UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
Departamento de Ciências Exatas e da Terra
Colegiado de Matemática

A importância do uso de organizadores prévios no ensino de geometria: O caso do Sistema de Posicionamento Global (GPS)

Matheus Marcos de Brito da Cruz

Alagoinhas – BA
2021

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA

Departamento de Ciências Exatas e da Terra

Curso de licenciatura em Matemática

A importância do uso de organizadores prévios no ensino de geometria: O caso do Sistema de Posicionamento Global (GPS)

Matheus Marcos de Brito da Cruz

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia - UNEB como requisito para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mário de Jesus Ferreira

Alagoinhas – BA
2021

Sistema de Bibliotecas da UNEB
Biblioteca Carlos Drummond de Andrade – Campus II
Rosana Cristina de Souza Barretto
Bibliotecária – CRB 5/902

C957i Cruz, Matheus Marcos de Brito.
A importância do uso de organizadores prévios no ensino de geometria: o caso do Sistema de Posicionamento Global (GPS). / Matheus Marcos de Brito Cruz – Alagoinhas, 2021.
77f. il.

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Exatas e da Terra. Colegiado de Matemática. Campus II.
Orientador: Prof. Dr. Mário de Jesus Ferreira.

1. Sistema de Posicionamento Global. 2. Matemática – Inovações tecnológicas. 3. Geometria analítica – Estudo e ensino. I. Ferreira, Mário de Jesus. II. Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Exatas e da Terra. III. Titulo.

CDD 526.1

Biblioteca do Campus II / Uneb
Bibliotecária: Rosana Cristina de Souza Barretto - CRB: 5/902

TERMO DE APROVAÇÃO

MATHEUS MARCOS DE BRITO DA CRUZ

A IMPORTÂNCIA DO USO DE ORGANIZADORES PRÉVIOS NO ENSINO DE GEOMETRIA: O CASO DO SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL (GPS)

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática, Universidade do Estado da Bahia, pela seguinte banca examinadora:

____

Prof. Dr. Mário de Jesus Ferreira - (Orientador)
Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia - UFBA
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

____

Prof. Dra. Maridete Brito Cunha Ferreira – Examinador Interno
Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

____

Prof. Me. Válber Márcio de Argolo Melo - Examinador Interno
Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Bahia - UFBA
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Alagoinhas, __ de _________de_____.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me permitir romper todos os obstáculos ao longo do curso. Agradeço a todos os meus professores pelos momentos de aprendizado, que me fizeram crescer profissionalmente, parceria e laços de amizade criados.

Aos meus pais e meu irmão, que me apoiaram e incentivaram durante todos os momentos difíceis, respeitando minha ausência e minha escolhas de vida.

Agradeço à minha namorada pelo companheirismo, atenção, incentivo e apoio. Sempre me mostrando que tudo é possível com esforço e disciplina.

Aos meus colegas, pelas noites de sono perdidas estudando para provas, resolvendo listas e elaborando seminários.

E a todos que de alguma forma contribuíram para minha chegada até aqui. Que todos sejam abençoados na glória de Deus!

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”

Paulo Freire

RESUMO

O presente trabalho investigou, em uma abordagem qualitativa e de caráter exploratório, a importância de aliar o ensino às situações que fazem parte do cotidiano do estudante. O objetivo foi construir uma sequência didática, para o ensino da circunferência, usando como organizador prévio o GPS. Com uma visão baseada na teoria de David P. Ausubel sobre aprendizagem significativa, buscamos mostrar pontos de vista a serem explorados pelo educador para a condução do processo de ensino aprendizagem. A metodologia utilizada foi pesquisa bibliográfica com o intuito de identificar e relacionar as teorias dos principais autores e teóricos que abordam o conceito da aprendizagem significativa e suas implicações. Para este momento foi escolhido a tecnologia utilizada no Sistema de Posicionamento Global (GPS), envolvendo o conceito de trilateração e os aspectos geométricos contidos no processo de localização. Utilizando o software GeoGebra como recurso auxiliar para o ensino do tópico circunferência de geometria analítica, foi construída uma sequência didática para exemplificar a contextualização do conteúdo de matemática com a tecnologia utilizada no GPS. Com os efeitos da pandemia e alguns aspectos relacionados aos cronogramas escolares, a aplicação da sequência só será possível no próximo ano, quando a mesma será efetivamente testada e melhorada a partir dos resultados obtidos. Apesar disso, a discussão acerca do tema promove uma reflexão sobre o papel dos organizadores prévios na construção de pontes entre os conteúdos a serem apresentados e a identidade cognitiva do estudante, na expectativa de que esse conteúdo novo possa adquirir significado na sua estrutura cognitiva.

Palavras-Chave: Organizador Prévio. Aprendizagem Significativa. Ensino. GPS. Geometria Analítica.

ABSTRACT

The presentworkinvestigated, in a qualitativeandexploratory approach, theimportanceofcombiningteachingwithsituationsthat are partofthestudent'sdailylife. The objectivewasto build a didacticsequence for teachingthecircumference, using GPS as a previousorganizer. With a viewbasedonthetheoryof David P. Ausubelonmeaningfullearning, weseekto show points ofviewtobeexploredbytheeducatortoconducttheteaching-learningprocess. The methodologyusedwasbibliographicresearch in ordertoidentifyand relate thetheoriesofthemainauthorsandtheoriststhat approach theconceptofmeaningfullearningand its implications. For thismoment, thetechnologyused in the Global Positioning System (GPS) waschosen, involvingtheconceptoftrilaterationandthegeometricaspectscontained in thelocalizationprocess. UsingGeoGebra software as anauxiliaryresource for teachingthetopiccircumferenceofanalyticalgeometry, a didacticsequencewasbuilttoexemplifythecontextualizationofmathematicscontentwithth etechnologyused in GPS. Withtheeffectsofthepandemicand some aspectsrelatedtoschool schedules, theapplicationofthesequencewillonlybepossiblenextyear, when it willbeeffectivelytestedandimprovedbasedontheresultsobtained. Despitethis, thediscussiononthetopicpromotes a reflectiononthe role ofpreviousorganizers in building bridges betweenthecontentstobepresentedandthestudent'scognitiveidentity, in theexpectationthatthis new contentcanacquiremeaning in theircognitivestructure.

Keywords: PreviousOrganizer. Meaningful Learning. Teaching. GPS. AnalyticalGeometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No decorrer da graduação em matemática, observei e vivenciei vários desafi encontrados na educação básica. A participação em projetos de extensão, PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência), estágios e eventos institucionais dentro e fora do estado me fez ter uma visão razoável do que acontece na realidade da escola pública. Existe uma constante necessidade de se buscar metodologias que possibilitem que o processo de ensino-aprendizagem ocorra de forma satisfatória.

Em uma sociedade em que o uso da tecnologia é um pré-requisito obrigatório para integração do indivíduo à sociedade, é essencial que tais recursos estejam presentes no ambiente escolar. Nem sempre é possível dispor de equipamentos de última geração ou mesmo de equipamentos adequados para que os estudantes possam trabalhar. E mesmo quando existem, raramente o professor de matemática o utiliza em prol do desenvolvimento de atividades contextualizadas.

Seja por falta de conhecimento ou habilidade, o fato é que existem empecilhos que dificultam a presença das TICs (Tecnologias da informação e comunicação) nas aulas de matemática. As crescentes inovações tecnológicas trazem novas possibilidades para o ensino, onde softwares se tornam caminhos mais presentes a cada dia. Mas a simples introdução de softwares na vida do estudante não garante uma aprendizagem significativa. É necessário que o professor aprenda a usá-las adequadamente.

Durante os anos em que participei do PIBID, o desenvolvimento de sequências didáticas era algo frequente dado os objetivos da implantação do programa nas escolas. Um dos nossos papéis como monitores era possibilitar a construção de atividades que auxiliassem o aprendizado dos estudantes. A necessidade de se utilizar materiais manipulativos para o ensino de matemática, aliado ao meu interesse pessoal por tecnologia, abriu minha mente para questões voltadas para a potencialização de uma aprendizagem significativa.

Tal questão me motivou a construir esse trabalho como uma forma de investigar a possibilidade de se trabalhar a geometria analítica usando como organizador prévio uma ferramenta tecnológica amplamente conhecida - o GPS – levando à reflexão sobre a importância de se abrir caminhos para chamar a atenção dos estudantes, planejando e construindo novos pontes pedagógicas.

Devemos enfatizar que o baixo rendimento na aprendizagem de matemática tem como um dos fatores a acomodação dos professores de matemática em querer se permitir ir além para promover uma educação melhor. Fato que, não podemos atribuir a culpa totalmente ao educador e eximir um sistema falho, que carece de mais atenção e empenho da sociedade. Porém, na linha de frente da batalha por uma educação de qualidade, o professor deve zelar pela aprendizagem daqueles que possuem a educação como único caminho para melhorar sua condição de vida e de sua família.

Partindo desses princípios e da quantidade de atrativos que os estudantes vivenciam no cotidiano, há a necessidade de se encontrar bons materiais para o desenvolvimento das aulas. Existem diversos estímulos que vão contra o desenvolvimento cognitivo do estudante, disputando atenção com o aprendizado escolar, manipulando a mente, viciando-o em hábitos nada saudáveis. Aplicativos de celular, redes sociais, jogos e os chamados “influenciadores digitais”, que pregam uma cultura que aprisiona o usuário por várias horas às telas dos smartphones e Computadores. Além de envolver o estudante em uma bolha de consumismo de conteúdos que pouco agregam conhecimento,eles ainda estimulam a criação de grupos sociais incapazes de refletir sobre suas escolhas e o impacto na sua vida familiar e social.

A forma de introduzir novos conteúdosé um dos pontos chave para atrair a atenção desses estudantes e o uso de organizadores prévios podem potencializar o desenvolvimento da aprendizagem significativa e servir de incentivo para que os eles foquem nos estudos. Com tantas influências negativas cercando o cotidiano do estudante, o educador possui a missão desafiadora de encontrar formas de ganhar a atenção e principalmente manter esse aluno no caminho do aprendizado.

Segundo AUSUBEL (2000, p.11 apud Moreira, 1999) "organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si. [...] se destinam a facilitar a aprendizagem significativa de tópicos específicos, ou série de ideias estreitamente relacionadas." Em termos de eficácia da estratégia ao utilizar os organizadores prévios, MOREIRA (1999, p. 12) afirma que eles têm um efeito pequeno na aprendizagem e depende de condições específicas para ocorrer, como por exemplo, que o estudante tenha conhecimentos prévios relevantes para o processo em andamento e possua também predisposição para aprender. Sem esses elementos não há organizador que supra as condições para o desenvolvimento da aprendizagem significativa.

Apesar dos efeitos serem considerados pequenos no aprendizado do aluno, eles iniciam um processo de adaptação e modelagem do aprendizado que permite ao aluno deter as propriedades para coordenar seus métodos de estudo e analisar a forma como ele lida com as novas informações introduzidas a cada ciclo de aprendizagem.

OBJETIVO GERAL

Construir uma sequência didática para o ensino de circunferência, no terceiro ano do ensino médio, utilizando a tecnologia do GPS como organizador prévio, articulada ao uso do Geogebra como ferramenta auxiliar no ensino dos conceitos geométricos envolvidos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

i. Destacar os conceitos geométricos envolvidos no funcionamento do GPS e aplicá-los no organizador prévio do conteúdo programático da 3ª série do Ensino Médio.
ii. Introduzir a circunferência como lugar geométrico, suas medidas, posições relativas e equações, relacionando-asaoconceito de trilateração.
iii. Analisar os cálculos utilizados na determinação do posicionamento de receptores de GPS e levá-los ao ambiente da aula de matemática.
iv. Discutir aspectos ligados ao ensino-aprendizagem que podem ser utilizados como ferramentas para mediar a construção do conhecimento do estudante.
v. Elaborar uma sequência didática para o ensino de circunferência no terceiro ano do ensino médio.

JUSTIFICATIVA

Quando se estabelece um processo de ensino-aprendizagem, entre o educador e o estudante cria-se também a necessidade de se atentar aos aspectos que tenham o potencial de propiciar uma aprendizagem significativa. Como detentor de conhecimentos prévios, o educando necessita de ferramentas que permitam a ancoragem dos novos conceitos apresentados ao seu universo no processo de aprendizado. Segundo o que apresenta a BNCC (Base Nacional Comum Curricular)(2018):

> “Essa formação não é possível sem que os estudantes produzam sentidos e significados acerca de suas aprendizagens, de maneira contextualizada e protagonista, levando em conta o conhecimento prévio que trazem da esfera escolar e para além dela, aspectos que se observam na leitura dos relatos de prática dos professores.” BNCC (2018, p.1)

A importância de bons elementos norteadores de dinâmicas que tenham potencial de produzir significados para o estudante nos levou a pensar sobre quais aspectos devem se fazer presentes em uma aula de geometria. Mais especificamente no momento do primeiro contato do estudante com um novo conteúdo, sobre quais fatores levam o processo de ensino-aprendizagem a obter êxito.

O professor já encontra naturalmente um alto nível de concorrência com fatores atrativos que cercam o estudante no cotidiano, redes socias, jogos, vídeos, músicas, os próprios colegas com aquele assunto do dia anterior ou mesmo do final de semana, além do próprio aparelho celular. São tantos concorrentes lutando para atrair a atenção do estudante que uma aula expositiva não tem a mínima chance de se sobressair.

Daí, surge a necessidade de se observar o ensino como um processo interacional que parte dos conhecimentos prévios do estudante, permeia por uma discussão e ancoragem da nova informação por meio dos significados criados pelo próprio educando e retorna para ele como um agregado fundamentado por todos os conhecimentos relacionados àquele tema.

> “A passagem da aprendizagem mecânica para a aprendizagem significativa não é natural, ou automática; é uma ilusão pensar que o aluno pode inicialmente aprender de forma mecânica, pois, ao final do processo, a aprendizagem acabará sendo significativa; isto pode

> ocorrer, mas depende da existência de subsunçores adequados, da predisposição do aluno para aprender, de materiais potencialmente significativos e da mediação do professor; na prática, tais condições muitas vezes não são satisfeitas e o que predomina é a aprendizagem mecânica”(MOREIRA, 2011, p.32).

Portanto, entender como os organizadores prévios atuam para contribuir com o aprendizado do estudante pode fornecer uma ferramenta fundamental para tornar a aula um ambiente prazeroso e atraente. Além de que, a escolha de um bom organizador prévio permite que este atue como uma ponte para a estruturação do conhecimento e preparação para as próximas etapas do conteúdo programático. Observando o GPS como uma ferramenta que as pessoas utilizam frequentemente, acreditamos que este possui um grande potencial educacional,visto que, podemos explorar conceitos inerentes à tecnologia para proporcionar uma aula contextualizada que possa ser atraente para os estudantes.

PERCURSO METODOLÓGICO

A presente investigação caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, de caráter exploratório que, a partir de uma revisão bibliográfica, tem por objetivo construir uma sequência didática utilizando o potencial dos organizadores prévios como ferramenta facilitadora para o processo de ensino-aprendizagem, contribuindo, de forma positiva, para a construção do conhecimento do estudante.

Foi realizada uma pesquisa bibliográfica com o intuito de identificar e relacionar as teorias dos principais autores e teóricos que abordam o tema em livros, artigos científicos e monografias, bem como na rede mundial de computadores – Internet, por meio de periódicos e bancos de dados de trabalhos científicos.

Através da elaboração de uma sequência didática pretende-se exemplificar como um conteúdo de cônicas pode ser introduzido relacionando elementos da realidade do estudante ao que vai ser estudado. As etapas presentes na sequência têm como objetivo estabelecer um diálogo entre o conhecimento prévio do estudante, suas experiências fora do contexto escolar e o tema que é trazido pelo professor para estudo.

O tratamento dos dados coletados durante a pesquisa bibliográfica será feito analisando os dados de forma qualitativa e de modo a identificar as características que venham a descrever o problema norteador desta pesquisa. Devido ao fato da sequência não ter sido aplicada, impedindo que muita informação importante para a pesquisa tenha sido coletada, os resultados finais não serão definitivos ou exclusivos, mas servirão de norteadores para auxiliar o educador na criação de ferramentas que permitam um ensino de geometria analítica contextualizado e mais acolhedor.

No primeiro capítulo deste trabalho, serão discutidos aspectos ligados à teoria da aprendizagem descrita por David P. Ausubel no livro intitulado “A aquisição e retenção do conhecimento” e que refletem no papel do educador como mediador do processo de ensino-aprendizagem. No Capítulo dois relacionaremos o contexto histórico e conceitos da geometria analítica trabalhados no ensino médio, base para a tecnologia utilizada no Sistema de Posicionamento Global. No capítulo três serão expostos os aspectos geométricos e relativísticos ligados ao GPS, onde discutiremos as correções necessárias ao sistema para identificação da posição do receptor; apresentaremos a sequência didática proposta e, em seguida, considerações parciais acerca das discussões feitas.

Capítulo 1 - Aspectos da Teoria de Aprendizagem Significativa

1.1 – A teoria de David P. Ausubel

Diversas ocasiões do cotidiano permitem que o estudante esteja imerso em aplicações práticas do conhecimento adquirido pela humanidade em milênios de existência. Tais aplicações podem ser levadas para a sala de aula como ferramentas de apoio para que sejam construídas as pontes necessárias para facilitar o processo de desenvolvimento cognitivo do estudante. Podendo mesmo, servir como organizadores prévios para introduzir a dinâmica de discussão sobre determinado tema do conteúdo programático da turma.

A abordagem utilizada pelo educador deve se adaptar à situação criada pela interação entre a informação apresentada e o estudante como detentor de um conhecimento prévio que precisa dialogar com o novo, para que esse novo conhecimento passe a ter significado. Para AUSUBEL (2000, p.8 apud Moreira, 2011):

> "são necessárias duas condições para que se desenvolva ao redor de uma situação, a aprendizagem significativa. São elas: 1) O material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo e 2) O estudante deve apresentar uma predisposição para aprender".

E partindo, desse pressuposto, podemos estabelecer uma situação onde, o educador como mediador desse processo de ensino-aprendizagem, detém a obrigação de fornecer as ferramentas necessárias para que o aprendizado ocorra de forma suave e efetiva.Um ponto bastante relevante para se observar é que as condições que Ausubel propõe para o desenvolvimento da aprendizagem significativa são necessárias, mas nem sempre suficientes. A realidade na qual a educação no Brasil é imersa enfrenta muitas dificuldades, como falta de material adequado, estrutura escolar e dificuldades de locomoção dos estudantes até a unidade escolar. Além disso, existem ainda os problemas advindos do núcleo familiar e restrições exacerbadas do âmbito religioso.

Todo esse contexto, tornam o papel do educador mais complexo, tirando dele uma parte da responsabilidade pelas falhas na aprendizagem, mas realçando ainda mais seu papel de orientador e de fornecedor de ferramentas que potencializem a construção do conhecimento pelo estudante. A partir daí, o estudante adquire a capacidade de atuar sobre sua consciência, corroborando o que Paulo Freire (1987, p. 8) fala:

> "Paulo Freire não ensina a repetir palavras, não se restringe a desenvolver a capacidade de pensá-las segundo as exigências lógicas do discurso abstrato; simplesmente coloca o alfabetizando em condições de poder re-existenciar criticamente as palavras de seu mundo, para, na oportunidade devida, saber e poder dizer a sua palavra."

Parte do papel do professor em sala de aula é permitir que o estudante tenha autonomia para refletir sobre seu próprio aprendizado e que o mesmo possa desenvolver as competências necessárias para atribuir significados aos materiais de aprendizagem. Entretanto, o educador não pode determinar quais significados serão atribuídos ao organizador prévio escolhido. Para MOREIRA (2010, p. 8):

> “É o aluno que atribui significados aos materiais de aprendizagem e os significados atribuídos podem não ser aqueles aceitos no contexto da matéria de ensino. Naturalmente, no ensino o que se pretende é que o aluno atribua aos novos conhecimentos, veiculados pelos materiais de aprendizagem, os significados aceitos no contexto da matéria de ensino, mas isso normalmente depende de um intercâmbio, de uma “negociação”, de significados, que pode ser bastante demorada.”

A base, construída pelo estudante, deve acompanhar seu amadurecimento cognitivo respeitando cada etapa da metodologia envolvida. Ainda segundo MOREIRA (2010, p. 2), “a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não-literal e não-arbitrária.Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva.”

O termo não literal significa não ao pé-da-letra, enquanto a expressão não arbitrária significa que a interação com a nova informação não ocorre de qualquer maneira ou não se relaciona com qualquer conhecimento prévio. “Nesse processo, não literal e não arbitrário, o novo conhecimento adquirido pelo aprendiz tem uma relevância de significados e o conhecimento prévio dele fica mais rico, mais estruturado, mais elaborado em termos de significados.” (SOUZA; SILVANO; LIMA, 2018, p. 03)

Os conceitos relacionados à identificação de pontos no plano cartesiano, compõem uma estrutura maior que permite desde a definição de regiões geométricas por meio de equações, até a identificação de pontos característicos para o traço da figura que as representa. Cada significado atribuído ao conhecimento produzido pelo estudante permanece com o mesmo, servindo para construção de pontes nas próximas etapas do processo de ensino-aprendizagem, sem dissociar-se do que lhe foi conferido anteriormente.

Investigando o processo de ensino-aprendizagem na educação básica, percebemos que os eventos que fazem parte desse contexto não estão claramente divididos em etapas particionadas. A relação aluno-professor pautada na aula expositiva, se contrapõe ao que deveria de fato ocorrer, com o educador assumindo a função de mediador entre o conhecimento prévio e a nova informação apresentada ao universo do estudante.

Seguindo os preceitos que Ausubel estabelece, o conhecimento prévio que o discente possui sofre uma modificação, e se a metodologia de trabalho cumpre o seu papel, além de modificar, alicerça de maneira segura as convicções do estudante e permite que o novo conhecimento possa se acomodar e passar a fazer parte do ambiente de assimilação de forma escalonada. Para HENSCHEL (2016, p. 5):

> "É importante que o professor selecione ideias básicas de tal forma que não sobrecarregue o estudante com informações desnecessárias durante os primeiros contatos do estudante com aquele conhecimento. A facilitação do desenvolvimento de conceitos ocorre quando elementos mais gerais e mais inclusivos são introduzidos em primeiro lugar."

O conhecimento prévio é um fator que influencia no processo de ensino-aprendizagem do estudante. Mas ter influência, não determina que os resultados venham a ser positivos para facilitar o desenvolvimento cognitivo do educando. A contragosto, pode até ser um bloqueador para que o aprendizado ocorra. Parte daí, a necessidade de escolher bons organizadores prévios para o ensino de matemática e promover uma discussão acerca dos elementos propostos para a metodologia que será empregada na sala de aula.

1.2 – Alguns aspectos metodológicos envolvidos no processo de aprendizagem

É interessante iniciar essa discussão falando de um aspecto metodológico polêmico e visto por muitos com um tom pejorativo para o ensino: o exercício. Muitos veem essa prática como a falta de uma atividade fundamentada para que o aprendizado se desenvolva sem que necessariamente o estudante necessite fazer muitos exercícios e exercitar a memorização. E até mesmo essa é vista com maus olhos, como se fosse um aspecto negativo da aprendizagem significativa, incentivando um processo mecânico de construção do conhecimento.No entanto, (Ausubel, 2000, p. 181) afirma que:

> “a repetição ainda é uma variável muito significativa que deve ser considerada se estivermos preocupados com a aprendizagem e retenção significativas de longo prazo, e com a transferência para aspectos relacionados e sequencialmente dependentes do assunto”.

A criação de memórias a longo prazo depende do processo de ancoragem, que em alguns casos não possui caminhos mnemônicos criados.Contudo, a repetição dos processos envolvidos na retenção do conhecimento e aprendizagem significativa traz um ponto que pode ser explorado com mais afinco, a revisão. Independente da metodologia adotada ou dos processos que compõem a elaboração de um plano de abordagem de um conteúdo, a revisão é um pilar que possibilita ao educador estabelecer parâmetros para identificar o compasso e os próximos passos a serem dados.

Ao abordar determinado tema, nos deparamos com uma questão: Em que momento a revisão deve entrar em pauta? Nesse ponto Ausubel destaca dois caminhos possíveis a seguir. No primeiro, a revisão pode ser aplicada num momento quase imediatamente sequencial a etapa concluída da atividade que está sendo desenvolvida. Óbvio que tal direção tem seus pontos positivos e negativos, como por exemplo, possuir mais foco na aprendizagem mecânica, como ponto negativo. Já no segundo, em que a revisão é aplicada passado certo tempo da realização da atividade ou apresentação de um conteúdo, conceitos mais relativos à teoria tem mais propensão a serem esquecidos pelo estudante. Mas para Ausubel (2000, p. 184):

> “Em termos de o que é realmente aprendido e retido, o intervalo relativamente longo entre a aprendizagem e as sessões de revisão na aprendizagem significativa são comparáveis às curtas intervalo de prática intertrial em estágios avançados de aprendizagem mecânica.”

Nesse âmbito de revisões um aspecto muito importante e um dos focos principais das revisões aplicadas a curto prazo é o “feedback”. Ferramenta primordial que antecede qualquer avaliação que se deseje fazer. No momento em que ele é obtido, o professor pode analisá-lo e decidir o melhor caminho a seguir.

De maneira mais ampla podemos afirmar que a prática, nesse momento, definida como repetição mecânica de exercícios, auxilia na abstração de processos subsequentes, uma vez que solidifica a base do conhecimento adquirido e passa a servir com um ponto de ancoragem para os posteriores, desde que estes não sejamsuficientemente destoantes do adquirido a ponto de não garantirem ligação alguma no cognitivo do estudante.

Saindo do momento introdutóriodo conteúdo, temos que lidar com a questão da prática que, assim como a revisão, possui espaçamentos adequados para cada situação. Entretanto Ausubel (2000) pondera a capacidade de distribuição do aprendizado em dois modelos, (1) na medida em que a repetição fortalece principalmente aqueles componentes da tarefa de aprendizagem que ainda não foram aprendidos, o esquecimento de componentes previamente aprendidos que ocorrem entre as tentativas em uma prática distribuída permite que esses componentes esquecidos (bem como os ainda não aprendidos) lucrem deste efeito especial de fortalecimento de tentativas posteriores; e (2) o descanso oferece uma oportunidade para a dissipação da confusão e resistência ao aprendizado que caracteriza "choque inicial de aprendizagem", além disso, o esquecimento pode atuarcomo gerador de novas respostas ou significados.

Saindo do campo da prática, passamos agora para um aspecto presente durante todo o processo da aprendizagem significativa, a qual Ausubel chama de solicitação e orientação. Conceitos ligados à condução do processo ou atividade de ensino realizada com os estudantes em que o educador instiga a criação de uma independência através de lições subsequentes que possuem um salto cognitivo pequeno para justamente possibilitar que o educando faça projeções mais assertivas sobre um determinado conceito ou procedimento.

Ao fazer isso repetidas vezes, cria-se o hábito no estudante de tentar, por si só, resolver um problema aplicando um conceito ou procedimento aprendido anteriormente sem que instruções lhe sejam dadas o tempo todo. Com isso, o professor abre para si a possibilidade de exigir do estudante sua maior atuação na construção do conhecimento. Abre-se aí uma outra questão que nos faz refletir sobre o porquê de se estudar de forma tão sucinta um processo que por muitas vezes não dura mais que algumas horas para ser realizado. O estudante precisa realmente ser motivado para que ocorra o aprendizado?

A resposta para a questão acima parece bem óbvia, mas na realidade não é bem assim. Ausubel (2000, p. 197) afirma que:

> "A relação causal entre motivação e aprendizagem é tipicamente recíproca em vez de unidirecional. Tanto por esse motivo quanto porque a motivação não é uma condição indispensável de aprendizagem, não é necessário postergar atividades de aprendizagem até que os interesses e motivações apropriados tenham sido desenvolvidos. Frequentemente, a melhor forma de ensinar alunos desmotivados é ignorar sua falta de motivação para o tempo e concentrar-se em ensiná-los cognitivamente da forma mais eficaz possível. Algum grau de aprendizagem ocorrerá em qualquer caso, apesar da falta de motivação; e desde que há a satisfação inicial de aprendizagem, esses alunos desenvolverão retroativamente a motivação para aprender mais. Em algumas circunstâncias, portanto, a mais apropriada forma de despertar a motivação para aprender é se concentrar no cognitivo, em vez de nos aspectos motivacionais da aprendizagem e confiar na motivação que é desenvolvida retroativamente a partir de realizações educacionais bem-sucedidas para estimular o aprendizado adicional."

Entender os cernes envolvidos no processo da aprendizagem é importante para percebermos que não necessariamente temos que elaborar organizadores prévios que motivem os estudantes pelo fato de serem puramente atrativos. Mas elaborar bons organizadores prévios que possuam capacidade de contribuir de forma efetiva para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

Seguindo nossa trajetória pelos aspectos do processo de ensino-aprendizagem, vamos passar agora por alguns mais sutis, que dependem do nível de percepção do educador para aplicação pontual e correta. A perspectiva motivacional envolve uma série de fatores que podem motivar os estudantes seguindo sentidos diferentes, sendo o primeiro deles a atenção. Tal fator, utilizado como método de incentivo ao desenvolvimento de uma atividade e a busca por melhores resultados pelos educandos, fornece uma fonte de estímulo.

Principalmente na infância e adolescência, o ser humano quer ser notado, seja pelos colegas, professores, ídolos ou qualquer figura que lhes sirva de inspiração. Para este, o simples fato ser notado em meio a outras pessoas faz com que o seu ego seja alimentado e de forma saudável inflar o ego de uma pessoa é um aspecto motivacional. Nem todos estão dispostos a trocar o lugar confortável em que se encontram por um pedestal onde todos os seus erros e acertos são observados com mais afinco. Parte daí a necessidade do senso de percepção apurado do professor para saber onde pontuar esse aspecto.

Para aqueles mais reservados, o aspecto relacionado à cognição parece mais adequado, pois além de motivar o estudante à aquisição e retenção do conhecimento, traz consigo uma característica muito importante, a recompensa do aprendizado pelo conhecimento. A esse aspecto Ausubel denominou *impulso cognitivo,* para ele:

> "É mais importante na aprendizagem significativa do que na aprendizagem mecânica ou instrumental. É, pelo menos potencialmente, o tipo de motivação mais importante na aprendizagem em sala de aula. Isto é tão por causa de sua potência inerente e porque o aprendizado significativo, ao contrário desses outros tipos de aprendizagem humana, automaticamente fornece sua própria recompensa." (AUSUBEL, 2000, p. 202)

Atrelado ao aspecto da atenção e já mencionado anteriormente, o *impulso para aumentar o ego,* é uma ferramenta que possui um viés mais desafiador para o estudante,pois atrela a recompensa à avaliação de outrem e condiciona o estudante a constantemente buscar aprovação pelas atitudes tomadas. Isso traz como consequência futura elementos, que como o próprio Ausubel cita, podem prejudicar o desempenho do estudante como o desenvolvimento de ansiedade, medo do fracasso e de perder um status já conquistado, principalmente se já o mantém a um certo tempo.

Por outro lado, segundo o autor, "a necessidade de aprimoramento do ego, status conquistado, reconhecimento por meio da realização, e a internalização de aspirações vocacionais de longo prazo são, afinal, marcas tradicionais do amadurecimento da personalidade em nossa cultura." Dessa forma, apesar da perspectiva parecer uma má ideia a longo prazo por trazer malefícios bem relevantes, atrelada a outros aspectos pode ser trabalhado como componente do fator social envolvido.

Em contraponto a isso, Paulo Freire (1996, p. 20) traz uma visão mais humanista do papel do educador. Buscando colocar o estudante em uma posição reflexiva sobre sua existência e papel social, atribuindo ao professor a responsabilidade de promover possibilidades para desenvolver sua inteligência com um olhar mais crítico. Em seu livro intitulado “Pedagogia da Autonomia”, ele cita o seguinte:

> “A grande tarefa do sujeito que pensa certo não é transferir, depositar, oferecer, doar ao outro, tomado como paciente de seu pensar, a inteligibilidade das coisas, dos fatos, dos conceitos. A tarefa coerente do educador que pensa certo é, exercendo como ser humano a irrecusável prática de inteligir, desafiar o educando com quem se comunica e a quem comunica, produzir sua compreensão do que vem sendo comunicado.”

Nesse caminho, caso a escolha seja inflar o ego do estudante, o desenvolvimento de um ser humano mais empático e preocupado com o seu papel social tende a ser prejudicado, visto que o ser humano possui tendência priorizar o seu bem estar e status em detrimento de uma causa maior.

Durante essa discussão, relatamos aqui alguns dos aspectos presentes no processo de aprendizagem e retenção do conhecimento que podem ser explorados para a elaboração de atividades e sequências que tenham potencial de trazer resultados positivos. Foi enfatizado um fator específico a todas as perspectivas, a recompensa. Ausubel (2000, p. 203) diz que:

> “As recompensas influenciam o aprendizado de três maneiras gerais. Primeiro, servindo como incentivos eles ajudam a definir um problema significativo, relacionando uma sequência específica ou organização de atividades de aprendizagem do componente para um resultado de objetivo específico e bem-sucedido. Sem tal em relação a um objetivo, o aprendizado muitas vezes tende a ser amorfo e não direcionado. Concomitantemente, fornecendo informações significativas sobre o sucesso ou fracasso de respostas, recompensas fornecem ênfase seletiva em pontos de escolha crítica desejada ou significados corretos, facilitando assim a discriminação entre relevantes e irrelevantes dicas.”

Paralelo a isso, existe um aspecto que está sempre presente, porém pouco notado. O fator *punição* está atrelado a qualquer âmbito que busque avaliar desempenho, produtividade, assertividade e todos os resultados que caracterizem o andamento de um processo na sociedade. Não é diferente na perspectiva da aprendizagem significativa. Diferentemente do que parece, a punição serve como um motivador bastante eficaz para a realização de uma atividade ou aquisição de um objetivo. Em uma situação onde a recompensa deixa de ser interessante e o indivíduo se vê em um limiar em que nada acontece com a não obtenção da recompensa, a punição surge para equilibrar a balança.

De um lado, o sujeito percebe que ao não atingir determinado resultado ou meta, os produtos de tal ação não serão benéficos, incentivando uma resposta em relação a situação atual. É importante, no entanto, enfatizar que apesar de apresentar várias perspectivas para o desenvolvimento do processo de aprendizagem, Ausubel não dá um destaque, ou coloca nenhuma delas em um patamar acima das outras. Cada qual com sua importância abre portas para a exploração de atividades e metodologias mais adequadas para abordar tal conteúdo ou trabalhar com tal turma. As vertentes de recompensa e punição, também são bases da escola Behaviorista e fazem parte do pensamento de Skinner (1972, p. 178), que afirma:

> “Se a punição for usada, deverá sê-lo de maneira eficaz. Esforços para reduzir o seu alcance poderão, na realidade, estendê-lo. O professor humano frequentemente recorre ao aviso prévio: “Se você fizer isto novamente, terei que puni-lo”. Como estímulo aversivo condicionado, este tipo de aviso é uma punição leve, mas é também um estímulo discriminativo, e um aluno que só for punido após ter sido avisado, discriminará bem entre as ocasiões em que o seu comportamento será ou não punido, e mostrará os efeitos da punição só depois de ter recebido um aviso. Outro erro é só punir os casos graves de comportamento indesejado. O aluno será assim encorajado a ir tão longe quanto ousar, e o efeito sobre o professor poderá levar à construção de um programa que, na realidade, reforça o comportamento a ser suprimido.”

Tudo isso trafega num limiar que pode acabar caindo no campo da repressão nociva e na aprendizagem mecânica e pragmática, voltado unicamente para obtenção de notas e aprovação nas provas e exames. Depende nesse momento, da sensibilidade do educador para direcionar caminhos que possibilitem ao estudante refletir sobre a importância do aprendizado de forma tal que o estudante entenda que a “punição” é apenas o fato dele ficar sem esse conhecimento tão importante e a “recompensa” é a sensação de perceber que aquele conhecimento, tão importante, adquiriu um significado tão consistente em sua estrutura cognitiva que sua aquisição é capaz de lhe proporcionar plenitude e prazer.

Capítulo 2 - Aspectos Teóricos da Geometria Analítica

2.1 – Contexto histórico

A geometria tem seu surgimento com os gregos que, apesar de uma capacidade de observação e raciocínio, faltava um maior grau de operacionalização algébrica. Posteriormente, com a introdução da álgebra como um princípio unificador do conhecimento gerado em torno da geometria analítica, agrega-se aos estudos um contexto mais abstrato.

René Descartes (1596 - 1650) foi um filósofo, físico e matemático francês considerado pai da geometria analítica. René duPerron Descartes nasceu na antiga província de Touraine, hoje Descartes, na França, no dia 31 de março de 1596. A principal obra de Descartes, "O Discurso Sobre o Método", foi publicada em 1637. Era necessário desenvolver novos procedimentos e avanços para a geometria analítica, que com introdução dos estudos em álgebra ganhou novos horizontes.

Nesse campo de estudos teóricos juntou-se a ele Pierre de Fermat, um matemático e cientista francês, nascido na primeira década do século XVII. Fermat desenvolveu de forma independente de Descartes um modelo para localização com escalas de pontos no plano.

2.2 – Os princípios da geometria analítica

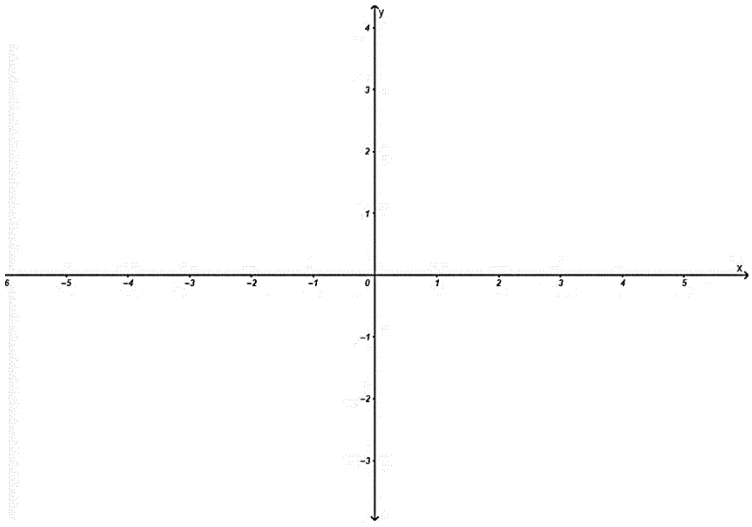
Descartes acreditava que a humanidade deveria estudar a geometria por meios dedutivos e não por intuições. Partindo desse pressuposto, propôs que o estudo da geometria acontecesse não apenas por desenhos, mas a partir de planos, coordenadas e dos princípios da álgebra e de análise.

Dentre vários elementos abordados pela geometria analítica está o plano cartesiano, elaborado por René Descartes e Pierre Fermat. Originalmente criado para representar pares ordenados *(x,y)* em pontos sob um plano que contém as retas perpendiculares denominadas eixo X *(eixo das abcissas)* e eixo Y *(eixo das ordenadas)*.

2.2.1 – O Ponto

O plano cartesiano é dividido em quatro quadrantes limitados pelos eixos Ox e Oy, identificados em sentido anti-horário em ordinais do 1º ao 4º. Cada quadrante possui sinais para as coordenas que identificam os pares ordenados.

Figura 1 – Eixo Cartesiano



FONTE: O autor

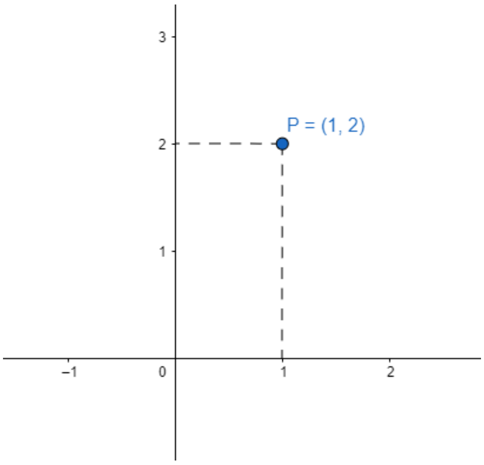
Cada reta é orientada segundo a reta real com o ponto de intersecção O(origem) representado pelas coordenadas (0,0).

Tabela 1: Sinais nos Quadrantes

Quadrante	Abcissa	Ordenada
1º Quadrante	+	+
2º Quadrante	-	+
3º Quadrante	-	-
4º Quadrante	+	-

Cada ponto no plano cartesiano corresponde a uma coordenada *(x,y)*, onde x corresponde à distância |x| entre a origem(ponto de intersecção entre as retas) e a coordenada sobre o eixo X e y corresponde à distância |y| entre a origem(ponto de intersecção entre as retas) e a coordenada sobre o eixo Y.

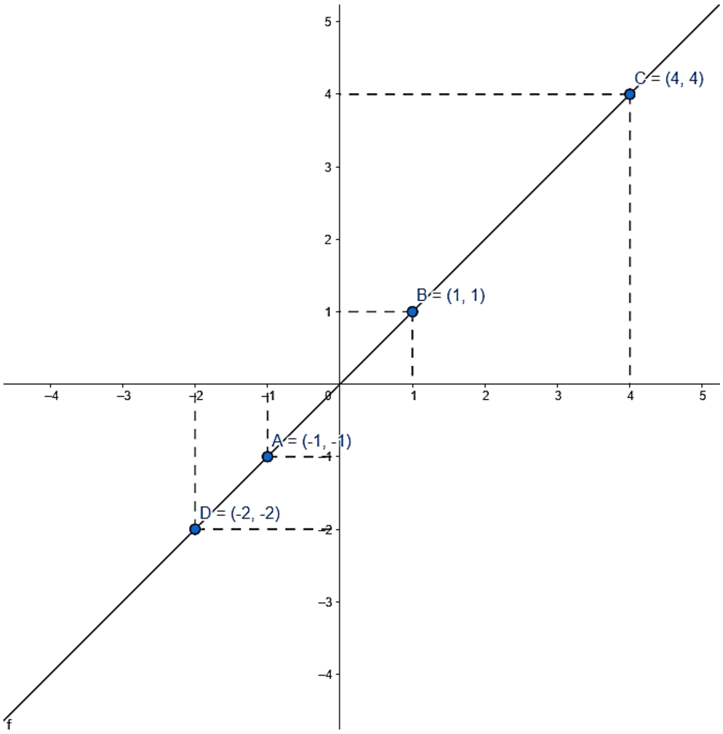
Figura 2 – Ponto P no plano cartesiano



FONTE: O autor

Além disso temos que, a reta que corta o 1º e o 3º quadrantes é denominada *bissetriz dos quadrantes ímpares*, onde para todo ponto P sob essa reta $x_P = y_P$.

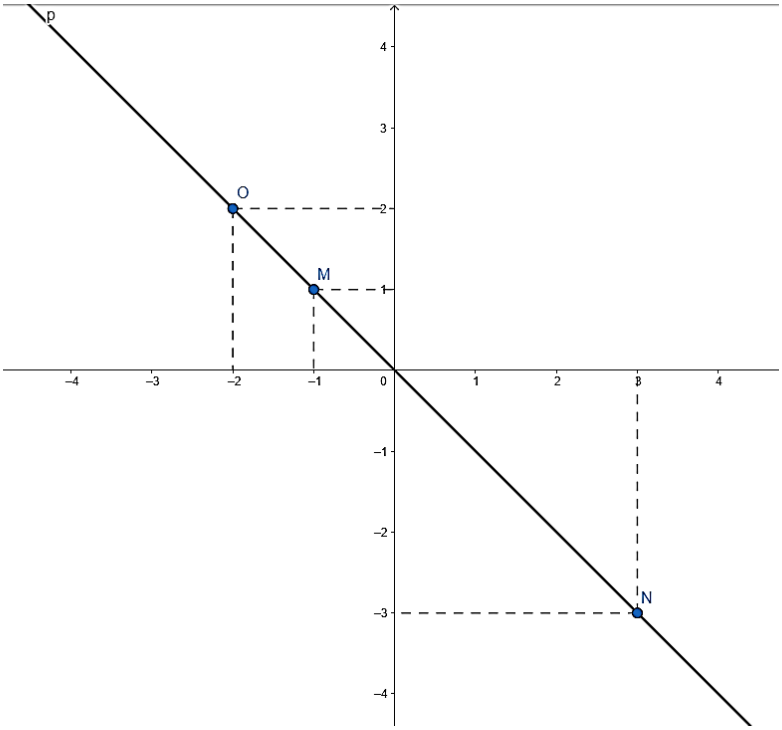
Figura 3 – 1ª bissetriz (bissetriz dos quadrantes ímparesb_{13})



Fonte: O autor

Já a reta que corta o 2º e o 4º quadrantes é denominada *bissetriz dos quadrantes pares*, onde para todo ponto P sob essa reta $x_P = -y_P$.

Figura 4 – 2ª bissetriz (bissetriz dos quadrantes paresb_{24})



FONTE: O autor

Um ponto pertence a um dos eixos se uma de suas coordenadas é igual a zero.

$$P \in Ox \Leftrightarrow y_P = 0$$

$P \in Oy \Leftrightarrow x_P = 0$

Podemos ainda expressar tais definições da seguinte forma:

$Ox = \{(x, 0) |\ x \in R\}$

$Oy = \{(0, y) |\ y \in R\}$

Um ponto pertence às bissetrizes dos quadrantes 1 e 3, se e somente se, os módulos de suas coordenadas são iguais. E pertence aos quadrantes 2 e 4, se uma de suas coordenadas é igual a menos o módulo da outra.

$P \in b_{13} \Leftrightarrow |x_P| = |y_P|$

$P \in b_{24} \Leftrightarrow x_P = -|y_P|\ ou\ y_P = -|x_P|$

Podemos representar essas definições da seguinte forma:

$b_{13} = \{(x, x) |\ x \in R\}$

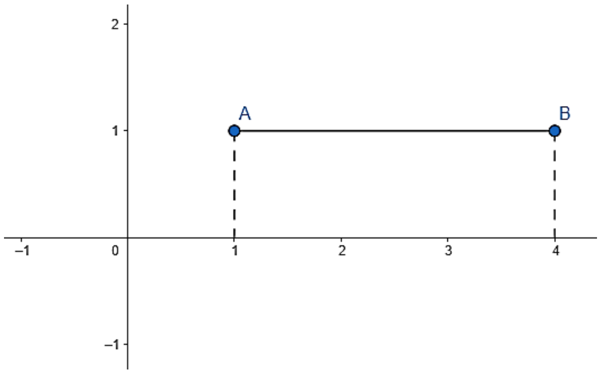
$b_{24} = \{(x, -x) |\ x \in R\ \}$

2.2.2 – Distância entre dois pontos

Para cálculo da distância entre dois pontosA(x_1, y_1) e B(x_2, y_2), precisamos considerar algumas situações:

1º Caso: $AB // Ox$, nesse caso $y_1 = y_2$.

Figura 5 – distância entre dois pontos y_1=y_2



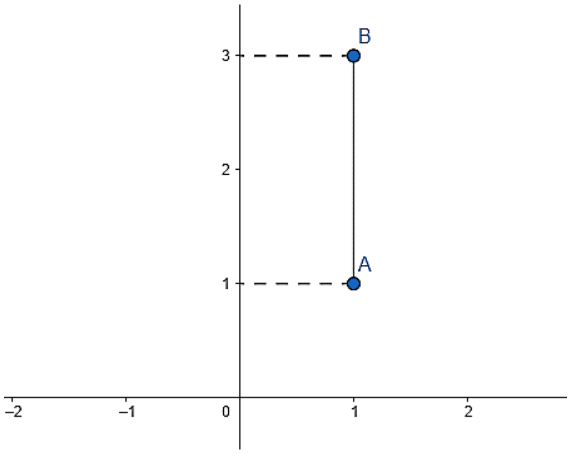
FONTE: O autor

Como $y_1 = y_2$, temos:

$$d_{AB} = |x_2 - x_1|$$

2º Caso: $AB // Oy$, nesse caso $x_1 = x_2$.

Figura 6 – distância entre dois pontos x_1=x_2



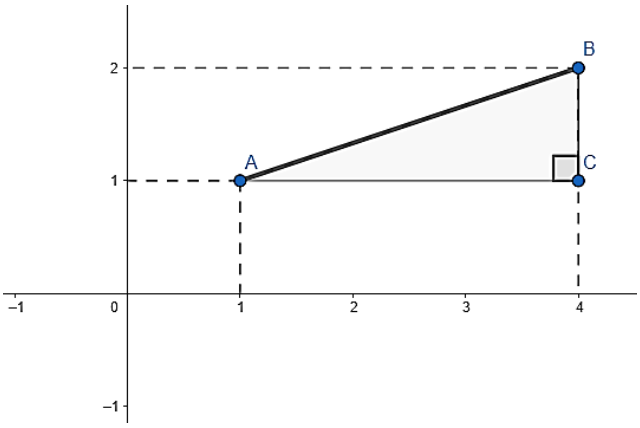
FONTE: O autor

Como $x_1 = x_2$, temos:

$$d_{AB} = |y_2 - y_1|$$

3º Caso: $AB \sim // \ Ox \ e \ AB \sim // \ Oy$(Vamos utilizar a notação "~// " para indicar a condição de não paralelismo.)

Figura 7 – distância entre dois pontos $x_1 \neq x_2 \ e \ y_1 \neq y_2$



FONTE: O autor

-Utilizando C(x_2, y_1) no triângulo retângulo e aplicando o teorema de Pitágoras:

$$(d_{AB})^2 = (d_{AC})^2 + (d_{BC})^2$$

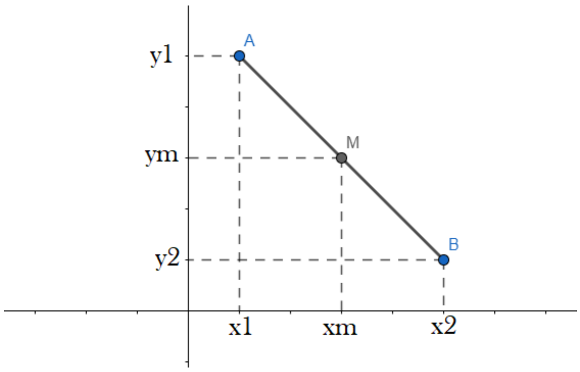
$$(dAB)^2 = (x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2$$

$$dAB = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$$

2.2.3 – Coordenadas do Ponto Médio de um segmento

O ponto médio de um segmento é definido como o ponto que divide um segmento de reta em dois outro segmentos de mesma medida. Considere o segmento AB e o ponto M(x,y) ponto médio de AB.

Figura 8 – Ponto médio do segmento AB



FONTE: O autor

Pelo teorema de Tales, podemos notar a seguinte relação:

$AM = MB \Rightarrow X_m - x_1 = x_2 - X_m \Rightarrow 2X_m = x_1 + x_2$

Portanto,

$$X_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Da mesma forma podemos estabelecer a relação entre as coordenadas do eixo Y:

$BM = MA \Rightarrow Y_m - y_2 = y_1 - Y_m \Rightarrow 2Y_m = y_1 + y_2$

Portanto,

$$Y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

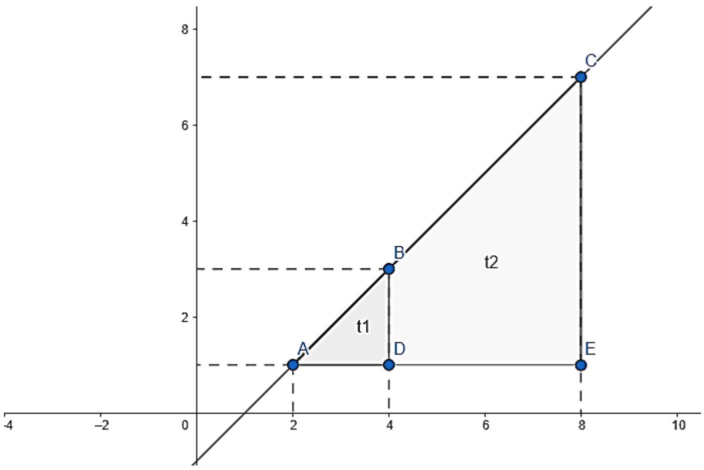
Daí, podemos concluir que as coordenadas do ponto M são:

$$M = (X_m, Y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

2.2.4 – Condições de alinhamento de três pontos

Como já sabemos, dois pontos são suficientes para determinar uma reta, portanto, dois pontos são sempre colineares. Dizemos que três pontos são colineares quando existe uma única reta que passa por eles.

Figura 9 – Pontos colineares



FONTE: O autor

Os triângulos ABD e ACE, pelo teorema de Tales, são triângulos semelhantes. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_a}$$

Com, $(x_b - x_a) \neq 0 \ e \ (y_b - y_a) \neq 0$.

Resolvendo a equação acima, temos:

$(x_c - x_a)(y_b - y_a) - (x_b - x_a)(y_c - y_a) = 0$

$\Rightarrow x_c y_b - x_c y_a - x_a y_b - x_b y_c + x_b y_a + x_a y_c = 0$

$\Rightarrow x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c - x_c y_b - x_a y_c - x_b y_a = 0$

Observando a equação podemos perceber que o agrupamento é equivalente ao cálculo do determinante de ordem 3.

Daí, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c - x_c y_b - x_a y_c - x_b y_a$$

Concluímos que, se três pontos A, B e C estão alinhados, então:

$$D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A recíproca também é verdadeira.

Portanto podemos afirmar que, três pontos A, B e C são colineares, se e somente se:

$$D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.2.5 – Equação da reta

IEZZI (2013), afirma segundo o teorema da reta que, “A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ em que a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto genérico de *r*.”

Sendo, A e B pontos definidos da reta, pelo axioma da reta: pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos. E definimos um ponto P(x,y) qualquer pertencente a r. Daí. podemos associar a condição de alinhamento de três pontos para exibir o formato da equação geral da reta.

$$D = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, temos:

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

Fazendo:

$$y_1 - y_2 \; = \; a$$

$$x_2 - x_1 \; = \; b$$

$$x_1y_2 - x_2y_1 = c$$

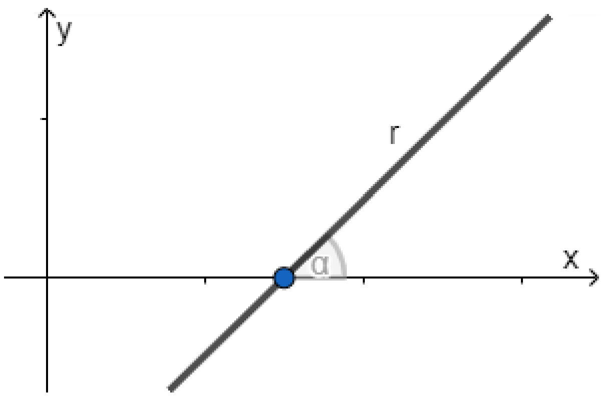
Para qualquer $P(x, y) \; \in r$, é válida a equação:

$ax + by + c = 0$ (equação geral da reta)

2.2.6 – Inclinação da reta

Chama-se inclinação da reta a medida do ângulo que a reta r, no plano cartesiano, forma com o eixo X.

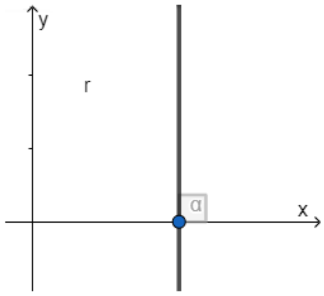
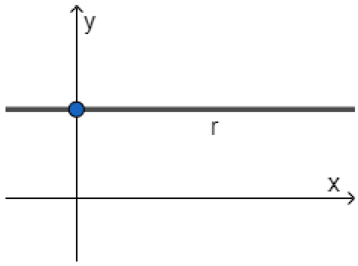
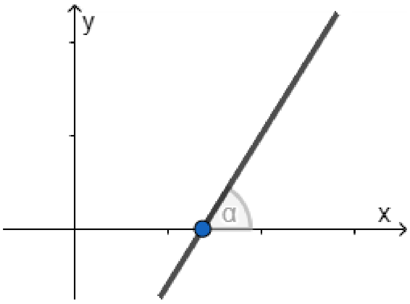
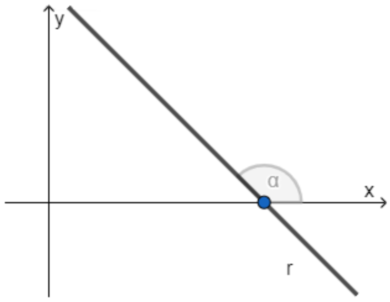
Figura 10 – Inclinação da reta



FONTE: O autor

Existem alguns casos possíveis da inclinação da reta que valem a pena observar:

Quadro 1: Casos de Inclinação da reta

<table>
<tr><td colspan="2">Casos Possíveis da inclinação da reta</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Reta paralela ao eixo y
$\alpha = 90°$</td><td>Reta paralela ao eixo x
$\alpha = 0°$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A reta forma um ângulo agudo com o eixo x
$0° < \alpha < 90°$</td><td>A reta forma um ângulo obtuso com o eixo x
$90° < \alpha < 180°$</td></tr>
</table>

2.2.7 – Coeficiente Angular

O coeficiente angular da reta é dado pela inclinação da reta em sentido anti-horário determinado pela medida da tangente do ângulo α.

Nota: Só é possível determinar o coeficiente angular da reta com pelo menos uma informação: dois pontos distintos, a equação geral ou a posição/direção da reta.

Considere dois pontos distintos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, pertencentes a reta r não paralela ao eixo y, pois não é existe tg 90°.

$$m = tg\alpha = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Tomando $A(x_1, y_1)$ como um ponto definido e B(x,y) um ponto genérico, podemos estabelecer uma equação da reta dependente de *m*.

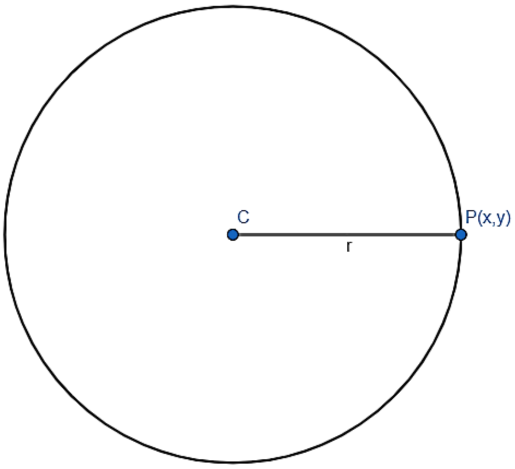
$$m = \frac{y - y1}{x - x1} \Rightarrow y - y1 = m(x - x1)$$

Portanto, temos a equação de uma reta que passa por A e possui coeficiente angular*m*.

2.2.8 – A Circunferência

Tomando um ponto C, no dado plano α, e uma distância *r*>0, chama-se circunferência o conjunto dos pontos de α que estão à distância r de C.

Figura 11 – Circunferência de raio r



FONTE: O autor

Podemos escrever a distância entre o ponto C e outro ponto qualquer pertencente à circunferência como:

$$d(C, P) = r$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)^2 = (r)^2$$

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2}$$

Daí, o que conhecemos como equação reduzida da circunferência. Ao desenvolvermos tal equação iremos obter sua equação geral.

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+y^2 = r^2$$

Reorganizando,

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2) = 0$$

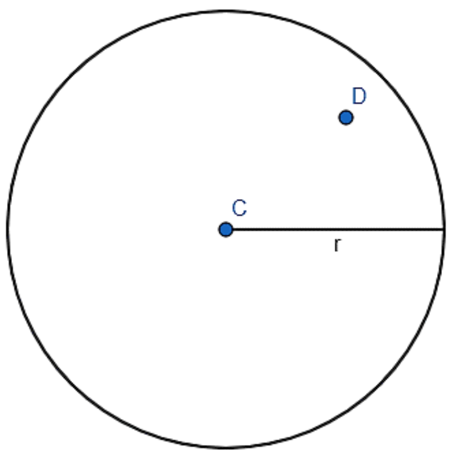
Como a, b e r representam números reais, $a^2+b^2-r^2$ é um número real.

2.2.9 – Posições relativas entre ponto e circunferência

Dados um ponto P(x, y) e uma circunferência $\gamma: (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, de centro C(a, b) e raio *r>0*, P pode ser externo, interno ou pertencer à circunferência.

- P é interno à circunferência, se e somente se, 0 <*d(C, P)* < *r*, daí temos:
  $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r$
  $(x-a)^2+(y-b)^2 < r^2$
  $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2 < 0$

Figura 12 – Ponto interior à circunferência

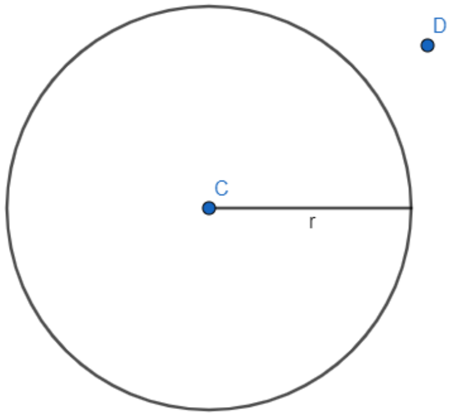


FONTE: O autor

- P é interno à circunferência, se e somente se, *d(C, P) > r*, daí temos:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} > r$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2 > r^2$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2 > 0$$

Figura 13 – Ponto exterior à circunferência

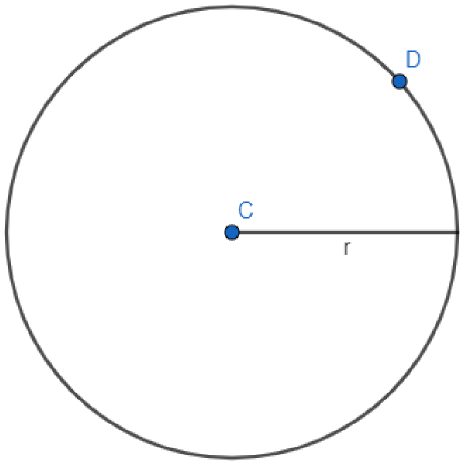


FONTE: O autor

- P pertence à circunferência, se e somente se, *d(C, P) = r*, daí temos:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2 = 0$$

Figura 14 – Ponto pertencente à circunferência



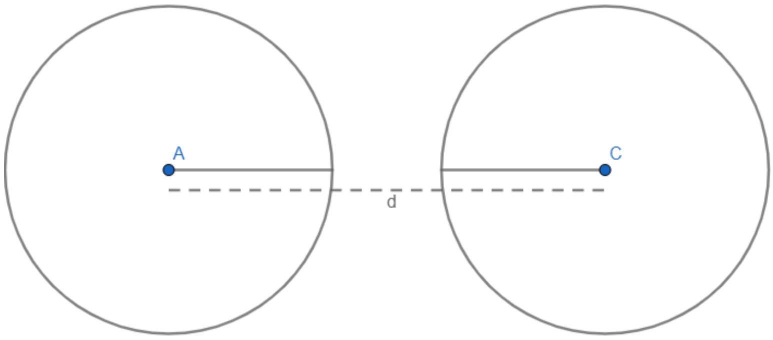
FONTE: O autor

2.2.10 - Posições relativas entre duas circunferências

Dadas duas circunferências $\gamma_1: (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = {r_1}^2$ e $\gamma_2: (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = {r_2}^2$, centros $C_1(a_1, b_1)$ e $C_2(a_2, b_2)$ e raios $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$. Para determinarmos a posição relativa entre as circunferências é necessário, comparar a distância C_1C_2entre os centros com a soma r_1+r_2 ou com a diferença $|r_1 - r_2|$ dos raios.

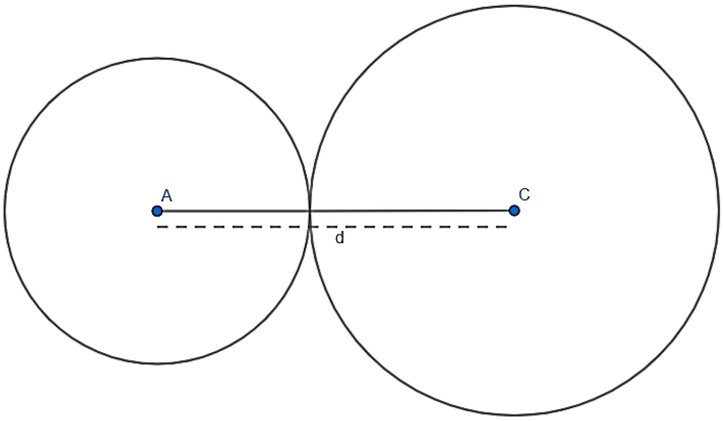
- Circunferências exteriores:

Figura 15 - $d > r_1 + r_2$



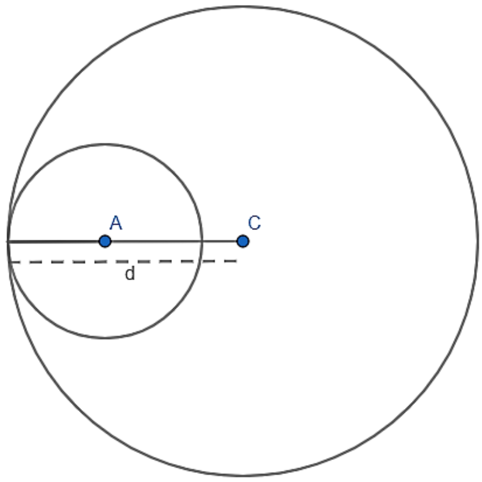
- Circunferências tangentes exteriormente:

Figura 16 - $d = r_1 + r_2$



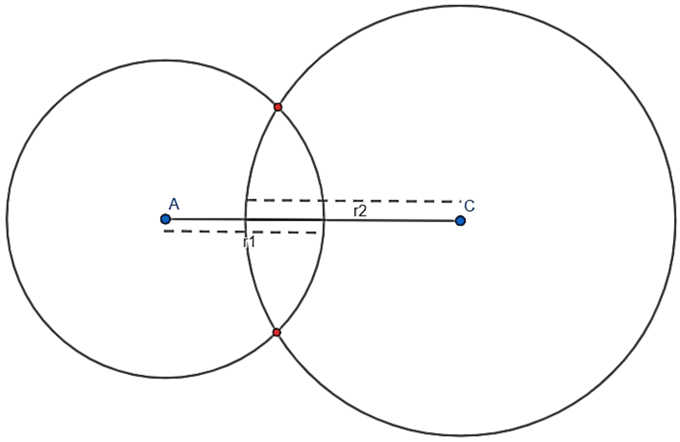
- Circunferências tangentes interiormente:

Figura 17 - $d = |r_1 - r_2|$



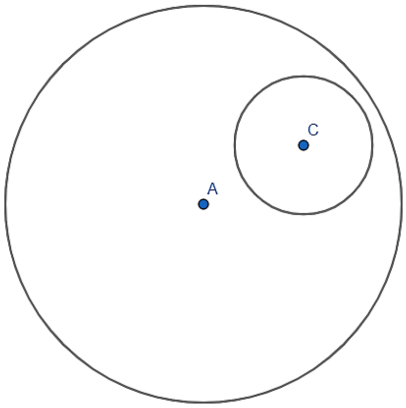
- Circunferências secantes:

Figura 18 - $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$



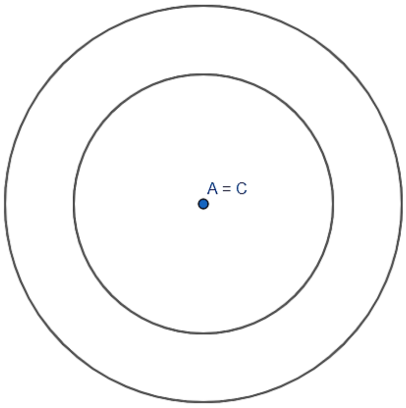
- Circunferência de menor raio interior a outra:

Figura 19 - $0 \leq d < |r_1 - r_2|$



- Circunferências concêntricas:

Figura 20 - $d = 0$



A exposição dos conceitos relatados até aqui mostra que determinadas figuras geométricas (retas e círculos), podem ser obtidas através de relações algébricas. A partir delas, são resolvidos os problemas que levaram ao aperfeiçoamento dos métodos de navegação, localização por mapas e posteriormente a criação do GPS. Tais estruturas no plano, primeiramente, relacionadas com o plano cartesiano servirão para associação com os conceitos de longitude e latitude comumente conhecidas no âmbito da geografia cartográfica.

Capítulo 3 - Elementos da geometria e da física presentes no GPS

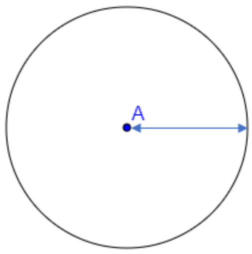
3.1 – Contexto tecnológico

O GPS, tecnologia criada na década de 1960, é uma tecnologia originada com objetivos militares que revolucionou o conhecimento geográfico que a humanidade possuía sobre o planeta terra. Atualmente a frota de satélites que compõe o sistema de posicionamento global possui 24 unidades em funcionamento com 8 unidades de reserva. Cada um equipado com um relógio atômico muito preciso que emite um sinal contendo a posição orbital do satélite em relação ao globo terrestre e o horário de envio do sinal.

Mas antes de fazer um estudo um pouco mais aprofundado, pode-se relembrar um mecanismo mais simples aplicado à tecnologia do GPS conhecido no ambiente dos estudos geométricos como *trilateração*. Nela, trabalha-se com distâncias e a partir das distâncias conseguimos calcular os ângulos e assim, a posição em que um ponto se localiza.

Suponha que observando uma representação geográfica de uma região, deseja-se encontrar um ponto específico entre municípios e cujas únicas informações que se possui são as distâncias entre o ponto e uma determinada cidade.

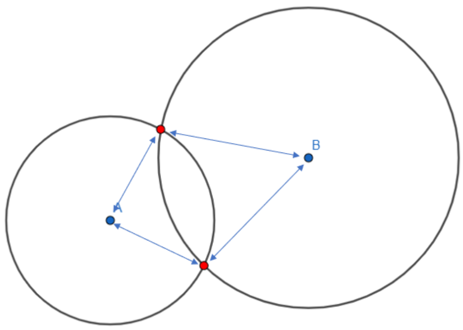
Figura 21 – Circunferência Definição



Fonte: O autor

Sabe-se que, partindo do ponto onde o objeto se encontra até a cidade A existe uma distância específica. Porém, essa informação por si só não determina com exatidão a localização do objeto, pois sua distância até a cidade pode estar em qualquer ponto sobre a circunferência definida por esse raio em um determinado plano; delimitando assim o ponto procurado a uma circunferência de raio R.

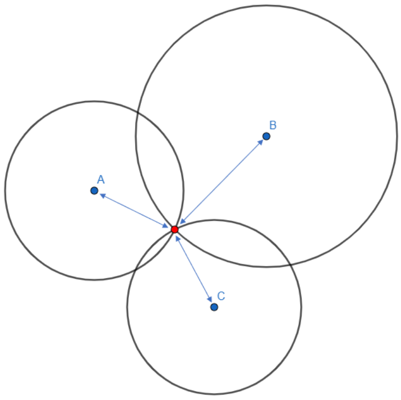
Figura 22 – Intersecção entre duas circunferências



Fonte: O autor

Adicionando uma segunda informação a esse problema, podemos observar que o objeto se localiza a uma determinada distância de uma cidade B, restringindo agora a localização do objeto requerido a dois pontos possíveis, que são intersecções entre as duas circunferências geradas.

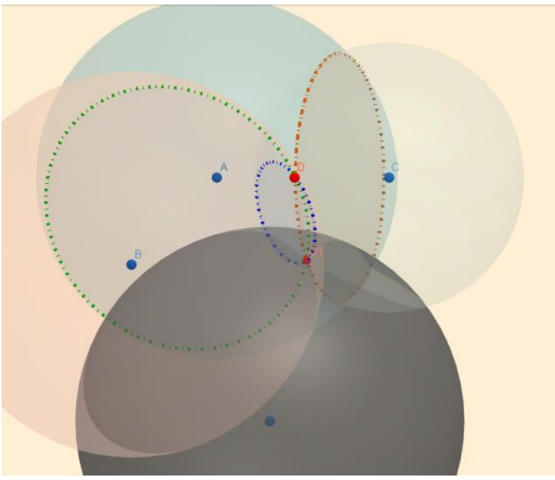
Figura 23 – Intersecção entre três circunferências



Fonte: O autor

Somando um novo referencial a este problema, tem-se agora a distância do objeto a uma determinada cidade C, cuja medida do raio que gera a circunferência de pontos equidistantes de C, restringe a localização do objeto procurado a um único ponto possível. No GPS o padrão de *trilateração* permanece, exceto que agora em ambiente 3D, saindo de circunferências para esferas e adicionando variáveis físicas como por exemplo o tempo entre a emissão e recepção do sinal.

Figura 24 – Intersecção entre três esferas



Fonte: O autor

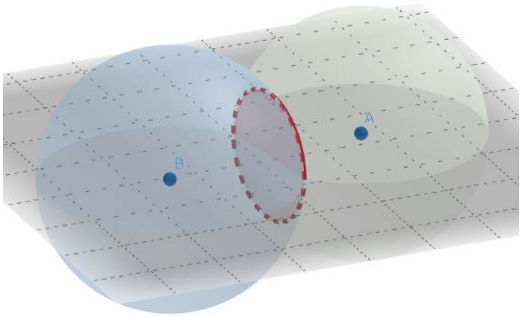
Conforme NATARIO (2015, p. 2), num dado instante em que um receptor GPS recebe o sinal contendo a hora e posição em que o sinal foi enviadoeste se encontrava na posição (x_1, y_1, z_1) no instante t_1. Se c for a velocidade da luz, o sinal de rádio terá viajado uma distância $c\ (t - t_1)$. Deste modo, o receptor sabe que a sua posição (x, y, z) se encontra na superfície esférica de raio $c(t - t_1)$ centrada no ponto (x_1, y_1, z_1), ou seja, é uma solução da equação

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (c(t - t_1))^2.$$

Da mesma forma, se o segundo satélite comunica que se encontrava na posição (x_2, y_2, z_2) no instante t_2, o receptor conclui que se encontra em algum lugar na superfície esférica de equação

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = (c(t - t_2))^2.$$

Figura 25 – Intersecção entre duas esferas



Fonte: O autor

Resolvendo o sistema de equações proposto pela intersecção entre as duas esferas temos uma circunferência contida em um plano que determina tal intersecção. Fazendo-se necessária a utilização de mais um satélite para determinar, através de outra interseção, o ponto na circunferência gerada pelos dois primeiros satélites. Daí, temos um sistema de equações composto por três circunferências que nos permite calcular a posição (x, y, z) do receptor do sinal.

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (c(t - t_1))^2$

$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = (c(t - t_2))^2$

$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = (c(t - t_3))^2$

Como resultado desse sistema, temos duas soluções possíveis para o posicionamento do receptor. Porém, uma delas é descartada por não estar localizada sob a superfície do planeta terra. A este conjunto é ainda adicionado um quarto satélite para corrigir as discrepâncias originadas pelos tempos de envio e recepção de sinal. Dessa forma, qualquer receptor na superfície da terra, sempre estará ao alcance de pelo menos quatro satélites.

2.3 - Aspectos Da Teoria Da Relatividade De Albert Einstein

A Teoria da Relatividade foi proposta pelo físico alemão Albert Einstein e representa a junção de duas teorias: a teoria da relatividade restrita também conhecida como *especial* e a teoria da relatividade geral.A teoria da relatividade especial foi publicada em 1905 no artigo "A Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento". Já a teoria da relatividade geral foi apresentada em 1915, denotando alguns problemas da física Newtoniana.

Um dos resultados da teoria da relatividade de Einstein se refere aos efeitos relativísticos causados em relógios que estão localizados em sistemas referenciais e em campos gravitacionais diferentes. Devido ao comportamento que a onda eletromagnética possui e sua velocidade, deve-se considerar i) que os relógios dos receptores GPS que estão na superfície da terra estão sob um campo gravitacional bem diferente dos relógios que estão em órbita nos satélites e ii) os relógios que estão em órbita nos satélites estão se movendo em relação aos relógios que estão nos receptores GPS que estão na superfície da terra.

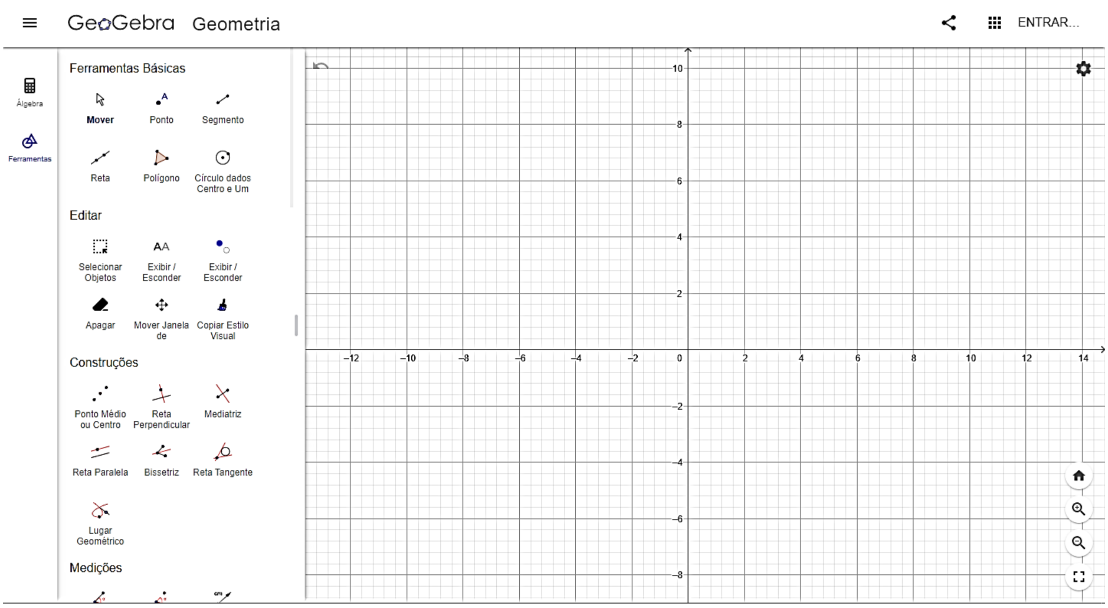
A Teoria da Relatividade mostra que, nessas circunstâncias, os relógios dos satélites e dos receptores na terra perdem a sincronia, o que exige que correções, sugeridas pela Teoria da Relatividade, precisam serem feitas para que a precisão da localização não seja inviabilizada. A*teoria da relatividade restrita* que tem como base dois postulados, que permitem discorrer sobre os efeitos adotados em cada sistema de referência em que “todas as leis da natureza são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais (sistemas de referência não-acelerados) e a velocidade de propagação da luz no vácuo é a mesma em todos os sistemas de referência inerciais (sistemas de referência não-acelerados).”Posteriormente, a teoria da Relatividade Geral amplia o primeiro postulado, incluindo referenciais acelerados.

Em virtude do campo gravitacional e do movimento relativo entre o emissor e o receptor do sinal, os relógios, os relógios dos satélites possuem uma frequência aparente diferente dos receptores localizados na superfície do planeta terra. Caso as correções indicadas pela Teoria da Relatividade não sejam feitas, os desvios das localizações podem ser da ordem de 11 km, o que inviabilizaria o sistema de localização.

3.3 - Sequência Didática – Circunferência

Utilizando materiais didáticos e tecnológicos expressaremos alguns dos conceitos mais relevantes que nos levam à contextualização e aplicação dos conhecimentos na orientação por mapas e navegação por GPS a partir de uma adaptação da sequência didática “Circunferência” de (LUMMERTZ; BOTELHO; ROCHO, 2015). Será utilizado como apoio para representação de situações de aplicação geométrica o software do Geogebra Geometria na versão online 6.0.677.0, um aplicativo para desktop e celular que é capaz de plotar uma diversidade de figuras geométricas, equações matemáticas e gráficos de funções. O tutorial para uso desse software pode ser facilmente encontrado na página online do serviço.

Figura 26 – Página Inicial GeoGebra Geometria



FONTE: https://www.geogebra.org/geometry

Tema da sequência didática: A circunferência e sua aplicabilidade histórica para os métodos de localização

Objetivo da sequência didática: Apresentar a geometria da circunferência e como ela ajuda a otimizar os métodos de localização por mapas e pelo GPS.

Tabela 2: Descrições e Objetos do conhecimento

Objetos de conhecimento	A circunferência como lugar geométrico. Medida do comprimento da circunferência. Posições relativas entre circunferências. Equações da circunferência. Conceito de Trilateração.
Competências específicas	3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
Habilidades	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
Objetivos de aprendizagem	Reconhecer e representar circunferências. Estabelecer a noção de pontos equidistantes. Reconhecer a relação de intersecção entre circunferências. Introduzir a contextualização com a aplicação da circunferência na orientação por mapas.

Conteúdo	Circunferência.
Tempo de duração	10 aulas
Materiais necessários:	Barbante, Régua, Pincel para quadro branco, Folha de papel milimetrado, Compasso, Celular e Computador.

FONTE: O autor

Detalhamento das aulas:

ATIVIDADE EXTRA CLASSE ANTES DE INICIAR A SEQUÊNCIA

Assistir ao vídeo:

Título: A Mágica do GPS - Professor Albert e a Ciência da Natureza

Canal: Professor Albert

Link: https://www.youtube.com/watch?v=OsYU0xPXsgA

Instrução: Fazer uma análise do conteúdo apresentado no vídeo e responder às questões abaixo:

1- Quais elementos geométricos, você pode identificar no funcionamento do GPS?

2- Quantos dispositivos estão associados à localização de uma pessoa pelo GPS?

3- Qual relação você consegue perceber entre os mapas e o plano cartesiano?

4- O que você sobre o conceito de trilateração?

5- Você saberia aplicar o conceito de trilateração num mapa cartográfico?

Aula 01 (SALA DE AULA)

Para revisar com os estudantes o reconhecimento da circunferência como lugar geométrico, e também suas características, utilizaremos um barbante e pincel para quadro branco para desenho da circunferência.

Marcar a representação de um ponto na lousa e pedir que cada um dos estudantes represente mais dois pontos na lousa, de maneira que a distância desses pontos até o ponto representado pelo professor seja igual ao comprimento do barbante. Espera-se que os estudantes percebam que se fossem reunidos todos os pontos equidistantes do ponto inicialmente marcado, representados ou não pelos estudantes, seria obtida uma representação de circunferência. Neste momento, perguntar aos estudantes:

i) Como você caracterizaria uma circunferência?
ii) Como é chamada a distância entre os pontos da circunferência e o seu centro?
iii) Qual é a relação entre o barbante e essa distância?
iv) O que o comprimento do barbante corresponde em relação à circunferência?

Em seguida, distribuir uma folha de papel milimetrado para cada um e propor que representem algumas circunferências utilizando o compasso, realizando os seguintes procedimentos:

1) Marcar um ponto qualquer na folha. Esse ponto será o centro da circunferência.
2) Definir a abertura do compasso com uma medida qualquer. Essa abertura corresponderá a que elemento da circunferência?
3) Fixar a ponta-seca do compasso sobre o centro da circunferência.
4) Girar o compasso e traçar a circunferência.
5) Feito isso, propor algumas atividades como as sugeridas a seguir, que podem ser reproduzidas e distribuídas uma cópia para cada estudante.

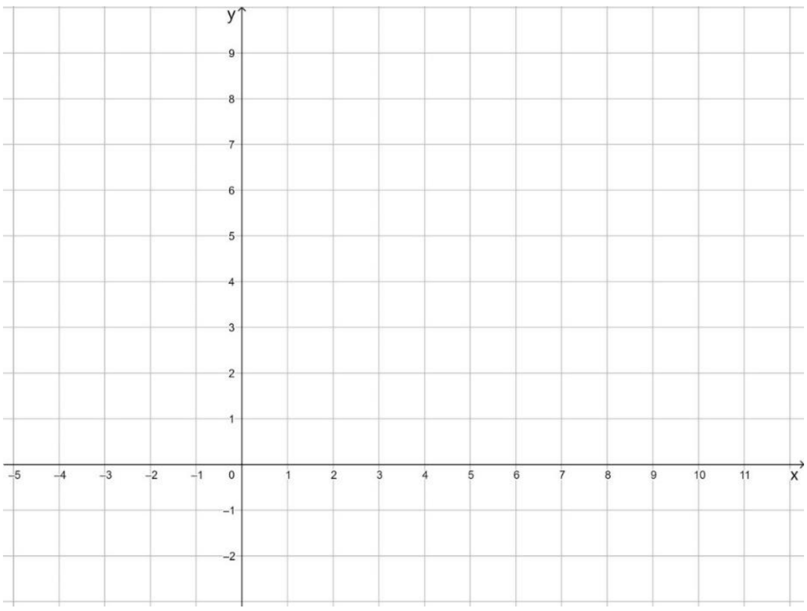
EXERCÍCIO: Com auxílio de um compasso, trace:

a) uma circunferência de centro O e 3 cm de raio.

b) uma circunferência de centro P(0,0) e 5 cm de raio.

1) No plano cartesiano a seguir, considerando o comprimento do lado de cada figura de quadradinho como a unidade de medida de comprimento (u.c.), represente duas circunferências: uma de centro A(1, 1) com 4 u.c. de raio, e outra de centro B(5, 6) com 3,5 u.c. de raio. As circunferências se intersectam em algum ponto? Para verificar se os estudantes compreenderam e assimilaram os conceitos explorados nas aulas propostas nesta sequência didática, propor algumas atividades, como as sugeridas a seguir.

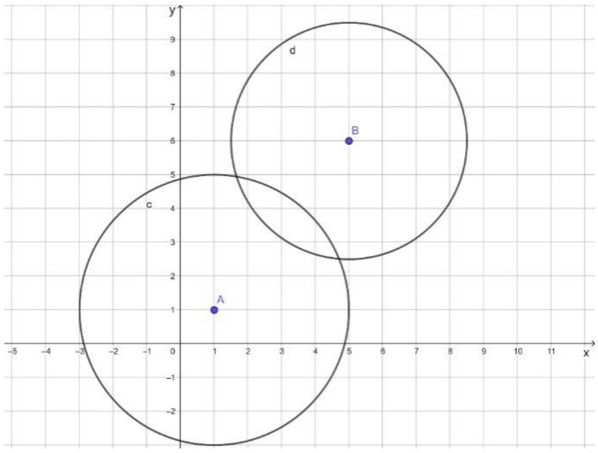
Figura 27 – Plano Cartesiano para marcação



Fonte: O autor.

Sim, as circunferências se intersectam em dois pontos.

Figura 28 – Intersecção de circunferências



Fonte: O autor.

EXERCÍCIO EXTRA CLASSE

1) Desenhe agora em uma folha milimetrada, uma circunferência com centro A(5,3) e raio 5cm. Em seguida substitua na equação $(x-5)^2-(y-3)^2=25$, os pontos abaixo e relate o que você pode perceber sobre a localização de cada um e o resultado da equação.

a) $P_1(2,-1)$

b) $P_2(0,3)$

c) $P_3(5,8)$

d) $P_4(1,0)$

e) $P_5(5,-2)$

f) $P_6(3,4)$

g) $P_7(1,7)$

Aula 02 e 03 (LABORATÓRIO)

Objetivos: Utilizando o geogebra pretende-se que os estudantes apliquem a definição de circunferência para construí-la no ambiente virtual usando medidas definidas pelo professor.

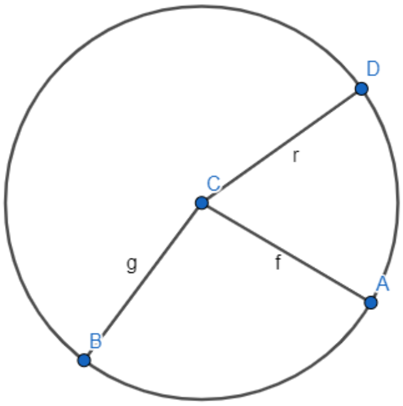
Entender a demonstração da equação reduzida da circunferência e aprender a identificar os dados notáveis da equação.

Ser capaz de transitar entre as representações das equações geral e reduzida da circunferência, identificando a função de cada termo.

Duração: 02 aulas

A CIRCUNFERÊNCIA

Denomina-se circunferência o conjunto de todos os pontos de um plano equidistante de um ponto fixo C desse plano, denominado centro da circunferência.



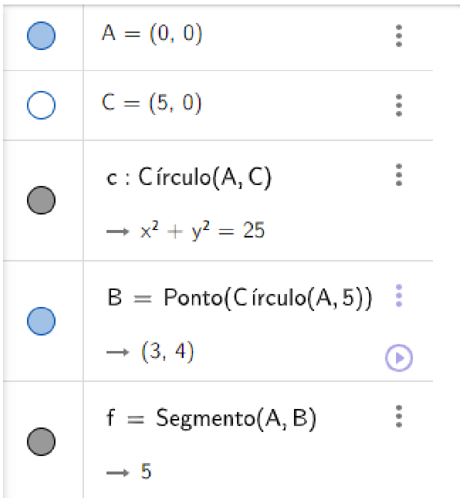
Fonte: O autor.

Figura 29 – Circunferência e pontos equidistantes

Na circunferência da figura, temos CA=CB=CD=r (raio da circunferência).

Com o auxílio do software Geogebra, mostraremos a definição de circunferência. Seguindo os passos para a construção da circunferência ilustrados na figura 4, teremos uma figura com centro na origem. Onde os estudantes poderão perceber que o teorema de Pitágoras é aplicado sobre as coordenadas de qualquer ponto pertencente à circunferência.

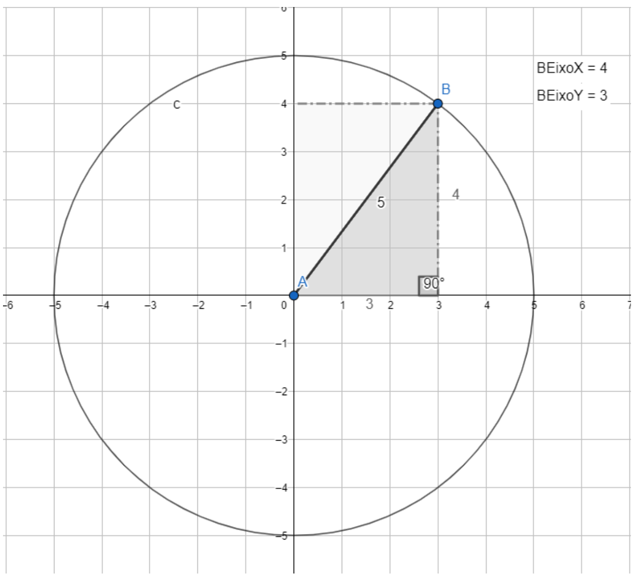
Figura 30 – Instruções de construção da circunferência



Fonte: O autor.

Como resultado da aplicação desses parâmetros, temos a circunferência abaixo, comprovando sua definição.

Figura 31 – Circunferência construída

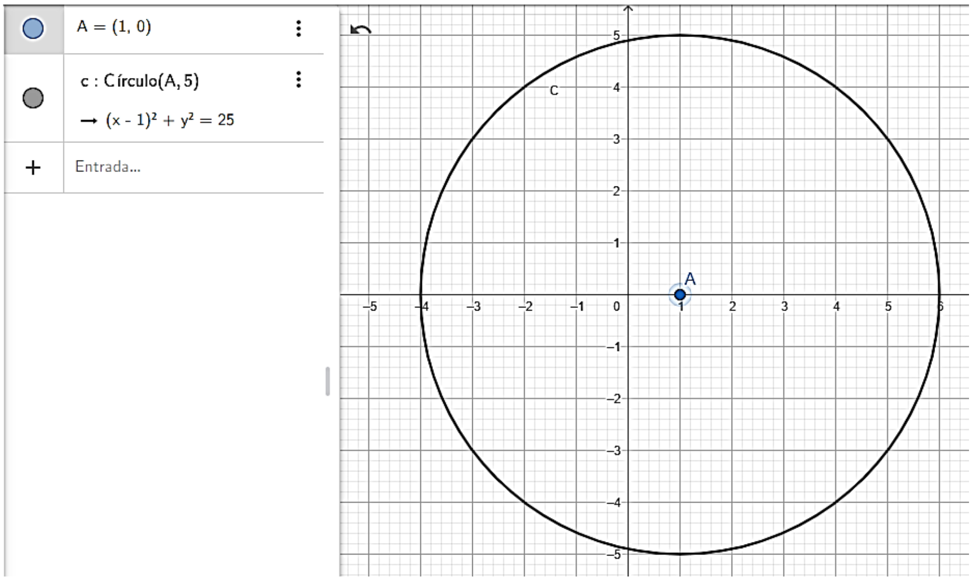


Fonte: O autor

Perceba que a equação gerada para essa circunferência é $x^2 + y^2 = 25$, onde se aplicarmos as coordenadas do ponto B(3,4), encontraremos exatamente a medida do segmento que determina o raio ao quadrado, conforme denotado pelo triângulo retângulo na figura 5.

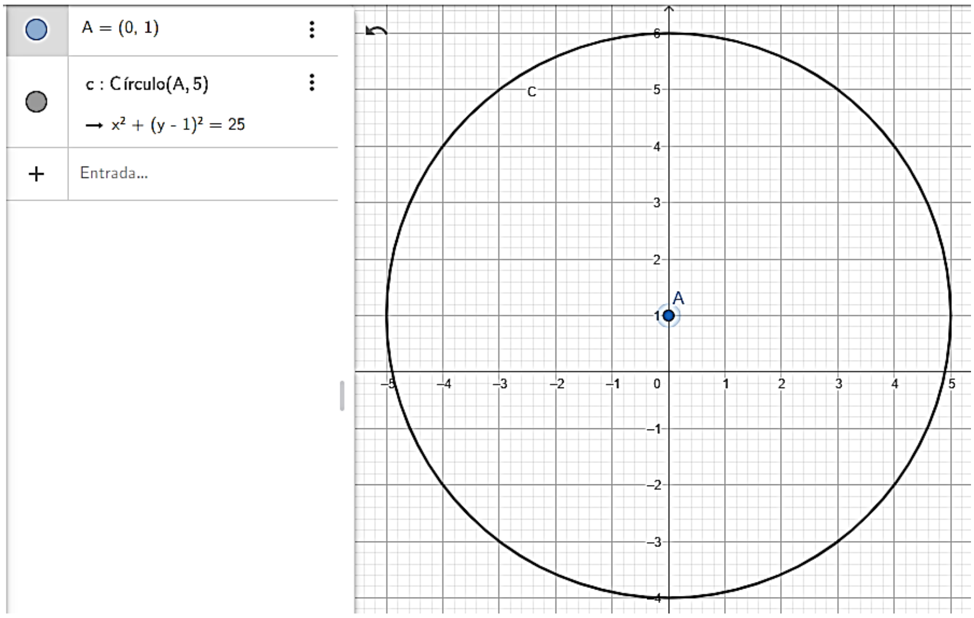
Como exercício de construção, vamos agora modificar as coordenadas do centro e verificar o que acontece com a equação da circunferência.

Figura 32 – Circunferência com centro A(1,0)



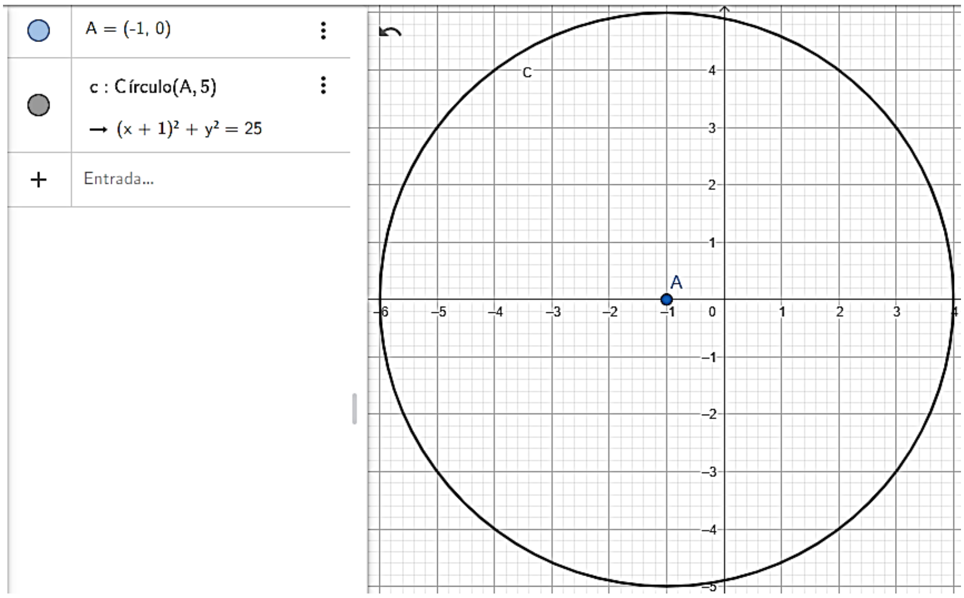
Fonte: O autor

Figura 33 – Circunferência com centro A(0,1)



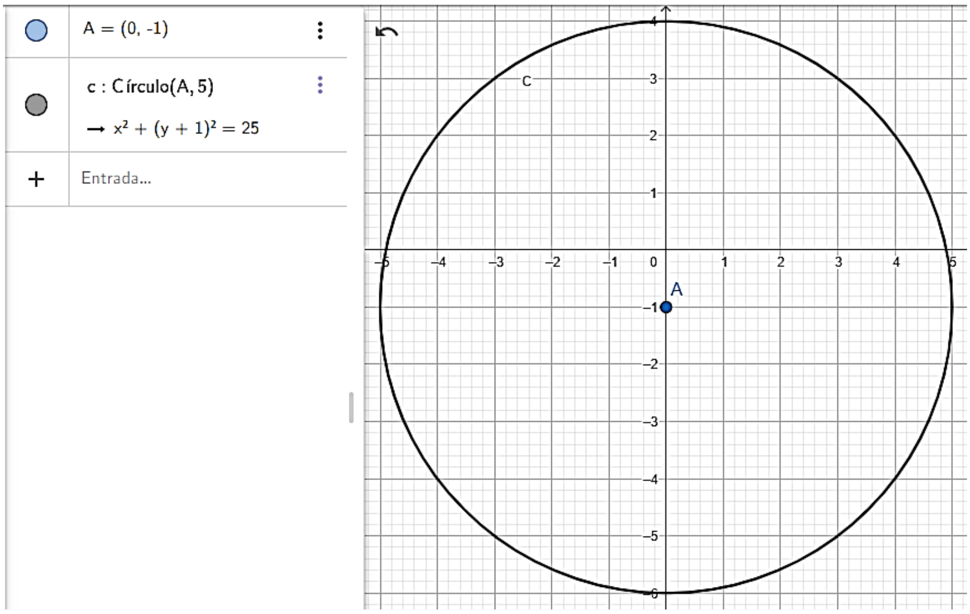
Fonte: O autor

Figura 34 – Circunferência com centro A(-1,0)



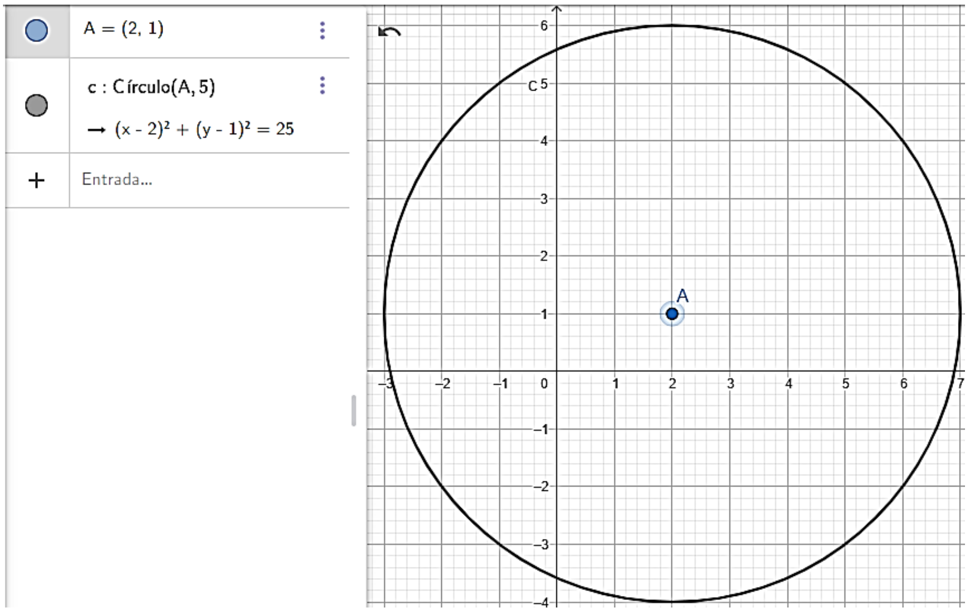
Fonte: O autor

Figura 35 – Circunferência com centro A(0,-1)



Fonte: O autor

Figura 36 – Circunferência com centro A(1,2)

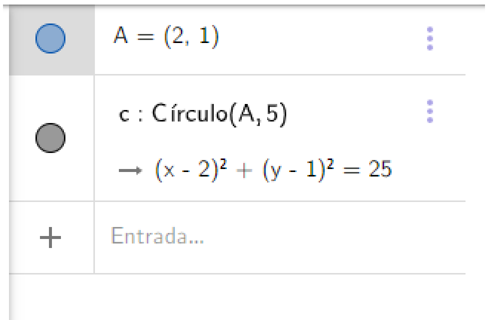


Fonte: O autor

Nesse momento solicita-se que os estudantes identifiquem e relatem as mudanças que perceberam na equação da circunferência mostrada no geogebra. Solicita-se ainda que os mesmos alterem em uma unidade o valor do raio da circunferência e relatem o que perceberam.

Utilizando os dados da última circunferência construída, vamos agora entender a equação que determina essa figura geométrica.

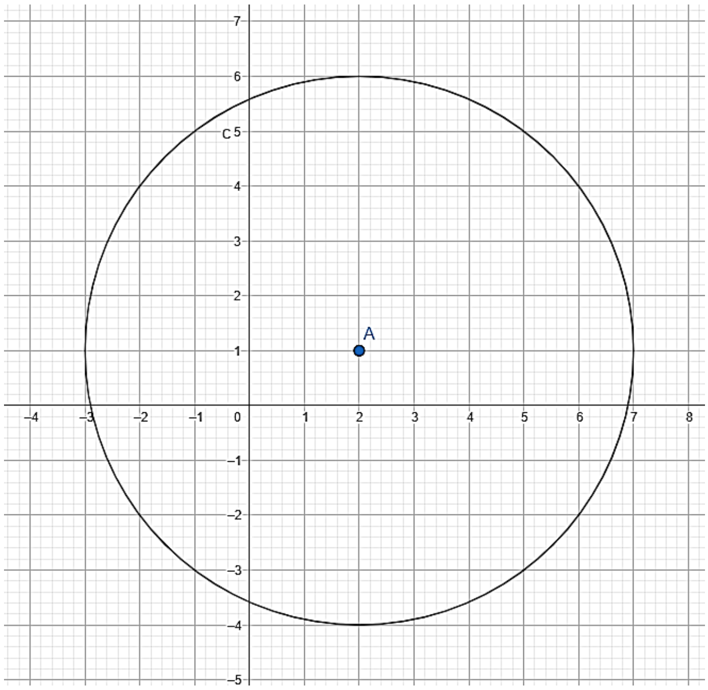
Figura 37 – Instruções de construção da circunferência



Fonte: O autor.

Como resultado da aplicação desses parâmetros, temos a circunferência abaixo.

Figura 38 – Circunferência construída com centro fora do eixo

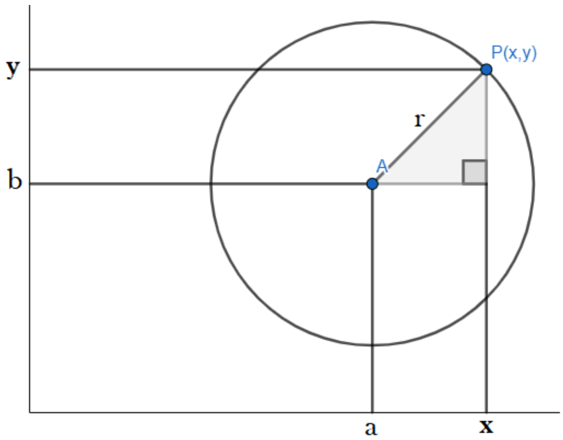


Fonte: O autor.

- **Equação Reduzida da circunferência**

Considere o plano cartesiano e a circunferência de centro A*(a,b)* e raio *r*, conforme a figura 12 e mostrado anteriormente na figura 5.

Figura 39 – Circunferência de centro (a,b)



Fonte: O autor.

O ponto P(x,y) pertence à circunferência se, e somente se:

D(P,A) = r ⇒ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Conhecida como **equação reduzida da circunferência.**

Caso particular: a = b = 0(centro na origem), a equação será do tipo:

$$(x-0)^2 + (y-0) = r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2$$

- **Equação geral da circunferência**

Desenvolvendo a equação reduzida da circunferência $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, obteremos a equação geral da circunferência:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

Geralmente, as circunferências são representadas pela equação geral, como por exemplo, a circunferência $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 9 = 0$. Nessa equação, não é possível visualmente identificar o centro e o raio da circunferência que ela representa. Precisamos entender como obter o raio e o centro da circunferência a partir de sua equação geral.

Vejamos, por exemplo, como ela é definida por uma equação geral do tipo:

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 9 = 0$$

Agrupamos na equação os termos em *x* e os termos em *y*, isolando o termo independente no segundo membro. Deixamos um espaço depois dos termos em *x* e dos termos em *y* para completarmos o quadrado perfeito:

$$x^2 - 8x + \_\_ + y^2 - 4y + \_\_ = 9 + \_\_ + \_\_$$

Completamos o quadrado perfeito, em *x* é o quadrado da metade do coeficiente *x* multiplicado pelo coeficiente de x^2. Como o coeficiente de *x* é -2, metade de -2 é -1 e o quadrado de -1 é 1, somamos o resultado nos dois membros:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + \_\_ = 9 + 16 + \_\_$$

Da mesma forma, em *y* é o quadrado da metade do coeficiente de *y* multiplicado pelo coeficiente de y^2. Como o coeficiente de *y* é 4, metade de 4 é 2 e o quadrado de 2 é 4, somamos 4 aos dois membros da equação:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 9 + 16 + 4$$

Portanto, temos os quadrados perfeitos:

$$\underbrace{x^2 - 8x + 16}_{(x-4)^2} + \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{(y-2)^2} = \underbrace{9 + 16 + 4}_{3^2}$$

Daí, temos que, a equação $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 9 = 0$ representa a circunferência de $C(4,2)$ e $r = 3$, com equação reduzida igual a$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Exercício: Determine a equação da circunferência de centro no ponto O(2,1) e raio $r = 3$.

AULA 04 (LABORATÓRIO)

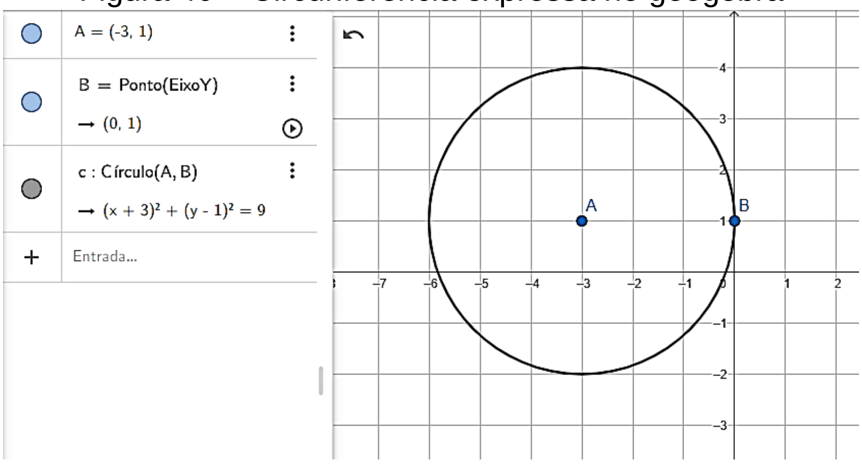
Objetivos: Utilizar o geogebra para comparar os resultados obtidos em problemas matemáticos envolvendo circunferência.

Exercitar o conhecimento adquirido com os métodos de identificação de centro e raio da circunferência.

Duração: 01 aula

Com o auxílio do Geogebra os estudantes construiremos a circunferência como mostra a figura.

Figura 40 – Circunferência expressa no geogebra



Fonte: Adaptado de https://pt.slideshare.net/eduardabotelho/sequncia-didtica-circunferncia

Observe que o geogebra já apresenta a equação da circunferência na forma reduzida, e para obter a forma geral é só desenvolver o produto notável (quadrado da soma de dois termos e quadrado da diferença de dois termos), vamos fazer manualmente.

Resolução: Neste caso, temos que *a = - 3, b = 1* e *r = 3*.

Usando a equação, vem:

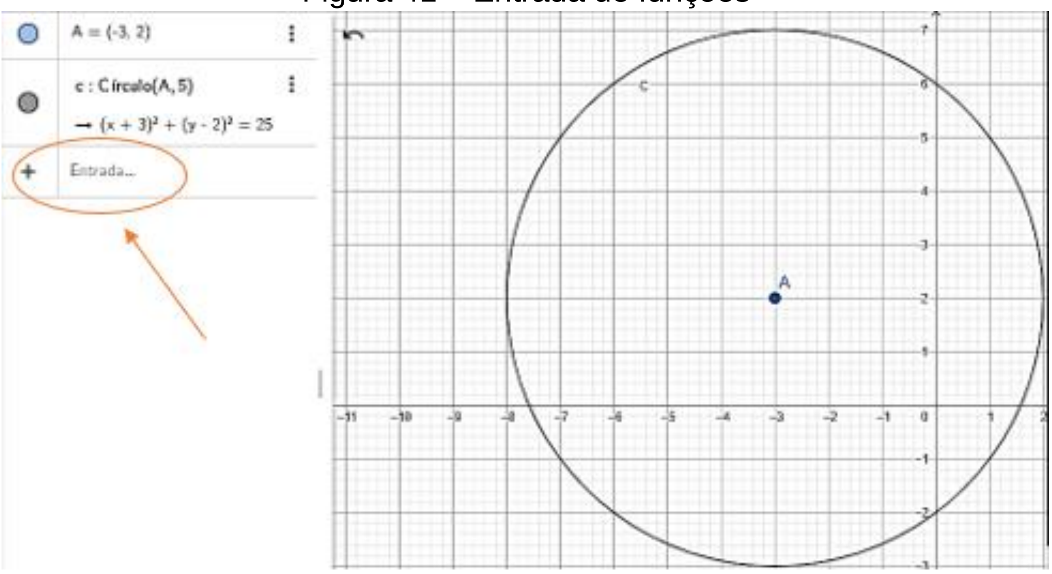
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \ \rightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=3^2 \rightarrow x^2+y^2+6x-2y+1=0$

Logo, a equação é$(x+3)^2+(y-1)^2=9$ou$x^2+y^2+6y-2y+1=0$

Exemplo 2: Vamos obter o raio e o centro da circunferência $x^2+y^2+6y-2y+12=0$

Os estudantes vão inserir a equação na entrada do Geogebra, conforme figura 15.

Figura 41 – Entrada de funções



Fonte: Adaptado de https://pt.slideshare.net/eduardabotelho/sequncia-didtica-circunferncia

Observe que o software fornece a equação na forma reduzida, permitindo a identificação do centro da circunferência A(-3,2) e a medida do raio r = 5.

Resolvendo o mesmo exemplo sem o uso do software, completaremos os quadrados.

$x^2+6x+\_\_+y^2-4y+\_\_=12+\_\_+\_\_$

$\underbrace{x^2+6x+9}_{(x+3)^2}+\underbrace{y^2-4y+4}_{(y-2)^2}=\underbrace{12+9+4}_{5^2}$

Portanto, a equação $x^2 + y^2 + 6y - 4y - 12 = 0$ representa uma circunferência de centro *C(-3,2)* e raio *r = 5.*

E, a resolução do mesmo exemplo utilizando a técnica do método da comparação.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

Comparando a equação da circunferência com a equação genérica temos que:

$-2a = 6 \Rightarrow a = -3$

$-2b = -4 \Rightarrow b = 2$

$a^2 + b^2 - r^2 = -12 \Rightarrow (-3)^2 + 2^2 - r^2 = -12 \Rightarrow 9 + 4 - r^2 = -12$

$r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$(não existe raio negativo)

Logo, concluímos que o centro da circunferência é (-3,2) e o raio é 5.

Exercício (EXTRA CLASSE)

1) Determinar a equação normal e a equação reduzida da circunferência que tem:

a) Centro em C(3,5) e raio r = 3.

b) Centro em M(-1,-3) e raio r = 2

c) Centro em Q(0,2) e raio r = 4.

2) As seguintes equações representam circunferências; determine as coordenadas do centro e raio em cada caso:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 8x + 11 = 0$

3) Verifique entre os pontos A(0,3), B(7,2) e C(-1,3) os quais pertencem à circunferência de equação $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ e identifique qual o seu centro e o raio.

4) Verifique se a equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo, dê as coordenadas do centro e o raio da circunferência.

5) O ponto *P(3,b)* pertence à circunferência de centro no ponto *C(0,3)* e raio *r = 5*. Calcule o valor da coordenada b.

SUGESTÃO: Para otimizar o tempo da sequência em sala de aula, pode-se disponibilizar o gabarito dos exercícios extra classe que tratem exclusivamente de resolução de problemas.

AULA 05 (SALA DE AULA)

Objetivos: Identificar as posições relativas entre Circunferência - ponto, Circunferência - reta e Circunferência – Circunferência.

Compreender como as posições relativas podem ser aplicadas para solucionar problemas que exigem interpretação com ou sem o uso de cálculos escritos.

Inteirar-se sobre os conceitos básicos utilizados para a construções feitas pelo método da trilateração.

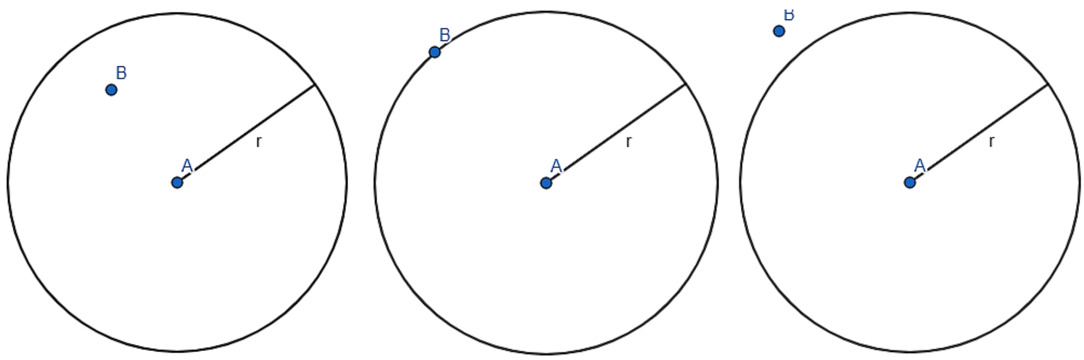
Exercitar os conceitos e verificar os resultados utilizando o geogebra.

Duração: 01 aula

Nesta aula, falaremos sobre as posições relativas entre circunferência e um ponto. Nesse momento é solicitado que os estudantes resgatem o exercício extra classe da aula 01. Para que possa ser feita a formalização dos registros que os mesmos fizeram e gerar mais discussão acerca das análises que agora podem ser realizadas de forma mais sólida e abrangente.

- **Posições Relativas de um ponto e uma circunferência:** Um ponto pode ser interno externo ou pertencer à circunferência de centro C e raio r.

Figura 42 - Posições do ponto em relação à circunferência



d(B,A) < r
B é interno

d(B,A) = r
B ∈ a circunferência

d(B,A) > r
B é externa a circunferência

Se a circunferência tem centro C(a,b) e raio r, podemos obter posição do ponto P(x,y) em relação à circunferência da seguinte forma:

a) P pertence à circunferência?

$d(P,C) = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0,$ (P ∈ à circunferência)

b) P pertence à região exterior à circunferência:

$d(P,C) > r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2 \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 > 0$, (P é externo à circunferência)

c) P pertence à região interior à circunferência:

$d(P,C) < r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 < 0$, (P é interno à circunferência)

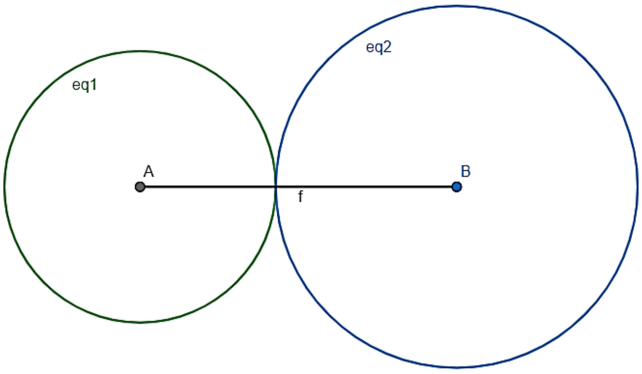
Exemplo 3: Verifique qual a posição do ponto A(2,8) em relação às circunferências dadas:

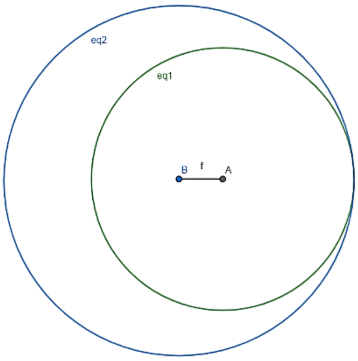
a) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$
b) $x^2 + (y-8)^2 = 8$
c) $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 16$

- **Posições relativas entre duas circunferências:** Consideremos as circunferências C_1 e C_2, distintas. Seja da distância entre os centros A e B, respectivamente, das circunferências C_1 e C_2. Assim, podem ocorrer três situações:

- C1 e C2 **são tangentes entre si** (figura 11), neste caso elas tem um único ponto comum.

Figura 43 – Posição relativa entre duas circunferências (1)

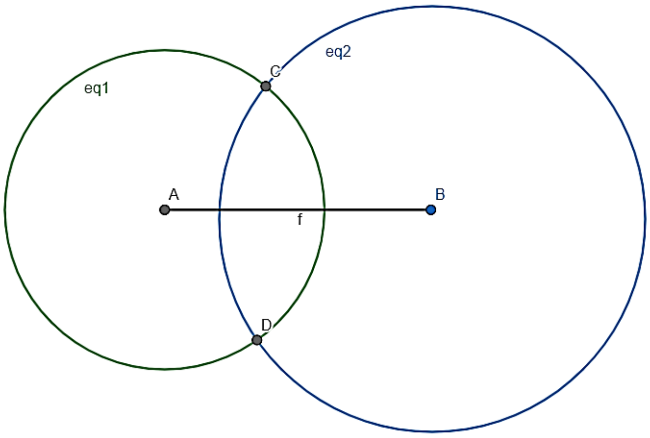




d(A,B) = r **d(A,B) = |r_1 - r_2|**

- C_1 e C_2**são secantes entre si** (figura 21), neste caso elas tem dois pontos comuns.

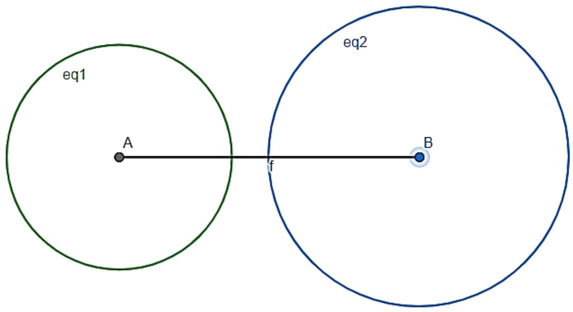
Figura 44 – Posição relativa entre duas circunferências (2)



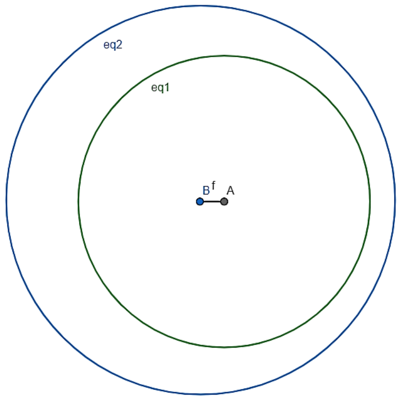
$|r_1 - r_2| < d(A,B) < r_1 + r_2$

- C1 e C2 não se interceptam (figura 22), nesse caso não tem ponto em comum.

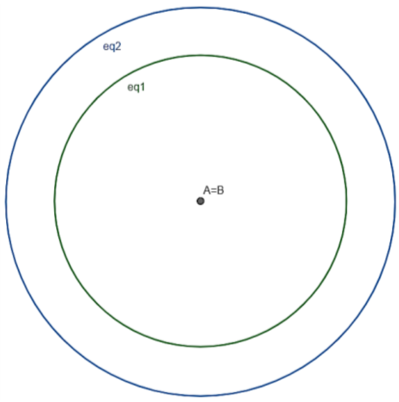
Figura 45 – Posição relativa entre duas circunferências (3)



d(A,B) > r_1 + r_2



d(A,B) < |r_1 + r_2|



d(A,B) = 0

Possíveis posições relativas entre duas circunferências:

a) Externas:$d(A,B) > r_1 + r_2$

b) Tangentes externas:$d(A,B) = r_1 + r_2$

c) Secantes:$|r_1 - r_2| < d(A,B) < r_1 + r_2$

d) Tangentes internas: $d(A,B) = |r_1 - r_2|$

e) Uma interna à outra: $d(A,B) < |r_1 - r_2|$

f) Concêntricas: $A \equiv B, d(A,B) = 0$

AULA 06 (LABORATÓRIO)

Objetivos: Entender o conceito de trilateração.

Aplicar os conceitos de posições relativas entre circunferências para resolver problemas cartográficos de localização.

Representar os problemas no ambiente virtual do geogebra para análise da situação proposta.

Duração: 01 aula

Exemplo 5: Vamos verificar a posição relativa das circunferências em cada item:

a) $x^2 + y^2 = 100 \; e \; x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \; e \; x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

Resolução:

a) $x^2 + y^2 = 100 \; e \; x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68 = 0$

Subtraindo membro a membro, temos:

$(x^2 + y^2 - 100) - (x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68) = 0$

$12x + 12y - 168 = 0 \Rightarrow x + y - 14 = 0 \Rightarrow y = 14 - x$

Subtraindo y na primeira equação, temos:

$x^2 + (14 - x)^2 = 100 \Rightarrow 2x^2 - 28x + 96 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$

Portanto,

$x = 6 \Rightarrow y = 14 - 6 = 8$

Ou

$x = 8 \Rightarrow y = 14 - 8 = 6$

Logo, as duas circunferências são secantes e seus pontos comuns são $(6,8)$ e $(8,6)$.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Dadas as circunferências C_1 e C_2, descubra suas posições relativas e seus pontos em comum (se houver):

a) $C1: x^2 + y^2 = 16 \; e \; C2: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b) $C1: 4x^2 + 4y^2 - 4y - 3 = 0 \; e \; C2: x^2 + y^2 - y = 0$

Nota: Verificar resultados no geogebra após os cálculos.

Aula 07 E 08 (SALA DE AULA)

Objetivos: Utilizar os conhecimentos adquiridos para resolver os desafios propostos pelo professor.

Trabalhar em equipe em prol de um objetivo comum, compartilhando dúvidas e gerando discussões construtivas aplicadas a problemas reais.

Duração: 02 aulas

JOGO DA LOCALIZAÇÃO

Disposições:

Com um mapa da escola em mãos, os estudantes se dividirão em equipes de 04 pessoas para resolver os enigmas através do sistema de coordenadas baseado no plano cartesiano e na trilateração.

1) Utilizando o conceito de trilateração, será dado aos grupos um conjunto de 03 equações de circunferências cujos raios representam as distâncias de referenciais cuja intersecção determina a localização de uma premiação simbólica (bala, doces, objetos escolares, etc.) junto com uma pista entre as 04 que compõem uma charada para o grande prêmio final.

2) Cada local escolhido deverá guardar uma quantidade de prêmios/pistas igual ao número de grupos que foram divididos em sala de aula.

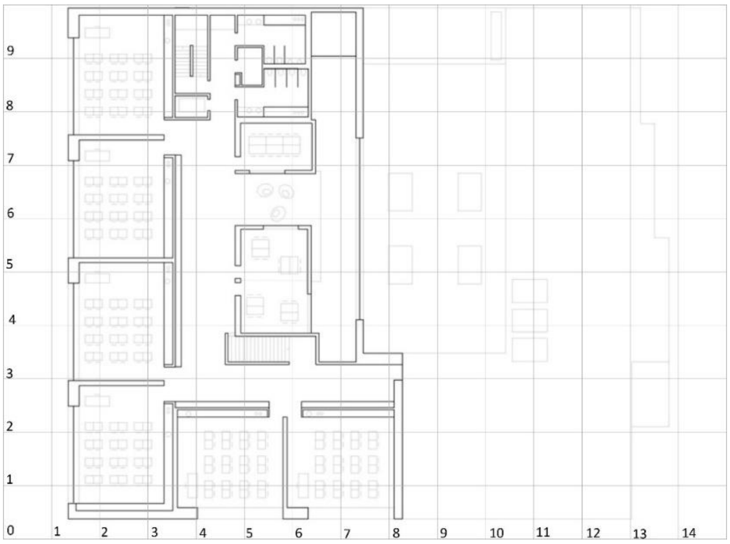
3) Após aplicarem o conceito da trilateração na planta entregue a cada grupo e identificarem os pontos possíveis onde o objeto de premiação pode estar, um estudante delegado por cada equipe irá procurar pelo objeto escondido no interior da escola.

4) Caso encontre o objeto e a pista do grande prêmio, o estudante retorna para a sala para receber a próxima instrução. Caso contrário, o estudante deve retornar para verificar se houve erro nos cálculos executados pela sua equipe. (Nota: A equipe não recebe a próxima instrução até que tenha completado a fase atual.)

5) Cada integrante do grupo só poderá ser delegado para procurar as pistas uma única vez, promovendo um rodízio e participação de todos.

6) Conforme a figura 21, basta que o professor sobreponha o plano cartesiano sobre um mapa do interior da escola ou da área que o mesmo pretende utilizar para execução da atividade.

Figura 46 – Mapa escolar



Fonte: Adaptado de www.archdaily.com.br.

7) A partir do ajuste do plano cartesiano sobre o mapa da escola, o professor define as coordenadas para esconderijo dos prêmios e dos três referenciais adotados para cada prêmio, montando em seguida as equações das circunferências correspondentes.

8) Sugestão distribuir uma parte da nota que compõe a sequência em 04 partes entre os prêmios do jogo (podem ser pontuações diferentes para cada etapa).

9) Como sugestão de premiação final pode ser feito o agregado de uma nota extra para a equipe melhor colocada em relação ao tempo de resolução do jogo. Não deixando de premiar também as demais equipes de forma proporcional como forma de incentivo.

AULA 9 (SALA DE AULA)

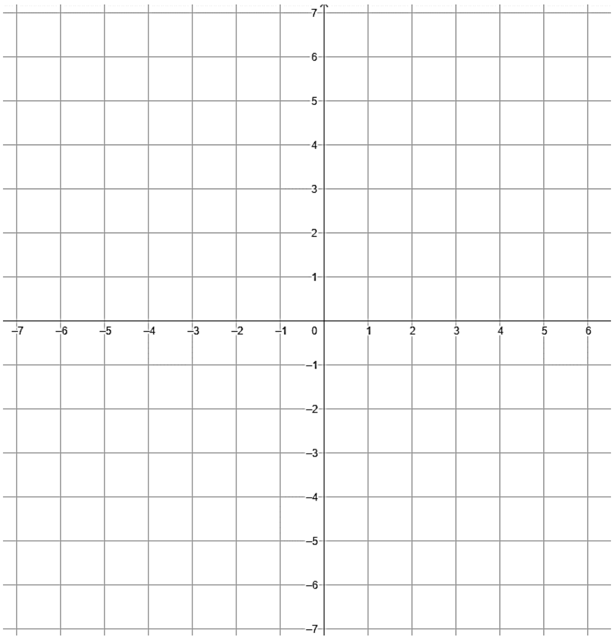
Objetivos: Relacionar os conhecimentos adquiridos sobre trilateração ao Sistema de Posicionamento Global por meio das coordenadas de Latitude e Longitude.

Ser capaz de resolver problemas que envolvam localizar-se por meio de análise mapas cartográficos.

Duração: 01 aula

O sistema de coordenadas cartesianas é formado por dois eixos perpendiculares que se cruzam, onde um ponto qualquer é representado pelo par ordenado P(x, y).

Figura 47 – Plano Cartesiano

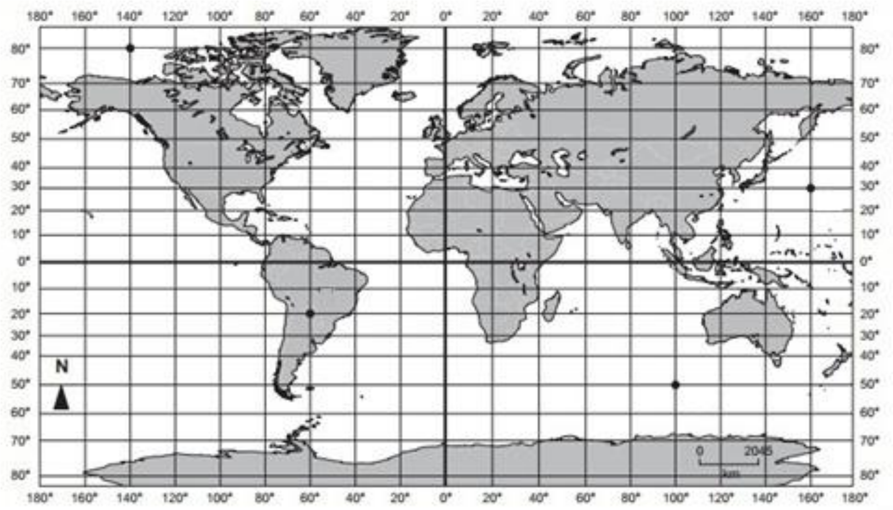


Fonte: O autor.

Coordenadas geográficas são linhas imaginárias que cobrem todo o globo e serve para a localização geográfica de qualquer lugar no globo. Para localizar um ponto, precisamos de um mapa, onde traçamos os paralelos e meridianos que tornam mais precisa a localização deste ponto.

Nota: Podemos associar o plano Cartesiano com a latitude e a longitude, temas relacionados aos estudos geográficos e à criação do atual sistema de posicionamento, o GPS. O Sistema de Posicionamento Global permite que saibamos nossa localização com o menor erro possível na terra, desde que tenhamos em mãos um receptor de sinais GPS, informando a latitude, a longitude e altitude com o auxílio de satélites em órbita da Terra. Um exemplo de utilização do GPS são os aviões, que são monitorados e informados em qual rota devem seguir viagem.

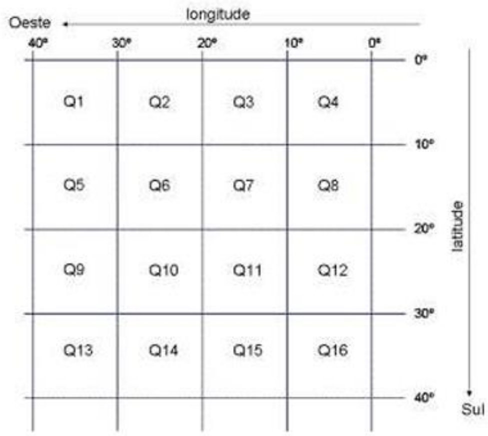
Figura 48 – Mapa Latitude/Longitude



Fonte: Adaptado de https://pt-static.z-dn.net

Exemplo: O GPS é um sistema que permite, por meio de satélites, obter as coordenadas em latitudes e longitudes de um objeto na face da terra. Se a leitura do GPS informa que um objeto se encontra na latitude 22,5º e na longitude de 38,7º, então na figura abaixo (que imita a tela de um radar) o objeto estará em qual quadrante?

Figura 49 – Quadrantes Latitude e Longitude



Fonte: Adaptado de www.google.com

a) Q1.

b) Q11.

c) Q9.

d) Q4.

e) Q13.

Resposta: C

SUGESTÃO: Após a conclusão das atividades os estudantes já devem ser capazes de compreender a relação entre o plano cartesiano e o GPS, a aplicação do conceito de trilateração e a implicação em sua vida cotidiana. Então, como forma de aliar o conhecimento às tecnologias utilizadas pelo estudante, recomenda-se agora expandir a ideia do jogo da localização utilizando o aplicativo Google Maps com instruções para que os estudantes possam identificar localizações especificas. Há ainda a possibilidade de se estabelecer uma interdisciplinaridade com os professores de geografia e história para o desenvolvimento de atividades em projetos estruturantes em prol da comunidade escolar.

Considerações Finais

Durante toda a trajetória acadêmica, por meio das experiências vivenciadas nos projetos de extensão, iniciação à docência, estágios e eventos, foi possível desenvolver e discutir práticas pedagógicas para aperfeiçoar o ensino-aprendizagem de matemática.

Inicialmente tínhamos como intenção aplicar a sequência elaborada em uma escola estadual, na turma do terceiro ano. Porém, fomos informados sobre o calendário de avaliações da unidade e percebemos que não seria compatível com o tempo que dispomos, com isso, não foi possível aplicar a sequência antes da conclusão deste trabalho, o que nos impede de avaliar efetivamente seus resultados. Porém, trazemos ela como exemplo e pretendemos aplicá-la futuramente buscando aperfeiçoamento e elaboração de trabalhos decorrente da experiência em sala.

Ao analisarmos os documentos oficiais nacionais que orientam o ensino de matemática, é possível notar que o processo de ensino carece de práticas bem elaboradas para dinamizar o acesso ao conteúdo e promover um rendimento significativo do conteúdo trabalhado em sala de aula. Cada professor possui uma metodologia e envereda por caminhos que reflitam a sua trajetória e aprendizado. Nos últimos anos, e com os produtos advindos da pandemia da Covid-19, as TICs

(Tecnologias da informação e comunicação) se tornaram uma parte fundamental no auxílio e desenvolvimento da educação.

Com isso, o plano de se elaborar uma atividade que aliasse uma ferramenta tecnológica do cotidiano e instrumentos de conhecimento em geometria, se mostrou mais viável e relevante. A construção de toda a sequência foi pensada ponderando as dificuldades que poderiam aparecer tanto em um ambiente de escola privada como pública. Porém, como em toda atividade de experiência, existem intercorrências que fazem parte do processo e podem não ter sido previstas.

As dificuldades já previstas estão associadas a falta de material didático disponível na escola, quantidade de computadores incompatíveis com a necessidade da turma e até mesmo a falta de interesse dos estudantes em contribuir com a atividade. Mas apesar de tudo isso, acreditamos que o educador possa adaptar a atividade à sua realidade escolar. Confiamos que cada educador possui a missão de transformar o ambiente ao seu redor e possibilitar que seus estudantes participem ativamente do processo de ensino aprendizagem em busca da construção de uma sociedade melhor.

Revisitando os objetivos deste trabalho, tínhamos como perspectiva construir uma sequência utilizando o GPS como organizador prévio para o ensino de circunferência, utilizando o software Geogebra, no 3º ano do ensino médio. Conseguimos atingir os objetivos geral e específicos, destacando os conceitos geométricos envolvidos no funcionamento do GPS e aplicando-os na sequência. Da mesma forma, analisamos os cálculos utilizados na determinação do posicionamento dos receptores, relacionando-os no ambiente escolar. Discutimos os aspectos ligados ao ensino-aprendizagem como ferramentas na construção do conhecimento. Não foi possível, entretanto, discutir os reais impactos, para a aprendizagem dos conceitos de circunferência, do uso de um organizador prévio baseado na tecnologia do GPS, o que será feito quando a sequência didática puder ser aplicada.

Caso as condições permitam, pretendemos aplicar a sequência no ano letivo de 2022 no Colégio Estadual São Francisco, localizado na cidade de Alagoinhas-BA,e com isso, analisar os resultados obtidos, desdobrando este trabalho em um projeto para especialização em educação matemática. Espera-se que a sequência atue como facilitador no desenvolvimento das competências e habilidades propostas e na construção dos conhecimentos atrelados à circunferência e sua contextualização com o GPS e, como já relatado na sequência, que nas etapas sejam construídas as bases para a ancoragem do conteúdo e promova a reflexão do estudante sobre a tecnologia utilizada e como essa nova visão pode impactar na sua vida social e escolar.

REFERÊNCIAS

ALLIFER, Washington. **Sequência didática: circunferência** – 2020. Disponível em: <https://www.alliferschool.com/2020/05/sequencia-didatica-circunferencia.html> Acessado em 24 de outubro de 2021.

ANDRADE, M. M. Introdução à metodologia do trabalho científico: elaboração de trabalhos na graduação. São Paulo, SP: Atlas, 2010.

ARCHITEKTEN, Morscher. Ampliação da escola de orientação em Kerzers / MorscherArchitekten. Disponível em: <https://www.archdaily.com.br/br/780283/ampliacao-da-escola-de-orientacao-em-kerzers-morscher-architekten/55c402b0e58ece5c7d000077-orientation-school-extension-in-kerzers-morscher-architekten-floor-plan> Acessado em: 26 de outubro de 2021.

AUSUBEL, D.P. (2000). The acquisitionandretentionofknowledge: a cognitiveview. Dordrecht, KluwerAcademicPubishers. 227 p.

BEZERRA, Licio Hernanes. Geometria analítica / Licio Hernanes Bezerra, Ivan Pontual Costa e Silva. – 2. ed. – Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. 170p.

BRASIL. **Base nacional comum curricular: ensino médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018a. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 27 de outubro de 2020.

CARARO, ANGELA CRISTINA; DAMASCENO FERREIRA, LUIZ DANILO; AFONSO, GERMANO BRUNO CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS SOBRE AS MEDIDAS DE TEMPO GPS Boletim de Ciências Geodésicas, vol. 16, núm. 1, 2010, pp. 156-176 Universidade Federal do Paraná Curitiba, Brasil.

CHAVANTE, Eduardo. Quadrante matemática, 3o ano: ensino médio / Eduardo Chavante, Diego Prestes. – 1. ed. – São Paulo: Edições SM, 2016. – (Coleção quadrante matemática).

CORREA, THIAGO. **79 Jogos e enigmas lógicos**. Publicado em: CreateSpace. Edição 01. Ano: 2017. Disponível em < https://mandirituba.pr.gov.br/wp-content/uploads/2020/04/79-jogos.pdf > Acessado em 28 de outubro de 2021.

EDITORA MODERNA. Conexões com a matemática / organizadora EditoraModerna; obra coletiva concebida, desenvolvida eproduzida pela Editora Moderna; editorresponsável Fabio Martins de Leonardo. —3. ed. — São Paulo: Moderna, 2016.

FRAZÃO, Dilva. René Descartes: Filósofo e matemático francês. EBiografia: biografias de famosos, resumo da vida, obras, carreira e legado: Dilva Frazão, 17 dez. 2019. Disponível em: https://www.ebiografia.com/rene_descartes/. Acesso em: 10 nov. 2021.

FREIRE, Paulo. Pedagogia do oprimido. São Paulo: Paz e Terra, 1987.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa / Paulo Freire. – São Paulo: Paz e Terra, 1996. – (Coleção Leitura).

GEOGEBRA. DynamicMathematics for Everyone. Disponível em <https://www.geogebra.org/geometry > Acesso em 29 Nov. 2021.

GOUVEIA, Rosimar. Teoria da Relatividade. [S. l.]: Rosimar Gouveia, 23 out. 2015. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/teoria-da-relatividade-2/. Acesso em: 4 out. 2021.

HONDA, Adriana MariseColombera. **Matemática e geografia: uma interdisciplinaridade** / Adriana MariseColombera Honda. – Londrina, 2013. 108 f.: il.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica** / Gelson Iezzi. — 6. ed. — São Paulo: Atual, 2013.

LATITUDE E LONGITUDE. Disponível em: <https://pt-static.z-dn.net/files/d4b/01b4b38148c5ab7384c85f9b93cf0f64.png> Acesso em 29 Set. 2021.

LUMMERTZ, Natália; BOTELHO, Eduarda; ROCHO, Valdirene. **Sequência didática circunferência.** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense - Campus Avançado Sombrio/SC, 2015. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/eduardabotelho/sequncia-didtica-circunferncia> Acessado em 25 de outubro de 2021.

MOREIRA, Marco Antônio, 1942 – Teorias da aprendizagem / Marco Antônio Moreira. – São Paulo: EPU, 1999.

MOREIRA, M.A. Aprendizagem https://pt-static.z-dn.net/files/d4b/01b4b38148c5ab7384c85f9b93cf0f64.pngicativa: a teoria e texto complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

NATÁRIO, J. O GPS e a Teoria da Relatividade. Lisboa, 2015.

NOGUEIRA, Edgard Bonfim. Uso do Software GeoGebra no ensino de geometria analítica: equação da reta e equação da circunferência. / Edgard Bonfim Nogueira, 2020. 109f. il.

RIZZATO, Fernanda Buhrer. O início da Geometria Analítica. Imatica, 26 fev. 2008. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/ganalitica.html. Acesso em: 10 nov. 2021.

SKINNER, Burrhus Frederic. Tecnologia do ensino; tradução de Rodolpho Azzi. São Paulo, Herder, Ed. da Universidade de São Paulo, 1972. p. ilust. (Ciências do comportamento).