



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA - UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA - CAMPUS II
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES A BIOSSISTEMAS

POLIANO FAGUNDES DOS SANTOS

Alagoinhas-Bahia

26 de julho de 2022

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES A BIOSSISTEMAS

POLIANO FAGUNDES DOS SANTOS

Monografia apresentada à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso III para a obtenção do título de Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia, Campus II, Departamento de Ciências Exatas e da Terra.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Teófilo Ataíde de Nascimento

Alagoinhas-Bahia

26 de julho de 2022

Sistema de Bibliotecas da UNEB
Biblioteca Carlos Drummond de Andrade – Campus II
Rosana Cristina de Souza Barretto
Bibliotecária – CRB 5/902

S237e Santos, Poliano Fagundes dos.
Equações diferenciais ordinárias e aplicações a biosistemas./
Poliano Fagundes dos Santos – Alagoinhas, 2022.
41f.

Trabalho de Conclusão de Curso – (Graduação) - Universidade do
Estado da Bahia. Departamento de Ciências Exatas e da Terra.
Colegiado de Matemática. Campus II.

Orientador: Prof.º Dr.º Antônio Teófilo Ataíde de Nascimento.

1. Equações diferenciais – Soluções numéricas. 2. Matemática –
Estudo e ensino. I. Nascimento, Antônio Teófilo Ataíde de. II.
Universidade do Estado da Bahia - Departamento de Ciências Exatas e
da Terra - Campus II. III. Título.

CDD 511.8

Agradecimentos

Obrigado, Senhor, por manter a chama da vida acesa e por iluminar cada caminho seguido! Esta longa trilha teve várias etapas e muitos desafios em cada uma delas. Durante esse processo aprendi muitas coisas. O aprendizado humano foi o maior deles. Sendo assim, registro aqui a minha gratidão:

- A minha família por, de forma iluminada, manter a minha saúde emocional.
- Ao professor Dr. Antonio Teófilo Ataíde de Nascimento pelos conselhos, paciência e sabedoria na condução deste trabalho.
- Aos amigos e colegas que sempre se fizeram presentes nesta caminhada.

"Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes."

Isaac Newton

Resumo

Entendo que a importância das Equações Diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples podem ser úteis na modelagem de vários problemas. O conhecimento de sistemas naturais complexos é, em geral, conseguido através da combinação ou do refinamento de modelos mais simples. O estudo das Equações Diferenciais é suporte matemático para várias áreas da ciência e das engenharias, o presente trabalho faz no primeiro capítulo uma revisão de alguns métodos de resolução das Equações Diferenciais Ordinárias -EDO's o segundo capítulo tem como meta demonstrar os teoremas de Picard-Lindelöf e Cauchy-Peano os quais tratam da existência e unicidade das soluções das EDO's para alcançar esse intento foi necessário fazer uma revisão de espaços métricos completos. Finalizamos o trabalho com as aplicações das EDO's a modelos Biológicos, tais como, espécies em competições, modelo predador-presa e a serrapilheira.

Palavras-chave: Equações Diferenciais , Existência e Unicidade de Soluções , Aplicações a Biosistemas.

Abstract

I understand that the importance of Differential Equations lies in the fact that even the simplest equations can be useful in modeling various problems. The knowledge of complex natural systems is generally achieved by combining or refining simpler models. The study of Differential Equations is mathematical support for several areas of science and engineering, the present work makes in the first chapter a review of some methods of solving the Ordinary Differential Equations - EDO's the second chapter aims to demonstrate the theorems of Picard-Lindelöf and Cauchy-Peano which deal with the existence and uniqueness of the EDO's solutions. To achieve this aim, it was necessary to review complete metric spaces. We end the work with the applications of EDO's to Biological models, such as species in competitions, predator-prey model and litter.

Key words: Differential Equations, Existence and Uniqueness of Solutions, Applications to Biosystems.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Classificação	2
1.1.1	Classificação Pelo Tipo	2
1.1.2	Classificação Pela Ordem	2
1.2	Equações Diferencias Lineares de Primeira Ordem	3
1.2.1	Método Dos Fatores Integrantes	3
1.2.2	Equações Separáveis	5
1.3	Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem	8
2	Existência e Unicidade de Soluções	12
2.1	Espaços Métricos	12
2.1.1	Sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos	13
2.1.2	Completude de um Espaço de Funções	15
2.2	Existência e Unicidade De Soluções De EDO's	25
3	Aplicações A Biosistema	34
3.1	Espécies em Competição	34
3.2	Predador - Presa	38
3.3	Serrapilheira	40
4	Considerações Finais	43

Lista de Figuras

2.1	Interpretação Geométrica da Convergência Uniforme	16
2.2	Sequência de funções limitadas	17
2.3	Gráfico da sequência $f(x) = x^{2n}$	18
2.4	Família de Funções	20
2.5	Uma solução de $x' = f(t, x)$ em U	26
2.6	Faixa vertical $I \times \mathbb{R}^n$	30
2.7	Retângulo R_{ab} no \mathbb{R}^3	31
3.1	Os diversos casos para o sistema da espécie em competição (3.3). A reta de crescimento nulo de x é a reta sólida e a de y é a reta tracejada	36

Capítulo 1

Introdução

Por que estudar equações diferenciais? A resposta é simples, equações diferenciais são suporte matemático para várias áreas da Engenharia e da Ciência. O estudo das Equações Diferenciais inicia-se com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, primeiramente, associado a problemas de Mecânica e Geometria. O destaque nesta época está para as três leis de Newton e a lei da gravitação universal que possibilitaram obter equações diferenciais ordinárias.

Boyce (2006) relata uma visão histórica das equações diferenciais, onde a mesma iniciou-se com o estudo de cálculo durante o século XVII, pelos matemáticos Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, essa concepção mostra que a evolução das equações esta coesa ao avanço geral da matemática. Nesse período de desenvolvimento inicial, alguns matemáticos tiveram um maior ressaltado, dentre eles podemos citar Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss e Lipschitz.

O desenvolvimento das soluções de determinadas equações diferenciais ainda continua como objeto de pesquisa, com problemas atrativos e importantes ainda não resolvidos. Para muitos matemáticos, conhecer seus resultados básicos e aplicações de equações diferenciais ordinárias é de extrema importância para quem pretende prosseguir seus estudos nessa área da Matemática.

Entendo que a importância das equações diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos Biológicos, físicos úteis, como por exemplo o modelo predador-presa, decaimento de substâncias radioativas, o comportamento de sistemas de massas e molas. O conhecimento de sistemas naturais complexos é em geral conseguido através da combinação ou do refinamento de modelos mais simples.

Neste trabalho abordaremos no primeiro capítulo as principais soluções para equações diferenciais de primeira, no segundo capítulo Espaços Métricos, existência e unicidade de soluções e no terceiro capítulo as aplicações das equações diferenciais a Bissistemas.

1.1 Classificação

1.1.1 Classificação Pelo Tipo

As equações diferenciais dividem-se em dois tipos, que são as equações diferenciais ordinárias (EDO) e as equações diferenciais parciais (EDP). De modo geral, nas EDO's queremos determinar uma curva no espaço que satisfaça relações com suas derivadas ordinárias de diversas ordens. Enquanto que nas EDP's temos como objetivo determinar uma função de n variáveis que satisfaz relações com suas derivadas parciais, também de diversas ordens. Esse trabalho é focado no estudo das EDO's e aplicações. Segundo D.zill (2003) :

Definição 1. *Equações Diferenciais Ordinárias são equações que contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma única variável independente.*

Exemplo de equações ordinária:

$$\frac{dx}{dt} + 5x = 1$$
$$x''(t) - 3x'(t) = 4$$

1.1.2 Classificação Pela Ordem

A ordem de uma EDO esta relacionada com a ordem das derivadas que surgem na equação. Podemos representar uma equação diferencial ordinária envolvendo derivadas até a ordem n por uma função $F(x_1, \dots, x_{n+2})$ de $n + 2$ variáveis, da seguinte forma:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt^n}\right) = k$$

Por exemplo na equação $\frac{dx}{dt} + 5x = 1$ a função $F(x_1, x_2, x_3) = 5x_2 + x_3$ e $k = 1$ definem a EDO.

Definição 2. *A ordem de uma equação diferencial é dada de acordo com a derivada de maior ordem que nela aparece.*

Equação de primeira ordem

$$ty' + 2y = 4t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4t - t^3}{4 + y^3}$$

Equação de segunda ordem:

$$4y'' - 8y' + 3y = 0$$

1.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Equações diferenciais são ferramentas matemáticas amplamente usadas na modelagem de diversos sistemas dinâmicos quantificando ou qualificando a evolução desses sistemas. Resolvendo analiticamente ou analisando qualitativamente uma equação diferencial que caracteriza determinado processo, pode-se extrair informações relevantes sobre os mesmos e possivelmente prever o seu comportamento.

Este capítulo estudaremos as equações diferenciais de primeira ordem as quais possuem alguns exemplos de aplicações importantes em Ciências Naturais, dentre os quais merece destaque o problema da dinâmica de populações competição de espécies como, por exemplo, no sistema predador presa e a modelagem aplicada a serrapilheira. Em todos os casos citados acima estamos interessados em resolver equações do tipo:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1.1}$$

sujeita á condição inicial $y(x_0) = y_0$

1.2.1 Método Dos Fatores Integrantes

Iniciaremos nosso estudo pelo método dos fatores integrantes aplicado a solução de EDO's do tipo:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \tag{1.2}$$

onde p e g são funções dadas na variável independente t . Observe que neste caso a função $f(t, y) = q(t) - p(t)y$.

O método dos fatores integrantes é devido a Leibniz e ele envolve a multiplicação da equação diferencial (1.2) por uma determinada função $\mu(t)$ escolhida de modo que a equação resultante seja facilmente integrável. A função $\mu(t)$ é chamada de fator integrante e a principal dificuldade é encontrá-la.

Para determinar um fator integrante apropriado multiplicamos a equação (1.2) por $\mu(t)$:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)q(t) \tag{1.3}$$

Supondo que $\mu(t)$ satisfaça a equação:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t)$$

podemos observar que a equação a esquerda do sinal da igualdade em (1.3) é a derivada do produto $\mu(t)y(t)$, ou seja

$$\frac{d[\mu(t)y(t)]}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y(t)$$

Supondo ainda $\mu(t) > 0$ podemos escrever $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t)$ e integrando ambos os membros obtemos

$$\ln[\mu(t)] = \int p(t)dt + k$$

escolhendo a constante arbitrária k igual a zero, encontramos a função simples:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad (1.4)$$

Voltando para a (1.3)

$$\frac{d\mu(t)y(t)}{dt} = \mu(t)q(t)$$

Portanto,

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + C$$

onde neste caso a constante C será determinada pela condição de contorno. De fato, nossa solução será dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)q(s)ds + C \right]$$

onde $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ e devido a nossa condição de contorno $y(t_0) = y_0$ obtemos $C = y_0\mu(t_0)$.

Para elucidar a demonstração acima aplicaremos seus passos na resolução da seguinte equação diferencial com condição de contorno:

$$ty' + 2y = 4t^2$$

$$y(1) = 2$$

Para determinar $p(t)$ e $q(t)$ precisamos colocar a equação na forma (1.2)

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad (1.5)$$

de modo que $p(t) = \frac{2}{t}$ e $q(t) = 4t$. Para resolver a equação acima calculamos o fator

integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2\ln|t|} = t^2$$

Multiplicando a equação (1.5) por t^2 obtemos

$$t^2 y' + 2ty = 4t^3$$

daí $(t^2 y)' = 4t^3$ e por integração,

$$yt^2 = t^4 + c$$

onde c é uma constante arbitrária. Segue-se que

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

Para satisfazer a condição inicial dada é necessário escolher $c = 1$; assim,

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}$$

é a solução para o problema de valor inicial.

Aplicando a fórmula (1.3), como $t_0 = 1$, $y_0 = 2$ temos $\mu(1) = 1^2 = 1$, $C = y_0 \mu(t_0) = 2 \cdot 1 = 2$ e portanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{t^2} \left[\int_1^t s^2 \cdot 4s ds + 2 \right] \\ &= \frac{1}{t^2} [t^4 - 1 + 2] \\ &= t^2 + \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

1.2.2 Equações Separáveis

Para identificar essa classe de equações vamos reescrever a equação (1.1) na forma:

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0 \tag{1.6}$$

Sempre é possível fazer isso definindo, $M(t, y) = -f(t, y)$ e $N(t, y) = 1$ mas também existe outras maneiras. Se acontecer de M só depender de t e N só depender de y , então ficamos com a seguinte equação:

$$M(t) + N(y) \frac{dy}{dt} = 0 \tag{1.7}$$

tal equação é dita separável porque, pode ser escrita na forma diferencial:

$$M(t)dt + N(y)dy = 0 \tag{1.8}$$

Sendo H_1 e H_2 duas primitivas quaisquer de M e N , respectivamente, podemos reescrever a equação (1.7) do seguinte modo:

$$H_1'(t) + H_2'(y) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1.9)$$

e de acordo com a regra da cadeia a equação (1.9) é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}[H_1(t) + H_2(y)] = 0$$

Integrando a equação anterior em relação a t temos

$$H_1(t) + H_2(y) = c \quad (1.10)$$

onde c é uma constante arbitrária qualquer.

Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação (1.10) é uma solução da equação(1.8) , em outras palavras a equação (1.10) define a solução implicitamente, em vez de explicitamente.

Na prática a Eq. (1.10) é obtida em geral da Eq. (1.7) integrando-se a primeira parcela em relação a t e a segunda em relação a y . A equação diferencial (1.6) , junto com uma condição inicial,

$$y(t_0) = y_0 \quad (1.11)$$

forma um problema de valor inicial. Para resolver esse problema de valor inicial, precisamos determinar o valor apropriado da constante c na Eq.(1.10). Esse valor e obtido fazendo-se $t = t_0$ e $y = y_0$ na Eq.(1.10) , resultando em :

$$H_1(t_0) + H_2(y_0) = c$$

Como H_1 e H_2 são as primitivas, respectivamente, das funções M e N segue que:

$$\int_{t_0}^t M(s)ds = \int_{t_0}^t H_1'(s)ds = H_1(t) - H_1(t_0)$$

e

$$\int_{y_0}^y N(s)ds = \int_{y_0}^y H_2'(s)ds = H_2(y) - H_2(y_0)$$

Somando o resultado da integração nas duas equações anteriores e agrupando chegaremos as seguinte resultado:

$$H_1(t) - H_2(y) - (H_1(t_0) + H_2(y_0)) = \int_{t_0}^t M(s)ds + \int_{y_0}^y N(s)ds$$

Daí, por (1.10) obtemos o seguinte:

$$\int_{t_0}^t M(s)ds + \int_{y_0}^y N(s)ds = 0 \quad (1.12)$$

A Equação anterior é uma representação implícita da solução da equação diferencial (1.7) que satisfaz a condição inicial (1.11). Você deve ter em mente o fato de que, para obter uma fórmula explícita para a solução, é preciso resolver (1.12) para y como função de t . Infelizmente, muitas vezes isso é impossível analiticamente; em tais casos, você pode apelar para métodos numéricos para encontrar valores aproximados de y para valores dados de t .

Exemplo: Resolva a equação $\frac{dy}{dt} = \frac{4t - t^3}{4 + y^3}$ sujeita a condição inicial $y(0) = 1$.

De modo prático, reorganizando a equação acima obtemos,

$$(4 + y^3)dy = (4t - t^3)dt$$

Integrando a direita em relação a y e a esquerda em relação a t chegamos na seguinte igualdade

$$y^4 + 16y - 8t^2 + t^4 = c$$

onde c é uma constante arbitraria. Pela condição de contorno, $t = 0$ e $y = 1$ podemos determinar a constante $c = 17$. Daí, $y^4 + 16y - 8t^2 + t^4 = 17$ defini implicitamente a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dt} = \frac{4t - t^3}{4 + y^3}$.

Do mesmo o problema proposto é equivalente a $(t^3 - 4t)dt + (4 + y^3)dy = 0$.

Aplicando a equação (1.12) teremos:

$$\int_0^t s^3 - 4s ds + \int_1^y 4 + s^3 ds = 0$$

Resolvendo a integração acima;

$$\left[\frac{s^4}{4}\right]_0^t - \left[\frac{4s^2}{2}\right]_0^t + [4s]_1^y + \left[\frac{s^4}{4}\right]_1^y = \frac{t^4}{4} - \frac{4t^2}{2} + 4y - 4 + \frac{y^4}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

multiplicando o resultado acima por 4 chegamos novamente na solução implícita $y^4 + 16y - 8t^2 + t^4 = 17$.

1.3 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

Equações lineares de segunda ordem tem uma importância crucial no estudo de equações diferenciais por duas razões principais. A primeira é que equações lineares tem uma estrutura teórica rica, subjacente a diversos métodos sistemáticos de resolução. Além disso, uma parte substancial dessa estrutura e desses métodos é compreensível em um nível matemático relativamente elementar. Para apresentar as ideias fundamentais num contexto o mais simples possível vamos descrevê-las neste capítulo para equações de segunda ordem. Outra razão para estudar equações lineares de segunda ordem é que elas são essenciais para qualquer investigação séria das áreas clássicas da física matemática

Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (1.13)$$

onde f é uma função geral dada: A equação (1.13) é dita linear se a f tem forma:

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y$$

ou seja se f é linear em y e $\frac{dy}{dt}$, na equação acima g, p e q são funções especificadas da variável independente t mas não dependem de y . Nesse caso escrevemos a equação geral (1.13), em geral, como :

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t) \quad (1.14)$$

Na equação (1.14) encontramos com frequência, a equação,

$$P(t)y''(t) + Q(t)y'(t) + R(t)y(t) = G(t)$$

è claro que $P(t) \neq 0$ podemos dividir a equação anterior por $P(t)$ obtendo assim a equação (1.14) com,

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \quad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \quad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)}$$

Ao tentar resolver as equações (1.13) e (1.14) vamos nos restringir a intervalos nos quais as funções p, q e g são contínuas. Um problema de valor inicial consiste numa equação diferencial como as citadas anteriormente com um par de condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \quad , \quad y'(t_0) = y'_0 \quad (1.15)$$

onde y_0 e y'_0 são números dados que descrevem o valor de y e y' no ponto t_0 . Uma equação linear de segunda ordem é dita homogênea se a função $g(t)$ da equação (1.14) for igual a zero para todo t , ou seja,

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0 \quad (1.16)$$

esta secção vamos concentrar nossa atenção nas equações em que P,Q e R são constantes e seus valores respectivamente a , b e c , nesse caso a equação anterior torna-se:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1.17)$$

Com um pouco de reflexão nós somos capazes de dizer que uma possível solução para equação anterior é do tipo $y = e^{rt}$ além disso $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$ onde r é um parâmetro a ser determinado, substituindo os valores de y , y' e y'' na Eq. (1.17) chegamos no seguinte resultado:

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \quad (1.18)$$

como $e^{rt} \neq 0$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (1.19)$$

a expressão acima é chamada equação característica da equação diferencial (1.17), seu significado reside no fato que, se r é uma raiz da Equação polinomial (1.19), então $y = e^{rt}$ é solução da equação diferencial (1.17). Como a (1.19) é uma equação do segundo grau com coeficientes reais, ela tem duas raízes que podem ser distintas reais e iguais ou complexas conjugadas.No presente trabalho será considerada apenas o primeiro caso.

Supondo $r_1 \neq r_2$ duas raízes reais . Então $y_1(t) = e^{r_1.t}$ e $y_2(t) = e^{r_2.t}$ são duas soluções da Eq.(1.17) segue que

$$y = c_1.e^{r_1.t} + c_2.e^{r_2.t} \quad (1.20)$$

também são soluções da Eq.(1.17). Para verificar que isso é verdade, podemos derivar a expressão na Eq.(1.20), portanto:

$$y' = c_1.r_1.e^{r_1.t} + c_2.r_2.e^{r_2.t} \quad (1.21)$$

$$y'' = c_1.r_1^2.e^{r_1.t} + c_2.r_2^2.e^{r_2.t} \quad (1.22)$$

Substituindo y,y' e y'' na equação (1.17) temos o seguinte:

$$ay'' + by' + cy = a.(c_1.r_1^2.e^{r_1.t} + c_2.r_2^2.e^{r_2.t}) + b.(c_1.r_1e^{r_1.t} + c_2.r_2e^{r_2.t}) + c.(c_1e^{r_1.t} + c_2e^{r_2.t})$$

portanto

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 \cdot t} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 \cdot t} \quad (1.23)$$

As quantidades entre parênteses à direita do sinal de igualdade na equação Eq.(1.23) são nulas pois r_1 e r_2 são raízes da (1.19), logo pela (1.20) é de fato uma solução da Eq.(1.17) como queríamos verificar.

Vamos supor agora que queremos encontrar o elemento particular da família de soluções da Eq.(1.20) é de fato uma solução da (1.17) sujeita as condições iniciais (1.15) fazendo $t = t_0$ e $y = y_0$ na Eq.(1.20), obtemos

$$y_0 = c_1 e^{r_1 \cdot t_0} + c_2 e^{r_2 \cdot t_0} \quad (1.24)$$

Analogamente fazendo $t = t_0$ e $y' = y'_0$ obtemos na (1.21) temos:

$$y'_0 = c_1 \cdot r_1 e^{r_1 \cdot t_0} + c_2 \cdot r_2 e^{r_2 \cdot t_0} \quad (1.25)$$

Resolvendo simultaneamente as Eq.(1.24) e Eq.(1.25) para c_1 e c_2 encontramos:

$$c_1 = \frac{y'_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0} \quad e \quad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y'_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0} \quad (1.26)$$

Lembrando que $r_1 - r_2 \neq 0$ de modo que Eq.(1.26) sempre fazem sentido. Assim não importa que condições iniciais sejam dadas, ou seja, independente dos valores de t_0 y_0 y'_0 nas Eq.(1.15) sempre é possível determinar c_1 e c_2 de modo que as condições iniciais sejam satisfeita. Além disso, existe apenas uma possível escolha de c_1 e c_2 dada pela Eq.(1.26) a expressão Eq.(1.20) é a solução do problema de valor inicial:

$$ay'' + by' + cy \quad e \quad y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y'_0 \quad (1.27)$$

Exemplo: Encontre a solução do problema de valor inicial:

$$4y'' - 8y' + 3y = 0 \quad , \quad y(0) = 2 \quad e \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

Notemos que a equação acima é simplismete a (1.17) , com $a = 4$, $b = -8$ e $c = 3$, portanto podemos dizer que $y(t) = e^{r \cdot t}$ é solução da equação dada, entao a equação característica é

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

Calculado as raízes temos $r_1 = \frac{3}{2}$ e $r_2 = \frac{1}{2}$, portanto a solução geral da equação diferencial dada é,

$$y = c_1 \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot t}$$

Usando as condições iniciais, obtemos as duas equações seguintes para c_1 e c_2 :

$$c_1 + c_2 = 2, \quad \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}$$

A solução desse sistema é $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{2}$ de modo que a solução do problema d valor inicial é:

$$y = -\frac{1}{2}.e^{\frac{3}{2}.t} + \frac{5}{2}.e^{\frac{1}{2}.t}$$

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções

2.1 Espaços Métricos

A grosso modo, um espaço métrico é um conjunto, de natureza arbitrária, onde é possível definir distância entre seus elementos. Através dessa estrutura se torna palpável generalizações de conceitos estudados em Análise, como são o caso dos limites e continuidade de funções em \mathbb{R} .

Definição 3. *Seja M um conjunto não vazio. Uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de métrica em M se gozar das seguintes propriedades:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ para todo $x, y \in M$
2. $d(x, y) > 0$ para todo $x, y \in M$ e $x \neq y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$ (Simetria)
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo x, y e $z \in M$ (desigualdade triangular)

Ao par (M, d) chamamos de espaço métrico.

Um exemplo de métrica que será utilizado nesse trabalho é a métrica do supremo. Fixado um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas, a métrica do supremo é definida do seguinte modo:

$$d(f, g) := \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$$

De fato supondo $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas devemos mostrar que valem os itens 1, 2, 3 e 4 da definição (3).

1. Suponha que $f(t) = g(t)$, $\forall t \in [a, b]$ sendo assim, $d(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - f(t)| = 0$. Supondo agora $f \neq g$, existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $|f(t_0) - g(t_0)| = \delta > 0$ logo $d(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| \geq |f(t_0) - g(t_0)| = \delta > 0$, provando que $d(f, g) = 0$ implica $f = g$.
2. Como vimos na recíproca acima, caso $f(t) \neq g(t)$ para algum $t \in [a, b]$, $d(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| > 0$
3. Nome que $d(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [a, b]} |g(t) - f(t)| = d(g, f)$
4. Para verificar a desigualdade triangular usaremos a desigualdade triangular do valor absoluto de números reais e uma duas propriedades de supremo que podem ser vistas em (9). A primeira garante que dados $X, Y \subset \mathbb{R}$ limitados superiormente e dado $Z = X + Y \subset \mathbb{R}$ segue-se que Z é limitado superiormente. E além disso $\sup Z = \sup X + \sup Y$. Já a segunda propriedade de supremo diz que dadas duas funções limitadas $r, s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $r(t) \leq s(t)$ para todo $t \in [a, b]$ então $\sup_{t \in [a, b]} |r(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |s(t)|$. Agora mostraremos que a desigualdade triangular é satisfeita. Com efeito,

$$d(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$$

daí, dada uma função limitada $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, somando e subtraindo $h(t)$, temos que

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} [|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|] \\ &= \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - h(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |h(t) - g(t)| \\ &= d(f, h) + d(h, g) \end{aligned}$$

Ou seja, o conjunto das funções limitadas no intervalo $[a, b]$ com a métrica do supremo é um espaço métrico.

2.1.1 Sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos

Definição 4. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de um espaço métrico (M, d) é convergente para $x \in M$ se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

Em outras palavras, dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x , e escrevermos $x_n \rightarrow x$

quando dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$$

Nestas condições, x é dito o limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Uma sequência de Cauchy em um espaço métrico (M, d) é definida de maneira análoga à definição no contexto da reta.

Definição 5. *Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de um espaço métrico (M, d) é dita uma sequência de Cauchy se, para cada $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que,*

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

para todo $\forall m, n > n_0$

Uma forma equivalente de mostrar que a sequência nas condições acima é de Cauchy é escrever o índice $m = n + p$ e mostrar que para todo $p \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$$

Intuitivamente os termos de uma sequência de Cauchy vão se tornar cada vez mais próximo uns dos outros, à medida que cresce o índice n . Ser Cauchy é uma propriedade intrínseca, depende apenas dos seus termos, mas não garante a existência do ponto no espaço que represente essa aproximação, em contraste com a propriedade de uma sequência ser convergente.

Teorema 1. *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente, com $x_n \rightarrow x$. Isto significa que dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Pela desigualdade triangular para $m, n > n_0$, obtemos:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

portanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. □

Uma pergunta bastante natural é: vale a recíproca do teorema acima? A resposta é não. Existem sequências de Cauchy definidas em espaço métrico (M, d) que não convergem.

para um elemento de M . Por exemplo, $M = (0, 1]$ é um espaço métrico com métrica induzida de \mathbb{R} . Porém a sequência $x_n = \frac{1}{n}$ é claramente de Cauchy, mas seu limite $0 \notin (0, 1]$.

Definição 6. *Uma espaço Métrico (M, d) é dito completo se toda sequência de Cauchy converge.*

A reta é o exemplo mais natural de espaços métricos completos, porém estudaremos outros exemplos que nos auxiliarão na prova da existência de soluções de equações diferenciais ordinárias.

2.1.2 Completude de um Espaço de Funções

Nesta seção apresentaremos o espaço métrico que nos interessa mais de perto. Um dos objetivos é permitir o leitor revisar a linguagem topológica utilizada na demonstração do teorema da existência e unicidade.

A maneira mais conveniente de ver a solução

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$$

de uma equação diferencial é interpretar o caminho x como um ponto de um espaço métrico: assim teremos noções bem definidas, por exemplo, de proximidade entre soluções e de convergência de soluções. Além disso, veremos cada solução como um ponto fixo de contrações de espaços métricos bem escolhidos.

Podemos a partir da definição de convergência de sequências num espaço métrico M definir a convergência de uma sequência funções com contradomínio em M . Em particular definiremos a convergência pontual de uma sequência de funções $f_n : E \rightarrow F$, onde $E \subset \mathbb{R}^k$ e $F \subset \mathbb{R}^m$ da seguinte forma:

Definição 7. *Dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplesmente para f se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ em \mathbb{R}^m para cada $x \in E$.*

Em termos mais precisos, para todo $x \in E$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, dependente de x , tal que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$.

Para eliminar a dependência pontual da ordem n_0 , temos em alternativa o conceito de convergência uniforme. Um exemplo pode ser obtido no espaço $B_0(E, F)$ das funções $f : E \rightarrow F$ limitadas. Mais precisamente, dados subconjuntos $E \subseteq \mathbb{R}^k$ e $F \subseteq \mathbb{R}^m$ quaisquer, dotados das respectivas métricas euclidianas induzidas denotamos $B_0(E, F)$ o conjunto de todas as aplicações $f : E \rightarrow F$ que são limitadas, ou seja, tais que a imagem $f(E) \subseteq F$ da aplicação é um conjunto limitado em \mathbb{R}^m .

No conjunto $B_0(E, F)$ podemos definir a distância

$$d(f, g) := \sup_{x \in E} \|f(x) - g(x)\|$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma usual no espaço euclidiano e define uma métrica, ou seja, dados $z, w \in \mathbb{R}^m$ podemos definir $d(z, w) = \|z - w\|$. A prova de que $d(f, g)$ é uma distância em $B_0(E, F)$ é análoga ao exemplo da métrica do supremo na reta.

Definição 8. Dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f se $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$

Observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$ significa que dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um $N = N(\epsilon)$ independente de x tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para quaisquer $n \geq N$ e $x \in E$.

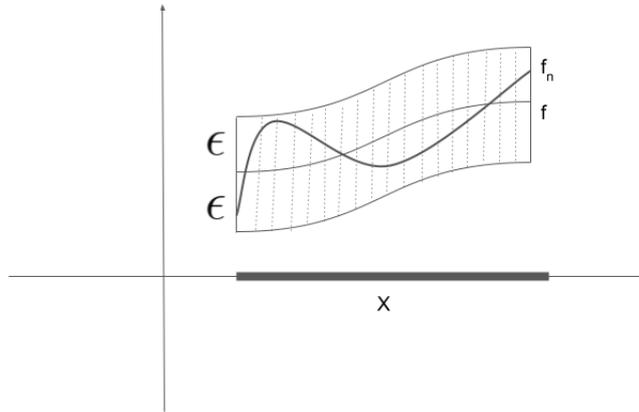


Figura 2.1: Interpretação Geométrica da Convergência Uniforme

Mostraremos agora a completude do espaço $B_0(E, F)$.

Proposição 1. Se $F \subseteq \mathbb{R}^m$ é um espaço métrico completo então, para qualquer $E \subseteq \mathbb{R}^k$, espaço métrico $B_0(E, F)$ é completo com a métrica uniforme.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $B_0(E, F)$. Para cada $x \in E$ fixado, a sequência $x_n = f_n(x)$ em F também é de Cauchy pois $|f_n(x) - f_m(x)| \leq d(f_n, f_m)$. Por F ser completo, existe em $y \in F$ talque $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ o que então define uma aplicação $y = f(x)$ de E em F . Observe que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplesmente a f . O que queremos é mostrar que essa aplicação f é limitada, ou seja, $f \in B_0(E, F)$. E que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f no espaço métrico $B_0(E, F)$.

Como sempre ocorre com sequências de Cauchy, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $B_0(E, F)$ de modo que podemos tomar a aplicação $g_0 : E \rightarrow F$ constante qualquer e $r > 0$ tais que $d(f_n, g_0) \leq r$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

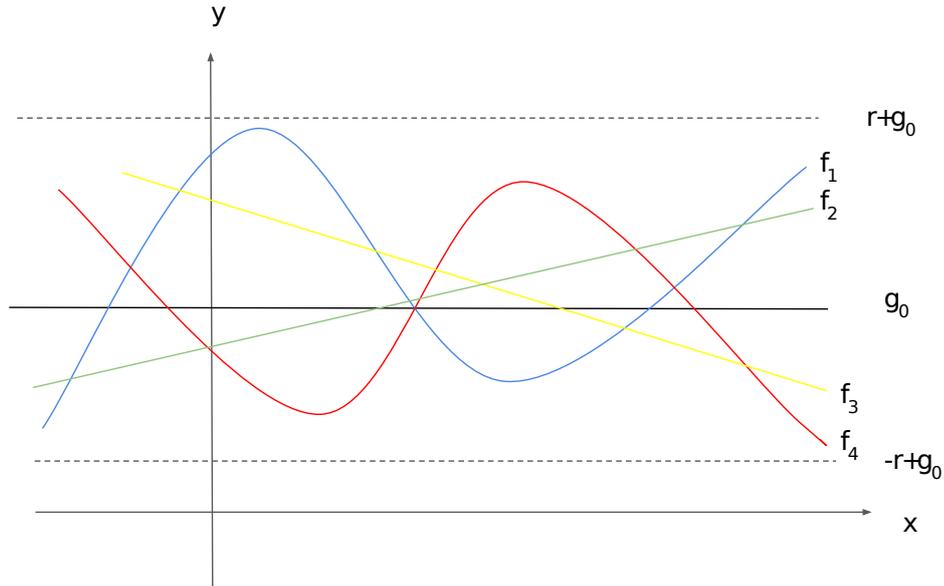


Figura 2.2: Sequência de funções limitadas

Como f_n converge pontualmente para f e g_0 é constante. Dado $x \in E$ decorre

$$\begin{aligned}
 |f(x) - g_0(x)| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} g_0(x) \right| \\
 &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - g_0(x)) \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - g_0(x)| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_0) \leq r
 \end{aligned}$$

de modo que $d(f, g_0) \leq r$ e portanto $f \in B_0(E, F)$.

Finalmente dado $\epsilon > 0$ tomamos N tal que $d(f_k, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$ para quaisquer $k, n \geq N$. Fixado $x \in E$ e $n \geq N$ decorre que $|f_k(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $k \geq N$ de modo que

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Assim $d(f, f_n) < \epsilon$ para cada $n > N$ ou seja $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$ □

Podemos afirmar então que se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $B_0(E, F)$ então a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Dentre outras propriedades a convergência uniforme preserva a continuidade do ponto de vista de espaços de funções isso significa que o subconjunto das aplicações contínuas é fechado no das limitadas.

Proposição 2. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de aplicações $f_n : E \rightarrow F$ contínuas que converge uniformemente para $f : E \rightarrow F$. Então f também é contínua.*

Demonstração. Dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$. A convergência uniforme de f_n fornece $\delta > 0$ tal que $|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ para qualquer $|y - x| < \delta$. Segue que

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para qualquer $|y - x| < \delta$. Assim f é contínua no ponto arbitrário x . □

Observe que isso não é válido na convergência simples (pontual). Um contra-exemplo clássico é dado pela sequência $f(x) = x^{2n}$ definidas no intervalo $[0, 1]$. Claramente são contínuas e converge para função $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1)$ onde $f(1) = 1$. Dados subconjuntos $E \subseteq \mathbb{R}^k$ e $F \subseteq \mathbb{R}^m$, denotamos por $C_0(E, F)$ o conjunto de todas

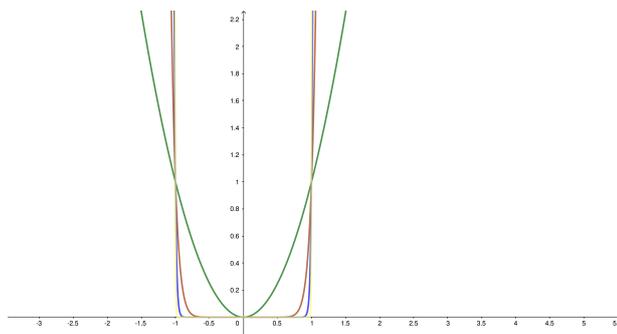


Figura 2.3: Gráfico da sequência $f(x) = x^{2n}$

as aplicações de E em F que são contínuas e limitadas. Por definição $C_0(E, F)$ é um subespaço métrico de $B_0(E, F)$ com a métrica do supremo e, pela proposição anterior é um subconjunto fechado de $B_0(E, F)$. Como subconjuntos fechados de espaços completos são completos segue o seguinte corolário da proposição (1)

Corolário 1. *Se $F \subseteq \mathbb{R}^m$ é completo então, para qualquer $E \subseteq \mathbb{R}^k$, o espaço métrico $C_0(E, F)$ é completo com a métrica uniforme.*

O espaço métrico acima será utilizado para mostrar a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais na seção 2.2, portanto consideraremos ao longo do texto F completo. Necessitaremos de noções de limitação de sequência de funções. A saber:

Definição 9. *Uma família $C = \{f : X \subset E \rightarrow F\}$ de funções é dita simplesmente (ou pontualmente) limitada se dado $x \in E$ existir um número real $M_x > 0$ tal que $\|f(x)\| < M_x$ para todo $f \in C$.*

Definição 10. Uma família $C = \{f : X \subset E \rightarrow F\}$ de funções é dita uniformemente limitada se existir um número real $M > 0$ tal que $\|f(x)\| < M$ para todo $x \in X$ e $f \in C$.

Tratando de sequências numéricas, temos o teorema de Bolzano-Weierstrass cujo o enunciado é "toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente", podemos analisar essa citação para sequência de funções contínuas e uniformemente limitada. Ou seja, tal sequência possui uma subsequência que converge uniformemente? A resposta a esse questionamento é negativa sendo assim será necessário atribuir outra hipótese a situação colocada.

Exemplo: Seja $f_n(x) = x^n(1-x^n)$, uma sequência de funções definidas no intervalo $[0, 1]$, contínuas e uniformemente limitada, isto é, $0 < f_n(x) < \frac{1}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo x no intervalo $[0, 1]$.

Se existisse uma subsequência, ela deveria tender uniformemente para zero, o que não ocorre, pois em toda f_n algum ponto do intervalo $[0, 1]$ assume o valor $\frac{1}{4}$ fazendo com que a convergência não seja uniforme. Sendo assim é necessário atribuir outra hipótese para situação considerada: a equicontinuidade.

Definição 11. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_n : E \rightarrow F$. Dizemos que a sequência é equicontínua em $x_0 \in E$ se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \epsilon$$

Definição 12. Dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua, se é equicontínua em todos os pontos $x \in E$.

Se a sequência é equicontínua e E é compacto então $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que $\forall x_0 \in E$ e $n \in \mathbb{N}$

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \epsilon$$

Outra observação importante é que se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família equicontínua tal que f_n converge pontualmente para f , então $\{f, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ é também equicontínua.

De fato, pela convergência pontual sabemos que $\forall x, x_0 \in E$, dado $\frac{\epsilon}{3} > 0$, $\exists n_x, n_{x_0} \in \mathbb{N}$ tais que $|f_{n_x}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ e $|f_{n_{x_0}}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$, seja então $n_0 = \max\{n_x, n_{x_0}\}$. Como a família é equicontínua então existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $\|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| < \frac{\epsilon}{3}$. Daí,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &\leq \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| + \|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

Proposição 3. Seja uma sequência equicontínua de funções $f_n : E \rightarrow F$ que converge simplesmente num subconjunto denso $D \subset E$, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em cada parte compacta $K \subset E$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, mostraremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \implies \|f_m(x) - f_n(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in K$. Com efeito, para todo $d \in D$ existe $n_d \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_d \implies \|f_m(d) - f_n(d)\| < \frac{\epsilon}{3}$. Além disso para todo $y \in K$ existe um intervalo J_y de centro em y tal que $x, y \in X \cap J_y \implies \|f_n(y) - f_n(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, como K é compacto, da cobertura $K \subset \bigcup_y J_y$ podemos extrair uma subcobertura finita $K \subset J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_p$. Sendo D denso em E , em cada um dos intervalos J_i , podemos escolher $d_i \in J_i \cap D$. Seja $n_0 = \max\{n_{d_1}, \dots, n_{d_p}\}$.

Então se $m, n > n_0$ e $x \in K$ deve existir i tal que $x \in J_i$. Logo

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \|f_m(x) - f_m(d_i)\| + \|f_m(d_i) - f_n(d_i)\| + \|f_n(d_i) - f_n(x)\|$$

Portanto $m, n > n_0$ e $x \in k \implies \|f_m(x) - f_n(x)\| < \epsilon$, Assim f_n converge uniformemente em K . \square

Corolário 2. *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f_n : E \rightarrow F$ uma seqüência equicontínua de funções que converge pontualmente para f . Então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f .*

Teorema 2 (Arzelà-Ascoli). *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Toda seqüência de funções $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, equicontínua e pontualmente limitada possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Demonstração. Seja $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$ um subconjunto enumerável denso de $E \subset \mathbb{R}^n$.

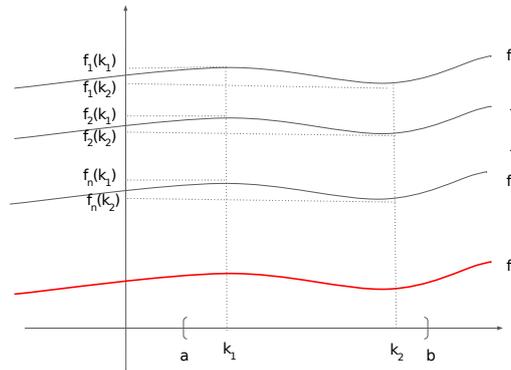


Figura 2.4: Família de Funções

Consideremos a seqüência numérica $(f_n(k_1))_{n \in \mathbb{N}}$. Como a seqüência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é pontualmente limitada, pelo o teorema de Borsano-Weierstrass, podemos dizer que existe uma subsequência $(f_{1n})_{n \in \mathbb{N}'}$ de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que a seqüência numérica

$$(f_{11}(k_1), f_{12}(k_1), \dots, f_{1n}(k_1) \dots)$$

é convergente. De modo análogo, obtemos uma subsequência $\{f_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}'}$ de $\{f_{1n}\}_{n \in \mathbb{N}'}$, ou seja $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$, tal que a sequência numérica

$$(f_{21}(k_2), f_{22}(k_2), \dots, f_{2n}(k_2), \dots)$$

é convergente.

Prosseguindo o processo indefinidamente obtemos um conjunto enumerável de subsequências $(f_{jn})_{n \in \mathbb{N}}$, $j = 1, 2, 3, \dots$ da sequência original (f_n) tais que, $(f_{1n}) \subset (f_n)$ e $(f_{jn}) \subset (f_{j-1,n})$, para $j > 1$, e as sequência numéricas

$$\begin{aligned} f_{11}(k_1), & f_{12}(k_1), & \dots, & f_{1n}(k_1), & \dots \\ f_{21}(k_2), & f_{22}(k_2), & \dots, & f_{2n}(k_2), & \dots \\ & & & \vdots & \\ f_{n1}(k_n), & f_{n2}(k_n), & \dots, & f_{nn}(k_n), & \dots \end{aligned} \tag{2.1}$$

\vdots

$$\tag{2.2}$$

são convergentes, onde a sequência na j -ésima linha converge nos pontos k_1, k_2, \dots, k_j , já que a sequência (f_{jn}) é uma subsequência de todas as anteriores, $f_{1n}, f_{2n}, \dots, f_{j-1,n}$ que convergem, respectivamente, nos pontos k_1, k_2, \dots, k_{j-1} .

Consideremos agora a sequência diagonal $(g_n) = (f_{nn})$. Observe que, para $n \geq j$, (f_{nn}) é uma subsequência de (f_{jn}) e portanto converge em k_1, k_2, \dots, k_n , isso implica que (f_{nn}) converge para todos os elementos de K .

Devemos mostrar que a subsequência (f_{nn}) converge uniformemente em E . Para isso usando a equicontinuidade de (f_n) e em particular a continuidade uniforme de (f_{nn}) , dado $\epsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$\|f_{nn}(x) - f_{nn}(x_0)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{se } \|x - x_0\| < \delta \quad \text{para todo } n. \tag{2.3}$$

Agora pela densidade de K temos para cada $x \in E$ e $\delta > 0$, existe $k_j \in K$ tal que $k_j \in (x - \delta, x + \delta)$ ou seja $\|x - k_j\| < \delta$.

Portanto, para cada $x \in E$ podemos fazer (2.3) $x_0 = k_j$ tal que

$$\|x - x_k\| < \delta \Rightarrow \|f_{nn}(x) - f_{nn}(k_j)\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo } n. \tag{2.4}$$

Notemos também que como a sequência $(f_{nn}(k_j))$ é convergente, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|f_{nn}(x) - f_{mm}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{sempre que } n, m > n_0 \tag{2.5}$$

Assim usando a equicontinuidade e as relações (2.4) e (2.5) temos:

$$\begin{aligned} |f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| &\leq |f_{nn}(x) - f_{nn}(k_j)| + |f_{nn}(k_j) - f_{mm}(k_j)| + |f_{mm}(k_j) - f_{mm}(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \text{converge} \quad \forall x \in X \quad e \quad n, m \geq n_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Logo a sequência (f_{nn}) é de Cauchy e portanto converge uniformemente em K . \square

Um importante teorema para prova da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias é o teorema do ponto fixo de Banach que tem como hipótese principal a contração de funções em espaços métricos, onde as imagens se aproximam a cada interação, mas precisamente:

Definição 13. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma função $f : M \rightarrow M$ é chamada de contração sobre M se existir um número real $0 < c < 1$ tal que:*

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$$

para todo $x, y \in M$.

Vamos agora enunciar e demonstrar o teorema do ponto fixo de Banach. Um dos motivos de sua imensa importância é que ele fornece um processo iterativo para a busca de soluções para equações não lineares.

Teorema 3 (O Teorema do Ponto fixo de Banach). *Considere (M, d) um espaço métrico completo e uma contração $f : M \rightarrow M$. Então f possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Considere $x_0 \in M$ e a sequência (x_n) em M que por definição é: $x_{n+1} = f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq cd(x_0, x_1) \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq cd(x_0, x_1)$$

e

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \leq c^2d(x_0, x_1) \Rightarrow d(x_2, x_3) \leq c^2d(x_0, x_1)$$

Continuando o processo e usando o argumento indutivo sobre n chegamos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M é um espaço métrico completo, nosso interesse é mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Para tal, utilizando a desigualdade triangular,

temos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \quad (2.7)$$

como

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq c^n d(x_0, x_1) \\ d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq c^{n+1} d(x_0, x_1) \\ &\vdots \\ d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) &\leq c^{p+n-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

segue então de (2.7)

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq (c^n + c^{n+1} + \dots + c^{p+n-1})d(x_0, x_1).$$

Observe agora que como $0 < c < 1$ temos

$$c^n + c^{n+1} + \dots + c^{p+n-1} = c^n \cdot \frac{1 - c^p}{1 - c} \leq \frac{c^n}{1 - c}$$

logo chegamos ao seguinte resultado:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1 - c} \cdot d(x_0, x_1)$$

para todo $p \in \mathbb{N}$. Passando o limite quando $n \rightarrow \infty$ nessa desigualdade :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c^n}{1 - c} \cdot d(x_0, x_1) \right) = d(x_0, x_1) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{1 - c}$$

como $0 < c < 1$, $c^n \rightarrow 0$ e vale o seguinte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{1 - c} = 0$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$$

Assim concluímos que (x_n) é de fato uma sequência de Cauchy em M .

Levando em consideração o fato de (M, d) ser um espaço métrico completo então (x_n) converge em M . Seja então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Em consequência disso tomando o limite da equação $x_{n+1} = f(x_n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

e usando o fato que aplicação f é continua podemos escrever,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a)$$

E chegamos a igualdade $f(a) = a$ provando a existência do ponto fixo. Passamos agora a unicidade. Para tal, sejam $a, b \in M$ dois pontos fixos de f , assim temos

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq cd(a, b)$$

isso leva a igualdade $(1 - c)d(a, b) \leq 0$ como $c < 1$ temos que $1 - c > 0$ donde concluimos $d(a, b) \leq 0$, como $d(a, b)$ é um número real não negativo, concluimos que $d(a, b) = 0$, isso ocorre se, e somente se, $a = b$. \square

Corolário 3. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação de um espaço métrico completo nele mesmo e suponha que exista uma iterada de f que é uma contração. Então existe um único ponto fixo atrator de f , ou seja, um único ponto $a \in M$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$$

para qualquer $x \in M$

Demonstração. Suponhamos que a iterada f^k seja uma contração do espaço métrico (M, d) , para alguma inteiro $k \geq 1$ fixado e seja a o único ponto fixo dado pelo teorema (3) acima; para simplificar, escrevemos

$$g = f^k$$

Assim, temos $g(a) = a$ e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g^m(y) = a$$

para cada $y \in M$, já que a é ponto fixo atrator de g . O que queremos mostrar é que a é ponto fixo atrator de f , ou seja, $f(a) = a$ e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$$

para qualquer ponto $x \in M$. De fato, se $b \in M$ é um ponto fixo de f então b claramente também é ponto fixo da iterada g ; como essa iterada possui um único ponto fixo, decorre que f possui no máximo um ponto fixo. Reciprocamente, o ponto fixo $a = g(a)$ da iterada g também é ponto fixo de f , pois

$$g(f(a)) = f^k(f(a)) = f^{k+1}(a) = f(f^k(a)) = f(g(a)) = f(a)$$

Isso prova que $f(a)$ é um ponto fixo de g ; como g tem um único ponto fixo a saber a , resulta que a é o único ponto fixo de f , ou seja,

$$f(a) = a.$$

Resta mostrar que a é um ponto atrator de f . Para $n \in \mathbb{N}$, podemos sempre escrever $n = mk + r$, onde $0 \leq r < k$ é o resto da divisão de n por k ; em particular para todo $x \in M$,

$$f^n(x) = f^{mk+r}(x) = (f^k)^m(f^r(x)) = g^m(f^r(x))$$

Portanto, supondo $0 < \eta < 1$ a constante de contração de g , temos que

$$d(f^n(x), a) = d(g^m(f^r(x)), a) = d(g^m(f^r(x)), g^m(a)) = \eta^m d(f^r(x), a)$$

daí quando $n \rightarrow \infty$ temos que $m \rightarrow \infty$ e $\eta^m \rightarrow 0$. Portanto, $d(f^n(x), a) \rightarrow 0$, já que existe o máximo $\{d(f^r(x), a)\}$. Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$$

□

O teorema (3) e seu corolário são, muitas vezes, aplicados a contrações em espaços métricos compactos e completos. Entretanto o corolário será utilizado para provar a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinária.

2.2 Existência e Unicidade De Soluções De EDO's

Nesta seção vamos traduzir para o contexto de pontos fixos de contrações de espaços métricos completos o teorema da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, ou seja, nesta seção estudaremos o problema de valor inicial:

$$x' = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.8}$$

de uma EDO, em \mathbb{R}^n definida pela aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz algumas propriedades de regularidade num aberto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Lembrando que uma solução da equação $x' = f(t, x)$ em U é um caminho $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é derivável no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ cujo gráfico esta inteiramente contido em U e cuja velocidade é determinado pela função f , ou seja, tal que:

$$(t, x(t)) \in U \quad e \quad x'(t) = f(t, x(t))$$

para cada $t \in I$. Uma solução de (2.8) pode ser interpretada como na figura 2.5.

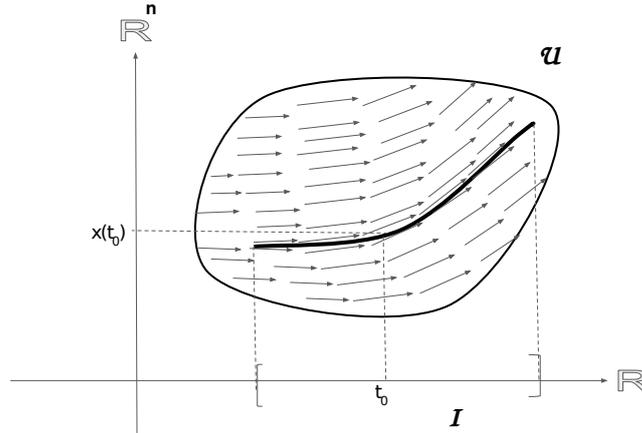


Figura 2.5: Uma solução de $x' = f(t, x)$ em U

Considerando então

$$x(t_0) = x_0 \quad e \quad x'(t) = f(t, x(t)) \quad (2.9)$$

integrando ambos os membros da igualdade anterior, chegamos ao seguinte resultado:

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos:

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

mas $x(t_0) = x_0$ chegando ao seguinte:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2.10)$$

Em vista disso, as soluções de (2.8) são denominadas muitas vezes de curvas integrais da equação. Reciprocamente derivando a equação anterior obtemos:

$$x'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \Rightarrow x'(t) = f(t, x(t))$$

e se $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho contínuo que satisfaz (2.10), então necessariamente:

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s)) ds = x_0 + 0 = x_0$$

Portanto (2.10) e (2.9) são equivalentes. Agora, dado qualquer caminho contínuo $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definimos,

$$\mathcal{L}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2.11)$$

para cada $t \in I$. Pelo que foi mostrado $\mathcal{L}(x) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho derivável e mais x é o ponto fixo de \mathcal{L} , ou seja,

$$x = \mathcal{L}(x)$$

se, e somente se, $x(t) = \mathcal{L}(x)(t)$ para cada $t \in I$.

Trabalhando com a equação (2.8), a garantia teórica para a convergência do método é dada pelo teorema (3) que, antes de mais nada, exige um espaço métrico completo o qual é dado pela definição (6). Ora, o espaço $\mathcal{F} = C(I, \mathbb{R}^n)$ dos caminhos contínuos de I em \mathbb{R}^n é completo na métrica

$$d(\mu, \nu) = \sup_{x \in E} \|\mu(t) - \nu(t)\|$$

sempre que I for um intervalo compacto. Supondo então, que I é um intervalo compacto temos que, $\mathcal{L} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é uma aplicação bem definida do espaço métrico \mathcal{F} , nele mesmo. Provaremos que existe uma iterada de \mathcal{L} que é uma contração e para tal provaremos o seguinte lema:

Lema 1. *Se $k > 0$ é uma constante de Lipschitz de $f(t, x)$ em relação a segunda variável então .*

$$\|\mathcal{L}^m(\mu)(t) - \mathcal{L}^m(\nu)(t)\| \leq \frac{k^m}{m!} |t - t_0|^m d(\mu, \nu) \quad (2.12)$$

para quaisquer $\mu, \nu \in \mathcal{F}$ $m \geq 0$ e $t \in I$.

Demonstração. A afirmação do lema é evidente para $m = 0$ pela métrica do supremo. Dadas $\mu(t)$, $\nu(t)$ em \mathcal{F} , a definição (2.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu)(t) - \mathcal{L}(\nu)(t) &= \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mu(s)) ds \right) - \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \nu(s)) ds \right) \\ &= \int_{t_0}^t f(s, \mu(s)) - f(s, \nu(s)) ds \end{aligned}$$

e portanto, para cada $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(\mu)(t) - \mathcal{L}(\nu)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \mu(s)) - f(s, \nu(s)) ds \right\| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \mu(s)) - f(s, \nu(s))\| ds \right| \\
&\leq k \left| \int_{t_0}^t \|\mu(s) - \nu(s)\| ds \right| \\
&\leq kd(\mu, \nu) \int_{t_0}^t ds \leq Kd(\mu, \nu) |t - t_0| \quad (2.13)
\end{aligned}$$

onde $k > 0$ é uma contante de Lipschitz . Isso prova o lema para $m = 1$. Aplicando (2.13) a $\mathcal{L}(\nu)$ e $\mathcal{L}(\mu)$ no lugar de ν e μ , obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}^2(\mu)(t) - \mathcal{L}^2(\nu)(t)\| &= \|\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mu))(t) - \mathcal{L}(\mathcal{L}(\nu))(t)\| \\
&\leq K \left| \int_{t_0}^t \|\mathcal{L}(\mu)(s) - \mathcal{L}(\nu)(s)\| ds \right| \\
&\leq K^2 d(\mu, \nu) \left| \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \right| \\
&= K^2 d(\mu, \nu) \frac{1}{2} |t - t_0|^2
\end{aligned}$$

Assumindo a hipótese da indução válida para um certo $m \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}^{m+1}(\mu)(t) - \mathcal{L}^{m+1}(\nu)(t)\| &= \|\mathcal{L}(\mathcal{L}^m(\mu))(t) - \mathcal{L}(\mathcal{L}^m(\nu))(t)\| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \mathcal{L}^m(\mu)(s)) - f(s, \mathcal{L}^m(\nu)(s))\| ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t k \|\mathcal{L}^m(\mu)(s) - \mathcal{L}^m(\nu)(s)\| ds \right| \\
&\leq k \left| \int_{t_0}^t \frac{k^m}{m!} |s - t_0|^m d(\mu, \nu) ds \right| \\
&\leq \frac{k^{m+1}}{(m+1)!} |t - t_0|^{m+1} d(\mu, \nu)
\end{aligned}$$

□

Aqui nos restringimos a condição de Lipschitz na variável espacial. Para fixar a terminologia, dizemos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma Lipschitziana na variável espacial em $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ou, simplismente lipschitziana em $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, se existir $k > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|$$

para quaisquer dois pontos $(t, x), (t, y) \in U$ de mesma coordenada t . Neste caso, dizemos que k é uma constante de Lipschitz e que $f(t, x)$ satisfaz a condição de Lipschitz.

Teorema 4. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, se f é lipschitziana em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ então, para quaisquer $t_0 \in [a, b]$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução de problema de valor inicial (2.8) definida no intervalo $[a, b]$*

Demonstração. Tomando $I = [a, b]$ e $l = b - a$. Como o crescimento fatorial é muito maior do que o exponencial, ou observado que $\sum \frac{1}{m!}(kl)^m = e^{kl}$ de modo que a série converge e, conseqüentemente, seu termo geral tende a zero), temos que podemos escolher um $m = m(k, l)$ tal que para cada $t \in I$

$$\frac{k^m}{m!}|t - t_0|^m \leq \frac{(kl)^m}{m!} = \eta < 1$$

onde k é uma constante de Lipschitz de f . Pelo lema (1), resulta

$$d(\mathcal{L}^m(\mu), \mathcal{L}^m(\nu)) = \sup_{t \in I} \|\mathcal{L}^m(\mu)(t) - \mathcal{L}^m(\nu)(t)\| \leq \eta d(\mu, \nu)$$

ou seja, existe m tal que \mathcal{L}^m é uma contração de $\mathcal{F} = C(I, \mathbb{R}^n)$ pelo corolário do teorema (3) segue que \mathcal{L} possui um único ponto fixo $x \in \mathcal{F}$, e pelo observado acima resolve o problema de valor inicial (2.8). \square

Uma aplicação da existência e unicidade pode ser dada no caso linear. Seja $M(n)$ o espaço das matrizes reais $n \times n$, temos:

Teorema 5. *Se $A : I \rightarrow M(n)$ e $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ são cominhos contínuos no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a equação diferencial ordinária linear*

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

tem uma única solução definida em todo intervalo I .

Demonstração. Para demonstrar, seja $[a, b] \subset I$ um intervalo compacto qualquer. A aplicação $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ é contínua na faixa $I \times \mathbb{R}^n$, de modo que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq K\|x - y\|$$

onde

$$K = \sup\{\|A(t)\|; a \leq t \leq b\} < \infty$$

é cortesia da compacidade de $[a, b]$ pela continuidade de $A(t)$.

Existe uma única solução em $[a, b]$ da equação $x' = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$, para cada condição inicial $x(t_0) = x_0$ com $t_0 \in [a, b]$.

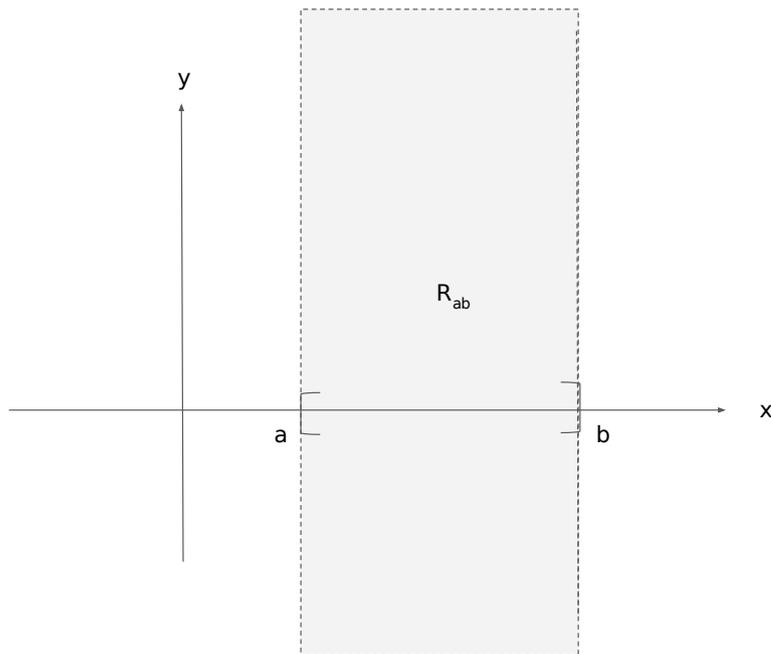


Figura 2.6: Faixa vertical $I \times \mathbb{R}^n$

Supondo I um intervalo qualquer, fixando $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quaisquer tomamos uma sequência crescente de intervalos compactos $[a_m, b_m]$ tais que $a_m \leq t_0 \leq b_m$ e $I = \cup [a_m, b_m]$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, tomamos a única solução $x_m(t)$ em $[a_m, b_m]$, tal que $x_m(t_0) = x_0$. Definindo $x(t) = x_m(t)$ para $t \in [a_m, b_m]$ o caminho $x(t)$ resulta bem definido em todo intervalo I por unicidade, sendo a solução procurada. \square

Teorema 6 (Picard-Lindelöf). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto e $a > 0$, $b > 0$ tais que $R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$. Se $f(t, x)$ é lipschitziana no retângulo $R_{a,b}$ então existe uma única solução do problema de valor inicial (2.8) definida no intervalo fechado $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ onde $\alpha > 0$ é dado por $\alpha = \min \{a, \frac{b}{M}\}$, com $M > 0$ uma cota superior qualquer de $\|f(t, x)\|$ no retângulo $R_{a,b}$.*

Demonstração. Passamos a supor que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, qualquer que, não necessariamente, contém toda uma faixa vertical infinita. Dado um ponto qualquer $(t_0, x_0) \in U$, escolhamos constantes $a, b > 0$ tais que:

$$R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U \tag{2.14}$$

onde $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \overline{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ são bolas fechadas centradas em t_0 e x_0 de raios a e b em \mathbb{R} e \mathbb{R}^n , respectivamente.

Para garantir que o gráfico de uma solução esteja contido no retângulo $R_{a,b} \subseteq U$, passamos a considerar o espaço $\mathcal{F} = C(I_a, B_b)$ dos caminhos contínuos de I_a em $B_b \subseteq \mathbb{R}^n$ que, pelo corolário (1) ainda é completo na métrica uniforme. Para cada caminho contínuo

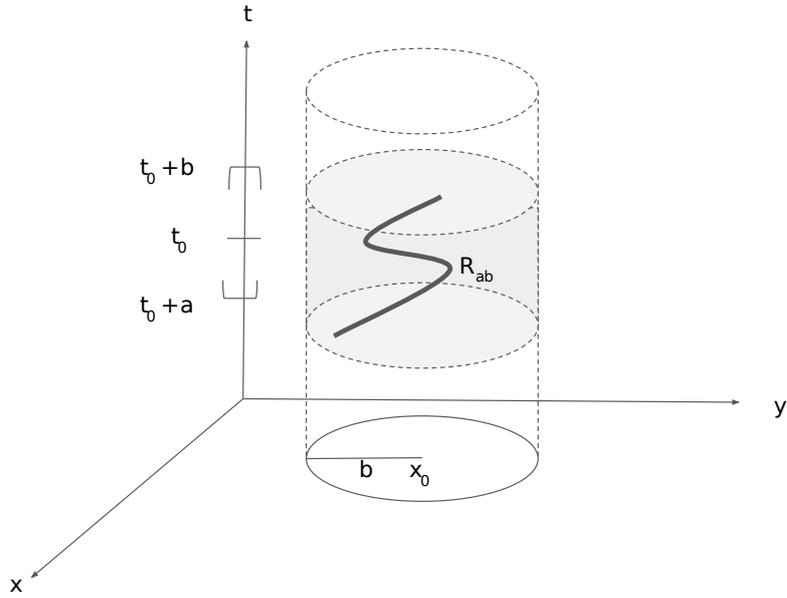


Figura 2.7: Retângulo R_{ab} no \mathbb{R}^3

$x : I_a \rightarrow B_b$ continuamos usando (2.11) para definir $\mathcal{L}(x) : I_a \rightarrow \mathbb{R}^n$, só que agora não necessariamente temos $\mathcal{L}(x) \in \mathcal{F}$ para cada $x \in \mathcal{F}$ ou seja $\mathcal{L} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ agora não é mais uma aplicação bem definida do espaço métrico completo \mathcal{F} nele mesmo. Para consertar isso, escolhemos qualquer $M > 0$ tal que

$$\|f(t, x)\| \leq M$$

para cada $(t, x) \in R_{a,b}$, obtível pela continuidade da aplicação f no compacto $R_{a,b}$. Dado um caminho $\mu \in \mathcal{F}$ temos, portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\mu)(t) - x_0| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mu(s)) ds - x_0 \right| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \mu(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \mu(s))\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M|t - t_0| \end{aligned}$$

e decorre que $\mathcal{L}(\mu)(t) \in B_b$ só está garantindo para $t \in I_a$ se $M|t - t_0| \leq b$. Em vista disso, definimos

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (2.15)$$

Observe que α só depende de a e b , que só depende da posição relativa de (t_0, x_0) em U , e de M , que só depende de a, b e de f . Agora definimos

$$I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subseteq I_a$$

e finalmente consideramos o espaço $\mathcal{F} = C(I_\alpha, B_b)$ dos caminhos contínuos de I_α em $B_b \subseteq \mathbb{R}^n$ o qual, pelo corolário (1), ainda é completo na métrica uniforme. Para cada caminho $x : I_\alpha \rightarrow B_b$ continuamos usando usando (2.11) para definir $\mathcal{L}(x) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pelo que vimos acima, agora temos $\mathcal{L}(x) \in \mathcal{F}$ para cada $x \in \mathcal{F}$ ou seja $\mathcal{L} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ novamente é uma aplicação bem definida, só que agora do espaço métrico completo $\mathcal{F} = C(I_\alpha, B_b)$ nele mesmo.

Se existir uma constante de Lipschitz para f em $I_\alpha \times B_b$ obtemos a mesma majoração (2.12) e conseqüentemente existe $m \in \mathbb{N}$ tal que \mathcal{L}^m é uma contração do espaço métrico completo \mathcal{F} , de modo que \mathcal{L} tem um único ponto fixo em \mathcal{F} o que resolve o problema de valor inicial (2.8) também nesse caso. \square

Lema 2. *Dado $0 < \epsilon \leq \delta$ existe um caminho contínuo $x_\epsilon : I(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para quaisquer $t, u \in I(\delta)$ valem*

$$\|x_\epsilon(t) - x_\epsilon(u)\| \leq M\|t - u\| \quad e \quad \|x_\epsilon(t) - x_0\| \leq b \quad (2.16)$$

e para qualquer $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, vale

$$x_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_\epsilon(s - \epsilon)) ds \quad (2.17)$$

Demonstração. Definimos $x_\epsilon(t) = x_0$ para $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$

$$x_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_\epsilon(s - \epsilon)) ds$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha_1$ onde $\alpha_1 = \min\{\alpha, \epsilon\}$. É imediato ver que as desigualdades (2.16) são trivialmente satisfeita para $t_0 - \delta \leq t, u \leq t_0$ e que para $t_0 \leq t, u \leq t_0 + \alpha_1$, temos

$$\|x_\epsilon(t) - x_\epsilon(u)\| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_\epsilon(s - \epsilon)) ds \right| \leq M|t - u|$$

e

$$\|x_\epsilon(t) - x_0\| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_\epsilon(s - \epsilon)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha_1 \leq M\alpha \leq b$$

de modo que resta observar que, em particular, para $u \leq t_0 \leq t$ temos

$$\|x_\epsilon(t) - x_\epsilon(u)\| = \|x_\epsilon(t) - x_0\| \leq M\|t - t_0\|$$

para concluir que a desigualdade (2.16) valem para quaisquer $t_0 - \delta \leq t, u \leq t_0 + \alpha_1$

Por definição vale(2.17) e também é imediato constatar que x_ϵ é um caminho contínuo em $[t_0 - \delta, t_0 + \alpha_1]$. Se $\alpha_1 = \alpha$ terminamos a prova; se $\alpha_1 < \alpha$ tomamos $\alpha_2 = \min\{\alpha, 2\epsilon\}$

e definimos

$$x_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_\epsilon(s - \epsilon)) ds$$

para $t \in [t_0 + \alpha_1, t_0 + \alpha_2]$. Assim estendemos x_ϵ a um caminho contínuo que, como antes (2.16), agora para quaisquer $t_0 - \delta \leq t, u \leq t_0 + \alpha_2$ e (2.17) vale $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha_2$. Se $\alpha_2 < \alpha$ tomamos $\alpha_3 = \min\{\alpha, 3\epsilon\}$ e continuamos a estender x_ϵ até obter (em no máximo $n < \frac{\alpha}{\epsilon} + 1$ passos), um caminho contínuo $x_\epsilon : [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz (2.16) em seu domínio e (2.17) vale em $[t_0, t_0 + \alpha]$ \square

Utilizando o teorema (2) de Ascoli obtemos a existência de soluções para equações contínuas.

Teorema 7. *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto e $a > 0, b > 0$ tais que (2.14). Então existe uma solução do problema de valor inicial (2.8) definida no intervalo fechado $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ onde $\alpha > 0$ é dado por (2.15), com $M > 0$ um cota superior qualquer de $|f(t, x)|$ no retângulo $R_{a,b}$.*

Demonstração. Nas hipóteses do teorema, fixado $\delta > 0$ e para $n \in \mathbb{N}$, tomamos o caminho $x_n = x_{\epsilon_n}$ fornecido pelo lema (2) para $\epsilon_n = \frac{1}{n}$. Por (2.16), sequência $\{x_n\}$ em $C(I(\delta), R_{a,b})$ assim obtida satisfaz as duas hipóteses do teorema (2) , que então garante a existência de um caminho contínuo $x : I(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é limite uniforme de uma subsequência , se necessário de $\{x_n\}$. Da convergência uniforme de $x_n(s) \rightarrow x(s)$ em $I(\delta)$ e da continuidade uniforme de f no compacto $R_{a,b}$ decorre a convergência uniforme de $f(s, x_n(s - \frac{1}{n})) \rightarrow f(s, x(s))$ em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Fixado $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, isso nos permite tomar o limite com $n \rightarrow \infty$ de ambos lados de (2.17)

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s - \frac{1}{n})) ds$$

para obter

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

o que significa , como sabemos que $x(t)$ é uma solução de $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ \square

Capítulo 3

Aplicações A Biosistema

Com o objetivo de exemplificar a importância das equações diferenciais ordinárias, iremos aqui explorar algumas aplicações na análise de dinâmicas populacionais e monitoramento de ecossistemas.

Embora as equações discutidas aqui sejam extremamente simples, se comparada às relações bastante complexas existentes na natureza, ainda é possível compreender algumas coisas sobre os princípios ecológicos pelo estudo desses modelos. Mais precisamente exibiremos o modelo matemático envolvendo duas espécies em competição, o modelo presa-predador e o modelo de decomposição da serrapilheira.

3.1 Espécies em Competição

Suponha que, num ambiente fechado, existem duas espécies semelhantes competindo por um suprimento limitado de comida - por exemplo duas espécies de peixe em um lago, nenhuma sendo presa da outra, mas ambas competindo pela comida disponível. Vamos denotar por x e y as populações das duas espécies num instante t .

Supondo que cada espécie na ausência da outra, seja governada pela equação logística:

$$\frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x) \quad (3.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y) \quad (3.2)$$

Onde ϵ_1 e ϵ_2 são as taxas de crescimento da população 1 e 2, respectivamente, e $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$ e $\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ são seus níveis de saturação. No entanto, quando ambas as populações estão presentes cada uma irá afetar o suprimento da comida disponível para outra. De fato, elas reduzem as taxas de crescimento e os níveis de saturação uma da outra.

A expressão mais simples para reduzir a taxa de crescimento da espécie x devido a presença da espécie y é substituir o fator de crescimento $\epsilon_1 - \sigma_1 x$ na equação (3.1) por

$(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y)$ onde α_1 é uma medida do grau de interferência da espécie y sobre a espécie x . Analogamente substituímos $(\epsilon_2 - \sigma_2 y)$ por $(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x)$ na equação (3.2). Obtemos então o sistema de equações:

$$\frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \quad (3.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) \quad (3.4)$$

Os valores das constantes positivas $\epsilon_1, \sigma_1, \alpha_1$ e $\epsilon_2, \sigma_2, \alpha_2$ dependem das espécies em consideração e tem que ser determinados, em geral, através de observações. Estamos interessados em obter as soluções de equilíbrio das espécies, ou seja, os pontos críticos das equações (3.3) e (3.4):

$$x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) = 0 \quad e \quad y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) = 0 \quad (3.5)$$

Observe que se $x = 0$ na primeira equação acima, então os valores y que anulam a segunda são obtidos pela solução da equação $y(\epsilon_2 - \sigma_2 y) = 0$, que implica $y = 0$ e $y = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$. Analogamente, $y = 0$, implica $x = 0$ e $x = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$. Ou seja, $(0, 0)$, $(0, \frac{\epsilon_2}{\sigma_2})$ e $(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}, 0)$ são pontos críticos.

Se x e y não são nulos então existem 4 casos a considerar, dependendo da orientação relativa das retas:

$$(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) = 0 \quad e \quad (\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) = 0 \quad (3.6)$$

como mostra a figura 3.1. Essas retas são chamadas, respectivamente, de retas de crescimento nulo de x e y já que x' se anula na primeira e y' na segunda. Em cada parte da figura 3.1 a reta de crescimento nulo de x é a reta sólida e a de y é a tracejada. Observemos que teremos mais um ponto crítico nos casos c e d da figura 3.1. Nos casos a e b , teremos apenas três pontos críticos onde uma ou ambas espécies se extinguíram.

Denotando (x_0, y_0) qualquer ponto crítico em qualquer um dos 4 casos. O sistema 3.3 é localmente linear em uma vizinhança desse ponto, já que a expressão a direita do sinal de igualdade em cada equação diferencial é um polinômio de grau 2 e em particular de classe C^2 , ver BOYCE(2006). Aplicaremos então a mudança de variável $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$, para estudar o sistema formado pelas equações 3.3 e 3.4 em uma vizinhança desse ponto crítico;

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - 2\sigma_1 x_0 - \alpha_1 y_0 & -\alpha_1 x_0 \\ -\alpha_2 y_0 & \epsilon_2 - 2\sigma_2 y_0 - \alpha_2 x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

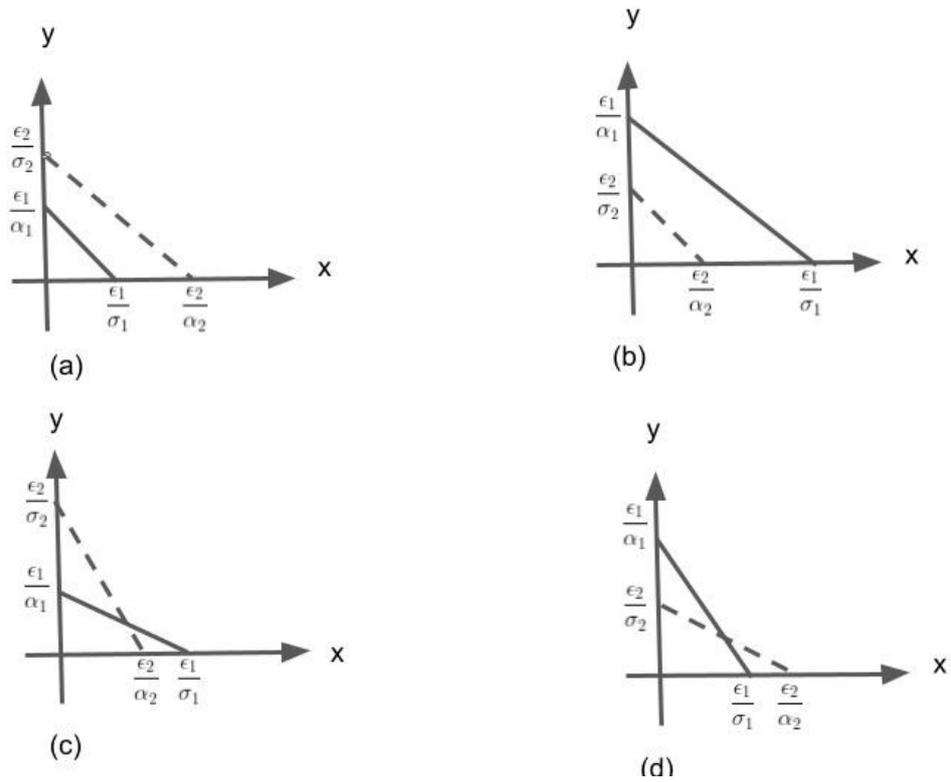


Figura 3.1: Os diversos casos para o sistema da espécie em competição (3.3). A reta de crescimento nulo de x é a reta sólida e a de y é a reta tracejada

Vamos usar agora equação 3.7 para determinar as condições sob as quais o modelo descrito na equações 3.3 e 3.4 permite a coexistência das duas espécies x e y . Dos quatro casos possíveis na figura 3.1 a coexistência só é possível nos casos (c) e (d). Nesse casos os valores não nulos de x_0 e y_0 são obtidos resolvendo-se as equações algébricas 3.6 e o resultado é:

$$x_0 = \frac{\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\alpha_1}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2} \quad , \quad y_0 = \frac{\epsilon_2\sigma_1 - \epsilon_1\alpha_2}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2} \quad (3.8)$$

Além disso, como $\epsilon_1 - \sigma_1x_0 - \alpha_1y_0 = 0$ e $\epsilon_2 - \sigma_2y_0 - \alpha_2x_0 = 0$ a equação 3.7 reduz imediatamente a:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1x_0 & -\alpha_1x_0 \\ -\alpha_2y_0 & -\sigma_2y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Os autovetores de 3.9 são encontrados fazendo $A = \begin{pmatrix} -\sigma_1x_0 & -\alpha_1x_0 \\ -\alpha_2y_0 & -\sigma_2y_0 \end{pmatrix}$ e admitindo r como o autovetor sabemos que r anula o polinômio característico de A ,

$$p_A(r) = \det(rI - A) = 0$$

isto é

$$\left| r \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma_1 x_0 & -\alpha_1 x_0 \\ -\alpha_2 y_0 & -\sigma_2 y_0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

onde chegamos no seguinte determinante;

$$\begin{vmatrix} r + \sigma_1 x_0 & \alpha_1 x_0 \\ \alpha_2 y_0 & r + \sigma_2 y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Fazendo o calculo acima obtemos

$$r^2 + (\sigma_1 x_0 + \sigma_2 y_0)r + (\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2)x_0 y_0 = 0 \quad (3.10)$$

Logo r assume os valores r_1 e r_2

$$r_{1,2} = \frac{-(\sigma_1 x_0 + \sigma_2 y_0) \pm \sqrt{(\sigma_1 x_0 + \sigma_2 y_0)^2 - 4(\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2)x_0 y_0}}{2} \quad (3.11)$$

Se $\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2 < 0$ então o radicando na equação 3.11 é positivo e maior do que $(\sigma_1 x_0 + \sigma_2 y_0)^2$ logo os autovalores são reais e de sinais opostos. Em consequência, o ponto crítico (x_0, y_0) é um ponto de sela instável e a coexistência não é possível.

Por outro lado, se $\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2 > 0$, então o radicando na equação 3.11 é menor do que $(\sigma_1 x_0 + \sigma_2 y_0)^2$. Daí, os autovalores podem ser reais negativos e distintos ou complexos conjugados com parte real negativa. Uma análise direta do radicando na equação 3.11 mostra que os autovalores não são complexos. Portanto os pontos críticos é um nó assintoticamente estável e uma coexistência sustentável é possível.

Vamos relacionar esse resultado com as figuras 3.1c, 3.1d. Na Figura 3.1c, temos:

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \quad e \quad \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} > \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \quad (3.12)$$

Essas desigualdades, acopladas com a condição de que x_0 e y_0 dados pela equação 3.8 são positivos e nos leva as desigualdades $\sigma_1 \sigma_2 < \alpha_1 \alpha_2$. Logo, nesse caso o ponto critico é um ponto de sela. Por outro lado, na figura 3.1d

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} < \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \quad e \quad \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} < \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \quad (3.13)$$

A condição x_0 e y_0 são positivo nos leva, agora a , $\sigma_1 \sigma_2 > \alpha_1 \alpha_2$. Portanto o ponto crítico é assintoticamente estável. Para esse caso podemos mostrar também que os outros pontos críticos são $(0, 0)$, $(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}, 0)$ e $(0, \frac{\epsilon_2}{\sigma_2})$ são instáveis. O estudo mais detalhado da análise qualitativa destas soluções fogem ao escopo deste trabalho e pode ser visto em BOYCE(2006).

3.2 Predador - Presa

Nesta secção, investigaremos a situação em que uma das espécies (predador) se alimenta da outra (presa), enquanto a presa se alimenta de outro tipo de comida. Vamos denotar, por x e y as populações, respectivamente, da presa e do predador num instante t . Ao construir a interação de duas espécies fazemos as seguintes hipóteses:

1. Na ausência do predador, a população das presas aumentam a uma taxa proporcional à população atual. Assim $\frac{dx}{dt} = ax$, $a > 0$ quando $y = 0$.
2. Na ausência da presa, o predador é extinto assim $\frac{dy}{dt} = -cy$ com $c > 0$ quando $x = 0$.
3. O número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das duas populações. Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores e inibir o crescimento da população de presas.

Assim, a taxa de crescimento da população de predadores é aumentada por um termo da forma γxy enquanto a taxa de crescimento para a população de presas é diminuída por um termo da forma $-\alpha xy$ e γ e α são constantes positivas. Em consequências dessas hipóteses, somos levados as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy = y(-c + \alpha x)\end{aligned}\tag{3.14}$$

Como dito, as constantes a, c, α e γ são todas positivas; a e c são as taxas de crescimento da população de presas e de morte da população de predadores, respectivamente, e α e γ são medidas do efeito da interação entre as duas espécies. As equações 3.14 são chamadas de equações de Lotka-Volterra e embora essas equações sejam bem simples elas caracterizam uma ampla gama de problemas na natureza.

Nosso objetivo é determinar as soluções (trajetórias) do sistema 3.14 para valores iniciais positivos arbitrários de x e y .

Considere os pontos críticos que é a solução de $x(a - \alpha y) = 0$ e $y(-c + \alpha x) = 0$. Temos que $\left(\frac{c}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}\right)$ é um ponto crítico. A matriz jacobiana associada é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \gamma y & -c + \alpha x \end{pmatrix}$$

Calculando, J em $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$, obtemos o sistema linear aproximado:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha c}{\gamma} \\ \frac{a\gamma}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

onde $u = x - \frac{c}{\gamma}$ e $v = y - \frac{a}{\alpha}$. Desse modo os autovalores são:

$$r = \pm i\sqrt{ac}$$

de modo que o ponto crítico é um centro (estável) para o sistema linear. Para encontrar as trajetórias do sistema, observamos inicialmente que 3.15 implica $\frac{du}{dt} = -\frac{\alpha c}{\gamma}v$ e $\frac{dv}{dt} = \frac{\gamma a}{\alpha}u$ e portanto:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = -\frac{\frac{\gamma a}{\alpha} \cdot u}{\frac{\alpha c}{\gamma} \cdot v}$$

em consequência,

$$\gamma^2 a u du = -\alpha^2 c v dv$$

aplicando o método de variáveis separáveis temos o seguinte:

$$\gamma^2 a u^2 + \alpha^2 c v^2 = k$$

onde k é uma constante de integração não negativa. Logo, as trajetórias do sistema (3.15) são elipses.

Voltando ao sistema linear (3.14)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{y(-c + x\gamma)}{x(a - \alpha y)}$$

A equação acima é separável e tem solução:

$$a \cdot \ln(y) - \alpha y + c \cdot \ln(x) - \gamma x = C$$

onde C é uma contante de integração. Mais uma vez, é possível mostrar que o gráfico da equação acima é uma curva fechada em torno do ponto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$ para C fixo. A variação cíclica das populações de predador e de presas pode ser analisadas com mais detalhes quando os desvios em relação ao ponto $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$ são pequenos e pode-se usar o

sistema (3.15), o qual tem a seguinte solução:

$$\begin{aligned} u &= \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{act} + \phi) \\ v &= \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K \sin(\sqrt{act} + \phi) \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde as constantes K e ϕ são determinados pelas condições iniciais, Assim:

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{act} + \phi) \\ y &= \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K \sin(\sqrt{act} + \phi) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Essas equações são boas aproximações para as trajetórias quase elípticas perto do ponto $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$.

3.3 Serrapilheira

De acordo com Mason (1980), Dias e Oliveira Filho (1997) serrapilheira é todo material da biota, isto é, são as folhas, os galhos, os frutos, as flores que caem da copa da plantas e também as raízes que morrem e entram em processo de decomposição no próprio solo, além de resíduos de origem animal. Nesse contexto a serrapilheira desponta como um fator importante por estar diretamente relacionada com a ciclagem dos nutrientes.

A serrapilheira é importante por atuar na superfície do solo como um sistema de entrada e saída, recebendo entradas via vegetação e, por sua vez, decomposta supre o solo e as raízes com nutrientes e matéria orgânica, sendo essencial na restauração da fertilidade do solo. Conforme Montagnini e Jordan (2002), as condições climáticas e a ação microbiana na decomposição da serrapilheira são os principais processos de ciclagem de nutrientes em um ecossistema florestal.

Ao considerar o raciocínio de Ewel (1976), e tomar a serrapilheira como um sistema de entrada e saída, pode se assumir que a deposição de serrapilheira seja constante, considerando porém uma taxa variável de queda, mais próxima do que ocorre no ambiente da floresta.

A determinação do coeficiente de decomposição pode ser feita de varias formas. A forma mais tradicional é a técnica que usa sacos de nylon, ou de outro material sintético, contendo uma quantidade determinada de serrapilheira em ambiente natural, para estimar, através de pesagens mensais, o quanto se decompõe, estabelecendo assim a taxa de decomposição mensal da serrapilheira. Esse método apesar de trabalhoso é larga-

mente usado, pois produz resultados confiáveis e seguros da taxa de decomposição. A determinação por pesagem também aparece na literatura sendo feito em laboratórios, de forma que o coeficiente é obtido em condições controladas, para melhor entender o processo de decomposição do material. Frequentemente esse método aparece, como no trabalho de Alhand et. al. (2004), em conjunto com o método de Olson (1963) descrito abaixo.

Uma das formas de estimar o coeficiente de decomposição é através uso de modelos matemáticos como o modelo de Olson (1963). Nesses modelos usam-se dados de campo e técnicas matemáticas e estatísticas para a determinação do coeficiente de decomposição da serrapilheira. Olson (1963) modelou o processo da decomposição de serrapilheira através de uma aproximação do modelo do decaimento radioativo. Ele propõe em seu modelo uma constante k chamada de taxa de perda instantânea. O modelo de Olson é descrito pela equação:

$$\frac{dx}{dt} = L - kx \quad (3.18)$$

ele também propõe uma equação para quando não se considera a produção de serrapilheira, como no experimento com bolsas descrito anteriormente, onde $\frac{dx}{dt}$ é a variação da quantidade de serrapilheira acumulada, L é a produção da serrapilheira, x é a quantidade de serrapilheira acumulada e k é a taxa de decomposição instantânea da serrapilheira.

Considerando o intervalo de tempo pequeno o suficiente então pode-se dizer que a variação da quantidade de serrapilheira acumulada seja igual a zero, ou seja, que para aquele intervalo de tempo a floresta se encontra em estado estacionário, decompondo a serrapilheira na mesma velocidade em que é produzida e assim chega na seguinte equação:

$$0 = L - kx_{ss}$$

de onde temos que

$$k = \frac{L}{x_{ss}} \quad (3.19)$$

e na equação acima x_{ss} é a quantidade de serrapilheira acumulada no estado estacionário. Essa equação dará o valor de k necessário para que a taxa de variação seja nula. Esse k é um coeficiente que devido a natureza do seu cálculo não leva em consideração o princípio probabilístico, implícito ao modelo do decaimento radioativo, segundo o qual o valor de k deve variar num intervalo fechado entre 0 e 1.

Olson também propõe uma equação para quando não se considera a produção de serrapilheira, como no experimento com bolsas descrito anteriormente. Partindo de (3.18), considerando L igual a 0, o autor reescreve a equação e obtém que:

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

e integrando a equação acima chegamos ao seguinte:

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -kt$$

e portanto

$$x = x_0 e^{-kt} \tag{3.20}$$

Onde x é a quantidade atual de serrapilheira, x_0 é a quantidade de serrapilheira no momento inicial ($t = 0$), t é o intervalo de tempo de decomposição decorrido.

Capítulo 4

Considerações Finais

Quando iniciamos o trabalho tínhamos a intenção de fazermos apenas uma revisão das principais técnicas de resolução para EDO's. No entanto, com decorrer da pesquisa e por ocasião da pandemia a qual me proporcionou algum tempo livre para aprofundar no tema proposto, percebi que existiam conhecimentos muito além das técnicas citadas. A partir desse momento, depois de conversas com meu orientador comecei a trabalhar para entender a existência, unicidade e solução para EDO's bem como as aplicações a Biosistemas.

Para um aluno de Licenciatura em Matemática considero que aprofundar-se em temas da matemática pura e aplicada é de crucial importância pois amplia os horizontes do conhecimento adquirido durante o percurso acadêmico e ainda possibilita uma posterior inserção em pós graduação nestas áreas. Portanto considero que o principal objetivo do trabalho de conclusão de curso, que vem a ser justamente a consolidação dos conhecimentos, foi alcançado com sucesso.

No futuro pretendo dar ênfase maior no estudo qualitativo das soluções das Equações Diferenciais Ordinárias, em pesquisando temas como soluções máximas, fluxo das equações, continuidade do fluxo, dentre outros.

Do ponto de vista específico do conteúdo deste trabalho, saliento que a importância do estudo das EDO's está no fato delas serem ferramentas matemáticas usadas para resolver problemas da vida real. Outra observação importante no estudo realizado é que os teoremas demonstrados, tais como o lema da contração e o teorema do ponto fixo, não tiveram origem e motivação em problemas práticos das equações diferenciais porém surpreendentemente contribuem para a solução de diversos problemas na matemática e em particular foi essencial para prova da existência e unicidade das Equações Diferenciais Ordinárias.

Referências Bibliográficas

- 1 ALHAMD, L.; ARAKAKI, S.; HAGIARA, A. Decomposition of leaf litter of four tree species in a subtropical evergreen broad-leaved forest, Okinawa Island, Japan. *Forest Ecology and Management*, v.202, 1 11 2004.
- 2 ARATO, H, D.; MARTINS, S. V., FERRARI, S. H. S. Produção e decomposição de serrapilheira em um sistema agroflorestal implantado para recuperação de área degradada em Viçosa - MG. *Revista Árvore*, v.27, n 5, p.715 721, 2003.
- 3 BAMBI, P. *Variação sazonal do índice de área foliar e sua contribuição na composição da serrapilheira e ciclagem de nutrientes na floresta de transição no norte do Mato Grosso*. 99p. Dissertação (Mestrado em Física e Meio Ambiente) Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2007.
- 4 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- 5 DIAS, H. C. T. E OLIVEIRA-FILHO , A. T. *Variação temporal e espacial da produção de serrapilheira em uma área de floresta estacional semidecídua Montana em Lavras-MG*. *Revista Árvore*, v.21, 11-26, 1997.
- 6 D.Zill e M.Cullen. *Equeções Diferenciais* São Paulo: Makron Books, 2003.
- 7 EWEL, J.T. Litter fall and leaf decomposition in a tropical forest sucession in eastern Guatemala *The journal of ecology*. Londres, Inglaterra, v. 64 n.1. 293-308.Mar 1976.
- 8 LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. .Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1977.
- 9 LIMA, Elon Lages. *Curso de análise vol.1* .Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2006.
- 10 MASON, C. F. *Decomposição*. Coleção Temas de Biologia, São Paulo: E.P.U, v. 18, 1980, 63p.

11 MONTAGNINI, F.; JORDAN, C. F. Reciclaje de nutrientes. In: GUARIGUATA, M. R.; KATTAN, G. H. (Eds.). *Ecología y conservación de bisques neotropicales*. Catargo Ediciones LUR, 167-191, 2002.

12 OLSON, J.S. Energy storage and the balance of producers and decomposers in ecological systems. *Ecology* v.44 n. 2. 322-331. Abr 1963