade de que seja verdade as afirmações dos itens **a**, **b** e **c**. No entanto, afirmam que isso vai depender da posição de ABC no espaço. Em relação a dupla AB a resposta do grupo EFG é mais satisfatória, muito embora eles também não conseguiram explicar quais seriam essas posições do triângulo ABC no espaço, associando cada posição à afirmação respectiva colocada na questão. As possibilidades de posições de ABC no espaço e suas respectivas projeções estão no apêndice deste trabalho nas figuras 23, 24, 25, 26, 27, 28 e 29, construídas via Geogebra 3D.

Vamos analisar as respostas do trio EFG com relação a questão 2:

**Questão 2** - Seja um tronco de pirâmide de base quadrada no espaço. De maneira que sua base é paralela ao plano vertical de projeção, e além disso duas de suas arestas da base que são paralelas entre si são também paralelas ao plano de perfil. Então, qual é o formato da projeção do tronco de pirâmide no plano de perfil? E no plano horizontal? Justifique sua resposta.

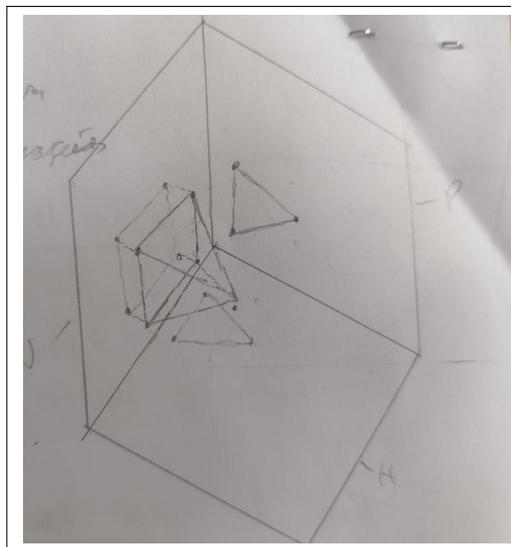
A respeito dos registros obtidos do grupo EFG, nessa questão em específico não foi registrado áudio, mas entregaram a resposta em escritos e desenhos, vamos a análise:

Como registro escrito obtivemos:

"Sua projeção no PL de acordo com as descrições da pergunta vai ser um triângulo, no PH vai ser um triângulo que pode ser diferente ou igual ao triângulo da projeção no PL".

Como registro figural criou-se a seguinte representação:

Figura 22: Registro figural relacionado a resolução da questão 2 por parte do grupo EFG



Fonte: Registro obtido a partir das respostas do grupo EFG

Nota-se aptidão bastante desenvolvida por parte do participante F, pois foi ele quem desenhou a figura 22. Teve a capacidade de decodificar a Representação Externa posta como enunciado da questão e movimentar as Imagens Mentais através dos Processos de Visualização. Conseguiu manter basicamente os aspectos figurais e conceituais. Apenas se equivocou com relação ao objeto que desenhou, construiu uma pirâmide sendo que no enunciado da questão trata-se de um tronco de pirâmide.

Essa falha pode estar associada a uma simples falta de atenção - é o que acreditamos dado o nível do desenho que criou - ou relacionada à carência de desenvolvimento da Habilidade de Interpretação da Informação Figurativa definida por Bishop (1983, *apud* Gutiérrez, 1996, p.7, tradução nossa).

Durante a tentativa de resolução da questão 2, há um trecho do diálogo que chama a nossa atenção:

- E - "agora aqui a discussão sobre a questão 2, a gente tá discutindo porque a gente quer saber a real, se a pirâmide, ela vai ficar em pé com sua base no plano horizontal, ou se ela vai ficar deitada como meu colega fez, com a sua base no plano vertical como esta na questão, a minha dúvida é, você vai mudar a posição da pirâmide?"

- F - "se mudar a pirâmide continua sendo uma pirâmide, kkk?"

Como estavam presentes e participamos dos diálogos, nesse trecho abordado acima quem estava com dúvidas acerca da possibilidade de existência de uma pirâmide ou na verdade um tronco de pirâmide com a base não paralela ao PH foi o participante E, para ele a base deveria estar numa posição "tradicional", isto é, não seria adequado um tronco de pirâmide com a base voltada para cima por exemplo.

Pelo exposto acima e baseado em Parzysz (1988, p.90, tradução nossa) onde ele sugere a prática em projetar objetos 3D em planos no sentido de ampliar o estoque de representações de um objeto e não ser escravo de desenhos estereotipados, ou seja, desenhos que caíram no senso comum e são carentes de variabilidade de representações para que se aprofunde o conhecimento sobre ele, imaginamos que, um dos motivos pelo qual o participante E só admite uma posição para o tronco de pirâmide trata-se de que, uma grande parte dos livros que tratam do assunto trazem as pirâmides em uma única posição, que é justamente a imaginada pelo participante E.

Daí, notamos a carência de desenvolvimento no participante E da Habilidade Constancia Perceptiva definida por (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa).

### **Análise dos registros do dupla CD em relação a 1º etapa**

Assim como os demais grupos, em relação a questão 1 a dupla CD não conseguiu traçar um panorama geral acerca das possíveis posições que o triângulo ABC poderia assumir, assim como o comportamento de suas respectivas projeções. Vamos analisar seus registros:

**Questão 1** - Seja um triângulo qualquer ABC no espaço, projeta-se esse triângulo nos três planos auxiliares de projeção. Comente sobre cada uma das situações descritas abaixo:

a - A projeção de ABC no plano horizontal é um segmento

b - A projeção de ABC no plano horizontal é um triângulo congruente a ABC

c - A projeção de ABC no plano horizontal é um triângulo que não é congruente a ABC

Questão 1, item a, com registro escrito responderam que:

"A informação não é verdadeira, pois não se sabe ao certo como esse triângulo está disposto, se este estiver paralelo ao plano vertical ou ao de perfil aí sim sua projeção

sobre o plano horizontal será um segmento".

A partir da resposta dado pela dupla, nota-se que conseguiram visualizar que o paralelismo do triângulo ABC em relação aos planos PL e PV faz com que sua projeção seja um segmento no PH, no entanto, não identificaram que existe a possibilidade de que o triângulo ABC esteja oblíquo em relação ao PL e PV e mesmo assim esteja perpendicular em relação ao PH, sendo esse fator o que generaliza a condição para que sua projeção seja um segmento no PH.

Pelo exposto, conforme Gutiérrez *et al.* (1996, p.10, tradução nossa) os colegas C e D apresentam as Habilidades de Percepção e Posições Espaciais concernentes a relacionar objetos e Imagens Mentais simultaneamente entre si e consigo mesmo. Inclusive apresentam também outras duas Habilidades de Visualização como a capacidade de gerar uma Imagem Mental a partir de alguma informação e inspecionar uma Imagem Mental para observar sua posição ou a presença de partes ou elementos, além de usar uma Imagem Mental para responder uma pergunta (KOSSLYN, 1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p.8, tradução nossa).

Questão 1, item **b**, com registro em audio captamos:

- C - "Porque tipo assim, essa letra c, tá dizendo que a projeção desse triângulo ABC que tá no espaço, a projeção dele no plano horizontal é um triângulo que não é congruente a ele mesmo, ou seja o próprio ABC, aí eu imaginei o seguinte, eu imaginei assim, se esse triângulo, ele estiver paralelo ao plano horizontal, a gente pode imaginar um outro plano que tem esse triângulo"
- D - "sim"
- C - "né isso?"
- C - "aí se ele sofrer uma rotação espacial que retire ele desse plano onde ele esta, a projeção embaixo não vai ser o triângulo congruente a ABC"
- C - "eu pensei isso, agora eu não consigo colocar isso em palavras, mas pelo menos tá gravado"

Baseando-nos nas falas dos respondentes C e D, em específico quando C afirma que consegue criar em sua mente uma Imagem Mental - inclusive ele descreve no áudio como é essa Imagem - com uma configuração que resolve a questão de fato, mas

não consegue traduzir essa Imagem Mental para alguma outra Representação Externa a não ser a sua própria fala, como por exemplo um desenho ou até mesmo um texto. Isso trata-se do fenômeno abordado por Gutiérrez *et al.* (1996, p.10, tradução nossa) acerca dos Processos de Visualização; no caso do nosso colega C, ele consegue realizar a Interpretação Visual de Informações e cria as Imagens Mentais necessárias para resolver a questão, mas quando tenta interpretar as Imagens Mentais não consegue a partir delas gerar outros tipos de informações.

Com base no exposto, torna-se evidente a carência de desenvolvimento de Habilidades que auxiliem o colega C no processo de Interpretação de Imagens Mentais.

### **Análise dos registros obtidos na 3<sup>o</sup> etapa**

Conseguimos executar a 2<sup>o</sup> etapa com 4 (quatro) colegas dos 7 (sete) que estiveram presentes na 1<sup>o</sup> etapa, eles nos enviaram as suas reconsiderações acerca de alguns itens e pontos específicos das três questões aplicadas, vamos agora realizar as análises desses registros que foram obtidos exclusivamente em áudios.

#### **Reconsiderações do participante F a respeito das respostas dadas na 1<sup>a</sup> etapa**

Com relação ao item a da questão 1 acrescentou que:

"para que a projeção de ABC no PH seja um segmento, esse triângulo deve estar contido em um plano que seja perpendicular ao PH, independente da posição dele como ele tiver, mas ele tem que estar perpendicular ao PH"

Com relação ao item b da questão 1 acrescentou que:

"para a projeção de ABC no PH ser um triângulo congruente a ABC, ABC teria que estar num plano que seja paralelo ao PH"

Com relação ao item c da questão 1 acrescentou que:

"no caso da projeção de ABC no PH ser um triângulo não congruente a ABC, ele precisa estar contido em um plano que seja oblíquo em relação ao PH"

Com relação ao item d da questão 1 acrescentou que:

"eu tinha colocado que sim, que existia essa possibilidade, mas olhando agora vejo que não existe essa possibilidade, de duas projeções nos planos de projeção serem congruentes simultaneamente a ABC, no caso se uma projeção já for a verdadeira

grandeza, as projeções nos outros dois planos serão um segmento, ou seja não tem como isso acontecer"

Nas novas colocações feitas pelo participante F ele consegue generalizar a condição de posição de ABC para que as suas projeções estejam de acordo com cada afirmação, e isso representa indícios de ganhos em suas Habilidades de Visualização com relação as respostas dadas na 1ª etapa. O grupo EFG respondeu a respeito desses itens que as afirmações com relação às projeções poderiam ser verdadeiras dependendo da posição de ABC no espaço. Isto é, na 1ª etapa não apontaram quais seriam essas possíveis posições, já na 3ª etapa o participante F aponta condições a respeito da posição de ABC para que cada uma das afirmações seja verdadeira.

Outro ponto importante em suas novas colocações é o surgimento em suas Imagens Mentais de uma relação que associa a posição de ABC no espaço em relação aos planos de projeção com a posição de um plano que contenha ABC, essa percepção fica clara no trecho "deve estar contido em um plano que seja perpendicular ao PH", isto é, o que passa a definir se a projeção de ABC no PH é um segmento é o fato do plano que contém ABC ser perpendicular ao PH. Analogamente, quando afirma em relação ao item c "ele precisa estar contido em um plano que seja oblíquo em relação ao PH", referindo-se a ABC.

Dessa forma, torna-se evidente indícios de ganhos com relação as Habilidades de Visualização definidas por Kosslyn (1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p.8, tradução nossa), pois o participante F gerou a partir das mesmas informações uma Imagem Mental mais completa concernente aos itens da questão 1, além de inspecionar de maneira mais eficiente essa Imagem Mental observando sua posição ou a presença de partes ou elementos.

Com relação a questão 2 manteve a resposta dada na 1ª etapa e não conseguiu identificar que a questão trata de um tronco de pirâmide e não de uma pirâmide.

### **Reconsiderações do participante C a respeito das respostas dadas na 1ª etapa**

Com relação ao item a da questão 1 acrescentou que:

"vou manter minha resposta mas vou acrescentar a questão do plano que contém ABC, em vez de argumentar que o plano que contém o triângulo deveria ser paralelo ao PV e PL, eu deveria ter argumentado que o plano que contém ABC deveria ser perpendicular ao PH, para que a projeção fosse um segmento"

Com relação ao item c da questão 1 acrescentou que:

"na letra c vou mudar minha resposta, para que a projeção de ABC seja não congruente a ABC, ele, ABC deve estar em um plano oblíquo em relação ao PH"

Comparando as respostas do participante C, evidencia-se indícios de ganhos nas Habilidades de Visualização, isto porque ele conseguiu visualizar uma generalização para o caso em que a projeção de ABC no PH é um segmento, fato que não ocorreu na primeira etapa da pesquisa. Assim, conforme (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa) o participante melhorou sua Percepção de Relações e Posições Espaciais uma vez que foi capaz de inspecionar melhor as novas Imagens Mentais observando de maneira mais geral quais possibilidades poderiam ser levadas em conta para que a afirmação posta no enunciado fosse verdadeira.

### **Reconsiderações da dupla AB a respeito das respostas dadas na 1<sup>o</sup> etapa**

Com relação ao item a da questão 1 acrescentou que:

No item a da questão 1 tinham dado como resposta na 1<sup>a</sup> etapa apenas "um segmento", agora na 3<sup>o</sup> etapa reconsideraram e fizeram os seguintes acréscimos:

"a gente viu que se o plano em que ABC está contido for paralelo ao PH essa projeção estará em verdadeira grandeza, mas se esse plano não for paralelo ao plano horizontal a projeção de ABC será um segmento nesse PH "

Com relação ao item b da questão 1 acrescentou que:

No item b da questão 1 tinham dado como resposta na 1<sup>a</sup> etapa apenas "não, porque será um segmento", agora na 3<sup>a</sup> etapa reconsideraram e mudaram a resposta fazendo os seguintes acréscimos:

"se esse plano, o plano que contém ABC, for paralelo ao PH, então ele será sim congruente a ABC e não um segmento como colocamos na 1<sup>a</sup> etapa"

Com relação ao item c da questão 1 acrescentou que:

No item c da questão 1 tinham dado como resposta na 1<sup>a</sup> etapa apenas "não, porque será um segmento", agora na 3<sup>a</sup> etapa reconsideraram e fizeram os seguintes acréscimos:

"uma projeção de ABC só será congruente se o plano que contém ABC for paralelo ao plano auxiliar em questão"

Com relação ao item d da questão 1 acrescentou que:

No item **d** da questão 1 tinham dado como resposta na 1ª etapa que "a afirmação é falsa pois, obteremos apenas um triângulo congruente a  $ABC$ ", agora na 3ª etapa reconsideraram e fizeram os seguintes acréscimos:

"aí nesse caso, a projeção só vai está em verdadeira grandeza em um dos planos, porque ele vai ta paralelo a esse plano, e aí nos outros dois planos será um segmento"

Analisando os dados da dupla AB obtidos nessa 3ª etapa e comparando-os com os obtidos na 1ª etapa, há indícios de melhoramento na Habilidade Interpretação da Informação Figurativa definida em Bishop (1983, *apud* Gutiérrez, 1996, p.7, tradução nossa), essa percepção fundamenta-se na qualidade das justificativas, - mesmo que essas justificativas não generalizem cada caso - inclusive em suas Imagens Mentais passam a conceber a existência de um plano que contém o triângulo  $ABC$  no espaço, e condicionam a posição de  $ABC$  com relação aos planos auxiliares à posição desse plano que contém  $ABC$  aos planos auxiliares.

Há indícios de que esse melhoramento das justificativas e até mesmo mudanças nas respostas incorretas para respostas corretas, embora não completas, são reflexos da criação de Imagens Mentais mais eficazes com relação ao enunciado da questão. Isto é, conseguiram melhorar as Habilidades definidas por Kosslyn (1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p.8, tradução nossa), à medida que foram geradas Imagens Mentais mais eficientes para solução da questão, inspecionaram de maneira mais completa as Imagens Mentais em relação a 1ª etapa e usaram dessa Imagem Mental para responder uma pergunta de maneira mais satisfatória.

Percebe-se também evolução na Habilidade de Visualização Percepção de Relações Espaciais definida por (GUTIÉRREZ *et al.*, 1996, p.10, tradução nossa) pois passam a relacionar a posição do triângulo  $ABC$  com relação aos planos de projeção com a posição do plano que contém o triângulo  $ABC$  em relação aos planos de projeção. E, além disso, passam a caracterizar a grandeza da projeção do triângulo  $ABC$  de acordo com a posição do plano que contém  $ABC$  em relação aos planos de projeção. Essa percepção é clara no momento em que o participante B afirma: "se esse plano, o plano que contém  $ABC$ , for paralelo ao PH, então ele será sim congruente a  $ABC$  e não um segmento como colocamos na 1ª etapa". Esse "ele" que o respondente B coloca, está se referindo à projeção do triângulo  $ABC$ .

Na questão 2 a dupla AB mantém a resposta dada na 1ª etapa, eles conseguem visualizar que as projeções do tronco de pirâmide serão figuras com mesma natureza

que as faces do tronco, mas não conseguem identificar que essa figura trata-se de um trapézio e não de um retângulo. Isto é, o conflito "*Saber*" vs "*Ver*" continua a prejudicar o desenvolvimento pleno do aprendizado em Geometria.

Vale salientar que em todas as etapas os participantes tiveram a capacidade de criar Imagens Mentais relacionadas aos enunciados dos itens apresentados. Como cada enunciado é composto por partes mais elementares que o todo, como por exemplo: espaço, triângulo, projeção, tronco de pirâmide e etc, que comparando-os com o enunciado inteiro são mais simples de se Visualizar, evidencia-se nessa prática a movimentação da Habilidade de Memória Visual que serve para lembrar de Imagens Mentais e objetos que não são mais vistos, conforme Hoffer (1977, *apud* Gutiérrez, 1996, p.9, tradução nossa).

Isto é, ideias, conceitos, definições ou objetos mais "básicos" servem como elementos a compor um conjunto mais complexo - no nosso caso o enunciado da questão - . Essas partes ficam assimiladas em nossa memória, tratando-se do "nosso estoque" de Imagens Mentais, e é justamente para acessar esse repertório que movimentamos a Habilidade de Visualização Memória Visual.

Esta foi a análise dos dados que coletamos a partir da Atividade de Investigação. Não imaginávamos que iríamos obter indícios tão pertinentes acerca da atividade de Visualização, isto é, em alguns momentos percebeu-se movimentações de Habilidades em outros não, percebemos também diferenças com relação aos níveis de desenvolvimento nas Habilidades Visualização de alguns participantes. E tão importante quanto, foram também os indícios de ganhos no desenvolvimento das Habilidades de Visualização ao final da atividade.

Essas percepções se tornaram possíveis devido a leitura e entendimento acerca das Teorias abordadas na Base Teórica desta pesquisa, de maneira que, foram essenciais. Devemos ressaltar também a importância de ter registrado tudo em áudio, se os registros tivessem sido obtidos apenas em escritos e figuras não teríamos a riqueza de detalhes que obtemos.

O leitor dessa pesquisa poderá perceber que não foi realizado a análise em todos os itens de cada questão, isto se deve ao fato de que, nem todos os grupos responderam a todos os pontos, assim como, nem todos os participantes realizaram a 2ª etapa e por isso não teria sentido participarem das reconsiderações com relação às questões. Além disso, a análise se tornaria repetitiva com respeito as Habilidades que foram

movimentadas pelos participantes. Devido a esses fatores escolhemos os pontos da análise mais relevantes ao nosso ver. A seguir, passamos as considerações finais.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo geral investigar se a prática em construir e projetar, por meio do Software Geogebra 3D, objetos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) em planos, pode contribuir para o desenvolvimento da Visualização.

A crença no sucesso dessa prática está fundamentada na revisão de literatura que realizamos acerca do tema Visualização, a respeito das potencialidades da Geometria Descritiva e concernente ao uso do Geogebra 3D. E para além disso, a Atividade de Investigação que aplicamos revelou indícios de desenvolvimento nas Habilidades de Visualização dos indivíduos que realizaram essa prática.

Desse modo, acreditamos que os dados obtidos em nossa análise nos permitem responder nossa questão de pesquisa, a saber: em que medida a utilização do Software Geogebra 3D, para construir e projetar objetos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) em planos, pode contribuir para o desenvolvimento da Visualização?

Após aplicação e análise das atividades, acreditamos que a utilização do Software para realizar nossa prática contribuiu com o desenvolvimento da Visualização, na medida em que, percebemos indícios de que essa prática permitiu a ampliação do repertório de Imagens Mentais nos participantes e melhoramento da atividade de inspecionar esse repertório. Além disso, contribuiu também com a ampliação do campo de Visualização, ou seja, os participantes passaram a "ver mentalmente" as situações postas nos enunciados das questões de maneira mais global.

Assim, como vimos na fundamentação teórica dessa pesquisa, o desenvolvimento das Habilidades de Visualização representa aprimoramento da própria Visualização, que por sua vez constitui-se como um dos tipos de raciocínios que compõem o Pensamento Matemático, com isso, conclui-se que este também foi beneficiado. Esse resultado positivo revela o alcance da aplicação de uma prática como essa que sugerimos,

isto é, aprimorar o Pensamento Matemático configura-se como um grande ganho.

Logo, a prática que defendemos constitui-se como uma ferramenta que pode ser usada pelo professor no sentido de contribuir com o ensino e aprendizagem da Geometria e Matemática como um todo, pois a capacidade de uso do Pensamento Matemático configura-se como um dos objetivos mais fundamentais do ensino da Matemática. Isto é, com relação ao papel do professor de Matemática em sala de aula, esta posto uma oportunidade de para além dos métodos tradicionais, o professor ser um facilitador de avanços nas atividades cognitivas do aluno.

No entanto, vale ressaltar a respeito das condições necessárias para se desenvolver de maneira plena uma prática como essa - seja na Universidade ou na Escola Básica - que é dependente de uma estrutura básica em tempos de tanto desenvolvimento tecnológico, com relação a computadores, internet e etc, realidade distante da maioria das unidades de ensino em nosso país, principalmente em se tratando do ensino básico.

Diante de tudo, consideramos que os estudos que realizamos acerca da aplicabilidade dessa prática configura-se como um compromisso da Educação Matemática, uma vez que, ela revelou-se um modo eficiente de propiciar ao aluno o desenvolvimento de suas Habilidades de Visualização. Por isso, em futuras pesquisas pretendemos continuar nessa mesma linha de estudo, com a particularidade de que é necessário aprofundar a investigação com relação a eficiência da aplicação, especificamente em indivíduos que utilizam do Pensamento Matemático elementar e indivíduos que já pensam matematicamente de maneira mais avançada, ou seja, utilizam do Pensamento Matemático avançado.

Esse aprimoramento da prática é importante pois, é preciso conhecer profundamente de que maneira funciona os Processos de Visualização em cada um dos tipos de Pensamento Matemático em específico, assim como, quais Habilidades são próprias de cada maneira de pensar Matemática.

Além disso, como os Processos de Visualização são apenas um tipo de processamento que compõe o Pensamento Matemático, pois além dele temos os Processos de Abstração, Processos de Generalização e outros mais, precisamos pesquisar sobre as relações entre esses Processos dentro do Pensamento Matemático, para portanto fortalecer nossa prática. Assim, as próximas pesquisas que desejamos realizar aproximam-se da Neuromatemática.

## REFERÊNCIAS

ACADÊMICO, G. **Angel Gutiérrez**. 2022. <https://scholar.google.com.br/citations?user=e-vIe-kAAAAJhl=pt-BRoi=ao>. Acessado em 26-10-22 as 8h:57.

AFIADA, C. **Colégio Pedro II**. 2022. <https://www.conversaafiada.com.br/brasil/trogloditas-vao-fechar-colegio-pedro-ii.html>. Acessado em 15-10-22 as 13h:35.

ALBERTO, F. **Biografias dos maiores matemáticos da história**. 2017. [Url:https://gigantesdamatematica.wordpress.com/2016/01/30/gaspard-monge-1746-1818/](https://gigantesdamatematica.wordpress.com/2016/01/30/gaspard-monge-1746-1818/) Acessado em 15-10-22 as 09h:45.

ALVES, G.; SOARES, A. **Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae**. Rio de Janeiro. 2005.

ANTONOVSKII, M. Y. *et al.* **Sets of Mathematics Teaching Aids. Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 1**. [S.l.]: ERIC, 1990.

BISHOP, A. J. Spatial abilities and mathematical thinking. In: BIRKHÄUSER BOSTON, MA. **Proceedings of the 4th ICME**. [S.l.], 1983. p. 176–178.

BRASIL. **Memória da Administração Pública Brasileira**. 2022. [Url:<http://mapa.an.gov.br/index.php/dicionario-periodo-colonial/126-academia-real-militar>](http://mapa.an.gov.br/index.php/dicionario-periodo-colonial/126-academia-real-militar). Acessado em 8-10-22 as 17h:37.

BRASIL, C. d. D. **Lei Orgânica do Ensino Secundário**. 1942. [Url:https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html](https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html). Acessado em 15-10-22 as 08h:32.

BRASIL, C. d. D. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. 1961. [Url:https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-4024-20-dezembro-1961-353722-publicacaooriginal-1-pl.html](https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-4024-20-dezembro-1961-353722-publicacaooriginal-1-pl.html). Acessado em 15-10-22 as 11h:39.

BRASIL, C. d. D. **Normas de organização e funcionamento do ensino superior e sua articulação com a escola média**. 1968. <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-5540-28-novembro-1968-359201-publicacaooriginal-1-pl.html>.

BRASIL, C. d. D. **Diretrizes e Bases para o ensino de 1º e 2º graus**. 1971. [Url:https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html](https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html). Acessado em 15-10-22 as 11h:58.

BRASIL, M. Orientações curriculares para o ensino médio. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnológica/-MEC, Brasília**, 2006.

COELHO, D.; AMARAL, L. **Apostila de Geometria Descritiva - Universidade Federal da Bahia - INSTITUTO DE CIENCIAS AMBIENTAIS E DESENVOLVIMENTO SUSTENTAVEL**. Barreiras-BA, 2012.

CORRADI, R. P.; FRANCO, V. S. **Vizualização em Geometria, aproximações entre as perspectivas de Duval e Gutiérrez: um estudo com acadêmicos de um curso de licenciatura em Matemática**. *Revista BOEM*, v. 8, n. 16, p. 32–51, 2020.

COSTA, A. P. da. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de fischbein, duval e pais. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v. 9, n. 18, p. 152–179, 2020.

D'AMBROSIO, U. Educação matemática: uma visão do estado da arte. *Pro-posições*, v. 4, n. 1, p. 7–17, 1993.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *Advanced Mathematical Thinking*, Springer, p. 25–41, 1991.

FONTENELLES, M. S. **Diretrizes para a elaboração de um protocolo de pesquisa**. [S.l.]: Belém, 2009.

GANI, D. C. **As lições de Gaspard Monge e o ensino subsequente da Geometria Descritiva**. Rio de Janeiro, 2004.

GEOGEBRA. **Interface**. 2022. <https://ogeogebra.com.br/permanente/materialcompleto.pdf>. Acessado em 28-10-22 as 16h:44.

GEOGEBRA, I. S. P. **Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias. PUC-SP**. 2022. <https://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>. Acessado em 15-10-22 as 20h:29.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. [S.l.]: Atlas São Paulo, 2002. v. 4.

GODOY, A. S. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. *Revista de administração de empresas, SciELO Brasil*, v. 35, p. 57–63, 1995.

GRAVINA, M. A. Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática. **Porto Alegre: Evangraf**, 2012.

GUTIERREZ, A. Procesos y habilidades en visualización espacial. In: **Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría**. [S.l.: s.n.], 1991. p. 44–59.

GUTIÉRREZ, A. *et al.* Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In: THE PROGRAM. **Pme Conference**. [S.l.], 1996. v. 1, p. 1–3.

HOFFER. **Geometry and visualization**. [S.l.]: Creative Publications, 1977.

KOSSLYN, S. M. **Image and mind**. [S.l.]: Harvard University Press, 1980.

LEA.FR. **Bernard Parzysz**. 2022. <https://lea.fr/je-m-informe/dossiers/faire-vivre-geometrie/bernard-parzysz-developper-l-intuition-spatiale>. Acessado em 26-10-22 as 9h:03.

LIMA, M. L. da S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. S. **Provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo geogebra: incentivo à visualização de alunos do 2º ano do ensino médio.** *VIDYA*, v. 38, n. 1, p. 199–221, 2018.

LORENZATO, S. **Porque não ensinar Geometria? A Educação Matemática em Revista.** Blumenau, ano III, n. 4, 1995.

LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos.** [S.l.]: Autores associados, 2006.

MCGEE, M. Human spatial abilities: psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological bulletin*, American Psychological Association, v. 86, n. 5, p. 889, 1979.

MONTENEGRO, G. **Geometria Descritiva.** [S.l.]: Blucher, 2015.

OLIVEIRA, D. V. **Visualização espacial no ensino fundamental: Rotações no Geogebra.** 2021.

PALLES, C.; SILVA, M. J. F. da. **Visualização em geometria dinâmica.** *Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul*, v. 1, n. 1, 2012.

PARZYSZ, B. “Knowing” vs “seeing”. **Problems of the plane representation of space geometry figures.** *Educational studies in mathematics*, Springer, v. 19, n. 1, p. 79–92, 1988.

POLITÉCNICA, M. **ESCOLA POLITÉCNICA DO RIO DE JANEIRO.** 2022. [Http://www.brasilcult.pro.br/memoria/politecnica.html](http://www.brasilcult.pro.br/memoria/politecnica.html). Acessado em 15-10-22 as 13h:57.

PRESMEG, N. C. Visualisation in high school mathematics. **For the learning of mathematics**, JSTOR, v. 6, n. 3, p. 42–46, 1986.

SAMPAIO, R. S. **Ensino de geometria e visualização: possibilidades com o geogebra 3d.** 2016.

SILVA, C. I. D. N. **Proposta de Aprendizagem sobre a Importância do Desenho Geométrico e Geometria Descritiva.** 2006.

STACEY, K. What is mathematical thinking and why is it important. **Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking**, 2006.

TALL, D. **Advanced mathematical thinking.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1991. v. 11.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: **THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE. PME conference.** [S.l.], 1995. v. 1, p. 1–61.

TRAVAIN, H. **O criador da Geometria Descritiva.** 2014. Url:<https://heloiselaurindo.blogspot.com/2014/08/gaspard-monge-o-criador-da-geometria.html>.

VIEIRA, J. O ensino da geometria descritiva para alunos surdos apoiado em um ambiente hipermídia de aprendizagem visual gd. Florianópolis, SC, 2005.

VIENA, U. D. **Projeto MmF.** 2022. <https://mmf.univie.ac.at/team/markus-hohenwarter>. Acessado em 16-10-22 as 5h:40.

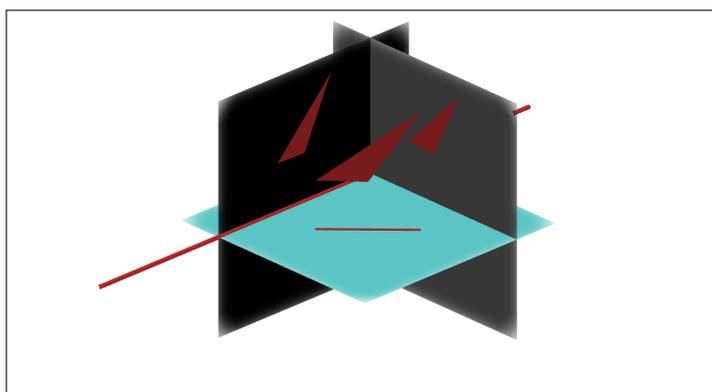
WIKIPEDIA. **Étienne Bézout.** 2022. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%89tienne\\_B%C3%A9zout](https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%89tienne_B%C3%A9zout). Acessado em 8-10-2022 as 15h:26.

WIKIWAND. **Gino Loria.** 2022. <https://www.wikiwand.com/pt/GinoLoria>. Acessado em 28-10-22 as 22h : 23.

YAKIMANSKAYA, I. S. **The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren. Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 3.** [S.l.]: ERIC, 1991.

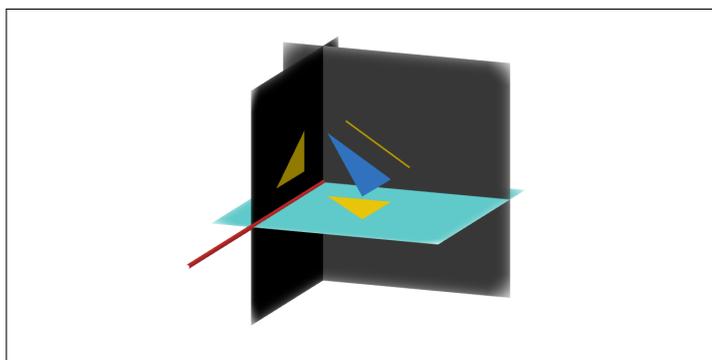
## APÊNDICE A

Figura 23: Triângulo ABC oblíquo em relação ao PV e PL, e perpendicular ao PH, projetado nos três planos auxiliares



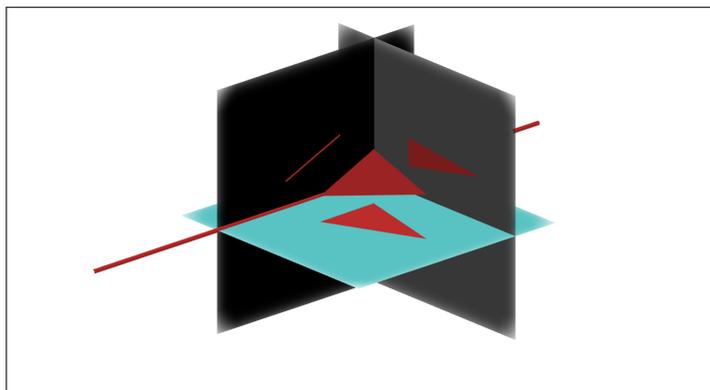
Fonte: Própria autoria : construção via Geogebra 3D

Figura 24: Triângulo ABC oblíquo em relação ao PV e PH, e perpendicular ao PL, projetado nos três planos auxiliares



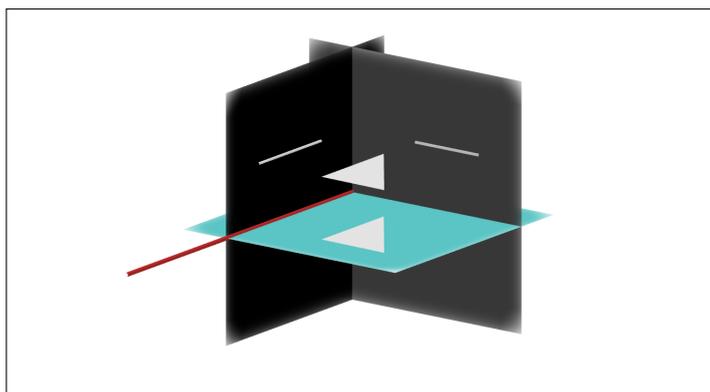
Fonte: Própria autoria : construção via Geogebra 3D

Figura 25: Triângulo ABC oblíquo em relação ao PH e PL, e perpendicular ao PV, projetado nos três planos auxiliares



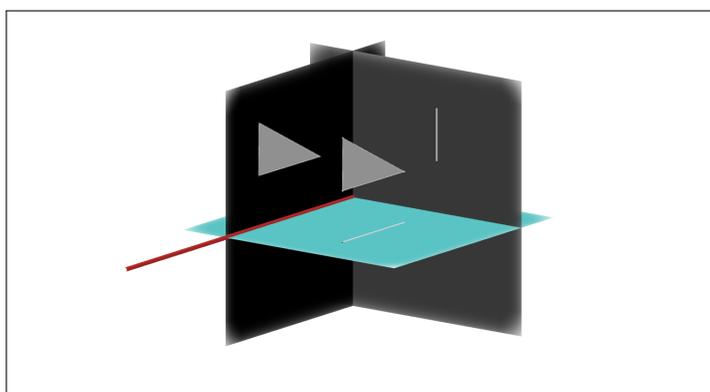
Fonte: Própria autoria : construção via Geogebra 3D

Figura 26: Triângulo ABC paralelo em relação ao PH e perpendicular ao PV e PL, projetado nos três planos auxiliares



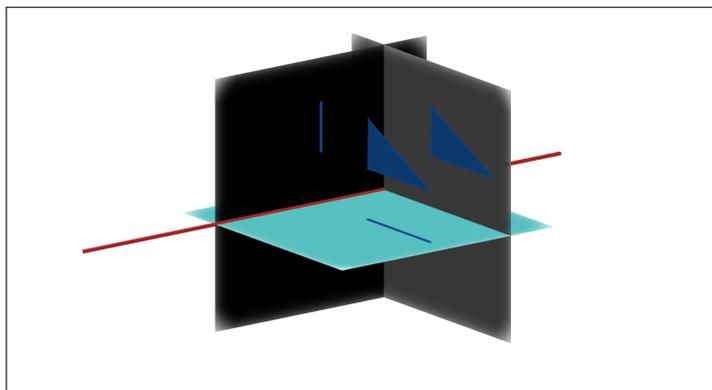
Fonte: Própria autoria : construção via Geogebra 3D

Figura 27: Triângulo ABC paralelo em relação ao PV e perpendicular ao PH e PL, projetado nos três planos auxiliares



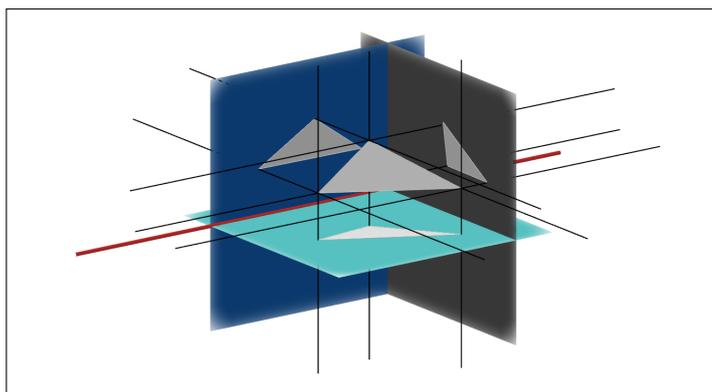
Fonte: Própria autoria : construção via Geogebra 3D

Figura 28: Triângulo ABC paralelo em relação ao PL e perpendicular ao PH e PV, projetado nos três planos auxiliares



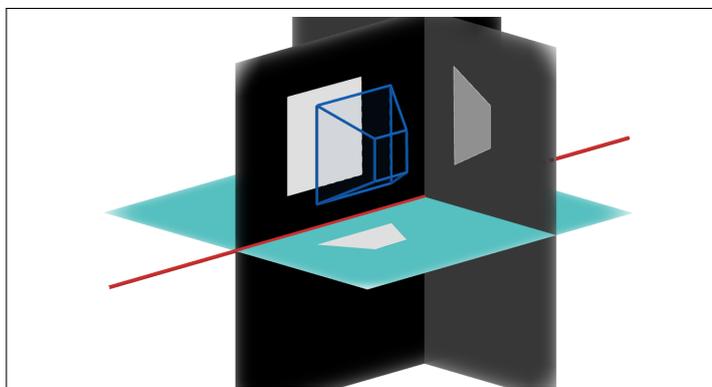
Fonte: Própria autoria : construção via Geogebra 3D

Figura 29: Triângulo ABC oblíquo em relação ao PL, PH e PV, projetado nos três planos auxiliares



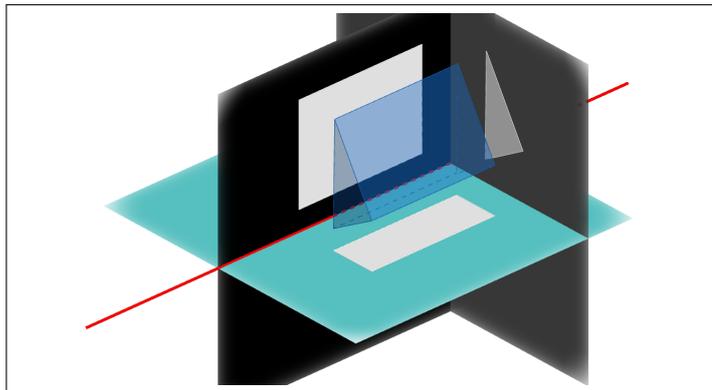
Fonte: Própria autoria : construção via Geogebra 3D

Figura 30: Tronco de pirâmide projetado nos três planos auxiliares



Fonte: Própria autoria : construção via Geogebra 3D

Figura 31: Prisma com base triangular projetado nos três planos auxiliares



Fonte: Própria autoria : construção via Geogebra 3D