



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
CAMPUS II – ALAGOINHAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SABRINA MIRANDA DOS SANTOS

**NÚMEROS RACIONAIS: INVESTIGANDO AS DIFERENTES
REPRESENTAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL**

Alagoinhas – Ba

2022

SABRINA MIRANDA DOS SANTOS

**NÚMEROS RACIONAIS: INVESTIGANDO AS DIFERENTES
REPRESENTAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL**

Monografia apresentada à Universidade do Estado da Bahia – UNEB, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a. Maria de Fatima Costa Leal

Alagoinhas – Ba

2022

Sistema de Bibliotecas da UNEB
Biblioteca Carlos Drummond de Andrade – Campus II
Rosana Cristina de Souza Barretto
Bibliotecária – CRB 5/902

S237n Santos, Sabrina Miranda dos.

Números racionais: investigando as diferentes representações do número racional./ Sabrina Miranda dos Santos – Alagoinhas, 2022.
62f.il.

Trabalho de Conclusão de Curso – (Graduação) - Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Exatas e da Terra. Colegiado de Matemática. Campus II.

Orientador: Prof.^a Dr.^a Maria de Fátima Costa Leal.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números racionais. I. Leal, Maria de Fátima Costa. II. Universidade do Estado da Bahia - Departamento de Ciências Exatas e da Terra - Campus II. III. Título.

CDD 513.5

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
CAMPUS II – ALAGOINHAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SABRINA MIRANDA DOS SANTOS

**NÚMEROS RACIONAIS: INVESTIGANDO AS DIFERENTES
REPRESENTAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL**

Monografia apresentada à Universidade do Estado da Bahia – UNEB, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovada _____ de _____ de 2022

Banca Examinadora

Prof.^a Dr.^a. Maria de Fatima Costa Leal- (Orientadora) -UNEB

Prof.^o Dr.^a. Maria Eliana Santana da Cruz Silva - UNEB

Prof.^a Viviane Mendonça Dos Santos - UNEB

Dedico esta monografia à meu amado pai,
Jomario Miranda dos Santos (in memoriam), continua
sendo minha maior força de vida, e tenho a certeza que
seu amor sempre esteve comigo.

A minha linda mãe, Aparecida Barbosa de
Miranda, minha fonte de inspiração de fé, coragem,
determinação.

Essa vitória é nossa. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

O sentimento de satisfação e de dever cumprido em se concluir um trabalho como este, é de mesma força, que a de gratidão a todos que contribuíram diretamente e indiretamente nesse processo, e possibilitaram a sua concretização.

Em especial:

A Deus, esteve e está comigo em cada momento, me acompanhou em todos os momentos difíceis me fortalecendo e me reerguendo, me dando forças para continuar e vencer todos os obstáculos da vida. Me concedeu sabedoria, ânimo e coragem para realizar mais uma etapa em minha vida. Se não fosse Deus não teria chegado até aqui. Obrigada, Pai.

A minha querida mãe, Aparecida Miranda, verdadeiramente o amor da minha vida, que sempre acreditou em mim e nunca soltou a minha mão, apesar das diversidades e de toda distância, manteve a fé em meus sonhos junto comigo. Meu exemplo de força e coragem.

A meus irmãos, que sempre me apoiaram, especialmente, a minha irmã Midiã, foi o meu grande suporte durante toda a minha trajetória, e meu irmão Jorlan, que sempre me incentivou a continuar.

A Anna Raquel e Matheus, meus sobrinhos, que são as minhas maiores riquezas e motivação para seguir.

A toda a minha família, tios e tias, cunhado, que sempre me ajudaram e torceram por mim.

Minha querida orientadora, Dra. Maria de Fátima Costa Leal, foi um presente de Deus na minha vida. Obrigada pelas orientações, dedicação, correções, companheirismo, noites perdidas, sugestões e apontamentos para a evolução e concretização desse trabalho.

Aos docentes do curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade do Estado da Bahia, que compartilharam seus conhecimentos e foram essenciais na minha trajetória acadêmica, especialmente, Erivelton Santana, Maridete, Érica, Jerfferson e Grace.

Aos meus amigos da graduação que hoje carrego para vida, Elaine, Jesiane, Laise, Tiago, Elise, Ana Paula, pelos momentos agradáveis, pela força nas situações difíceis, a constante ajuda durante todo o curso, e acima de tudo, pela amizade.

A minha banca, Viviane Mendonça e Maria Eliana pela disponibilidade.

“Eu reconheço que para Ti nada é
impossível e que nenhum dos Teus planos
podem ser impedidos.”

– **Jó 42:2**

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar os saberes que os estudantes do 9ºano revelam sobre as diferentes representações do número racional (fração, decimal e porcentagem). Para isso, foi aplicada uma sequência didática com 12 questões, para 10 alunos, do 9º ano, etapa final do Ensino Fundamental II; suas respostas foram analisadas referente os erros apresentados. Cinco alunos são de uma Escola da Rede Estadual e cinco alunos de uma Rede Privada. Por meio das análises foi possível observar que os estudantes apresentam dificuldades para reconhecer e produzir diferentes representações para um mesmo número racional, e que não conseguem estabelecer uma relação entre esses registros, constatando ainda, que o ensino e a aprendizagem desses números necessita de uma atenção especial, principalmente nas suas diferentes representações. Espera-se que o trabalho contribua para estudos sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais.

Palavras-chaves: número racional; representações do número racional; ensino de fração; dificuldades na aprendizagem do número racional.

ABSTRACT

This work aims to investigate the knowledge that 9th grade students reveal about the different representations of the rational number (fraction, decimal and percentage). For this, a didactic sequence with 12 questions was applied to 10 students, from the 9th year, final stage of Elementary School II; their answers were analyzed regarding the errors presented. Five students are from a State Network School and five students from a Private Network. Through the analyses, it was possible to observe that students have difficulties to recognize and produce different representations for the same rational number, and that they cannot establish a relationship between these records, noting that the teaching and learning of these numbers needs special attention, especially in its different representations. It is hoped that the work will contribute to studies on the teaching and learning of rational numbers.

Key-words: rational number; rational number representations; fraction teaching; difficulties in learning the rational number.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Imagem Grupo X	40
Figura 2 - Imagem Grupo Y	40
Figura 3 - Imagem grupo X	41
Figura 4 - Imagem Grupo Y	41
Figura 5 - Resposta do aluno A à questão 1	41
Figura 6 - Resposta do aluno J à questão 3	43
Figura 7 - Resposta do aluno B à questão 3	43
Figura 8 - Resposta do aluno F à questão 3	43
Figura 9 - Resposta do aluno F à questão 5	44
Figura 10 - Resposta do aluno J à questão 5	45
Figura 11 - Resposta do aluno B à questão 6	46
Figura 12 - Resposta do aluno J à questão 6	46
Figura 13 - Resposta do aluno I à questão 7	47
Figura 14 - Resposta do aluno B à questão 7	47
Figura 15 - Resposta do aluno C à questão 7	48
Figura 16 - Resposta do aluno A à questão 9	49
Figura 17 - Resposta do aluno H à questão 10	49
Figura 18 - Resposta do aluno A à resposta 12	51

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
CAPÍTULO I.....	13
1.1 Motivação da pesquisa.....	13
1.2 O que dizem as pesquisas?	15
1.3 Problema e questão de estudo	18
CAPÍTULO II.....	19
NÚMEROS RACIONAIS E SUAS REPRESENTAÇÕES	19
2.1 Conceito do número Racional.....	19
2.2 Representações dos números racionais.....	20
2.2.1 Conversão de fração para decimal	21
2.2.2 Conversão decimal para fração	23
2.2.3 Conversão percentual para fração e decimal	24
2.3 Erros Frequentes nas Representações de um Número Racional.....	24
CAPÍTULO III.....	26
METODOLOGIA	26
3.1 Tipo de pesquisa.....	26
3.2 Campo da pesquisa	26
3.3 Sujeitos da pesquisa.....	27
3.4 Instrumento da pesquisa.....	28
3.5 Os procedimentos da pesquisa	28
3.5.1 Estudo a priori das atividades	30
CAPÍTULO IV	39
ANÁLISE DOS DADOS	39
4.1 Análise qualitativa dos resultados.....	40
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	53
REFERÊNCIAS	55

ANEXOS.....	59
ANEXO A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA APLICADA	59

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina considerada muito complexa, quase sempre vista pela sociedade, pelos alunos e por muitos docentes de outras áreas como uma disciplina difícil, no entanto, diariamente somos submetidos a resolver situações que envolvam problemas matemáticos, usando uma variedade de conteúdo, e muitas vezes nem percebemos.

O estudo da fração tem seu início na Educação Básica a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental, estendendo-se até o final do 3º ciclo. As pesquisas apontam para dificuldades em relação a esse conceito, tanto no que diz respeito ao ensino, como na aprendizagem. Quando lançamos o foco para o ensino, reconhecemos uma ênfase nos procedimentos e algoritmos e uma ênfase na representação parte-todo. Nessa direção, Campos e colaboradores afirmam que:

O método de ensino encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla-ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas- sem entender o significado deste novo tipo de número. (CAMPOS citado por NUNES, BRYANT, 1996, p.19)

Mudando o foco para a aprendizagem da fração, pesquisas revelam que os alunos não são totalmente desprovidos de habilidades em manipular os números racionais, no entanto, o fazem sem uma compreensão significativa do conceito. Para Nunes e Bryant uma das razões está no fato de que, com as frações as aparências enganam, e prosseguem em seus argumentos:

Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não tem. Elas usam os termos fracionais certo; elas falam sobre fração corretamente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba. (NUNES, BRYANT 1996, p.191)

No rol das dificuldades geradas pelo entendimento do número racional está a dificuldade que muitos alunos apresentam em converter e associar a relação de equivalência entre as diversas representações dos racionais (fração, decimal e porcentagem). (CATOO, 2000)

Essa falta de reconhecimento do número racional e as diferentes formas de representação, levam os alunos a um trabalho desconexo de significação, “a ponto de

deixarem de estabelecer ligação entre os registros na forma fracionária, $\frac{1}{4}$ e a decimal 0,25, embora os tratamentos no interior de cada registro sejam realizados corretamente” (CATOO, 2000, p.30).

Considerando o fator temporal, reconhecemos que a compreensão sobre as dificuldades em associar diferentes representações a um número racional ainda se mantem atual no contexto educacional, e que exigem investigações constantes.

CAPÍTULO I

Neste capítulo apresento as razões que me conduziram à presente pesquisa sobre os números racionais e suas diferentes representações, bem como o problema de estudo.

1.1 Motivação da pesquisa

No decorrer da minha trajetória escolar, pude perceber um déficit em relação ao ensino do Conjunto dos Números Racionais - $\mathbb{Q}$; passei pelo Ensino Fundamental II e o médio tendo dificuldades nas questões envolvendo frações, números decimais, dízimas periódicas, e percebendo que os professores ao ensinar esse conjunto numérico se restringem a questões prontas com as operações matemáticas, enfatizando a memorização de regras.

Quando cheguei na Universidade do Estado da Bahia - UNEB, comecei a cursar as componentes curriculares de cálculo com problemas envolvendo frações, percebi que não sabia os conceitos mínimos sobre os números racionais, e logo identifiquei que muitos estudantes tinham as mesmas dificuldades.

Como monitora, a experiência que tive no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), no qual foi bolsista de 2016 a 2018 e como professora de curso (reforço) da disciplina matemática, Ensino Fundamental I e II, encontrei também alunos que apresentavam dificuldades nesse conteúdo. Daí, surgiu a motivação para estudar e pesquisar sobre o Conjunto dos Números Racionais e suas representações. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo. (BRASIL, 1998, p. 100 e 101).

Uma das justificativas apresentadas remete-se ao “fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais” (BRASIL, 1998, p. 101).

No dia a dia, a fração tem seu uso reconhecido e conceituado em razões, porcentagens e probabilidades, porém, a utilização do número racional em forma de fração é mais comum, pois é mais “natural” falar, por exemplo: “comi $\frac{1}{2}$ de uma barra

de chocolate”, ao invés de “comi 0,5 de uma barra de chocolate”, ou 50% da barra. Na culinária, em receitas, nos deparamos também com: $\frac{1}{2}$ de açúcar, $\frac{1}{4}$ de farinha trigo ou $\frac{1}{4}$ de leite.

Muitas vezes, os alunos só têm contato com os números decimais e a porcentagem de forma descontextualizadas e separadas, como um assunto novo e não como uma representação de que $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$, ou seja, num contexto paralelo compreender as novas representações de um mesmo número.

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2001), ressalta em suas conclusões que a ideia do número racional precisa ser melhor detalhado em situações práticas, de maneira que o aluno adquira o seu significado e os seus conceitos.

Para McIntosh et al. (1992), a noção de número racional inclui o reconhecimento de que estes números podem ser representados de muitas formas diferentes, bem como o utilização de que algumas representações são mais apropriadas em contextos comuns. Dessa forma, o aluno acaba utilizando e captando o conceito somente do número fracionário e assimilando ele como a única representação do número racional.

Duval (2003) afirma que a dificuldade dos alunos com os números racionais aumentam quando é solicitado a troca de registro ou o uso de dois registros simultaneamente. Ele destaca que essa dificuldade encontra-se em vários níveis de ensino, acontecendo como se fosse um bloqueio que impede o aluno de identificar o mesmo objeto em duas ou mais representações divergentes.

Nessa direção o presente trabalho tem como proposta fundamental aplicar uma sequência didática e analisar as dificuldades apresentadas pelos alunos no aprendizado associado a habilidade de reconhecer as diferentes representações para um mesmo número racional.

1.2 O que dizem as pesquisas?

Nossa busca aconteceu visitando o site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), utilizado o título “dificuldades na aprendizagens de frações”, seguido da inserção de palavras chave importantes para nosso trabalho como: ‘número racional’, ‘representações do número racional’, ‘ensino de fração’, ‘relação teoria e prática no ensino de frações’ e ‘dificuldades na aprendizagem do número racional’.

Dessa forma, por meio da revisão de literatura, procuramos entender e conhecer as situações referente as dificuldades na aprendizagem das representações racionais, para então compreendermos às questões das pesquisas abordadas.

Pesquisas como a de Cattoo (2000), Durval (2009), Santana (2012), Oliveira (1996), Bezerra (2001), Ponte (2002), entre outras, discutem as dificuldades conceituais de alunos na aprendizagem das representações dos números racionais.

O conceito de fração é considerado um dos mais importantes da Matemática, e tem o seu ensino iniciado a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental. Muito embora esse conteúdo seja desenvolvido nos ciclos iniciais, é possível reconhecer que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem a compreensão do significado desse número (Merlini, 2005).

Godino (2004) relata que os números racionais são o primeiro conjunto numérico que os alunos aprendem que não se baseia no processo de contagem. Os conjuntos numéricos seguem uma mesma didática de aprendizagem, que é a contagem, porém, no conjunto dos números racionais não há um número racional “seguinte” a um número racional dado.

Santos (2005) em suas conversas com professores reconhece parte das dificuldades enfrentadas no entendimento do número racional. A autora relata que é complicado para o aluno compreender que um número racional é representado por dois símbolos numéricos (a/b , onde a e b são isoladamente números) e que este novo símbolo representa uma nova quantidade - um novo número.

Canova (2006) complementa afirmando que não são dois números naturais seguidos de um traço que os separam, e que a falta de entendimento contribui para a concepção de que fração é uma sobreposição de dois números naturais.

As pesquisas também revelam que apesar do contato com os conceitos e propriedades das frações acontecerem no início da escolaridade, o processo de

compreensão desse conteúdo não se efetiva de modo concreto, o que contribui para uma aprendizagem mecanizada (SILVA, 1997; MUOTINHO, 2005).

Segundo o Conselho Nacional de Professores de Matemática, NCTM (2007):

Os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. [...] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros (p. 240).

Catoo (2000) aborda que por mais que os alunos saibam resolver um determinado problema (operação), contendo um número racional, eles não conseguem estabelecer uma relação entre os registros da forma fracionária. Para o autor:

Observações realizadas em diferentes fases da aprendizagem da Matemática têm mostrado que essa atividade de conversão por meio da mudança de registro é de fato muito difícil. Para uma grande maioria de alunos, o conteúdo fica restrito a um único registro de representação, o que acaba limitando os tratamentos possíveis. Essa falta de reconhecimento do representado (o número racional) e as diferentes formas de representação, representante, levam os alunos a um trabalho desconexo de significação, a ponto de deixarem de estabelecer ligação entre os registros na forma fracionária, $\frac{1}{4}$ e a decimal 0,25, embora os tratamentos no interior de cada registro sejam realizados corretamente (CATOO, 2000, p.30).

Segundo Duval (2009), mostrar uma única forma de representação não garante ao aluno o entendimento adequado do conceito que está sendo abordado em uma sala de aula.

Mudar a forma de uma representação se revela ser, para muitos alunos nos diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e, por vezes, mesmo impossível. Tudo se passa como se a compreensão que a grande maioria dos estudantes tivesse de um conteúdo ficasse limitada à forma de representação utilizada (DUVAL, 2009, p.35).

Ainda, segundo o autor, “os alunos só podem trabalhar com um determinado objeto matemático se recorrerem à sua representação, uma vez que, em Matemática, se trabalha com objetos abstratos” (p.14). Para que a aprendizagem tenha significado, é necessário desenvolver uma variedade de representações internas ajustadas, e que se relacionem entre si.

No entanto, a noção de fração, como objeto de estudo das suas diferentes concepções, ainda se encontra com dificuldade de entendimento quando assumimos como esfera de investigação o ensino e a aprendizagem das frações. No ensino, percebemos uma ênfase em procedimentos algorítmicos (SILVA, 1997; SANTOS,

2005), e uma tendência em traduzir o conceito de número racional, na representação fracionária, fazendo uso apenas de um significado, ou seja, parte-todo.

Para Garcia (2003), um grande problema na representação tradicional dos números fracionários, no contexto escolar, talvez tenha sido o abuso de representações contínuas vinculadas sobretudo ao círculo (a celebre pizza), sem levar em conta outras representações contínuas (como a do retângulo) ou discretas (como fichas).

Garcia (2003) ainda destaca o papel das percepções na aprendizagem que entende como informações visuais provenientes de figuras, modelos ou diagramas que acompanham as tarefas usuais na escola para números fracionários.

Bianchini (2001), aplicou uma sequência didática para o ensino dos números decimais, para alunos da 3º série do Ensino Fundamental. O autor percebeu que os alunos confundiam a vírgula com o traço da fração, ou seja, $1/7$ igual a 1,7. Os alunos tinham a noção que podiam representar um mesmo número racional, a “vírgula pelo traço”, e assim 1,7 era o mesmo que ter um inteiro dividido em sete partes.

A fração, tem sua exibição numeral formada por dois números, motivo que leva os alunos a interpretar uma fração como dois números separadamente (Monteiro & Pinto, 2005).

As frações não são algo que se tenha que saber, mas sim algo que se tenha que compreender, e não é possível compreendê-las antes de uma suficiente experiência com elas. [...] A chave do êxito na iniciação ao estudo das frações é a variedade, a troca, a diversidade de pontos de vista (GOUTARD, 1964, apud Garcia, 2003, p. 18)

Vergnaud (1983) defende que um determinado conhecimento não deve ser conceituado isoladamente, um conceito não se desenvolve sozinho, mas em ligações com outros conceitos, ou seja, deve ser relacionado a outros conhecimentos, através de diferentes tipos de problemas que utilizando situações.

Os alunos devem saber que os números racionais podem ser representados de várias maneiras, de modo que consigam compreender que $1/4$, 25%, e 0,25 são apenas designações diferentes do mesmo número, o número racional admite várias representações, nomeadamente.

Segundo Behr, Lesh, Post e Silver (1983), mostram o importante papel das diferentes representações e do que chamam de translação entre elas, com base em um modelo interativo que considera cinco sistemas de representações (diagramas, símbolos escritos, materiais concretos, linguagem falada, e situações reais) que

podem facilitar a aquisição e a utilização do conceito e tornar as ideias significativas aos aprendizes.

1.3 Problema e questão de estudo

A fração é escrita na forma a/b , em que 'a' é o numerador e 'b' o denominador, com b diferente de zero. "A barra fracionária, neste caso, funciona como um delimitador para o numerador e o denominador" (ONUChic; ALLEVATO, 2008). Com base nas leituras anteriores, essa representação não é única e vem acompanhada de diferentes significados, considerando os diferentes contextos no qual esta pode ser inseridas.

Assim sendo, traçamos como objetivo geral, investigar os saberes que os estudantes do 9º ano revelam sobre as diferentes representações do número racional (fração, decimal e porcentagem).

Para tal, elegemos os seguintes objetivos específicos:

- ✓ Investigar por meio de atividades exploratórias o uso de material manipuláveis;
- ✓ Investigar por meio exercícios e problemas as diferentes representações do número racional não negativo;
- ✓ Identificar os erros mais significativos que os alunos no final do ciclo 2, cometem na utilização das várias representações.

Buscamos com tais objetivos responder à seguinte questão de pesquisa: Quais são os saberes apresentados por estudantes do Ensino Fundamental II sobre as diferentes representações dos números racionais (fração, decimal, percentual)?

CAPÍTULO II

NÚMEROS RACIONAIS E SUAS REPRESENTAÇÕES

Neste capítulo iremos dá atenção ao conceito do número racional, evidenciando suas diferentes representações. Deste modo, abordo os temas essenciais para o desenvolvimento deste estudo: (i) o conceito de número racional; (ii) as representações dos números racionais; (iii) dificuldades de ensino.

2.1 Conceito do número Racional

Conforme Boyer (1974), as primeiras notícias sobre o uso das frações remetem a cerca de 3000 a.C. e vêm do Egito. As terras que margeavam o Rio Nilo eram divididas entre os grupos familiares, em troca de pagamento de tributos para o Estado. Como eram periódicas as inundações do Rio Nilo, as terras tinham de ser frequentemente medidas, visto que o tributo era pago proporcionalmente à área a ser cultivada.

Para tanto, os proprietários usavam cordas (que seriam uma espécie de medida), esticando-as e, assim, verificavam quantas vezes aquela unidade de medida (encontrada através da corda esticada) estava contida nos lados do terreno. Mas raramente essas medidas correspondiam exatamente ao tamanho do terreno, pois não cabiam um número inteiro de vezes em seus lados, dificuldade esta que os levou, então, à criação de um novo tipo de número: o número fracionário (BOYER, 1974)

Assim, chama-se conjunto dos números racionais – símbolo Q – o conjunto das frações $\frac{a}{b}$, em que a e b ($b \neq 0$) são dois números inteiros para os quais adotam-se as seguintes definições:

$$\text{Igualdade: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$$

$$\text{Adição: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\text{Multiplicação: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Assim surgiu o número racional, aquele que pode ser expresso como a razão ou fração de dois números inteiros a e b ($b \neq 0$). O conjunto dos números racionais pode ser assim representado:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a \text{ e } b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

O símbolo $\mathbb{Q}$ deriva da palavra inglesa “Quotient” que pode ser traduzido como quociente e que apareceu a primeira vez no livro *Algèbre*, de Bourbaki (BOURBAKI, 1998).

Os números decimais têm origem nas frações decimais. Os números decimais são, na realidade, a mesma coisa que as frações decimais, porém “escritos” de modos diferentes. Existiram muitas formas de separar a parte inteira da parte decimal, mas foi John Napier, matemático escocês, que sugeriu o uso de um ponto ou de uma vírgula para separar a parte inteira da parte decimal (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2013).

O termo por cento (%) para as frações com denominadores 100 têm sua origem na aritmética comercial dos séculos XV e XVI. Isso se deu por ser comum citar taxas de juros em centésimos. O que contribuiu também para tal costume de uso do termo foi o fato dos Estados Unidos possuírem um sistema monetário baseado em dólares e centavos (centésimos de dólares). Através dos séculos, o símbolo de porcentagem se consolidou, iniciando com uma abreviação à mão “por 100”, depois para “por $\frac{0}{0}$ ”, e, finalmente para “%”. (CAJORI, 1993)

O número racional admite várias representações, nomeadamente, decimal, fração, pictórica e porcentagem.

2.2 Representações dos números racionais

Representar um número, quer dizer, atribuir-lhe uma denominação, intitular algo, ou seja, é preciso trabalhar com os alunos a compreensão de que um número pode ter várias representações e formas, várias nomeações. A porcentagem, o número decimal, a fração, linguagem natural e pictórica são representações que um número racional pode tomar e que os alunos devem compreender de forma a desenvolverem a sua capacidade de raciocínio. NCTM¹ (2007)

¹ Conselho Nacional de Professores de Matemática

De acordo com Goldin (2003), uma representação é uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem, de alguma forma, designar ou substituir alguma coisa. Segundo o mesmo autor, é essencial considerar e distinguir entre sistemas psicológicos internos e sistemas externos a um indivíduo. Esta distinção permite explorar as relações entre os sistemas.

Para este mesmo autor, os sistemas de representação interna compreendem, entre outros, a linguagem natural, a capacidade de construir imagens visuais e espaciais; as capacidades pessoais, incluindo as concepções e os equívocos em relação à notação matemática convencional e o afeto.

Para Orton et al. (1995), a representação é uma noção útil para descrever, não apenas a lógica dos conceitos de número racional, mas a natureza da Matemática em geral.

Nesse sentido é muito importante para o aluno transitar pelos diferentes tipos de representação durante o processo de ensino e aprendizagem, além da realização de tratamentos e conversões em diferentes representações, a fim de facilitar a construção do conhecimento. A seguir, apresentamos conversões de uma representação para outra dos números racionais.

2.2.1 Conversão de fração para decimal

Quando os números racionais estão na forma fracionária, basta dividir o numerador pelo denominador para obter a forma decimal. Uma forma decimal pode ser finita (decimais exatos) ou infinita (dízimas periódicas).

Exemplo:

Quadro 1: Exemplo de decimais exatos ou infinita dízimas periódicas

Decimal Exato	$\frac{1}{2} = 0,5$
Dízima Periódica Simples	$\frac{1}{3} = 0,333 \dots$
Dízima Periódica Composta	$\frac{145}{90} = 1,6111 \dots$

- a) O número racional com representação decimal finita quando o seu denominador apresenta apenas o fator 2:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 0,125$$

- b) O número racional com representação decimal finita quando o seu denominador apresenta apenas o fator 5:

$$\frac{2}{25} = \frac{2}{5^2} = 0,08$$

- c) O número racional com representação decimal finita quando o seu denominador apresenta apenas o fator 2 e 5:

$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \cdot 5} = 0,175$$

Os números decimais periódicos, também são chamados de dízima periódica. Esses números quando escritos na forma decimal, apresentam uma série infinita de algarismos decimais que se repetem em grupos individualmente. As dízimas podem ser simples ou composta, dependendo dos números que aparecem depois da vírgula.

- a) Decimal Periódico Simples, após a vírgula, logo identifica-se o período.

$$\frac{2}{3} = 0,666 \dots$$

- b) Decimal Periódico Composto, após a vírgula, tem-se o antiperíodo antes do período.

$$\frac{17}{15} = 1,1333 \dots$$

2.2.2 Conversão decimal para fração

Na conversão de decimais em frações, há basicamente duas possibilidades a ser consideradas: conversão de decimal exato e conversão de decimal infinito (periódico).

Exemplos:

Decimal Exato: $0,25 = \frac{1}{4}$

Decimal Infinito Periódico: $0,444... = \frac{4}{9}$

Para transformar um decimal exato em fração segue-se os passos abaixo:

1. Relacionar o número decimal exato com uma incógnita.
2. Multiplicar por uma potência de 10. O valor da potência dependerá de quantas casas decimais o decimal exato possui.
3. Encontrar o valor da incógnita, que resultará na representação fracionária de decimal exato.
4. Por último, se for possível, simplificar a fração.

Exemplos¹: $x = 0,5 \Leftrightarrow 10x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Exemplos²: $x = 1,08 \Leftrightarrow 100x = 108 \Leftrightarrow x = \frac{108}{100} = \frac{27}{25}$

Exemplos³: $x = 0,063 \Leftrightarrow 1000x = 63 \Leftrightarrow x = \frac{63}{1000}$

Para transformar um decimal infinito periódico simples em fração segue-se os seguintes passos:

1. Relacionar a dízima periódica com uma incógnita. Normalmente usam-se a incógnita x .
2. Multiplicar os dois lados da igualdade por um múltiplo de 10, de acordo com a quantidade de algarismos do período, por exemplo: um algarismo, multiplicar

por 10; dois algarismos, multiplicar por 100; três algarismos, multiplicar por 1000, e assim sucessivamente.

3. Subtraís a segunda igualdade da primeira igualdade (elimina-se a parte periódica, ficando apenas os números não periódicos). Finaliza-se encontrando o valor de x .

Exemplo: Encontrar a fração geratriz da dízima 0,777...

1º passo: Chamando $x = 0,777 \dots$

2ª passo: Multiplicando x por 10, temos: $10x = 7,7777 \dots$

3º passo: Fazendo $10x - x = (7,7777 \dots) - (0,777 \dots)$ temos: $9x = 7$

$$\text{Logo, } x = \frac{7}{9}$$

2.2.3 Conversão percentual para fração e decimal

Apresenta-se agora a noção de porcentagem que é simplesmente um tipo especial de fração, mais precisamente uma fração cujo denominador é 100. Assim, n por cento, ou $n\%$, representa a fração $n/100$. O símbolo % aparece com muita frequência em jornais, revistas, televisão, anúncios de liquidação, entre outros.

Vale ressaltar que a porcentagem também pode ser representada na forma de número fracionário ou decimal.

$$35\% = \frac{35}{100} = 0,35$$

$$228\% = \frac{228}{100} = 2,28$$

Considerando as diferentes representações para um mesmo número racional, é importante que os alunos consigam associar e relacionar as diferentes representações de um mesmo número racional e não simplesmente decorem métodos sem entender o processo.

2.3 Erros Frequentes nas Representações de um Número Racional

Os erros fazem parte do processo de aprendizagem e devem ser encarados como uma importante ferramenta para diagnosticar e identificar as dificuldades e obstáculos presentes na aprendizagem da Matemática e gerar elementos que favoreçam o desenvolvimento cognitivo do aluno. (SOUZA, 2002). Nessa direção, investigar os erros dos alunos envolvendo as diferentes representações é fundamental para melhorar o processo de ensino e aprendizagem desse objeto de investigação.

Os erros são inúmeros e frequentes quando o tema trabalhado são os números racionais. É muito comum os professores se depararem com erros do tipo $1,7 = 1,07$; quando confunde as casas décimas com as centésimas. Monteiro e Pinto (2007).

Catoo (2000) destaca a dificuldade dos alunos na atividade de conversão por meio da mudança de registro e acrescenta que muitos alunos não reconhecem e nem associam as diferentes representações do número racional, chegando ao ponto do aluno não estabelecer ligação entre a forma fracionária $1/2$ e a decimal 0,5.

Na transposição de registros dos racionais, é comum os alunos estabelecerem uma equivalência errada entre uma fração e um decimal, separando o numerador do denominador com uma vírgula; $1/2 = 1,2$ (CARVALHO, 2005). No caso da transformação de decimais para fração os alunos também cometem esse mesmo erro, porém de forma inversa, ou seja, consideram a parte inteira como numerador e a parte decimal como denominador; $3,4 = 3/4$.

Quando os números racionais estão na forma percentual, Parker e Leinhardt (1995) afirmam que é comum os alunos cometerem três tipos de erros:

1. Ignorar o símbolo da porcentagem – o aluno não distingue 10 de 10%;
2. Regra do numerador – o aluno substitui o símbolo “%” por uma vírgula à esquerda do número, o que o faz admitir que $50\% = 0,5$ e que $120\% = 0,120$;
3. Algoritmo aleatório – os alunos referem que $8 = 4\%$ de 32, determinando o quatro através da divisão de 32 por 8.

Como pode-se perceber, muitos são os erros associados aos números racionais que os docentes se deparam frequentemente. Romanatto (1997) afirma que os números racionais devem ser bem explorados ao longo de todo o Ensino Fundamental. Desta forma, tem-se a chance de amenizar as dificuldades que rodeiam os números racionais e conseqüentemente, diminuir erros.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste capítulo, vamos apresentar os aspectos metodológicos que guiaram nosso estudo: tipo de pesquisa, apresentação do campo onde a pesquisa ocorreu, caracterização dos sujeitos e definição do instrumento de coleta de dados, assim, como os procedimentos de análise dos dados da pesquisa.

De acordo com Neves e Domingues (2007, p.46), “a metodologia deve ser escrita de modo claro e detalhado, para que o leitor seja capaz de reproduzir, se necessário, o aspecto essencial do estudo”.

3.1 Tipo de pesquisa

O trabalho será desenvolvido com base em uma pesquisa qualitativa, pois se preocupa com o percurso e não com o resultado final.

Segundo Bogdan e Biklen (1994): a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu instrumento essencial; os dados coletados são predominantemente explicativos, a preocupação com o desenvolvimento do processo é maior do que com o produto, o significado que as pessoas dão as coisas e a sua vida são focos de atenção especial do pesquisador; a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo, onde parte de fatos particulares.

Fiorentini e Lorenzato (2009) e Gil (2008) chamam atenção para esse tipo de pesquisa, na perspectiva de familiarizar o autor com o problema para em seguida poder explicar. Nessa direção, Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 70) afirma que as pesquisas exploratórias podem abranger levantamento bibliográfico, realização de entrevistas, aplicação de questionários ou testes. Para nosso estudo, vamos fazer uso da aplicação de uma sequência didática.

3.2 Campo da pesquisa

A pesquisa ocorreu no Colégio Estadual Oscar Cordeiro, pertencente à SEEDUC - Secretaria de Estado de Educação e Cultura, onde sou estagiária, e em

um Curso de reforço com alunos de Rede Privada, onde leciono a disciplina de Matemática.

A escola atende o Fundamental II (5º ao 9º ano), funcionando em dois turnos, os alunos que foram escolhidos para a pesquisa, foram do turno matutino. A escolha desse colégio como campo de pesquisa se deu pelo fato de ser o local onde a pesquisadora trabalha atualmente como estagiária, porém já realizou o projeto PIBID de matemática na mesma, e tendo anseio em proporcionar a esses alunos experiências e atividades significativas, diversificadas, e que lhes deem a oportunidade de intervir ativamente no processo de ensino e aprendizagem dos mesmo.

O Curso Reforço abrange todos os anos de Ensino do Fundamental II e o Ensino Médio. Leciono nas turmas (7º ao 9º) do Fundamental II, presenciando, assim, as dificuldades apresentadas pelos alunos nesta disciplina e, mais notadamente, em relação aos números racionais e suas representações.

3.3 Sujeitos da pesquisa

A escolha dos sujeitos para aplicação do questionário aconteceu conforme proximidade com os mesmos e, apesar de estarem cursando o 9º ano, em virtude do período da pandemia, tiveram os saberes comprometidos com a distância do espaço escolar. Assim, possuem um potencial de contribuição para pensarmos no avanço do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em particular, sobre números racionais.

Segundo Neves (2007) “a escolha dos informantes ou sujeitos do estudo deve ser baseada na procura por indivíduos sociais que tenham uma vinculação significativa com o objeto de estudo”, (NEVES; DOMINGUES, 2007, p.57). Nesse caso, a intervenção pedagógica proposta neste trabalho - APLICAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA - foi submetido aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, visto que a habilidade de reconhecer e identificar diferentes representações para um mesmo número racional é parte integrante do currículo mínimo para este ano de escolaridade.

A pesquisa foi realizada na turma 9ºA da Escola Oscar Cordeiro, no turno matutino, contando também com alunos do Curso Reforço, no turno vespertino, e que estudam no 9º ano em uma Rede Privada. Nesse curso de reforço, sou a professora

de matemática, e nos dois campos da pesquisa, os sujeitos possuem idades entre 14 a 15 anos, cinco sujeitos da rede pública e cinco do curso em questão.

Neste trabalho, cada sujeito da pesquisa foi identificado em ordem alfabética: os alunos A, B, C, D, E pertencem a rede pública, enquanto os alunos identificados por F, G, H, I, J pertencem ao curso de reforço, como pode ser observado na Tabela 1:

Tabela 1 – Tabela: Grupo dos Participantes da pesquisa

ALUNOS	Código do Participante
1	Aluno A
2	Aluno B
3	Aluno C
4	Aluno D
5	Aluno E
6	Aluno F
7	Aluno G
8	Aluno H
9	Aluno I
10	Aluno J

Fonte: dados da pesquisa

3.4 Instrumento da pesquisa

A intervenção pedagógica com os sujeitos esteve ancorado em várias motivações e dentre elas reconhecemos o 9º ano, etapa final do Ensino Fundamental II, sujeitos que, considerando as etapas já passadas, podem revelar saberes associados ao número racional. Não podemos esquecer que esses sujeitos viveram o processo de pandemia, ou seja, uma lacuna de dois anos de escolaridade, considerando a necessidade de vencer os obstáculos inerentes a esse período.

Desse modo os alunos foram investigados a partir da apresentação de uma sequência de atividades construída para revelar saberes inerentes às diferentes representações de um número racional.

3.5 Os procedimentos da pesquisa

O objetivo da nossa pesquisa foi investigar os saberes que os estudantes do 9º ano revelam sobre as diferentes representações do número racional não negativo.

Para tanto, elaboramos uma sequência de atividades que procurou abordar a representação do número racional nas formas de fração, decimal e percentual, levando em consideração duas variáveis: apresentação das questões com representação icônica e sem representação icônica.

Nesse contexto, vale salientar que entendemos como representação icônica, “o conjunto de imagens relativo ao assunto, ou seja, o uso do desenho para ilustrar a situação” (Merlini, 2009, p.109).

Para considerarmos essas variáveis foram elaboradas oito questões para a representação do número racional por meio da representação icônica e cinco questões sem representação icônica. Em todas elas estaremos utilizando conjuntos de quantidades contínuas.

Quadro 2 - Significado das categorias eleitas

Situação	Significado adotado
Representação icônica	Conjunto de imagens relativa a uma situação dada
Sem representação icônica	Conjunto de representações textuais e simbólicas

Fonte: autoria própria

As respostas das questões serão analisadas considerando a representação na forma de fração, de número decimal e na forma de percentagem, ou seja, diferentes representações para o mesmo número. (Duval,2009)

Quadro 3 - Distribuição das questões em relação às categorias

Categoria	Natureza	Questões
1	APRESENTAÇÃO ICÔNICA	1,2,3,4,5,6,7,8
2	APRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA	9,10,11,12,13

Fonte: autoria própria

Em seguida, descrevemos a sequência de atividades, apresentando as questões organizadas segundo as categorias eleitas, e acrescidas de nossa análise a priori. Para tanto, iniciamos justificando cada questão e a representação de fração, decimal ou percentual escolhida para cada uma delas.

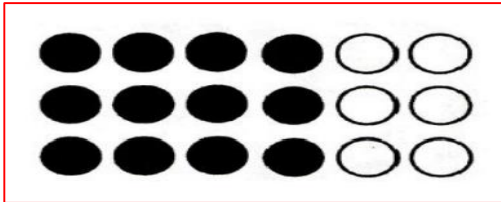
Vamos observar na distribuição das atividades (ANEXO A) que aquelas que possuem a mesma representação não foram organizadas de forma sequencial, isto porque entendemos ser interessante sair do padrão que normalmente aparece no livro

Outra possibilidade para representação seria escrever $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, respectivamente. Nesse caso, estaria fazendo uso da representação na forma de fração ($\frac{a}{b}$). O mesmo poderá acontecer na forma decimal.

Questão 2

Objetivo: Identificar a ideia de um todo em partes de mesma área a partir da exploração da figura.

Que fração dos círculos é preta?



Existe outro “nome” para a fração?

Esta questão solicita a representação dos círculos pretos na forma de fração e partindo do pressuposto que, geralmente o conceito de fração é introduzido e trabalhado com figuras geométricas (retângulos, círculo), entendemos que esse ícone seja tido como fator facilitador para a compreensão dessa questão pelo aluno.

Vamos explorar algumas possibilidades:

- a) O aluno pode representar com o número racional $\frac{12}{18}$ entendendo como inteiro a quantidade total de bolinhas
- b) A representação também poderia ser $\frac{4}{6}$ por entender a apresentação icônica com o inteiro dividido em 6 partes, contendo 3 unidades em cada e quatro grupos foram destacados.



- c) Outra possibilidade seria $\frac{2}{3}$, entendendo a representação como o inteiro dividido em três partes contendo seis elementos em cada uma delas, sendo duas selecionadas.



Questão 3

Objetivos:

_Verificar se o aluno sabe a partir de uma parte do todo, chegar a esse todo, ou seja, utilizar a ideia de reversibilidade reconhecendo a unidade a partir de suas partes;

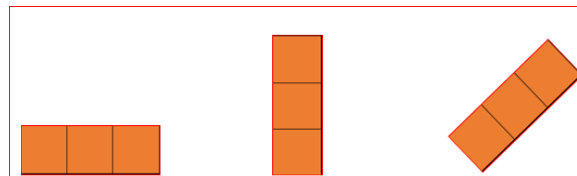
_Verificar se há entendimento da expressão “1/3 da unidade” (inteiro).

Se a figura seguinte representa $\frac{1}{3}$ da unidade, desenhe a figura completa:



Para esta questão, o aluno deverá partir da compreensão de que lhe foi apresentado apenas uma parte do inteiro (utilizando duas representações, fração e icônica) e portanto, haverá necessidade de reconstruir o inteiro a partir de suas partes. Portanto, a resposta acontecerá na forma icônica. Vamos explorar possibilidades.

A composição do inteiro poderá acontecer em qualquer direção (horizontal vertical ou inclinada



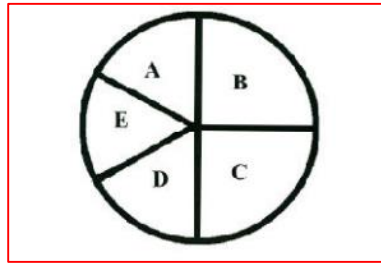
Também poderá acontecer da representação icônica ser construída sem agrupamento.



Questão 4

Objetivo: Verificar se o aluno desenvolveu corretamente o conceito de fração em representações icônicas, e em particular o conceito de um quarto/ quarta parte e um sexto /sexta parte.

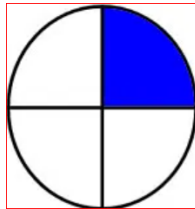
Observe a seguinte figura:



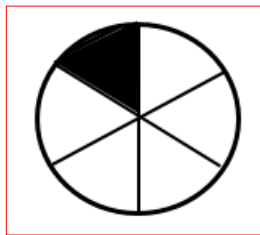
- a) Qual a fração do círculo está representada pela parte B?
 b) Qual a fração do círculo está representada pela parte D?

Como solução o aluno poderia reproduzir a figura para cada solicitação, assim ficaríamos com:

Para a letra a) teríamos $\frac{1}{4}$ como resposta



Para a letra b) teríamos $\frac{1}{6}$ como resposta em qualquer uma das cores.



Questão 5

Objetivo: Representar a partir de uma parte da tira, partes menores que a unidade (inteiro).

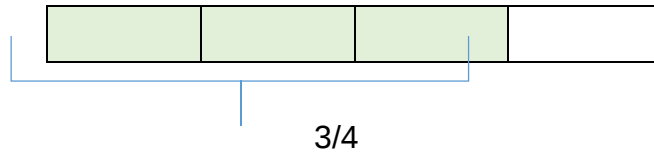
A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.



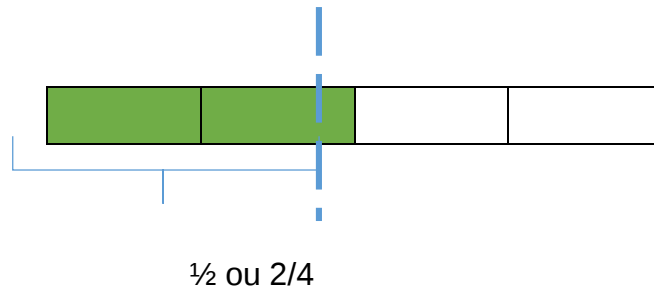
Represente agora a metade dessa tira. Explique seu raciocínio.

Como esta tarefa apresenta uma situação contextualizada envolvendo grandezas contínuas no significado parte todo a resposta pode ser dado na forma icônica.

Como primeira ação, seria encontrar o inteiro dividido em 4 partes:



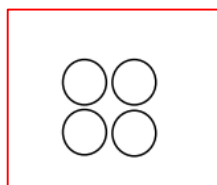
Em seguida identificar a $\frac{1}{2}$, ou $\frac{2}{4}$ (potencial para reconhecer que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são equivalentes):



Questão 6

Objetivo: Verificar se o aluno é capaz de reconhecer a concepção parte-todo, e reconstruir o todo a partir de uma de suas partes

Se a figura seguinte representa 20% da coleção de bolas de gude de Luís, desenhe ao lado a coleção completa de Luís.



Nesta questão a informação é dada na forma icônica envolvendo percentagem e quantidade discreta. Para solução desta questão, o aluno precisa reconhecer que 20% representa a quinta parte do todo que é 100%. Desse modo ele vai reproduzir esta imagem cinco vezes, ou desenhar vinte bolinhas.

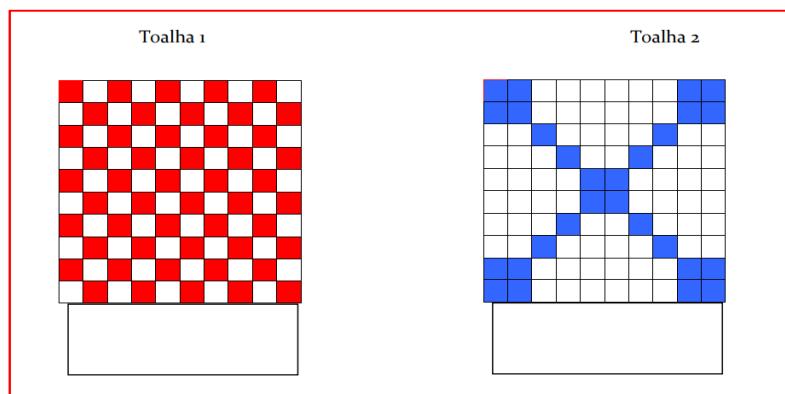


Questão 7

Objetivo: Identificar a ideia de fração (parte-todo) no conjunto contínuo em contexto de área fazendo uso de diferentes representações (decimal, fração e percentual).

Se cada figura representa 1 toalha, que parte da toalha está pintada?

Escreva em número decimal, em porcentagem e em fração.



A questão apresenta uma situação contextualizada no significado parte-todo, envolvendo grandezas contínuas. A informação é dada na representação icônica e a resposta é pedida fazendo uso das três representações eleitas: na forma de numeral decimal, fração e percentagem. Portanto, a resposta segue a ordem das toalhas.

Toalha 1. Para o inteiro dividido em 100 partes, 50 unidades estão pintadas de vermelho, ou seja, $50/100$, 50%. 0,5 ou $\frac{1}{2}$, 50%, 0,50.

Toalha 2. Para o inteiro dividido em 100 partes, 28 unidades estão pintadas de azul, ou seja, $28/100$, 28%; 0,28 ou $14/50$; 28%; 0,28.

Questão 8

Objetivo: Identificar e escrever frações equivalentes a uma dada fração

Observe o muro das frações:



Usando as cores nele representadas, diga quantos caminhos diferentes é possível utilizar para escrever $\frac{1}{2}$. Explique:

Nesta questão as informações são apresentadas com representação icônica e na forma de fração. A resposta requer uma representação de caminhos com representação equivalente a fração dada $\frac{1}{2}$.

Assim, teremos como possibilidade de respostas $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{6}{12}$; $\frac{12}{24}$.

CATEGORIA 2 - Apresentação não Icônica

OBJETIVO: Investigar por meio de atividades exploratórias textuais ou simbólicas as diferentes representações do número racional não negativo.

Questão 9

Objetivo: Ler e escrever o número na representação decimal e relacionar na representação racional fracionária.

Qual é a representação fracionária do número racional 32,6?

a) $\frac{326}{1000}$

b) $\frac{326}{100}$

c) $\frac{326}{10}$

d) $\frac{32}{5}$

Nesta questão é dada o número racional representado na forma decimal e é pedido que assinale a representação correta represente na forma de fração. A solução vai exigir a leitura e escrita do número dado, fazendo uso de outra representação.

A resposta correta será a letra (c).

Questão 10

Objetivo: Representar na forma de fração o número racional que representa uma dízima periódica.

O número 0,777... é igual a fração:

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{7}{9}$

c) $\frac{777}{1000}$

d) $\frac{3}{7}$

Nesta questão o contexto é eminentemente matemático. É dado o número racional representado na forma decimal (dízima) e é pedido que assinale a representação correta representada na forma de fração. A solução vai exigir a leitura e escrita do número dado, bem como o reconhecimento de que se trata de uma dízima periódica simples e de sua regra de mudança de registro.

A resposta será a letra (b)

Questão 11

Objetivo: Resolver a situação problema fazendo uso de diferentes representações para os números racionais na forma de fração.

Três amigos, João, Pedro e Paulo saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro $\frac{9}{12}$ do caminho e Paulo $\frac{3}{6}$. Qual dos amigos já percorreu 50% do caminho?

Nesta questão, são dados três representações em forma de fração para os caminhos percorridos, e é pedido que a resposta seja dada com base na representação percentual para a metade do caminho. Não são definidas as representações para a resposta.

Como possibilidade de respostas temos:

- a) Ele poderá representar todas as frações na forma decimal e identificar Paulo como aquele que percorre metade do caminho ou 50% deste.
- b) Ele poderá simplificar todas as frações reconhecendo que João e Pedro andam a mesma quantidade, mas é Paulo quem percorre a metade do caminho.
- c) Outro recurso é recorrer a representação icônica fazendo uso da localização na reta.

Questão 12

Objetivo: Escrever números na representação decimal considerando a representação do número racional na forma de fração.

A professora Sônia solicitou a Ana, Beto, Carol e Daniela para representar uma fração na forma de número decimal. Veja o que os quatro alunos escreveram no quadro:

Ana	Beto	Carol	Daniela
$\frac{1}{4} = 0,4$	$\frac{1}{2} = 1,2$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{2}{5} = 0,4$

Identifique o aluno que realizou a representação de forma correta.

Os dados são apresentados na representação de fração e de número decimal. A identificação correta acontecerá por conversão de representação. Para tanto, basta que reconheça a equivalência nos registros de Carol e Daniela.

Questão 13

Objetivo: Recorrer a diferentes representações para representar um número racional, ou seja, fazer a conversão para percentual, fração e decimal.

Preencha os espaços na tabela de acordo com a representação indicada.

Porcentagem	Fração	Decimal
50%		0,5
	$\frac{1}{4}$	
		0,1
1%		
	$\frac{1}{5}$	
5%		
		0,75

Nesta questão, temos um contexto puramente matemático apresentado na forma icônica, fazendo uso da representação decimal, fracionária e percentual. Assim, o aluno deverá recorrer a diferentes representações para representar um mesmo número racional

Como resposta, seguindo a ordem das linhas temos:

L1: **50%**; 50/100 ou 1/2; 0,5 ou 0,50

L2: 25%; **1/4**; 0,25

L3: 10%; 10 / 100 ou 1/10; **0,1**

L4: **1%**; 1/100; 0,01

L5: 20%; **1/5**; 0,2

L6: **5%**; 5/100 ou 1/20; 0,05

L7: 75%; 75/100 ou 3/4; **0,75**

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo descreve a aplicação de uma sequência didática dividida em duas categorias de investigações: Categoria 1 (Representações icônicas) e Categoria 2 (Representações não icônicas). Contém também a análise das respostas dos alunos (Apêndice). O objetivo da primeira categoria é: Investigar por meio de atividades exploratórias e uso de material manipulável para as diferentes representações do número racional não negativo. E na segunda categoria, investigar por meio de exercícios e problemas as diferentes representações do número racional não negativo.

A sequência possui 13 questões, sendo que a questão oito foi desconsiderada pelo fato da impressão sair em preto e branco, quando na sua construção havia referências as cores do muro. Assim, ficamos com 12 questões para análise.

A seguir, será apresentada a análise qualitativa dos resultados baseado nas resoluções das questões e a seguir, apresenta-se a análise das respostas que os sujeitos da pesquisa deram às doze questões. Para compor a **Categoria 1** temos: questões 1; 2; 4; 5; 6 e 7. Para a **Categoria 2**: as questões 3; 9; 10; 11; 12 e 13.

4.1 Análise qualitativa dos resultados

Apresentamos abaixo a análise das respostas que os sujeitos da pesquisa deram às doze questões da sequência.

Categoria 1- Representações icônicas

Questão 1.

Questão 1. Você recebeu três tiras de papel geometricamente iguais. Dobre-as em partes iguais segundo as orientações abaixo:

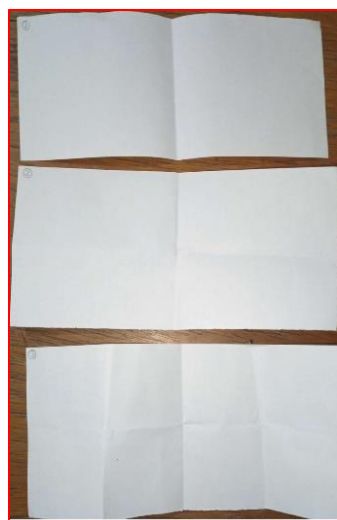
- _ a primeira em duas;
- _ a segunda em quatro;
- _ a terceira em oito.

Agora represente de diferentes formas as partes obtidas.

Resultado da questão 1. Na primeira questão solicitava para escrever a representação fracionária a partir da manipulação do material (três tiras de papel). Analisando os protocolos dos dez alunos, foi possível observar que:

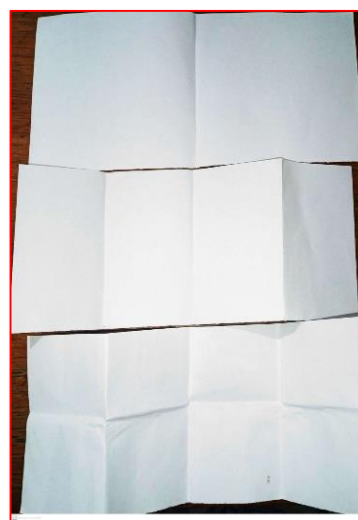
- Quatro alunos não responderam a questão, (dois de cada grupo).
- Quatro responderam corretamente, (dois de cada grupo).

Figura 1 - Imagem Grupo X



Fonte: dados da pesquisa

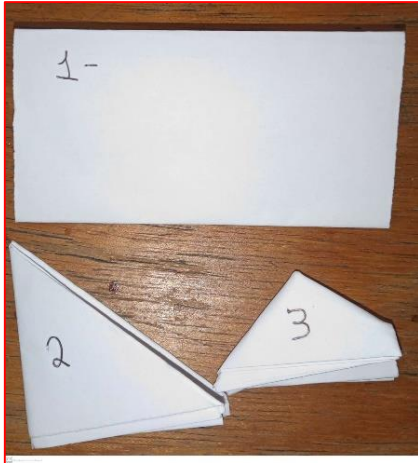
Figura 2 - Imagem Grupo Y



Fonte: dados da pesquisa

- Dois alunos responderam sem revelar entendimento do objeto investigado (fração), sendo um de cada grupo.

Figura 3 - Imagem grupo X



Fonte: dados da pesquisa

Figura 4 - Imagem grupo Y

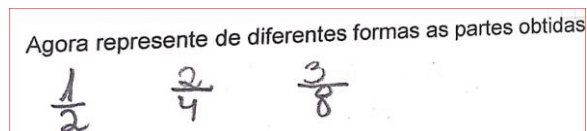


Fonte: dados da pesquisa

Para Ventura (2013, p.63) "as várias representações que o número racional pode assumir, desde que estejam bem compreendidas, podem também auxiliar na resolução de problemas simples" como o apresentado nessa questão. Nesse caso, a concepção parte-todo não foi construída sem o entendimento significado de "inteiro" e "partes" deste.

Um erro que chamou atenção está na Figura 5. Os alunos A e F, pertencentes a grupos distintos, apresentaram suas respostas utilizando a correspondência apresentada no texto, ou seja, para o numerador a equivalência de uma leitura "ordinal" e para o denominador a leitura cardinal, ficando assim representados:

Figura 5 - Resposta do aluno A para à questão 1

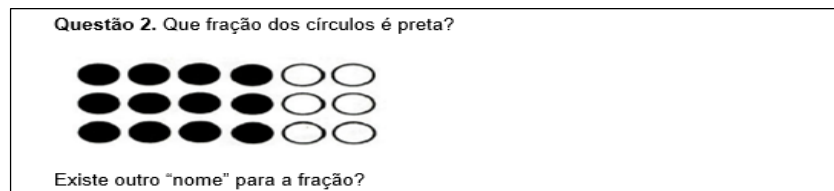


Fonte: dados da pesquisa

A primeira em duas: $\frac{1}{2}$; segunda em quatro: $\frac{2}{4}$; a terceira em oito: $\frac{3}{8}$.

As principais dificuldades apresentadas pelos alunos foram: (i) compreender o enunciado da questão, mais especificamente compreender como dobrariam as tiras em partes iguais, (ii) saber como representar as partes obtidas.

Questão 2

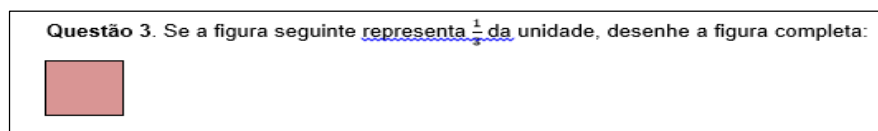


Resultados da questão 2: Na segunda questão, 8 alunos acertaram a representação fracionária, sendo que os estudantes do Grupo X alcançaram os 100% de acertos respondendo $\frac{12}{18}$. Porém, quando perguntado “**existe outro nome para fração?**” encontramos como resposta “números decimais”, “números romanos”, “não aprendi”, “razão” e divisão” o que nos leva a entender que as escritas não fazem referência a representação na forma da fração solicitada pra representar as bolinhas pretas. Desse conjunto, se distancia das diferentes representações para fração, a escrita “romanos”

As representações incorretas também revelam muito dos seus entendimentos, ou seja, encontramos:

- $\frac{6}{12}$, para o qual entendemos ser 6 círculos brancos para o numerador e 12 círculos pretos para o denominador como o inteiro, revelando a fragilidade na concepção do todo em partes de mesma área.

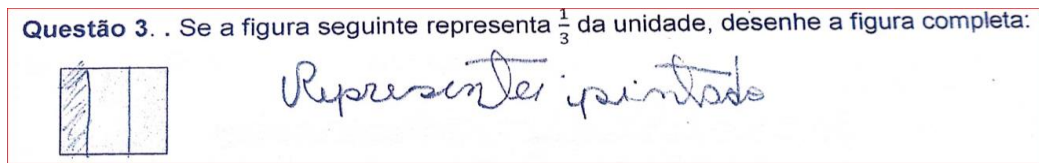
Questão 3



Resultados da questão 3: Ao analisar as respostas, encontramos apenas, duas respostas corretas, representadas por alunos do Grupo Y. Assim podemos inferir que os alunos C e D utilizaram a ideia de reversibilidade, reconhecendo a unidade a partir de suas partes.

Diversos erros foram encontrados nas respostas.

Figura 6 - Resposta do aluno J à questão 3

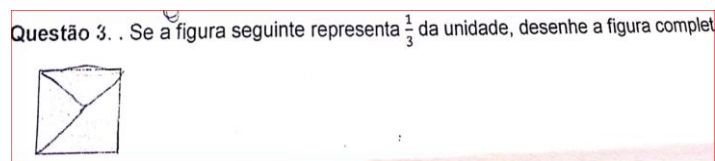


Fonte: Dados da pesquisa

Aqui podemos ver claramente que o aluno J não possui o entendimento da expressão “ $\frac{1}{3}$ da unidade”, isto é, representa a terça parte do inteiro. Daí ele ter assumido, exatamente, a terça-parte como o inteiro e a partir daí representado $\frac{1}{3}$ com a redação “*representei pintado*”.

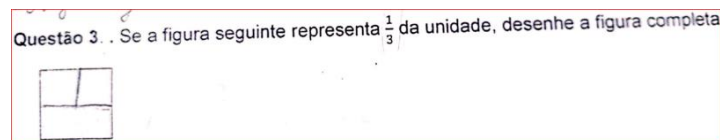
Seguindo essa mesma direção, encontramos outras representações.

Figura 7 - Resposta do aluno B à questão 3



Fonte: Dados da pesquisa

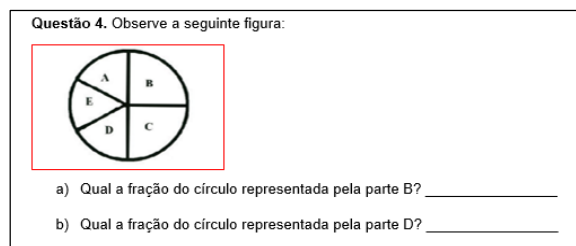
Figura 8 - Resposta do aluno F à questão 3



Fonte: Dados da pesquisa

O destaque nessa resolução, fica por conta do que ele considera inteiro, dividido em partes diferentes.

Questão 4



Resultado da questão 4. Os dados revelam que apenas três alunos (2 do Grupo X e 1 do Grupo Y) conseguiram responder corretamente as duas solicitações, demonstrando assim, facilidade em abstrair das linhas e do fato das partes estarem divididas de forma diferentes.

Os erros, porém se apresentam de modo bem diversificado: Grupo X ($2/5$, $4/5$), Grupo Y ($1,5/5$; $1/5$; $1/4$, $2/5$, $4/5$). Mais podemos reconhecer que a representação, em sua maioria, não considerou que no momentos a) e b) a divisão acontecia em quatro/quarta partes ou sexto/sexta. Desse modo, as representações seguiram a contagem como se esta fosse igualitária.

Questão 5

Questão 5. A figura seguinte representa $\frac{2}{4}$ de uma tira de papel.

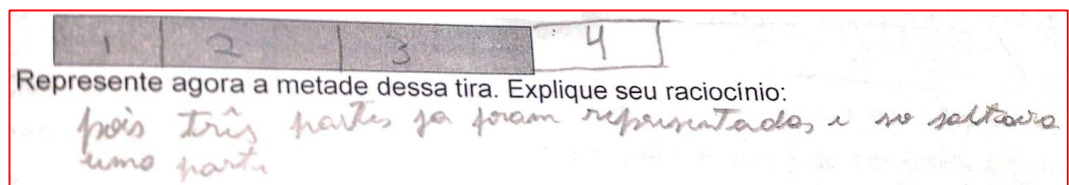


Represente agora a metade dessa tira. Explique seu raciocínio.

Resultados da questão 5. Nesta questão é dada a parte e pedida a construção da unidade, o “todo”. Fazendo uso da concepção parte-todo, a informação se apresenta na forma icônica e em fração e a representação na forma icônica.

O aluno B completa o inteiro e escreve corretamente $2/4$ justificando ser esta a metade, ou seja, as representações de $2/4$ e metade se equivalem. O aluno F só conseguiu fazer a composição do inteiro e ao fazer a numeração, revela o entendimento da função do denominador (Figura 9), porém não conseguiu representar sua metade.

Figura 9: Resposta do aluno F à questão 5



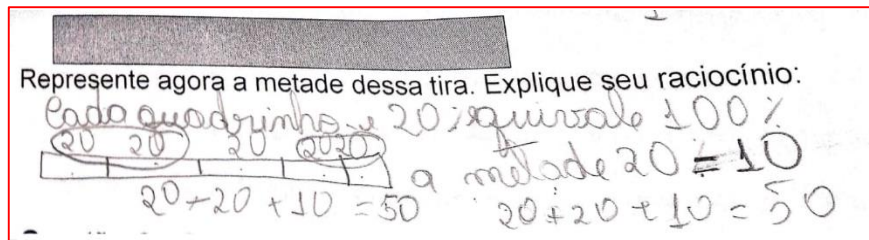
Fonte: dados da pesquisa

Considerando que os demais alunos não responderam corretamente ou deixaram em branco, o erro do aluno A traz a representação icônica dividida ao meio,

ao mesmo tempo que representa a metade de $\frac{3}{4}$ por meio da fração $1,5/2$. O aluno apresenta dificuldades em representar uma fração, já que o numerador e o denominador devem ser números inteiros.

Para o aluno J (Figura 10), a representação icônica correspondia ao inteiro e não a $\frac{3}{4}$, atribuindo a ele, o percentual de 100%. Inicialmente ele divide o “todo” em 4 partes, mas a divisão do 100% para gerar 20%, exige que a divisão aconteça por cinco, então aluno J pega $\frac{1}{4}$ e divide por dois. Desse modo ele obtém 50. Podemos inferir que o processo por ele construído, visava alcançar seu entendimento de que a metade de 100% é 50%.

Figura 10 - Resposta do aluno J à questão 5



Fonte: dados da pesquisa

Questão 6

Questão 6. Se a figura seguinte representa 20% da coleção de bolas de gude de Luís, desenha ao lado a coleção completa de Luís.



Resultados da questão 6: Na sexta questão analisada, tivemos 6 acertos (4 alunos do Grupo Y e 2 do Grupo X) e 1 erro. Os seis compreenderam que 20% representa a quinta parte do todo, e para chegar em 100%, faltavam 80%. Cinco recorreram a representação icônica, desenhando 16 bolinhas, em grupos de 4, cada um com quatro círculos e um desenhou 20 bolinhas, em grupos de 5, cada um com quatro bolinhas, ou seja, reproduziu a imagem cinco vezes. Em cima de cada grupo o aluno colocou 20%. Reconheceram a concepção parte-todo, reconstruindo a partir de uma de suas partes.

Figura 11 - Resposta do aluno B à questão 6

Questão 6. Se a figura seguinte representa 20% da coleção de bolas de gude de Luís, desenha ao lado a coleção completa de Luís.

$20\% \times 5 = 100\%$



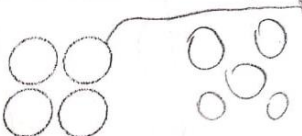
Fonte: dados da pesquisa

O aluno que errou é do Grupo X, não conseguiu reconhecer em 20%, um quinto, ou seja, a quinta parte de 100%. Assim, reconhecer a concepção parte-todo e reconstruir o todo a partir de uma de suas partes, só se revela no registro 25%.

Figura 12 - Resposta do aluno J à questão 6

Questão 6. Se a figura seguinte representa 20% da coleção de bolas de gude de Luís, desenha ao lado a coleção completa de Luís.

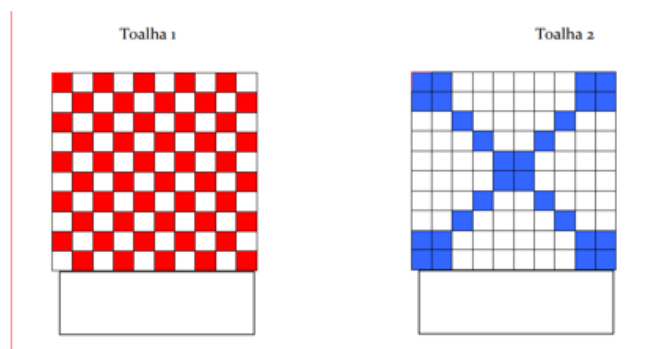
→ aqui é 25% porque é $\frac{4 \times 25}{4 \times 25} = \frac{100}{100}$



Fonte: dados da pesquisa

Questão 7

Questão 7. Se cada figura representa 1 toalha, que parte da toalha está pintada?
Escreva em número decimal, em percentagem e em fração.



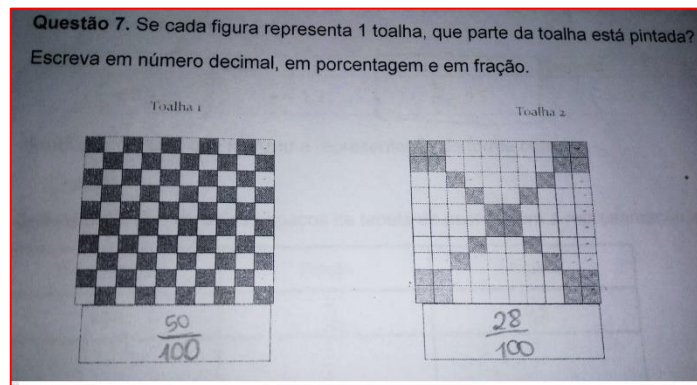
Resultados da questão 7: Na sétima questão o aluno precisava identificar a ideia de fração (parte-todo) em contextos de área, fazendo uso de diferente representações. Para as respostas obtivemos os seguintes registros:

Três alunos erraram, dois do Grupo X e um do Grupo Y. Responderam: Toalha1: 50/50 e Toalha2: 28/72, ou seja, contaram a parte da toalha pintada e a parte

da toalha que não estava pintada. Não possuiu a concepção de parte-todo e consequentemente, não conseguiram, representar a resposta correta.

- Dois alunos responderam somente a representação fracionária nas duas toalhas, e elas estavam corretas (um aluno de cada grupo). (Figura 13)
 - O aluno H do Grupo X, respondeu a representação fracionária e percentual.
 - O aluno J do Grupo X, respondeu a representação fracionária e decimal.
 - O aluno B do Grupo Y, respondeu nas três representações pedida no enunciado, nas duas toalhas, e todas estavam corretas. (Figura 14)
 - O aluno C, do Grupo Y, acertou apenas uma das toalhas.
- Houve um aluno do Grupo Y, que deixou a questão em branco.

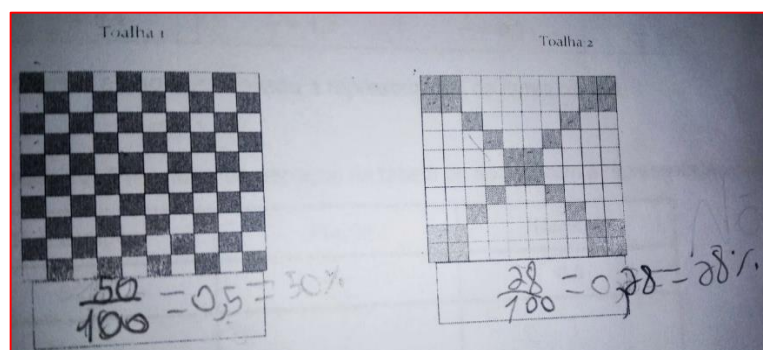
Figura 13 - Resposta do aluno I à questão 7



Fonte: dados da pesquisa

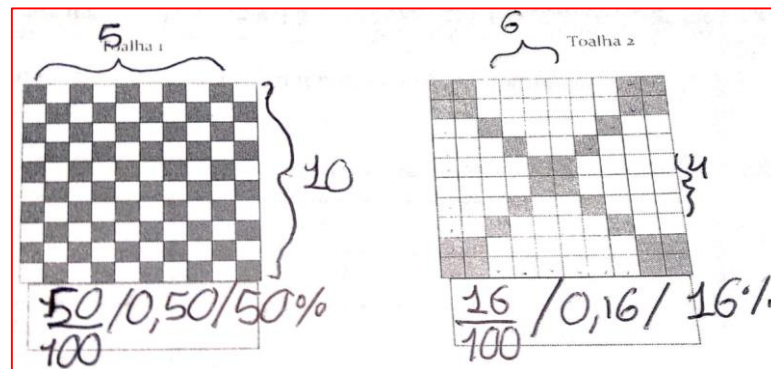
Os erros observados nessa questão é que o aluno não consegue analisar a representação icônica do número racional, e com isso, fazer a representação em outras formas (numeral decimal, fração e porcentagem).

Figura 14- Resposta do aluno B à questão 7



Fonte: dados da pesquisa

Figura 15 - Resposta do aluno C à questão 7



Fonte: dados da pesquisa

Os alunos realmente apresentam dificuldades em transformar uma representação icônica para uma representação fracionária, como aborda o autor (SEVERO, 2008; LIMA, 2013).

Categoria 2- Representações não icônicas

Vamos investigar por meio de atividades exploratórias textuais as diferentes representações do número racional não negativo.

Questão 9

Questão 9. Qual é a representação fracionária do número racional 32,6?

a) $\frac{326}{1000}$

b) $\frac{326}{100}$

c) $\frac{326}{10}$

d) $\frac{32}{5}$

Resultados da questão 9: Ao analisar as respostas, chegamos um total de 6 acertos (três de cada grupo) e 4 erros (dois de cada grupo). Todas as respostas corretas, letra (c) $326/10$, revelam um entendimento entre a leitura do número dado no enunciado, com a conversão do número decimal em fração.

Os quatro erros fazem referência a letra (b) $326/100$, os alunos contaram quantos algarismos tinha no número decimal 32,6 e associaram ao número 100, no denominador.

Figura 16 - Resposta do aluno A à questão 9

Questão 9. Qual é a representação fracionária do número racional 32,6?

a) $\frac{326}{1000}$

b) $\frac{326}{100}$

c) $\frac{326}{10}$

d) $\frac{32}{5}$

Fonte: dados da pesquisa

Em relação a esses erros, Rosa (2007, p.15) afirma, "quando ocorre a situação de uso de dois registros diferentes, aparecem as dificuldades de vincular o mesmo conceito do objeto em questão".

Questão 10

Questão 10. O número 0,777... é igual a fração:

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{7}{9}$

c) $\frac{777}{1000}$

d) $\frac{3}{7}$

Resultados da questão 10: Somente o aluno H acertou a questão, respondendo a letra (b): 7/9, resolvendo por fração geratriz.

Todos os 9 alunos responderam a letra C. Não conseguiram identificar a dízima periódica simples e sua regra de mudança de registro. Contaram quantos algarismos tinham depois da vírgula e associou a quantidade de zeros no denominador.

Figura 17 - Resposta do aluno H à questão 10

Questão 10. O número 0,777... é igual a fração:

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{7}{9}$

c) $\frac{777}{1000}$

d) $\frac{3}{7}$

$$\begin{array}{r} 10x = 7,777... \\ - x = 0,777... \\ \hline 9x = 7 \\ x = \frac{7}{9} \end{array}$$

Fonte: dados da pesquisa

Para os erros, o que parece evidente é o fato deles usarem a mesma regra de transformação de decimal para fração, no caso dízima periódica.

Questão 11

Questão 11. Três amigos, João, Pedro e Paulo saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro, $\frac{9}{12}$ do caminho e Paulo $\frac{3}{6}$. Qual dos amigos já percorreu 50% do caminho?

Resultados da questão 11: Nessa questão, 70% dos alunos acertaram, responderam, Paulo: $\frac{3}{6}$, e justificaram por ser a metade da fração, ou seja, a metade do caminho percorrido. (Três do Grupo X, quatro do Grupo Y)

Dois alunos responderam Pedro: $\frac{9}{12}$. Não possui a concepção de porcentagem, não conseguiu representar todas as frações na forma decimal e encontrar a metade.

O aluno J não respondeu a questão.

Questão 12

Questão 12. A professora Sônia solicitou a Ana, Beto, Carol e Daniela para representar uma fração na forma de número decimal. Veja o que os quatro alunos escreveram no quadro:

Ana	Beto	Carol	Daniela
$\frac{1}{4} = 0,4$	$\frac{1}{2} = 1,2$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{2}{5} = 0,4$

Identifique o aluno que realizou a representação de forma correta.

Resultados da questão 12: A questão 12 é uma questão de correlacionar a representação equivalente ao racional dado, representado por quatro sujeitos. Metade dos alunos erraram (um do Grupo Y e quatro do Grupo X) e, entre os erros, três marcaram a opção Beto = $\frac{1}{2} = 1,2$ (alunos A, F, G). A resposta do aluno A encontra-se na figura X. Os demais apresentaram mais erros do que acertos nas correspondências.

Esse resultado evidencia:

— Que "as múltiplas representações devem ser utilizadas, no contexto sala de aula, para que os alunos possam combinar toda a informação que estas contêm e assim ter um conhecimento mais completo de determinado conceito" (VENTURA, 2013, p.59).

_ Os alunos trocaram o “traço da fração” pela vírgula, reafirmando o que VALERA (2003) diz, em que o aluno tem a convicção de que $\frac{3}{8}$ é igual a 3,8 ao transformar um número fracionário em um número decimal.

Figura 18 - Resposta do aluno A à resposta 12

Questão 12. A professora Sônia solicitou a Ana, Beto, Carol e Daniela para representar uma fração na forma de número decimal. Veja o que os quatro alunos escreveram no quadro:

Ana	Beto	Carol	Daniela
$\frac{1}{4} = 0,4$	$\frac{1}{2} = 1,2$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{2}{5} = 0,4$

Identifique o aluno que realizou a representação de forma correta.

Beto

Fonte: dados da pesquisa

Questão 13

Questão 13. Preencha os espaços na tabela de acordo com a representação indicada.

Porcentagem	Fração	Decimal
50%		0,5
	$\frac{1}{4}$	
		0,1
1%		
	$\frac{1}{5}$	
5%		
		0,75

Apresentaremos na tabela abaixo, as respostas produzidas pelos alunos:

Tabela 2 – Respostas encontrados na questão 13

	Porcentagem	Fração	Decimal
L1	50%	5/100; 1 / 2 ; 50/100; 1/5	0,5
L2	25%. 40%, 14%, 20%	$\frac{1}{4}$	0,25; 1,4; 0,4
L3	1%, 10%, 100%	1/1 , 1/10, 10/100, 1/100	0,1
L4	1%	1/100, 1/10	0,01; 0,1
L5	20%, 50%, 15%, 25%	$\frac{1}{5}$	0,20 ; 0,5; 1,5
L6	5%	5/100, 1/20 , 1 / 3	0,5; 0,05
L7	75%	75/100 , 3/ 4, 7/5, 75/1000	0,75

Fonte: dados da pesquisa

Resultados da questão 13: Analisando essa questão, percebemos os erros:

- Novamente o erro citado por (VALERA, 2003), onde os alunos trocaram o “traço da fração” pela vírgula quando da representação em decimal; ($\frac{1}{4}$ **por 1,4**), ($\frac{1}{5}$ **por 1,5**)
- Regra do numerador – o aluno substitui o símbolo “%” por uma vírgula à esquerda do número (**1% por 0,1**), (**5% por 0,5**). (PARKER E LEINHARDT, 1995);
- O aluno muitas vezes não reconhece, por exemplo: **0,75** como outro representante de número racional $\frac{3}{4}$. (MARANHÃO E IGLIORI, 2003).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aprendizagem que envolve os números racionais permeia todo o processo de ensino e aprendizagem de matemática, tendo início na Educação Básica. Apesar de estar presente em cada segmento de estudo, reconhecemos que se trata de um conteúdo que não é fácil de ser ensinado. Isto vai exigir do professor, uma busca por instrumentos pedagógicos de intervenção na busca de soluções para minimizar as dificuldades.

O objetivo dessa pesquisa era investigar os saberes que os estudantes do 9º ano revelam sobre as diferentes representações do número racional não negativo (fração, decimal e porcentagem), e analisar as dificuldades encontradas. Diante dos dados analisados e da revisão da literatura, encontramos diversos erros e dificuldades em relação a essa aprendizagem, que já são abordadas a bastante tempo.

A pesquisa procurou analisar uma sequência didática contendo 12 questões, a serem aplicadas em alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II. Com vistas em observar os erros cometidos pelos alunos, procurou-se trazer, uma sequência de atividades explorando diferentes registros sobre o número racional, entendendo que o conhecimento de um único registro não garante ao aluno o entendimento adequado do conceito que está sendo abordado. Em uma sala de aula, para que a aprendizagem tenha significado, é necessário desenvolver uma variedade de representações internas ajustadas, e que se relacionem entre si, pois percebemos que as dificuldades dos alunos com os números racionais aumentam quando é solicitado a troca de registro ou o uso de dois registros simultaneamente.

Percebemos também que, apresentam dificuldades em relacionar a parte com o todo de uma fração. A partir dos resultados obtidos, por meio das análises realizadas, a conclusão é que, os estudantes sentem dificuldade para reconhecer e produzir diferentes representações para um mesmo número racional. Nesse contexto, as dificuldades permanecem quando a conversão acontece tanto da forma de fração para forma decimal ou também quando consideramos a forma percentual, ao fazer uso das representações icônicas prevalece a concepção parte-todo, apresentada na forma tradicional das barras horizontais. A reversibilidade para a composição do inteiro revelou a falta de entendimento por parte do aluno, precisando ser mais trabalhada. Então, considerando as dificuldades que cercam o processo de ensino-aprendizagem dos números racionais, com ênfase nas suas diferentes

representações, os docentes precisam valorizar e explorar com mais intensidade, as diferentes representações de número racional, e sobretudo, vincular-se, entre elas. (Poste t al., 1989,1993).

Espera-se que o trabalho contribua para estudos sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais.

REFERÊNCIAS

- BEHR, M., LESH, R., POST, T., & SILVER, E. (1983). **Rational number concepts**. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.
- BEZERRA, F. J. *Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações: uma abordagem criativa para a sala de aula*, 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.
- BIANCHINI, B. L. **Estudo sobre a aplicação de uma sequência didática para o ensino dos números decimais**. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Características da investigação qualitativa**. In: *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.
- BOURBAKI, N. **Elements de Mathématique**: Algebre. Reimpresso como *Elements of mathematics: Algebra I*. Berlin, Alemanha: Springer, 1998.
- BOYER, C. B. **História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide**. São Paulo: Edgarg Blucher, 1974.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, Ministério da Educação, 1997.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5 a 8 a séries)**. Brasília, DF, 1998, p.101.
- CAJORI, F. **A History of Mathematical Notations**. New York: Two klumes Bound As One, 1993.
- CARVALHO, A. M. S. **O desenvolvimento do conceito de número racional em alunos do 4º ano de escolaridade**. 2005. 137 f. Dissertação (Mestrado) — FCUL, Lisboa, 2005.
- CATTO, G. G. **Registros de Representação e o Número Racional: Uma abordagem nos livros didáticos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2000.
- DUVAL, R. (Ed.). **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. 2003.
- DUVAL, R. **Semióses e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Livraria da física, 2009.
- EZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. (6º Ano).

GARCIA, M^a Victoria Sanches. **Dificuldades específicas em el aprendizaje de las fracciones**. Estudio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. Ministerio de Education, Cultura y Desporte. 2003, p. 10-27.

GIL, J. da S. **Uma Abordagem Lúdica para as Diferentes Representações do Número Racional Positivo**. 2012. 164 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2008.

GODINO, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Cid, E., Batanero, C., & Font, V. (2004). **Didáctica de la matemática para maestros**. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada.

GOLDIN, G. A. (2003). **Representation in school mathematics: A unifying research perspective**. In: J. Kilpatrick, W. G Martin e D. Scheifter (Eds), A research companion to principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM, p. 275-285.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; SILVA, Carmem Kaiber da; MORA, Castor David. **Perspectivas em Educação Matemática**. Acta Scientiae, Canoas, v. 6, n. 1, p.37 - 55, jan. /jun. 2004.

KIEREN, T. **Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária**. (BRASIL, 1997, p. 59).

LIMA, F. S. **Números Racionais na forma Fracionária: Atividades para Superar Dificuldades de Aprendizagem**. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. 2013.

MARANHAO, M. C.; IGLIORI, S. B. **Registros de representação e números racionais**. in: Machado, s. d. a. aprendizagem em matemática - registros de representação semiótica. p. 57–70, 2003. São Paulo: Papirus.

MCLINTOSH, A., REYS, B. J., & REYS, R. E. **A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics**. 1992.

MERLINI, V.L. et. al. **Fração: o significado quociente para professores e estudantes** – um estudo comparativo. In: V CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CIBEM. Lisboa: 2005.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. **Desenvolvendo o sentido do número racional**. Lisboa: APM, 2007.

MONTEIRO, C., PINTO, H. (2005). **A aprendizagem dos números racionais**. Quadrante, 14(1), 89-108.

MOUTINHO, L.V. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 4^a e 8^a séries do Ensino Fundamental. Dissertação a ser defendida (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

- NASCIMENTO, Juliane do. **Perspectivas para aprendizagem e ensino dos números racionais**. São Paulo, Revista de Iniciação Científica da FFC, v. 8, n.2, p. 198, 2008. Disponível em: <<http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/viewFile/212/188>>. Acesso em 08 dez. 2021.
- NEVES, E. B.; DOMINGUES, C. A. **Manual de metodologia da pesquisa científica**. Rio de Janeiro - RJ, 2007.
- NCTM (2007). **Princípios e normas para a Matemática escolar**. Lisboa: APM.
- NUNES; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médias, 1996.
- OLIVEIRA, Raquel Gomes. Aprendizagem de frações: uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5ª série do 1º grau. Campinas, SP: [s.n], 1996.
- OLIVEIRA, J. N.; ARAMAN, E. M. O. **Dificuldades na Aprendizagem dos Números Racionais**. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 13, 2015. Ponta Grossa/Paraná. Anais: Ponta Grossa: XIII EPREM, 2015.
- ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S. G. **As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas**. Bolema, Rio Claro, ano 21, nº 31, p.79-102, 2008.
- ORTON, R., POST, T., BEHR, M. (1995). **Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning**. Hiroshima Journal of Mathematics Education, p. 63-75.
- PARKER, M.; LEINHARDT, G. **Percent: a privileged proportion**. Review of Educational Research, v. 65, n. 4, p. 421 – 481, 1995. Washington: American Educational Research Association.
- PONTE, J. P. (2005). **Gestão curricular em Matemática**. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- PONTE, J. P. (2002). **Investigar a nossa própria prática**. In GTI (Ed.), Refletir e investigar sobre a prática profissional (pp. 5-28). Lisboa: APM.
- QUARESMA, M.; PONTE, J. P. **Compreensão dos Números Racionais, Comparação e Ordenação: O caso de Leonor**. Interações. n.20. p.37-69. 2012.
- ROMANATTO, M. C. **Número Racional: Relações Necessárias a sua Compreensão**. 1997. 169 f. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1997.
- ROSA, R. R. da. **Dificuldades na compreensão e na formação de conceitos de números racionais: uma proposta de solução**. 2007. 87 f. Dissertação (Mestrado)

— Faculdade de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 54.

SAEB 2001. **Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica**. Brasília, 2002.

SANTANA, L. E. de L. **Os saberes conceituais e didáticos de pedagogos em formação inicial, acerca de fração**. 2012. Dissertação. (Mestrado Acadêmico em Educação). Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2012.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. Dissertação a ser defendida (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SEVERO, D. F. **Números Racionais e Ensino Médio**: Uma busca de Significados. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

SILVA, M. J. F. da. **Sobre a Introdução do Conceito de Número Fracionário**. 1997. 245 f. Dissertação (Mestrado) — PUC, São Paulo, 1997.

SOUZA, S. S. S. de. **Erros em Matemática Um Estudo Diagnóstico com alunos de 6ª série do Ensino Fundamental**. 2002. 193 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Marília, 2002.

VALERA, A. R. **Uso social e Escolar dos Números Racionais: Representação fracionária e decimal**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Marília. 2003.

VENTURA, H. M. G. L. **A Aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações**: uma experiências de ensino no 2 o ciclo do ensino básico. 2013. 386 f. Tese (Doutorado) — Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics concepts and processes**. New York; Academic Press Inc. 1983, p. 127-174.

ANEXOS

ANEXO A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA APLICADA



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET

CAMPUS II – ALAGOINHAS / COLEGIADO DE MATEMÁTICA

ALUNO(A) _____

REPRESENTAÇÃO DE NÚMERO RACIONAL NÃO NEGATIVO

Questão 1. Você recebeu três tiras de papel geometricamente iguais. Dobre-as em partes iguais segundo as orientações abaixo:

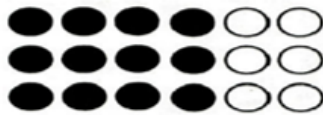
_ a primeira em duas;

_ a segunda em quatro;

_ a terceira em oito.

Agora represente de diferentes formas as partes obtidas.

Questão 2. Que fração dos círculos é preta?

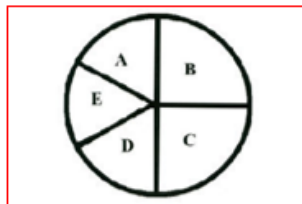


Existe outro “nome” para a fração?

Questão 3. Se a figura seguinte representa $\frac{1}{2}$ da unidade, desenhe a figura completa:



Questão 4. Observe a seguinte figura:



Questão 5. A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.



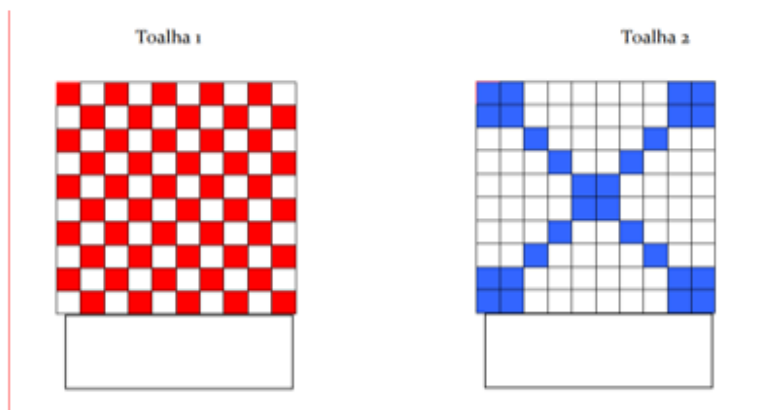
Represente agora a metade dessa tira. Explique seu raciocínio.

Questão 6. Se a figura seguinte representa 20% da coleção de bolas de gude de Luís, desenhe ao lado a coleção completa de Luís.



Questão 7. Se cada figura representa 1 toalha, que parte da toalha está pintada?

Escreva em número decimal, em porcentagem e em fração.



Questão 8. Observe o muro das frações:



Usando as cores nele representadas, diga quantos caminhos diferentes é possível utilizar para escrever $\frac{1}{2}$. Explique:

Questão 9. Qual é a representação fracionária do número racional 32,6?

a) $\frac{326}{1000}$

b) $\frac{326}{100}$

c) $\frac{326}{10}$

d) $\frac{32}{5}$

Questão 10. O número 0,777... é igual a fração:

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{7}{9}$

c) $\frac{777}{1000}$

d) $\frac{3}{7}$

Questão 11. Três amigos, João, Pedro e Paulo saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro, $\frac{9}{12}$ do caminho e Paulo $\frac{3}{6}$. Qual dos amigos já percorreu 50% do caminho?

Questão 12. A professora Sônia solicitou a Ana, Beto, Carol e Daniela para representar uma fração na forma de número decimal. Veja o que os quatro alunos escreveram no quadro:

Ana	Beto	Carol	Daniela
$\frac{1}{4} = 0,4$	$\frac{1}{2} = 1,2$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{2}{5} = 0,4$

Identifique o aluno que realizou a representação de forma correta.

Questão 13. Preencha os espaços na tabela de acordo com a representação indicada.



Porcentagem	Fração	Decimal
50%		0,5
	$\frac{1}{4}$	
		0,1
1%		
	$\frac{1}{5}$	
5%		
		0,75