UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
DEPARTAMENTO CIÊNCIAS HUMANAS – CAMPUS IX
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WEBERSON SOUSA DOS ANJOS

ESCÓLIO VETORIAL DA DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ E SUAS APLICAÇÕES EM $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$

BARREIRAS-BA
2020

WEBERSON SOUSA DOS ANJOS

ESCÓLIO VETORIAL DA DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ E SUAS APLICAÇÕES EM $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade do Estado da Bahia (UNEB) como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Souza Meira

BARREIRAS-BA
2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Sistema de Bibliotecas da UNEB

A599e Anjos, Weberson Sousa dos

Escólio vetorial da desigualdade de Cauchy-Schwarz e suas aplicações em R^2 e R^3. / Weberson Sousa dos Anjos. - Barreiras, 2021.
56 fls.

Orientador(a): Prof. Dr. Samuel Souza Meira.
Inclui Referências
TCC (Graduação - Matemática) - Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Humanas.

1.Desigualdade de Cauchy-Schwarz. 2.Vetores. 3.Proporcionalidade. 4.Divisibilidade.

CDD: 519

WEBERSON SOUSA DOS ANJOS

ESCÓLIO VETORIAL DA DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARTZ E SUAS APLICAÇÕES EM $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade do Estado da Bahia (UNEB) como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BARREIRAS-BA, 23 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Samuel Souza Meira (orientador)
Universidade do Estado da Bahia – Campus IX – Barreiras-BA

Prof. Dr. Joaquim Pedro Soares Neto
Universidade do Estado da Bahia – Campus IX – Barreiras-BA

Suêde S. Barbosa

Prof. Esp. Suêde Santos Barbosa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano - Campus Bom Jesus da Lapa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela dadiva da vida e por todos os caminhos que me pôs a trilhar.

À minha família pelo apoio e incentivo.

Aos professores Samuel Souza Meira e Gianete Dutra Meira por sempre buscarem alternativas que revigore o curso de Licenciatura em Matemática.

A Universidade do Estado da Bahia (UNEB) pela estrutura fornecida e pelo ambiente acolhedor.

Aos meus professores do Ensino fundamental e do Ensino Médio que sempre acreditaram que mesmo morando em um povoado sem sinal telefônico, eu poderia cursar uma graduação.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática.

À minha namorada por sempre acreditar e apoiar minhas ideias.

Aos meus melhores amigos Rafael Henrique Rezende Lacerda e Pedro Ferreira Filho.

Agradeço também a todas as pessoas que direta ou indiretamente, colaboraram para que meu sonho se tornasse realidade.

RESUMO

Esta pesquisa trata sobre a abordagem vetorial da desigualdade de Cauchy-Schwarz e suas aplicações. A investigação teve como proposito mostrar por meio de demonstrações algébricas e geométricas a existência de uma representação vetorial algébrica e gráfica para a desigualdade de Cauchy-Schwarz em duas e três dimensões e também suas aplicações a nível de Ensino Médio. Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica em que foram catalogados trabalhos acadêmicos (teses, dissertações, artigos etc.) sobre o referido tema afim de ampliar os conhecimentos sobre desigualdades matemáticas e fundamentar o conteúdo apresentado. Foi realizado uma análise sobre linguagem vetorial, proporcionalidade e congruências no conjunto dos números para apresentar de maneira concisa as demonstrações realizadas. A partir da obtenção e comparação entre representações dos vetores, verificou-se a existência de uma abordagem vetorial tanto algébrica quanto geométrica para a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Palavras-Chave: Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Vetores. Proporcionalidade.

Divisibilidade.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

Ao longo da jornada discente nos deparamos com preceitos matemáticos os quais instigam o nosso envolvimento com a Matemática.

Na escola em uma sala de aula, aprendemos formulas e com alguns valores vemos a veracidade destas. Do mais, construir matemática acaba ficando fora do programa, deixando apenas a aplicação que em muitos casos também não aparece. A beleza Matemática está não em resolver contas rápidas com valores altos ou pequenos, mas sim em criar uma linha de raciocínio para se chegar ao objetivo final.

Um importante preceito e que instiga a criação e descoberta por trás de soluções é o estudo das desigualdades matemáticas, as quais estão ilustradas neste trabalho pelas relações: maior ($>$), menor($<$) , menor e igual ($\leq$) e, maior e igual ($\geq$). Tal estudo faz-se necessário, pois dentro do vasto universo acadêmico existem poucos trabalhos que revigore a importância desta temática, bem como sugestões de como aplicá-la no Ensino Médio e em preparações para provas externas como as olimpíadas de matemática.

No âmbito das desigualdades, este trabalho centrou-se em estudar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, as estratégias necessárias à sua demonstração e suas aplicações. Para tanto foram consultados de maneira corriqueira Steinbruch e Winterle (1997), Iezzi(2003), Lima (2005), Brito (2016) e Bonelli (2017) para embasamento teórico de desigualdades e estudo dos vetores.

Dessa forma, esta monografia possui como objetivo principal mostrar por meio de analises claras e fundamentadas uma abordagem vetorial para a desigualdade apresentada por Cauchy-Schwartz e suas aplicações.

Para tanto, será imprescindível apresentar as desigualdades elementares e suas aplicações, analisar as propriedades e alguns critérios que regem as desigualdades, intercalar conceitos de Álgebra linear e Estrutura Algébrica para melhor responder o problema proposto, justificando as manipulações e demonstrações por meio da Álgebra.

Esta monografia divide-se em quatro capítulos, sendo que o primeiro intitulado Teoria da desigualdade de Cauchy-Schwarz traz consigo um pouco da história das desigualdades e seus primeiros estudiosos, detalhando de forma fundamentada uma pequena bibliografia de Cauchy, Schwarz e Bunyakovsky e suas respectivas contribuições para a desigualdade aqui estudada e a grande relevância desse estudo para a Matemática. O segundo capítulo destinou-se a uma breve metodologia.

No terceiro capítulo provamos a validade da desigualdade de Cauchy-Schwarz utilizando as definições de função e a notação de Delta, uma demonstração muito conhecida.

Neste capítulo, mostramos as abordagens que a Álgebra Vetorial pode fornecer para uma nova semiótica demonstrativa da desigualdade de Cauchy-Schwartz, respondendo de forma fundamentada, Algébrica e Geometricamente a questão norteadora, se seria possível interpretar vetorialmente esta desigualdade no $\mathbb{R}^2$ e consecutivamente um escólio geométrico tridimensional da mesma desigualdade no $\mathbb{R}^3$.

Por fim, no quarto capitulo serão apresentadas aplicações da desigualdade em questões da OBMEP, problemas de otimização e do POTI (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo), mostrando que esse conhecimento está acessível aos estudantes de Ensino Médio e que cabe aos novos profissionais formandos em Matemática levar esse pensamento para a sala de aula e o disseminar, pois este promoverá reflexões sobre cada solução encontrada, já que esta solução não é única e sim um conjunto de possíveis resultados.

Através da pesquisa, identificou-se através de registros geométricos e algébricos que os vetores surgem como uma alternativa para mostrar a existência da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Além disso, o estudo mostra por meio de suas aplicações que esta desigualdade de Cauchy-Schwarz está acessível ao Ensino Médio, já que tais aplicações procedem com conhecimentos matemáticos básicos.

CAPÍTULO I – TEORIA DA DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

I.1 FUNDAMENTOS HISTÓRICOS

O estudo da matemática se faz presente ao longo das antigas civilizações, auxiliando e promovendo o desenvolvimento destas. A matemática se tornou com o tempo um objeto de desejo para muitos, pois se trata de um conhecimento necessário para o desenvolvimento científico. Esta ciência possui como ramos de estudo a aritmética, a álgebra, geometria, dentre outras, e de cada uma temos algumas ramificações, e uma delas, é o estudo das desigualdades, que segundo Bonelli (2017) é uma ramificação da álgebra, que veio somente por volta do século IV a.C.

Havendo a necessidade de fazer medições, ordenar números e aproximações, surgiram as desigualdades, um objeto matemático estudado nos diferentes níveis de ensino que mostra importantes relações entre o campo aritmético e o algébrico.

Segundo Bonelli (2017), muitos estudiosos se dedicaram ao estudo das desigualdades, como Euclides, Arquimedes, Jacques Bernoulli, Cauchy, Schwarz, Chebyshev, Surányi e outros. Dentre estes, destacamos Augustin-Louis Cauchy e Hermann Amandus Schwartz, que trouxeram contribuições valiosas para o mundo matemático por meio de uma visão e generalização das desigualdades, intercalando-as a sequências e séries numéricas.

Augustin-Louis Cauchy como consta em Brito (2016) (**Figura 1**), foi um físico-matemático francês que deixou inúmeros trabalhos realizados de grande importância para a matemática. Foi o primeiro a fazer um estudo cuidadoso das condições para convergência das séries infinitas, além disso, ele escreveu mais de setecentas memorias, abarcando quase todos os ramos da matemática.

Figura 1: Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Fonte: Brito, 2016

Cauchy é uma grande figura da história da matemática. Quando professor, seu trabalho principal era ensinar Cálculo, e ele não se sentia satisfeito com a maneira como estavam os fundamentos do assunto. Foi a partir dessa insatisfação que a matemática ganhou um dos mais famosos livros da sua história, “O curso de Análise da École Polytechnique”, como deixa claro Berlinghoff (2010).

Ainda em Berlinghoff (2010), o objetivo de Cauchy foi fazer um livro-texto com definições de conteúdos matemáticos dando ênfase ao cálculo algébrico, suas fórmulas e o rigor por meio do pensamento e da escrita, isso por sua vez teve grandes impactos sobre outros matemáticos da época.

Hermann Amandus Schwarz, segundo Subi (2014) (**Figura 2**), foi um matemático alemão. Nasceu em Hermsdorf, Silésia, território prussiano (agora parte de Jerzmanowa, Polônia) em 25 de janeiro de 1843, ele cresceu em um ambiente culto, pois seu pai era um proeminente arquiteto.

Figura 2: Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Fonte: Brito, 2016

Schwarz se dedicou a química, a qual se tornou sua grande paixão, e logo mais tarde por influência de Ernst Eduard Kummer e Karl Weierstrass, dois dos grandes matemáticos da época que o convenceu para ele estudar matemática, visto que viram no jovem um grande talento.

Ainda em Subi (2014) destaca que Schwarz era um grande amante da geometria e isso pode ser encontrado em todos os seus trabalhos, graças a sua intuição espacial atacou problemas delicados e resolvidos de uma maneira tão geral que forneceram inúmeras aplicações. É por isso que não nos surpreendemos que a desigualdade de Cauchy-Schwarz não seja apenas bem conhecida, mas aplicada em todas as áreas.

Percebemos que, os conhecimentos desenvolvidos por Cauchy e Schwarz são de extrema relevância não só para a matemática em si, mas também para a Física e demais ciências.

A desigualdade aqui tratada foi publicada a princípio por Augustin-Louis Cauchy em 1821, mais tarde esta foi reformulada com os conceitos de integrais por Bunyakovsky em 1859 e aperfeiçoada por Hermann Amandus Schwarz em 1888, como consta em Brito (2016). Assim ficando denominada de desigualdade de Cauchy ou desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz ou desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (**Figura 3**), segundo Kolman, Bernard; Hill, David R. (2006), foi um grande matemático russo que trabalhou com mecânica teórica e teoria dos números, seu orientador de doutorado foi ninguém menos que Augustin-Louis Cauchy. Bunyakovsky em 1859 fez algo de grande importância para a matemática ao provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso dimensionamente infinito. Além disso, chegou a ser vice-presidente da Academia de Ciências da Rússia.

Figura 3: Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889)

Fonte: Brito, 2016

Muitos conhecimentos matemáticos, como as próprias desigualdades são frutos de não apenas um pensador, mas sim de vários pensadores como foi citado no parágrafo anterior. Em sua grande maioria as contribuições advêm de caminhos distintos que acabam chegando ao mesmo desfecho, e isso facilita e melhora a compreensão da matemática.

Tais contribuições chegam pela Álgebra, Geometria, Aritmética etc. Essa diversidade de Registros de Representação denota e promove melhor compreensão dos conceitos matemáticos mais abstratos.

I.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para embasamento do conteúdo da desigualdade de Cauchy-Schwarz, foram realizadas coletas de informações por meio do Google Scholar entre os anos de 2009 a 2019 e foram encontradas 13 obras cientificas, sendo 2 artigos, 1 monografia, 9 dissertações, 1 tese e 1 minicurso, afim de melhor chegar nos objetivos estabelecidos desse estudo. Foi também pesquisado nos sistemas de bibliotecas online da USP, UFMG, UFBA e Unicamp com as palavras chaves “desigualdade”, “Cauchy”, “Schwarz”, porém sem êxito na busca de trabalhos semelhantes ao nosso. Quando pesquisado no sistema de biblioteca online da UNB encontramos 1 trabalho o qual já havíamos localizado no Google Scholar (Google Acadêmico). Além disso, nas pesquisas feitas nos bancos de dados da CAPES e do CNPq também não foram encontrados trabalhos, livros ou artigos semelhantes.

No **Quadro 1** apresentamos a relação das pesquisas realizadas de nossa revisão bibliográfica em que consta o ano de publicação, o nível (monografia, dissertação, tese e outros), autor, título da investigação, orientação e entidade ao qual o autor faz parte.

Quadro 1. Revisão Bibliográfica

Ano	**Nível**	**Autor**	**Título**	**Orientador**	**U.E**
2019	Artigo	Belchior Cesar Xavier Mário	ANÁLISE E CONSISTÊNCIA: UMA ABORDAGEM SOBRE DESIGUALDADES E SUAS APLICAÇÕES	-	UJES
2018	Dissertação	Paulo Roberto Rodrigues de Araújo Júnior	DESIGUALDADES ELEMENTARES E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO	Dr. Judandir de Oliveira Lopes	UFPI
2017	Dissertação	Rebeca Cristina Bonelli	DESIGUALDADES MATEMÁTICAS E APLICAÇÕES	Suzete Silva Afonso	Unesp
2016	Dissertação	Frank Werlly de Brito	OTIMIZAÇÃO: UMA APLICAÇÃO PARA DESIGUALDADE DAS MÉDIAS E PARA DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ	Eduardo Gonçalves dos Santos	UFPB
2016	Dissertação	Daniel Tomaz de Araújo	DESIGUALDADE DE HOLDERGENERALIZADA COM NORMAS MISTAS E APLICAÇÕES	Daniel Marinho Pellegrino	UFPB

2016	Minicurso	Rogério Ricardo Steffenon e Felipe Milan Guarnieri	BELOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICA: INDUÇÃO E CONTAGEM	-	FURG

2016	Tese	Cristiano Lima Hackmamm	A DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ NA ESTIMAÇÃO DE TEMPERATURA E EMISSIVIDADE DA SUPERFICIE TERRESTRE A PARTIR DE DADOS DE SESORES ORBITAIS	Silvia Beatriz Alves Rolim	UFRGS
2016	Dissertação	George Ney Almeida Moreira	DESIGUALDADES: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DE PROBLEMAS	Luiz Antônio da Silva Medeiros	UFCG
2014	Dissertação	Gabriel Carvalho Velame	UMA ABORDAGEM SOBRE DESIGUALDADES E SUAS APLICAÇÕES	Juarez dos Santos Azevedo	UFRB
2014	Dissertação	Alessandro Monteiro de Menezes	O USO DE DESIGUALDADES NA RESOLUÇÃO DEPROBLEMAS	Nilomar Vieira de Oliveira	UFAM
2014	Monografia	Flávia Shirley Tavares Vieira	SEQUENCIAS DE CAUCHY EM ESPAÇOS MÉTRICOS E OS ESPAÇOS DE BANACH	Joelma Soares dos Santos	UEPB

2013	Dissertação	Luiz Eduardo Landim	DESIGUALDADES ENTRE AS MÉDIAS GEOMÉTRICAS E ARITMÉTICAS E DE CAUCHY-SCHWARZ	Marcos Ferreira de Melo	UFC
2013	Dissertação	Alessandro Francisco Campelo	A DESIGUALDADE TRIANGULAR E A DESIGUALDADE DE JENSEN	Marcos Ferreira de Melo	UFC
2009	Artigo	Márcio Nascimento da Silva	DESIGUALDADES CLÁSSICAS	-	-

Fonte: Autor, 2020

Dentre estes, destacamos as pesquisas de Brito (2016) e de Bonelli (2017), os quais trazem grandes contribuições para nosso trabalho na parte de diversificar maneiras de representação demonstrativa e a importância de se ter aplicações das desigualdades.

Brito (2016) traz a desigualdade de Cauchy-Schwarz atrelada aos processos de otimização, uma aplicação muito visível em máximos e mínimos. Ele aborda também pontos históricos relevantes para nosso trabalho, os quais foram difíceis de encontrar em outras obras.

Além disso, destacamos o trabalho de Bonelli (2017) pelo fato de trazer em sua dissertação a crítica de que as desigualdades devem ser melhor abordadas no ensino básico, pois estas são cobradas em exames e olimpíadas de matemática em diferentes níveis e traz ainda no último capítulo uma série de aplicações da desigualdade no ensino médio.

Em seu trabalho, Bonelli (2017) procurou demonstrar a desigualdade de Jensen, desigualdade entre as médias, desigualdade de Cauchy-Schwarz pelo método clássico do trinômio quadrado perfeito, entre outras desigualdades importantes da matemática, o que contribuiu para que nos posássemos fazer questionamentos e responder neste trabalho, como por exemplo se seria possível representar a desigualdade de Cauchy de outra forma usando conhecimentos vetoriais para demonstrar.

A resposta para tal questionamento sobre uma possibilidade de mostrar a desigualdade por meios vetoriais foi boa, e mostramos ainda que existe a possibilidade de verificar o caso particular da desigualdade que é a igualdade por meio da Teoria dos Números quando estudado a divisibilidade no conjunto dos números inteiros.

De forma geral, os trabalhos catalogados no **Quadro 1** foram de suma importância para ampliação das ideias inerentes a escrita deste trabalho. Os autores de tais estudos foram capazes de transmitir uma matemática que vai além do concreto, mostrando por meio da álgebra e da geometria o universo matemático muitas vezes não visível para muitos.

Destacamos também aqui na fundamentação bibliográfica que alguns ramos da Matemática como Geometria Analítica, Álgebra Linear e Estruturas Algébricas já mencionada possuem preceitos valiosos para a compreensão da dedução da desigualdade de forma vetorial e alguns autores serviram de suporte para explanar, detalhar e consecutivamente interpretar vetorialmente a desigualdade de Cauchy-Schwartz, facilitando a compreensão da demonstração.

Como exemplo, podemos citar Steinbruch e Winterle (1997), mostrando uma ideia básica de vetores e suas propriedades, como também abordagens mais complexas dos vetores em duas e três dimensões, abrindo a possibilidade para generalização dos conceitos de vetores para espaço e subespaços vetoriais.

Leithold (1994), trazendo o Cálculo com Geometria Analítica, abordando dentre outros pontos as operações com vetores, e Lima (2005), contribuindo desde conceitos simples como soma de vetores até as operações com produto interno de vetores, promovendo abstração de conceitos mais amplos.

Foi consultado também o livro “ESTRUTURAS ALGÉBRICAS PARA LICENCIATURA” do ano 2008, dos autores Olimpio Ribeiro Gomes e Jhone Caldeira Silva, contribuindo com a Teoria Elementar dos Números nos pontos de congruências e divisibilidade.

Nesse mesmo ponto foi consultado também o livro “ÁLGEBRA MODERNA” do ano 2003 de Hygino H. Domingues Iezzi.

Após uma revisão bibliográfica em Iezzi (2003), entendemos que a divisibilidade e as regras de proporcionalidade podem ser aliadas na demonstração do caso restrito da igualdade presente na desigualdade de Cauchy-Schwarz.

I.3 CONCEITOS ALGÉBRICOS BÁSICOS E DESIGUALDADES ELEMENTARES.

Tomando por base desigualdades elementares tautológicas no conjunto dos números reais positivos, $\mathbb{R}_+$, já provadas, presentes no livro “fundamentos de Matemática elementar” de Iezzi (1991), a fim de demonstrar de forma fundamentada outras desigualdades mais complexas.

Dentre as desigualdades básicas foram utilizadas:

1.Se $x \geq y$ e $y \geq z$ então $x \geq z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$;

2. Se $x \geq y$ e $a \geq b$ então $x + a \geq y + b$, para quaisquer $x, y, a, b \in \mathbb{R}$;

3. Se $x \geq y$ então $x + z \geq y + z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$;

4. Se $x \geq y$ e $a \geq b$ então $x \cdot a \geq y \cdot b$, para quaisquer $x, y, a, b \in \mathbb{R}_+$;

Além destas, temos ainda que $(a-b)^2$ para qualquer $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. Serão utilizadas tais desigualdades para fundamentar as deduções que serão feitas, sendo esta última aqui considerada uma das mais importantes e mais utilizada para nossas demonstrações.

Assim, com o suporte dos autores mencionados e das desigualdades elementares, vamos mostrar que se $a_1, a_2, \dots, a_n$e $b_1, b_2, \dots, b_n$ são números reais, então: $({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2).\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. (Desigualdade de Cauchy Schwartz).

Antes de tal prova, mostraremos algumas proposições importantes ao uso das desigualdades.

Proposição 1.3.1. *Modelagem de desigualdade proposta em Brito (2016). A desigualdade* $x+\frac{1}{x} \geq 2$ *é verdadeira para todo* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *A igualdade ocorre para x =1.*

Demonstração:

Podemos então partir de que para $(x-1)^2 \geq 0$ onde $x \in \mathbb{R}_+^*$, utilizando a desigualdade $(a - b)^2 \geq 0$, assim temos,

$(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + 1 \geq 2x$

dividindo ambos os lados por x, temos que,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

A igualdade é satisfeita, pois partindo de $x = 1$,

Logo,

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

Agora partindo da igualdade temos,

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

Multiplicando por x,

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

Pela formula resolutiva de uma equação do segundo grau (formula de Bhaskara) temos,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x' = x'' = 1$$

■

Proposição 1.3.2. (POTI- ADAPTADO) *Prove que* $(a + b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$, $\forall$ *a,b >0.*

Demonstração:

Partindo de uma das desigualdades básicas $(a - b)^2 \geq 0$, podemos então escrever,

$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

como $a, b > 0$ podemos dividir ambos os lados da desigualdade sem alterar o seu sentido,

$\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow$

$1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \geq 2 + 1 + 1 \Rightarrow$

$\frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} \geq 4 \Rightarrow$

$a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$

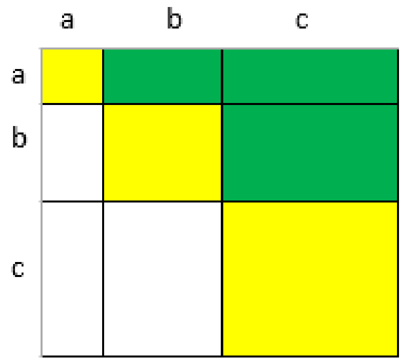
■

Proposição 1.3.3. *Prove que a área A_1 é maior ou igual a área A_2 (***Figura 4***).*

A_1: região em amarelo formada pelos 3 quadrados.

A_2: região em verde formada pelos retângulos.

Figura 4: Representação de desigualdade em um quadrado



Fonte: Autor, 2020

Demonstração:

$(a-b)^2 \geq 0$

$= a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$= a^2 + b^2 \geq 2ab$, se isso ocorre, então,

$a^2 + c^2 \geq 2ac$

$b^2 + c^2 \geq 2bc$

Somando cada lado da desigualdade,

$a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2(ab + ac + bc)$

$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$

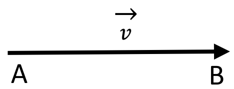
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

$(\ i\ )$ $(\ ii\ )$

Sendo i a área de A_1 e ii a área de A_2, mostramos então que $i \geq ii$, com a igualdade válida para $a = b = c$.

1.3.4 Vetores: definição, operações e propriedades.

Os vetores representam um seguimento de reta orientado.



Podemos representá-lo como sendo $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ possuindo como características:

- Módulo: comprimento.
- Direção: vertical, horizontal, inclinado.
- Sentido: direita, esquerda, para cima, para baixo.

Algumas das operações que podemos realizar com os vetores, como o produto e o cálculo da distância, Leithold (1994).

Chamamos de distância entre dois vetores $u \; e \; v$, o número real, representado por d(u, v), definido por:

d$(u, v) = \; |u - v|$

Se $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são vetores do R², com produto interno usual, tem–se:

$$d(u, v) = \; |u - v| = \; |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)|$$

ou simplismente:

$$d(u, v) = \; \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)}^2$$

Aplicação 1: *Calcular a distância entre os vetores* $u = (9{,}5) \; e \; v = (5{,}2)$.

Solução:

d$(u, v) = \; \sqrt{(9-5)^2 + (5-2)^2}$

$= \; \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \; \sqrt{25}$

$= 5$

Outra operação com os vetores que pode ser feita é o produto interno, sendo E um espaço vetorial e considerando uma função r que associa a cada par de vetores u e v de E um número real denotado por $r(u, v) = \; \langle u, v \rangle$ em que $u = \; (x_1 \,, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ satisfaz aos seguintes axiomas segundo Steinbruch e Winterle (1997).

1- $\langle v, v \rangle \; > 0 \; \forall \; v \; \in E$

2- $\langle v, v \rangle = 0 \ \Leftrightarrow v = (0{,}0)$

3- $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle \ \forall \ u, v_1 v_2 \ \in E$

4- $\langle Ku, v \rangle = K\langle u, v \rangle \ \forall \ K \ \in \mathbb{R}$

5- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \ \forall \ u, v \ \in E$

Por meio do produto interno podemos provar as propriedades que definem o módulo de um vetor:

1- $|v| \ \geq 0$

Demonstração:

Partindo de que,

$v = (x_1, y_1)$ temos:

$v = v$

$v. v = v. v$

$v^2 = (x_1, y_1). (x_1, y_1)$

$v^2 = x_1^2 + y_1^2$

$v = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$x_1^2 + y_1^2 \ \geq 0$

$v \geq 0$

■

2- $|\alpha. v| = |\alpha|. |v| \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração:

Sabendo que, $\alpha = \alpha$

$\alpha. v = \alpha. v$

$(\alpha v). (\alpha v) = (\alpha v). (\alpha v)$

$(\alpha. v)^2 = (\alpha. v)^2$

$\langle \alpha. v \rangle^2 = \langle \alpha. v \rangle^2$

$|\alpha. v|^2 = |\alpha. v|^2$

$|\alpha. v|^2 = |\alpha|^2. |v|^2$

$|\alpha. v| = \sqrt{|\alpha|^2. |v|^2}$

$|\alpha. v| = \sqrt{|\alpha|^2}. \sqrt{|v|^2}$

$|\alpha. v| = |\alpha|. |v|$

■

3- $|u.v| \leq |u|.|v|$

Essa propriedade é também conhecida como a desigualdade de Cauchy, porém aqui ela não será demonstrada por completo detalhando sua igualdade como caso particular, mas sim apenas como uma propriedade do modulo.

Demonstração:

Podemos partir de que $u = u$ então,

$uv = uv$

$(uv).(uv) = (uv).(uv)$

$(uv)^2 = (uv)^2$

$\langle uv\rangle^2 = \langle uv\rangle^2$

$|uv|^2 = |uv|^2$

$|uv|^2 \leq |u|^2.|v|^2$

$|uv|^2 \leq [|u|.|v|]^2$

$|uv| \leq \sqrt{[|u|.|v|]^2}$

$|u.v| \leq |u|.|v|$

■

4- $|u+v| \leq |u| + |v|$

Demonstração:

Se $v = v$ então,

$(u+v) = (u+v)$

$(u+v).(u+v) = (u+v).(u+v)$

$(u+v)^2 = (u+v)^2$

$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

$\langle u+v\rangle^2 = \langle u\rangle^2 + \langle 2uv\rangle + \langle v\rangle^2$

$|u+v|^2 \leq |u|^2 + |2uv| + |v|^2$

$|u+v|^2 \leq [|u| + |v|]^2$

$|u+v| \leq \sqrt{[|u| + |v|]^2}$

$|u+v| \leq |u| + |v|$

■

Esta última é conhecida como desigualdade triangular.

Para concluir nossa fundamentação teórica faz necessário um mergulho mais uma vez na Álgebra linear em Steinbruch e Winterle (1997) onde trata-se da dependência e independência linear.

Sejam V um espaço vetorial e A=$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. A equação $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_nv_n = 0$ admite, ao menos uma solução:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$$

Podemos dizer que o conjunto A é linearmente independente (LI).

Agora se para o mesmo conjunto A existirem soluções $a_i \neq 0$, podemos afirmar que A é linearmente dependente (LD).

Podemos ainda discernir se um dado conjunto de vetores é LI ou LD por meio do Determinante, sendo LD se $D = 0$ e LI se $D \neq 0$.

Aplicação 2: *Mostre que no espaço vetorial R², os vetores $v_1 = (1{,}0)$ e $v_2 = (0{,}1)$, são LI.*

Solução:

Sendo, $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$

$a_1(1{,}0) + a_2(0{,}1) = 0$

$(a_1, 0) + (0, a_2) = 0$

$(a_1 + 0, 0 + a_2) = 0$

$a_1 = 0$

$a_2 = 0$

Logo é LI.

Pelo Determinante teríamos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$D = 1 \neq 0$, logo é LI.

Aplicação 3: *Prove que os vetores $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (-4, -6)$ em R² são LD.*

Solução:

$a_1v_1 + a_2v_2 = 0$

$a_1(2{,}3) + a_2(-4, -6) = 0$

$(2a_1, 3a_1) + (-4a_2, -6a_2) = 0$

$(2a_1 - 4a_2, 3a_1 - 6a_2) = 0$

Disso temos,

$I)\ 2a_1 - 4a_2 = 0$

$II)\ 3a_1 - 6a_2 = 0$

Resolvendo o sistema obtemos $a_1 = 2a_2$, e admitindo por exemplo $a_2 = 2$, temos que $a_1 = 4$

Voltando à equação $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$, percebemos que ao substituir os valores teremos:

$a_1(2,3) + a_2(-4,-6) = 0$

$4(2,3) + 2(-4,-6) = 0$

$(8,12) + (-8,-12) = 0$

$(8-8, 12-12) = 0$

$0 = 0$

Assim, para os coeficientes $a_1\ e\ a_2$ diferentes de zero a igualdade foi satisfeita, conclui-se que os vetores $v_1\ e\ v_2$ são LD.

Aplicando as definições do Determinantes temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -12 - (-12) = -12 + 12 = 0$$

$D = 0$, logo é LD.

Aplicação 4: *Prove que os vetores* $v_1 = (1,0,1);\ v_2 = (1,2,1)\ e\ v_3 = (4,2,4)$ *em R³ são LD.*

Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 + 2 - 8 = 0$$

Como $D = 0$, o conjunto de vetores são LD.

Aplicação 5: *Prove que os vetores* $v_1 = (1,0,1);\ v_2 = (1,2,1)\ e\ v_3 = (-1,0,1)$ *em R³ são LI.*

Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$$

Como $D \neq 0$, o conjunto de vetores são LI.

1.3.5 Proporcionalidade: Regras simples

De acordo Iezzi (1991), podemos conhecer algumas regras de proporcionalidade como por exemplo sendo $D_1, D_2, D_3, \dots, D_i$ e $C_1, C_2, C_3, \dots, C_i$, estes pertencendo aos reais diferentes de zero, podemos escrever:

$$\frac{D_1}{C_1} = \frac{D_2}{C_2} = \frac{D_3}{C_3} = \cdots = \frac{D_i}{C_i} = T$$

Ainda temos,

$$\frac{D_1 + D_2 + D_3 + \cdots + D_i}{C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_i} = T$$

Além desses conceitos elementares encontramos em Lima (2001) no livro Temas e Problemas, o qual faz parte da coleção do Profmat, o teorema fundamental da proporcionalidade, o qual despertou a ideia de mostrar o caso restrito da igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema Fundamental da proporcionalidade

Seja $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função com as seguintes propriedades:

1) $x < x' \implies f(x) < f(x')$;

2) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Consequentemente, $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, com $a = f(1)$.

Demonstração: Em primeiro lugar, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$n \cdot f(rx) = f(n \cdot rx) = f(mx) = m \cdot f(x)$,

Por 2), logo $f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = c \cdot f(x)$ é valida quando c é racional. Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou $f(cx) > c \cdot f(x)$.

Consideremos o primeiro caso. Temos então $f(cx)/f(x) < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $f(cx)/f(x) < r < c$, logo $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. Como r é racional, vale $r \cdot f(x) = f(rx)$.

Assim, podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. Mas de maneira particular $f(cx) < f(rx)$. Entretanto, como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade 1, isso obriga que $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$.

Essa contradição mostra que não é possível ter $f(cx) < c \cdot f(x)$. De maneira inteiramente análogo vemos que $f(cx) > c \cdot f(x)$ é impossível. Portanto deve ser $f(x) = c \cdot f(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$.

Em Lima (2001) vemos também que um teorema análogo, com a mesma demonstração, vale para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, escrevendo, na propriedade 2, $n \in \mathbb{Z}$ em vez de $n \in \mathbb{N}$.

1.3.6 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$: Divisão exata.

Segundo Iezzi (2003), um número inteiro a é divisor do número inteiro b ou que o número b é divisível por a se for possível encontrar $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Nesse caso, podemos dizer que b é múltiplo de a. Para indicar que a divide b, usaremos a notação $a|b$.

Um exemplo seria, -5 divide 30, pois $30 = (-5).(-6)$. Nesse contexto vale ressaltar que 0 divide 0 já que para qualquer inteiro c, temos $0 = 0.c$.

De acordo Iezzi (2003), a relação entre elementos de $\mathbb{Z}$, definida por $x|y$, atende as seguintes propriedades:

- $a|a$ (reflexividade).
- Se $a, b \geq 0, a|b \ e \ b|a$, então $a = b$.
- Se $a|b \ e \ b|c$, então $a|c$. (transitividade).
- Se $a|b$ e $a|c$, então $a|\ (bx + cy)$, quaisquer que sejam os inteiros x e y.
- Se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$.

Tais observações permitem nos escrever que:

Seja a um número inteiro estritamente positivo, tomando algum inteiro b, temos duas possibilidades:

$i)$ b é múltiplo de a e, portanto $b = aq$ para um inteiro q qualquer.

$ii)$ b está situado entre dois múltiplos consecutivos de a, isto é, existe um inteiro q tal que $aq < b < a(q+1)$. Dai, $0 < b - aq < a$. Então, fazendo $b - qa = r$, obtemos $b = aq + r$, em que $0 < r < a$.

Juntando as duas possibilidades, podemos garantir o seguinte: dados dois inteiros, a e b, com $a > 0$, então sempre se pode encontrar dois inteiros q e r tais que: $b = aq + r$, em que $0 \leq r < a$.

Evidentemente, $r = 0$ corresponde ao caso em que b é múltiplo de a, e este caso particular será utilizado nas nossas demonstrações.

CAPÍTULO II - METODOLOGIA

Este estudo foi realizado por intermédio de pesquisa bibliográfica, em que foram catalogados trabalhados de bancos de dados seguros sendo estes da CAPES, GOOGLE ACADÊMICO e bibliotecas online de grandes universidades brasileiras como USP, UNICAMP, etc. Os trabalhos científicos incluem artigos, monografias, dissertações e teses, os quais serviram de suporte para fundamentar as afirmações feitas no corpo desta monografia.

Discernirmos dentre todos os trabalhos catalogados os que mais se assemelham a nossa temática, mostrando os pontos particulares de alguns trabalhos que ajudaram no desenvolvimento desta monografia. Vale ressaltar que ouve o descarte de alguns materiais, já que estes possuíam muitas repetições.

Sendo assim, no decorrer deste trabalho foram propostas abordagens não tão conhecidas da desigualdade de Cauchy-Schwarz, pesando de que forma isso poderá contribuir para o conhecimento matemático no âmbito de suas aplicações.

A desigualdade será provada por meio da lei dos cossenos para o caso $n = 2$ e também pelo produto interno de vetores, fazendo sempre uma conversão de representação entre a linguagem algébrica e geométrica tanto bidimensional quanto tridimensional, fato esse não encontrado em nenhum trabalho catalogado.

Para isso, houve uma revisão sobre desigualdades básicas e elementares e linguagem vetorial em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Soma a isso o estudo de proporcionalidade e congruência em $\mathbb{R}$, o qual dialoga com a desigualdade de Cauchy-Schwarz na prova particular de sua igualdade.

Tal validade das demonstrações em muitos casos se dará pela comparação de registros algébricos e gráficos. Para tanto, a dependência linear entre vetores foi indispensável para se pensar em uma representação gráfica em $\mathbb{R}^3$ da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

CAPÍTULO III – DEMONSTRAÇOES

III.1 DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE DE CAUCHY- SCHWARZ PELA ABORDAGEM DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU (FORMA CLÁSSICA).

A demonstração aqui apresentada pode ser encontrada em muitas dissertações de maneira menos detalhada e menos explicativa como em Bonelli (2017, p. 51).

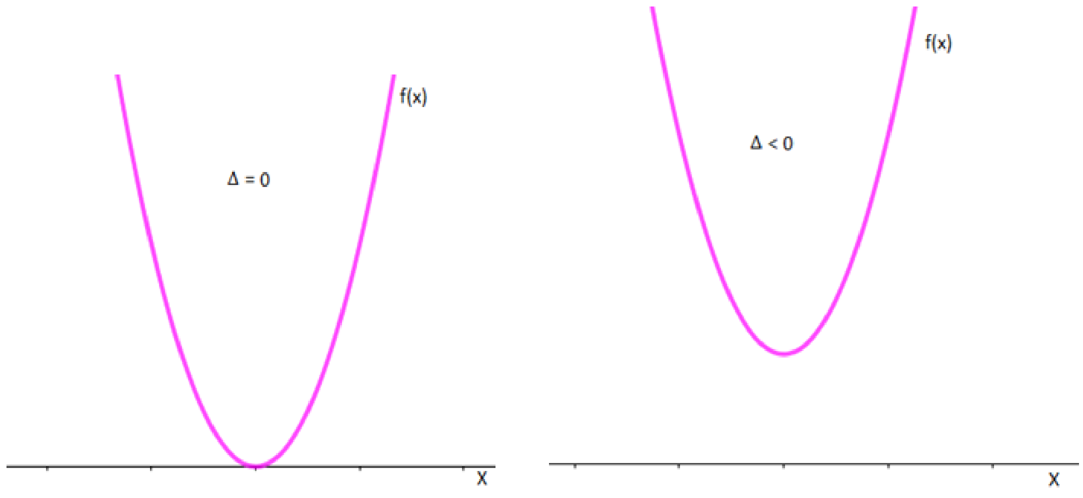
Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ são números reais, então: $({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)$.$({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. (Desigualdade de Cauchy Schwartz).

Já sabemos que $(a-b)^2 \geq 0$ para qualquer $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. Assim podemos multiplicar b por x e não alteramos a desigualdade, dessa forma temos:

$$f(x) = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \cdots + (a_n - b_nx)^2$$

Entendemos que $f(x) \geq 0$, pois esta corresponde a uma soma de quadrados, logo como não existe valores negativos que a satisfaça, o valor o discriminante Delta é estritamente menor ou igual a zero, como mostra a **Figura 5**.

Figura 5: Relação entre f(x) e delta



Fonte: Autor, 2020

A partir disso, podemos desenvolver e generalizar a função

$$f(x) = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \cdots + (a_n - b_nx)^2$$

$$f(x) = a_1^2 - 2a_1b_1x + b_1^2x^2 + a_2^2 - 2a_2b_2x + b_2^2x^2 + \cdots + a_n^2 - 2a_nb_nx + b_n^2x^2$$

$f(x) = (b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)x^2 - 2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x + (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\ )$

Temos aqui nossa equação do segundo grau e aplicando a definição do valor de Delta teremos:

$\Delta = b^2 - 4ac$ onde $a = {b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2,\ b = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n, e\ c = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2$ temos:

$\Delta = [-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)]^2 - 4\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right).({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2\ \mathbf{)}$

$\Delta = 4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ )^2\ - 4\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right).({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)$

Como temos $\Delta \leq 0$, obtemos:

$4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ )^2 - 4\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right).({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \leq 0$

$\mathbf{4}(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ )^2 \leq \mathbf{4}\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right).({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)$

Dividindo ambos os lados por 4 temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ )^2 \leq \left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right).({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)$

■

O caso restrito da igualdade pode ser analisado com $\Delta = 0$, logo existirá um x_0 tal que $f(x_0) = 0$, dessa forma teremos

$f(x_0) = (a_1 - b_1x_0)^2 + (a_2 - b_2x_0)^2 + \cdots + (a_n - b_nx_0)^2 = 0$

Assim,

$(a_1 - b_1x_0)^2 = 0 \qquad I$

$(a_2 - b_2x_0)^2 = 0 \qquad II$

$(a_n - b_nx_0)^2 = 0 \qquad III$

Desenvolvendo I obtemos,

$(a_1 - b_1x_0)^2 = 0$

$a_1 - b_1x_0 = 0$

$a_1 = b_1x_0$

$\frac{a_1}{b_1} = x_0$

Desenvolvendo II obtemos,

$(a_2 - b_2x_0)^2 = 0$

$a_2 - b_2x_0 = 0$

$a_2 = b_2 x_0$

$\frac{a_2}{b_2} = x_0$

Desenvolvendo III chegamos em,

$(a_n - b_n x_0)^2 = 0$

$a_n - b_n x_0 = 0$

$a_n = b_n x_0$

$\frac{a_n}{b_n} = x_0$

Com isso temos a relação de igualdade $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

Como $\Delta > 0$, a função admitiria soluções negativas, o que é um absurdo já que temos uma soma de quadrados. Isso conclui a demonstração.

■

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade apresentado no item 1.3.5 também nos fornece uma prova para essa igualdade, já que a igualdade ocorre quando temos $a_i = \lambda b_i$ sendo λ real positivo e $1 \leq i \leq n$, e o teorema mostra que de fato é verdade $f(x) = c \cdot f(x)$ para algum real positivo c.

Logo podemos escrever:

Se,

$$a_i = \lambda b_i$$

Podemos multiplicar ambos os lados por a_i, então,

$$a_i \cdot a_i = \lambda b_i \cdot a_i$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_i}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{\lambda b_i \cdot a_i}$$

Na mesma relação inicial, mas agora multiplicando ambos os lados por b_i ,

$$b_i \cdot a_i = \lambda b_i \cdot b_i$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b_i}^{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{a_i \cdot b_i}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

Agora, como a desigualdade de Cauchy-Schwarz é dada por $({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2).\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$, e substituindo os valores encontrados para $\boldsymbol{{a_i}^2}$ e $\boldsymbol{{b_i}^2}$ na primeira parte da desigualdade temos:

$$= (a_1b_1\lambda + \cdots + a_nb_n\lambda).\left(\frac{a_1b_1}{\lambda} + \cdots + \frac{a_nb_n}{\lambda}\right)$$

Colocando lambida em evidencia,

$$= \lambda(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n).\frac{1}{\lambda}(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)$$

Cancelando λ, ficamos com,

$$= (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \cdot (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)$$

$$= (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2$$

Chegamos onde queríamos em que a primeira parte da desigualdade é igual a segunda, $(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 = (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2$

■

Segundo Iezzi (2003), com respaldo na Teoria Elementar dos números presente no item 1.3.6 deste trabalho, sabemos que:

Dados m, n pertencendo aos reais e não nulos, podemos escrever,

$m|p \Rightarrow p = mq_1$

$n|p \Rightarrow p = nq_2$, com q_1 e $q_2 \in \mathbb{R}$

Agora, se considerarmos $p = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, $m = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, $n = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$

$$m|p \Longrightarrow \frac{p}{m} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = q_1$$

$$n|p \Longrightarrow \frac{p}{n} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} = q_2$$

Usando as regras de proporcionalidade apresentadas no item 1.3.5 escrevemos:

$$\frac{p}{m} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = q_1$$

$$\frac{a_1b_1}{a_1^2} = \frac{a_2b_2}{a_2^2} = \cdots = \frac{a_nb_n}{a_n^2} = q_1$$

$$\boldsymbol{\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n} = q_1}$$

Da mesma forma, escrevemos,

$$\frac{p}{n} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} = q_2$$

$$\frac{a_1b_1}{b_1^2} = \frac{a_2b_2}{b_2^2} = \cdots = \frac{a_nb_n}{b_n^2} = q_2$$

O que nos faz chegar ao caso particular da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = q_2}$$

Disso concluímos que a teoria elementar dos números juntamente com a proporcionalidade pode fornecer uma prova para a restrição de igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz.

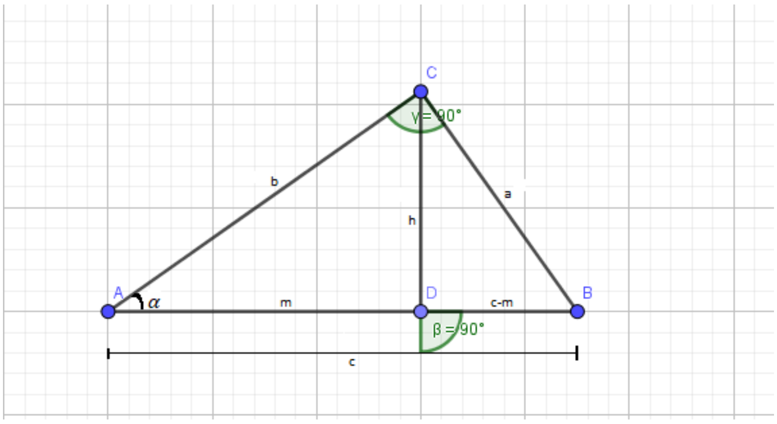
■

III.2 DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ POR UMA ABORDAGEM VETORIAL.

III.2.1 **Demonstração 1: Utilizando o ângulo entre dois vetores e lei dos cossenos para uma prova no R^2.**

Tomando por base os conhecimentos de Geometria Analítica dados em Steinbruch e Winterle (1997) somos capazes de demonstrar a partir da **Figura 6** abaixo a lei dos cossenos e generalizá-la por meio do estudo dos vetores em duas dimensões para chegar na desigualdade de Cauchy-Schwarz no caso $n = 2$.

Figura 6: Triângulo retângulo



Fonte: Autor, 2020

Organizando algumas regularidades algébricas sobre a figura 5 acima temos:

$\Delta_{\mathbf{1}}$ ADC

$b^2 = h^2 + m^2$

$\Longrightarrow h^2 = b^2 - m^2 \qquad \boldsymbol{i}$

$\cos\alpha = \frac{m}{b}$

$m = b\cos\alpha \qquad\qquad \boldsymbol{ii}$

$\Delta_{\mathbf{2}}$ BDC

$a^2 = h^2 + (c-m)^2$

$a^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2 \qquad \boldsymbol{iii}$

Substituindo i em iii temos:

$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2$

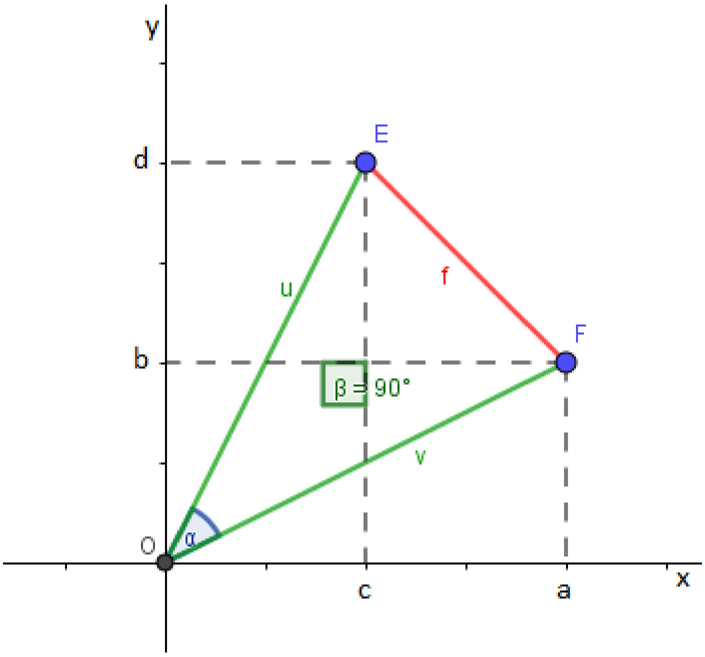
$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$

Substituindo ii,

$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ lei dos cossenos

Ampliando nossos conceitos, visualizamos na **Figura 7**.

Figura 7: Triângulo OEF



Fonte: Autor, 2020

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OEF temos:

$$d(E,F)^2 = d(O,E)^2 + d(O,F)^2 - 2\big(d(O,E)\,.\,d(O,F)\big)\cos\alpha$$

$$(a-c)^2 + (d-b)^2 = (c^2+d^2) + (a^2+b^2) - 2\left(\sqrt{c^2+d^2}\right).\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\cos\alpha$$

$$a^2 - 2ac + c^2 + d^2 - 2db + b^2 = c^2 + d^2 + a^2 + b^2 - 2(\sqrt{(c^2+d^2).(a^2+b^2)})\ \cos\alpha$$

$$-2ac - 2bd = \ -2(\sqrt{(c^2+d^2).(a^2+b^2)})\ \cos\alpha$$

$$-2(ac+bd) = \ -2(\sqrt{(c^2+d^2).(a^2+b^2)})\ \cos\alpha$$

$$(ac+bd) = (\sqrt{(c^2+d^2).(a^2+b^2)})\ \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{(ac+bd)}{\sqrt{(c^2+d^2).(a^2+b^2)}}$$

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{(ac+bd)}{\left(\sqrt{(c^2+d^2).(a^2+b^2)}\right)}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha = \frac{(ac+bd)^2}{(c^2+d^2).(a^2+b^2)}$$

Sabendo que $|cos\ \alpha| \leq 1$, logo:

$$\frac{(ac+bd)^2}{(c^2+d^2).(a^2+b^2)} \leq 1$$

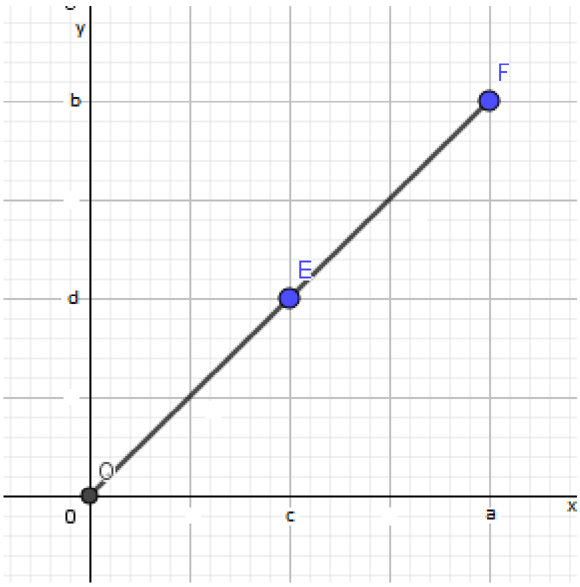
$$(ac + bd)^2 \leq (c^2 + d^2).(a^2 + b^2)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2).(c^2 + d^2)}$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso n = 2.

O caso particular da igualdade pode ser encontrado por meio do alinhamento de três pontos, ou seja, quando os pontos OEF da **Figura 8** forem colineares. Assim precisamos encontrar $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Figura 8: Alinhamento de três pontos OEF



Fonte: Autor, 2020

Seja OEF colineares então:

$$\det\begin{vmatrix} c & d & 1 \\ a & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante encontramos,

$$bc - ad = 0$$

$$bc = ad$$

Insolando a e b,

$$a = \frac{bc}{d}$$

$$b = \frac{ad}{c}$$

Se $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, podemos partir da primeira parte

$$\frac{a}{c} \Rightarrow \frac{\frac{bc}{d}}{c} \Rightarrow \frac{bc}{d}\cdot\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{d}}$$

Partindo da segunda também encontramos,

$$\frac{b}{d} \Rightarrow \frac{\frac{ad}{c}}{d} \Rightarrow \frac{ad}{c}\cdot\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$$

■

III.2.2 **Demonstração 2: Utilizando produto interno.**

Tomando por definição u e v vetores linearmente dependentes (LD), então existe por combinação linear $\alpha \in \mathbb{R} / u = \alpha v$, logo usando as propriedades do produto interno apresentadas no item 1.3.4 temos:

$$|\langle u, v\rangle| = |\langle \alpha v, v\rangle| =$$

$$|\alpha|\langle v, v\rangle = |\alpha|\sqrt{\langle v, v\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} =$$

$$\sqrt{\alpha^2\langle v, v\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\alpha\langle \alpha v, v\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} =$$

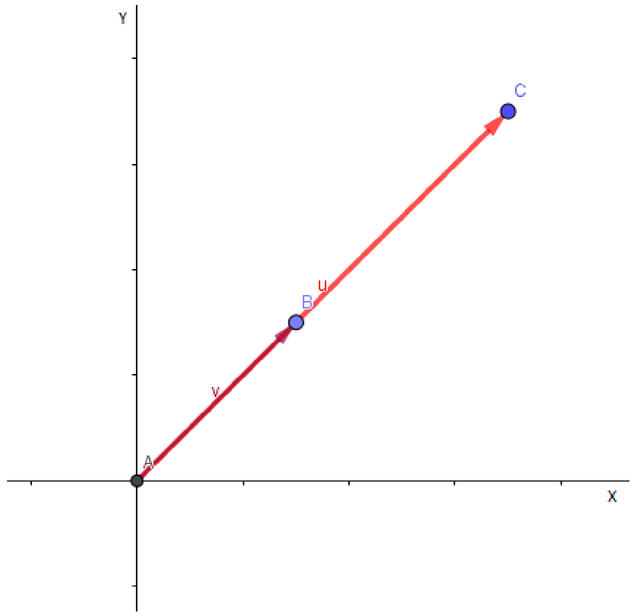
$$\sqrt{\alpha\langle v, \alpha v\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} =$$

$$\sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

$$\Longrightarrow |\langle u, v\rangle| = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

Geometricamente temos os vetores u e v no plano XY na **Figura 9** abaixo.

Figura 9: Representação geométrica dos vetores u e v linearmente dependentes.



Fonte: Autor, 2020

Isso valida nossa primeira parte da demonstração.

Agora, se u e v não forem linearmente dependentes, então $\forall\ \alpha\ \epsilon\mathbb{R}$ temos que $u + \alpha v \neq e_V$, de modo que $\langle u+\alpha v, u+\alpha v\rangle > 0$. Dessa forma, podemos escrever:

$$\langle u+\alpha v, u+\alpha v\rangle =$$
$$\langle u,u\rangle + \langle u,\alpha v\rangle + \langle \alpha v,u\rangle + \langle \alpha v,\alpha v\rangle =$$
$$\langle u,u\rangle + 2\alpha\langle u,\alpha v\rangle + \alpha^2\langle v,v\rangle$$

Como $\langle u+\alpha v, u+\alpha v\rangle > 0$,temos uma inequação do segundo grau na incógnita α, em que:

$$\alpha^2\langle v,v\rangle + 2\alpha\langle u,\alpha v\rangle + \langle u,u\rangle > 0$$

Por Delta menor que zero chegamos em,

$$(2\langle u,v\rangle)^2 - 4\langle v,v\rangle\langle u,u\rangle < 0$$
$$4\langle u,v\rangle^2 - 4\langle v,v,\rangle\langle u,u\rangle < 0$$
$$4\langle u,v\rangle^2 < 4\langle v,v\rangle\langle u,u\rangle$$
$$\langle u,v\rangle^2 < \langle v,v,\rangle\langle u,u\rangle$$

Com u e v positivos, podemos tirar a raiz quadrada de ambos os lados da desigualdade sem alterá-la,

$$\sqrt{\langle u,v\rangle^2} < \sqrt{\langle v,v\rangle\langle u,u\rangle}$$
$$|\langle u,v\rangle| < \sqrt{\langle v,v\rangle}\sqrt{\langle u,u\rangle}$$
$$|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle| < \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

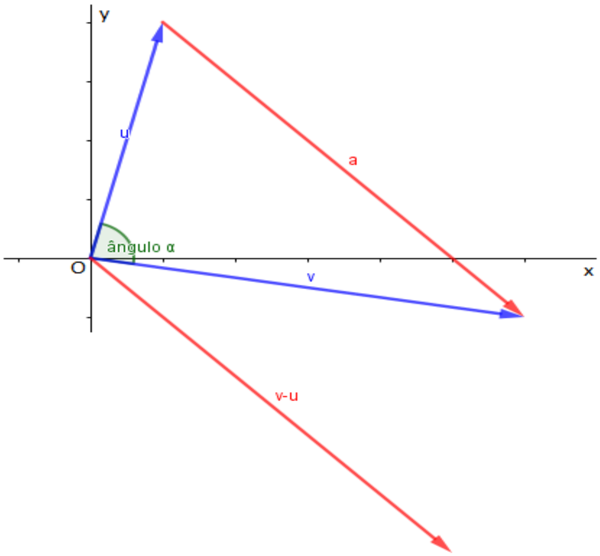
Como já provamos a igualdade logo escrevemos a desigualdade de Cauchy- Schwarz como $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$

■

Com isso, temos suportes suficientes para mostrar geometricamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^2$.

Utilizando os conceitos apresentados no item 1.3.4 temos $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ então a distância entre os vetores $u\ e\ v$ como mostra a **Figura 10** é $d(u,v) = |v-u| = |(x_2 - x_1, y_2 - y_1)|$.

Figura 10: Representação dos vetores u e v LI no plano cartesiano



Fonte: Autor, 2020

Assim teremos $|v - u|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$$\Rightarrow |v - u|^2 = {x_2}^2 - 2x_1x_2 + {x_1}^2 + {y_2}^2 - 2y_1y_2 + {y_1}^2$$

$$\Rightarrow |v - u|^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) + {y_1}^2 + {y_2}^2$$

Mas, $|u|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2$ e $|v|^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2$ e assim $\langle u, v\rangle = (x_1x_2 + y_1y_2)$

Dessa forma, podemos reordenar os elementos e escrever,

$$\Rightarrow |v - u|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) + {x_2}^2 + {y_2}^2$$

$$\Rightarrow |v - u|^2 = |u|^2 - 2\langle u, v\rangle + |v|^2 \qquad \boldsymbol{i}$$

Aplicando agora a lei dos cossenos no triangulo da figura 10 lei essa, demonstrada no item III.2.1, temos que como o vetor em vermelho é $v - u$ podemos escrever,

$$|v - u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cdot \cos\alpha \qquad \boldsymbol{ii}$$

Comparando i e ii, temos,

$$|u|^2 - 2\langle u, v\rangle + |v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow -2\langle u, v\rangle = -2|u||v| \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \langle u, v\rangle = |u||v| \cdot \cos\alpha$$

Utilizando o mesmo argumento usando no item III.2.1 quando foi provado a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso $n = 2$,

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \Rightarrow |\cos\alpha| \leq 1$$

Logo, $\langle u, v\rangle = |u||v| \cdot \cos\alpha$

$$\Rightarrow \langle u, v\rangle^2 = |u|^2|v|^2 \cdot \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\langle u, v\rangle^2}{|u|^2|v|^2} = \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\langle u, v\rangle^2}{|u|^2|v|^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow |\langle u, v\rangle|^2 \leq |u|^2|v|^2$$

$$\Rightarrow |\langle u, v\rangle| \leq |u||v|$$

Chegamos a mesma desigualdade de Cauchy-Schwarz interpretando a figura 10, logo essa figura é uma representação geométrica para a desigualdade no $\mathbb{R}^2$.

Agora vamos mostrar que essa desigualdade possui uma representação no plano xyz no $\mathbb{R}^3$, para que no capítulo seguinte possamos apresentar uma aplicação.

Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, a distância é calculada da mesma maneira que no $\mathbb{R}^2$, sendo:

$$d(u, v) = |v - u| = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |v - u|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\Rightarrow |v - u|^2 = {x_2}^2 - 2x_1x_2 + {x_1}^2 + {y_2}^2 - 2y_1y_2 + {y_1}^2 + {z_2}^2 - 2z_1z_2 + {z_1}^2$$

$$\Rightarrow |v - u|^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + {y_1}^2 + {y_2}^2 + {z_1}^2 + {z_2}^2$$

$$\Rightarrow |v - u|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + {x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2$$

Assim, sendo os vetores $u\ e\ v$ partindo da origem teremos, $|u| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$ e $|v| = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}$ com isso pelas definições de produto interno $\langle u, v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Então, reescrevemos da seguinte forma,

$$|v - u|^2 = |u|^2 - 2\langle u, v\rangle + |v|^2$$

Se $u = k \cdot v$ sendo $k \in \mathbb{R}$, os vetores são linearmente dependentes, dessa forma, como o ângulo entre dois vetores pode ser obtido por $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos\alpha$, mas sendo que os vetores $u\ e\ v$ são LD, isso implica que o ângulo entre eles é $\alpha = 0$, i.e,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos 0$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot 1$$

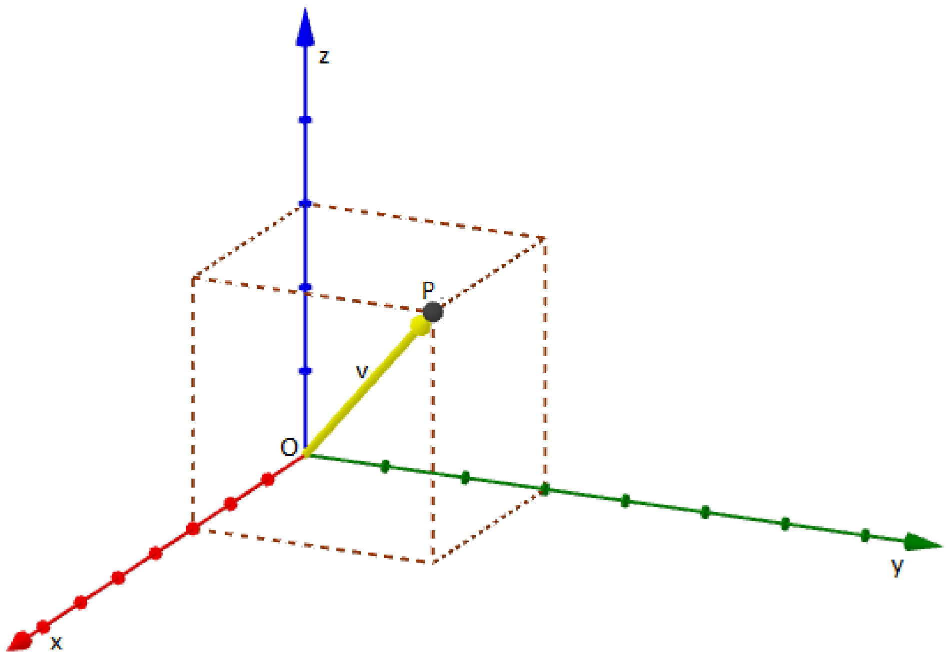
$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$$

$$\Rightarrow |\langle u, v\rangle| = ||u||||v||$$

O que prova a igualdade em $\mathbb{R}^3$ para a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Com o suporte do software Geogebra, graficamente na janela 3D teríamos a seguinte imagem:

Figura 11: vetores LD no $\mathbf{R}^3$



Fonte: Autor, 2020

A imagem mostra que os vetores u e v são múltiplos um do outro, o que também é interpretado como uma representação geométrica tridimensional da desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso particular da igualdade.

Concluímos então pelas **Figuras 7**, **8**, **10** e **11** que de forma algébrica e geometricamente podemos interpretar a desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço vetorial com intermédio do produto interno, pois este promove uma generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz quando associado a um par de vetores em $\mathbb{R}^2$ou $\mathbb{R}^3$ como mostra as **Figuras 8** e **11** e as **Figuras 7** e **10**.

Tal tratamento utilizado pela mudança de registro semiótico entre as figuras viabiliza melhor compreensão de dependência linear.

CAPITULO IV - APLICAÇÕES DE DESIGUALDADES TRIVIAIS E DE CAUCHY-SCHWARZ NO ENSINO MÉDIO.

Como já mencionado nesta investigação, as desigualdades não são tão trabalhadas no ensino básico e muitas vezes nem são apresentadas.

Contudo muitos conteúdos de matemática abrem a possibilidade para explorar esse ramo. E é na educação básica que o estudo das desigualdades matemáticas ficam evidentes, quando por exemplo se faz relações entre as médias: quadrática, aritmética, geométrica e harmônica.

Além disso, sempre estão presentes nas inequações seja de primeiro ou segundo grau, problemas de otimização e de máximos e mínimos, comparação entre áreas, e também volumes.

Abaixo estão dispostas algumas aplicações da desigualdade de Cauchy-Schwarz aqui estudada.

Aplicação IV.1. *(POTI) Encontre o valor máximo de,*

$$\varphi(x) = 3sen\,x + 4\,cos\,x \qquad ,0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Tomando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso $n = 2$ apresentada no item III.2.1 temos,

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

Dessa forma admitindo $a = 3, b = 4$, temos a seguinte desigualdade,

$$(3^2 + 4^2) \cdot (sen^2x + cos^2x) \geq (3sen\,x + 4\cos x)^2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{sen^2x + cos^2x} \geq 3sen\,x + 4\cos x$$

$$\Longrightarrow \sqrt{25} \cdot \sqrt{1} \geq 3sen\,x + 4\cos x$$

$$\Longrightarrow 5 \geq 3sen\,x + 4\cos x$$

Sendo assim, como a igualdade vale se, e somente se $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, temos que,

$$\frac{3}{sen\,x} = \frac{4}{\cos x}$$

$$\Longrightarrow 3\cos x = 4sen\,x$$

$$\Longleftrightarrow \frac{sen\,x}{\cos x} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{3}{4}$$

■

Aplicação IV.2. *Mostre que* $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$

Partindo da desigualdade elementar $(a-b)^2 \geq 0 \ \forall \ a, b \ \in \ \mathbb{R}$, podemos considerar $a = \sqrt{x} \ e \ b = \sqrt{y}$ com $x \ e \ y$ positivos teremos:

$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$

$(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$

$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \geq 0$

$x + y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por 2,

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x}\sqrt{y}$

Conhecendo as propriedades de radiciação escrevemos,

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$

■

Aplicação IV.3. *Mostrar que* $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso $n = 2$

$$(a^2 + b^2) \cdot (1^2 + 1^2) \geq (a \cdot 1 + b \cdot 1)^2$$

$$(a^2 + b^2) \cdot (1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por 4 temos,

$$\frac{(a^2 + b^2) \cdot (1^2 + 1^2)}{4} \geq \frac{(a + b)^2}{4}$$

$$\frac{(a^2 + b^2)}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

Extraindo a raiz de ambos os lados obtemos, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$

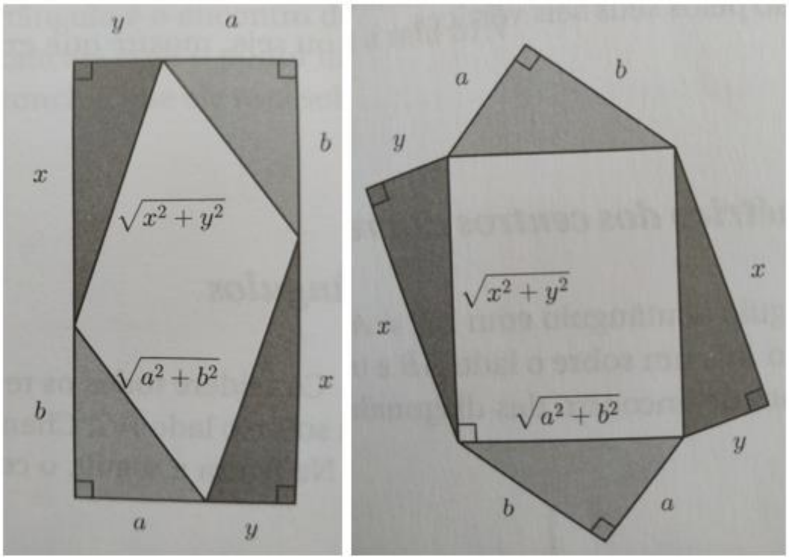
■

Isso mostra que a média quadrática é maior ou igual a média aritmética que por sua vez é maior ou igual a média geométrica.

Aplicação IV.4. *(Obmep-2016 nível 3) Desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois termos via geometria.*

i) Considere as duas imagens apresentadas na **Figura 12**, em que $a, b, x, e\ y$ são números reais positivos. Mostre que a segunda imagem possui maior área.

Figura 12: Comparação entre áreas

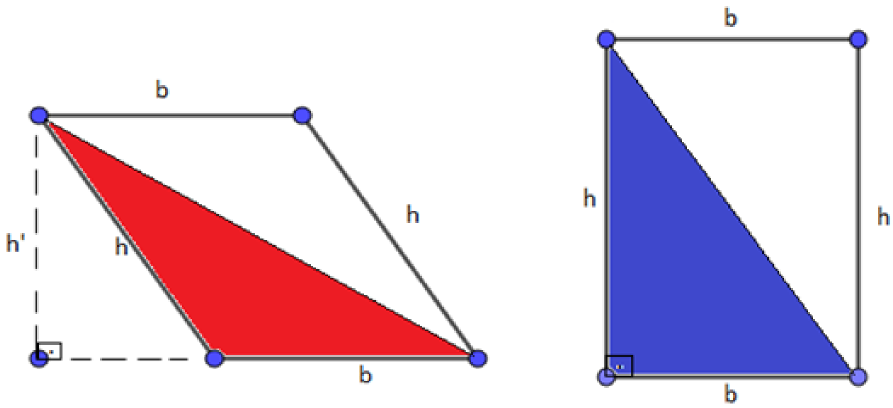


Fonte: Obmep banco de questões, 2016

Resolução:

Se pegarmos todos os paralelogramos com lados $b\ e\ h$, o retângulo é o que possui maior altura h em relação a base fixa b como mostra a **Figura 13**:

Figura 13: Resolução da aplicação 3



Fonte: Autor, 2020.

Logo observando a figura e pela propriedade triangular onde $a < b + c, b < a + c, c < a + b$. Dessa forma como cada triangulo pintado representa metade do paralelogramo, então $h' < h$, o que implica:

$$\frac{b \cdot h'}{2} < \frac{b \cdot h}{2}$$

ii) usando o resultado do item anterior, prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois termos, descrita pela desigualdade a seguir:

$ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

Analisando a primeira imagem da figura 10 temos que,

$(a + y) \cdot (b + x) \leq 2 \cdot \frac{ab}{2} + 2 \cdot \frac{xy}{2} + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

Dessa forma, fazendo distributiva e simplificando teremos,

$ab + ax + by + xy \leq ab + xy + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

$ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

■

Aplicação IV.5. *(POTI) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais quaisquer. Mostre pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que:*

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)}{n}$$

Demonstração

Sendo a desigualdade de Cauchy-Schwarz $({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \cdot \left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$ podemos atribuir $\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right) = (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)$ então reescrevemos a desigualdade como,

$$({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \cdot (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) \geq (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 1)^2$$

$$({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \cdot (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

Podemos ainda admitir $(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) = n$

$$({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \cdot n \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

Dividindo ambos os lados por n^2 ficamos com,

$$\frac{({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \cdot n}{n^2} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n^2}$$

$$\frac{({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2$$

■

Se Prosseguíssemos nesse raciocínio e extraíssemos a raiz quadrada dos dois lados obteríamos,

$$\sqrt{\frac{(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2)}{n}} \geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2)}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

O que nada mais é do que a desigualdade entre as medias quadrática e aritmética$MQ \geq MA$ para o caso geral.

Aplicação IV.6. *(POTI) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais estritamente positivos. Mostre que*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$.

Dem.

Tomando duas sequencias iguais a $\left(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$ e usando a desigualdade pedida teremos:

$$\left((\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{a_2})^2 + \cdots + \left(\sqrt{a_n}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right) \geq$$

$$(1 + 1 + \cdots + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left((\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{a_2})^2 + \cdots + \left(\sqrt{a_n}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right) \geq n^2$$

Dessa forma, quando anulamos a raiz quadrada com a potência 2 ficamos com,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

■

Aplicação IV.7. *(PIC-2015) Mostre que $(a + b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \; \forall \; a, b$ estritamente positivos.*

Demonstração

Tomando dois termos e seus respectivos inversos $\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$ em seguida pela desigualdade de Cauchy-Schwarz teremos,

$$\left(\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\right) \geq (1+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \ (a+b) \cdot \left(\frac{1^2}{\left(\sqrt{a}\right)^2} + \frac{1^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}\right) \geq 2^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

■

Aplicação IV.8. *(ENA-2019) Um triangulo retângulo ABC possui hipotenusa BC de medida 6 cm. A maior área possível em cm² para ABC é:*

a) 9

b) $\sqrt{83}$

c) $\sqrt{87}$

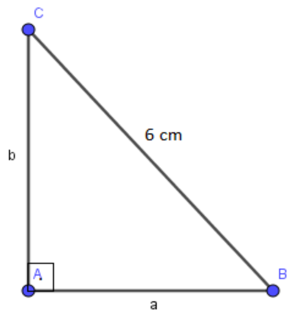
d) 10

e) 12

Solução:

Representamos o triangulo retângulo (**Figura 14**) para obtermos as relações:

Figura 14: triangulo retângulo



Fonte: Autor, 2020

$A = \frac{a \cdot b}{2}$ e $a^2 + b^2 = 6^2 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 36$, sendo A área do triângulo retângulo.

Como $a > 0$ e $b > 0$ podemos usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométricas.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Usando a desigualdade entre as médias para dois números $a^2 e\ b^2$ teremos,

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \ a \cdot b$$

Mas como $a^2 + b^2 = 36$ escrevemos a desigualdade como,

$$\frac{36}{2} \geq a \cdot b$$

$$\Leftrightarrow 18 \geq a \cdot b$$

Como a área é $\frac{a \cdot b}{2}$, temos,

$$\frac{18}{2} \geq \frac{a \cdot b}{2}$$

$$\Rightarrow 9 \geq \frac{a \cdot b}{2}$$

Dessa forma, concluímos que a maior área possível é igual a 9.

Aplicação IV.9. *(ENA-2007) Quantos números inteiros satisfazem a inequação* $(2x - 1) \cdot (2x + 1) < 99$ *?*

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

Resolução:

$$(2x - 1)(2x + 1) < 99$$

$$4x^2 + 2x - 2x - 1 < 99$$

$$4x^2 - 1 < 99$$

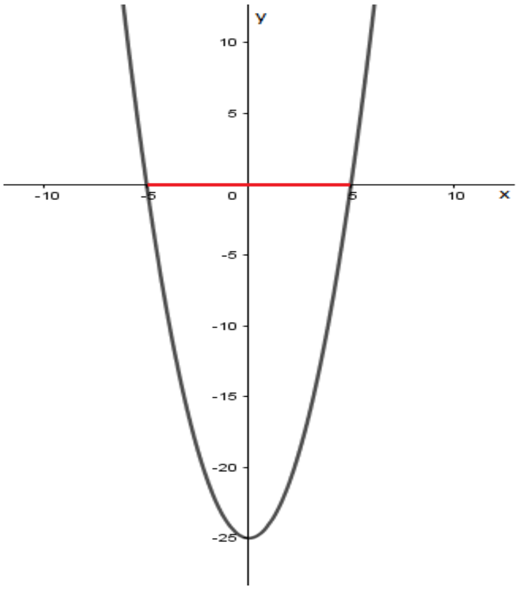
$$4x^2 < 100$$

$$x^2 < 25$$

$$-5 < x < 5$$

Graficamente temos como mostra **Figura 15**.

Figura 15: Imagem gráfica da inequação



Fonte: Autor, 2020

Logo temos como resultado todos os números inteiros entre -5 e 5. Assim temos $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. Dessa forma 9 resultados possíveis.

Aplicação IV.10. *(POTI) Sendo* $a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \begin{cases} a+b+c+d+e=8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16 \end{cases}$. *Qual o valor máximo de* e*?*

Considerando as sequencias $(a+b+c+d)$ e $(1+1+1+1)$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos,

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\cdot(1^2+1^2+1^2+1^2) \geq (a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d\cdot 1)^2$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2+d^2)\cdot\ 4 \geq (a+b+c+d)^2$$

Dividindo ambos os lados por 4 sem alteração na desigualdade,

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2+d^2) \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq (a+b+c+d)^2$$

Mas $a+b+c+d=8-e$ e $a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$, então substituindo na desigualdade teremos,

$$4(16-e^2) \geq (8-e)^2$$

$$\Longrightarrow 64-4e^2 \geq 64-16e+e^2$$

$$\Longrightarrow -5e^2+16e \geq 0$$

Resolvendo a inequação ficamos com,

$$e(-5e+16) \geq 0 \quad \Longrightarrow e \geq 0$$

$$-5e+16 \geq 0$$

$$\Longrightarrow e \leq \frac{16}{5}$$

$$s = \left\{0 \leq e \leq \frac{16}{5}\right\}$$

A igualdade é válida se $a = b = c = d$, então $a+b+c+d = 8-e$ para $e = \frac{16}{5}$ logo:

$$8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5}$$

Como $a = b = c = d = W$, assim $4W = \frac{24}{5} \Longrightarrow W = \frac{6}{5}$, então, para a segunda parte do sistema, substituímos o valor de e e verificamos,

$$\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} + \frac{36}{25} + \frac{36}{25} + \frac{36}{25} + \frac{256}{25} = \frac{144}{25} + \frac{256}{25}$$

$$= 16$$

Isso mostra que para $e = \frac{16}{5}$ a igualdade do sistema é valida e como $0 \leq e \leq \frac{16}{5}$ o valor máximo para e é justamente $\frac{16}{5}$.

Aplicação IV.11. *Entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c fixada, o que tem maior soma dos catetos $s = a + b$ é o triangulo isósceles.*

Solução:

Senso $s^2 = (a+b)^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1)^2$, podemos aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz nas sequencias (a, b) e $(1,1)$, então,

$$(a^2 + b^2) \cdot (1^2 + 1^2) \geq (a+b)^2$$

$$\Longrightarrow (a^2 + b^2) \cdot 2 \geq s^2$$

No triangulo retângulo mencionado $c^2 = a^2 + b^2$ então,

$$c^2 \cdot 2 \geq s^2$$

$$\Longrightarrow s \leq \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$$

O valor máximo é quando ocorre a igualdade de $\frac{a}{1} = \frac{b}{1}$

Nesse caso $s = c\sqrt{2}$ e $a = b$. Logo, temos um triangulo retângulo isósceles.

■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi apresentado um escólio vetorial da desigualdade de Cauchy-Schwarz por meio de demonstrações, conceitos e propriedades do espaço vetorial. As análises foram feitas de forma clara e concisa fundamentadas em Iezzi (2003), Steinbruch e Winterle (1997) e Lima (2005).

Ao longo do nosso trabalho, apresentamos variados tipos de desigualdades e alguns modelos para a resolução destas. Mostramos ainda que o estudo dos vetores fornece uma demonstração no campo algébrico e geométrico à desigualdade de Cauchy-Schwarz, fato esse mostrado em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ comparando o alinhamento de três pontos no plano e no espaço com as definições de vetores LI e LD.

Essa mudança de registro semiótico possibilita melhor fixação de conceitos geométricos e vetoriais como a existência de relações entre diagonal, superfície total e volume de um paralelepípedo.

Além disso, as aplicações da desigualdade de Cauchy-Schwarz mostram que esta desigualdade pode ser trabalhada no Ensino Médio preparando ou não os estudantes para olimpíadas de matemática. Temos ainda que, as aplicações retratam a importância de criar desafios aos estudantes, instigando sua capacidade de raciocínio lógico, pois estudar desigualdades matemáticas não se trata de resolver contas rapidamente, mas sim de criar processos de resolução.

Através deste trabalho, fomos capazes de utilizar variados conhecimentos de matemática, acarretando aprimoramento e descobertas que servirão de suporte para pesquisas futuras sobre essa temática e aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Com isso, acreditamos que esta investigação irá auxiliar docentes e discentes, para despertar o desejo de buscar a criticidade no estudo das desigualdades matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BARBOSA, Régis; FEITOSA, Samuel. **Banco de questões 2016**. Rio de Janeiro: Impa/obmep, 2016. 182 p.

BONELLI, Rebeca Cristina. **Desigualdades Matemáticas e Aplicações.** 2017. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2017. Cap. 1. Disponível em:<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151180/bonelli_rebeca_me_rcla.pdf?sequence=3>. Acesso em: 19 jan. 2020.

BRITO, Frank Welly Mendes de. **Otimização: Uma aplicação para desigualdade das médias e para desigualdade de Cauchy-Schwarz.** 2016. 48 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraiba, João Pessoa, 2016. Cap. 1. Disponível em:<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9347>. Acesso em: 20 jan. 2020.

FEITOSA, Samuel Barbosa. **Curso de Teoria dos Números**: Divisibilidade I. 2012. Elaborada por Polos Olímpicos de Treinamento. Disponível em:< https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/82r7a10d1jocg.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2020.

FERNÁNDEZ, Susana Frómeta. **Curso de Teoria dos Números**: Divisibilidade I. 2012. Material do POTI. Disponível em: <https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/h3k2e5tzkogs0.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2020.

GOMES, Olimpio Ribeiro et al. **Estruturas Algébricas para Licenciatura: introdução à teoria dos números.** Brasilia: edição do Autor, 2008. 1 v.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar.** Coleção para o 2º grau. São Paulo: Atual, 1991.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1. 3 ed. São Paulo: Harbra,1994.

LIMA, E.L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

LIMA, Elon Lages *et al*. **Temas e Problemas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2001. 189 p. Disponível em: <https://matematicatransformadora.com/wp-content/uploads/2019/04/1-SBM-Elon-Lages-Lima-Temas-e-Problemas.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2020.

SBM. **MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL**: gabarito com solucões. 2019. Disponível em:< https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2018/10/Gabarito-ENA-2019-com-solu%c3%a7%c3%b5es.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2020.

SICHINEL, Valentino Amadeus. **Curso de Álgebra**: desigualdades i. Desigualdades I. 2012. Material do POTI. Disponível em: <https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/dtqz1ez2t26d.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2020.

SILVA, L. P. M. **Propriedades e características da desigualdade**. Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/propriedades-caracteristicas-desigualdade.htm>. Acesso em 18 de janeiro de 2020.

STREINBRUCH, A. WINTERLE, P. **Introdução à Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

STREINBRUCH, A. WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: Ed. Pearson Education do Brasil. 1987.

VELAME, G. C. **Uma abordagem sobre Desigualdades e suas aplicações.** Cruz das Almas: Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, 2014.