UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS HUMANAS – CAMPUS IX
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Hian Melo de Aragão

TRIGONOMETRIA APLICADA EM MÁQUINAS SIMPLES: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

Barreiras – BA
2022

Hian Melo de Aragão

TRIGONOMETRIA APLICADA EM MÁQUINAS SIMPLES: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Ciências Humanas, Campus IX, da Universidade do Estado da Bahia - UNEB, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Ma. Keila Lopes Viana Novais

Barreiras – BA

2022

FICHA CATALOGRÁFICA

Sistema de Bibliotecas da UNEB

A659t Aragão, Hian Melo de

Trigonometria aplicada em máquinas simples: uma abordagem interdisciplinar / Hian Melo de Aragão. - Barreiras, 2022.

102 fls.

Orientador(a): Profª Ma. Keila Lopes Viana Novais.

Inclui Referências

TCC (Graduação - Matemática) - Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Humanas. Campus IX. 2022.

1.Interdisciplinaridade. 2.Trigonometria. 3.Ensino - aprendizagem. 4.Matemática. 5.Física.

CDD: 511

Hian Melo de Aragão

TRIGONOMETRIA APLICADA EM MÁQUINAS SIMPLES: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia, como requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Colegiado de Matemática.

Barreiras, 12 de julho de 2022.

Banca Examinadora:

Keila Lopes Viana Novais
____
Prof.(a) Ma. Keila Lopes Viana Novais
Orientador(a):
Instituição: Universidade do Estado da Bahia

Charlâni F. Batista Rafael
____
Prof.(a) Dra. Charlâni Ferreira Bastista Rafael
Avaliador(a)
Instituição: Universidade do Estado da Bahia

Pedro Dias Pinto
____
Prof.(a) Dr. Pedro Dias Pinto
Avaliador(a)
Instituição: Universidade Federal do Oeste da Bahia

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus avós, Margarida Boaventura de Aragão e Valdomiro Nascimento de Aragão, que me educaram e guiaram pelos melhores caminhos; a minha noiva, meu amor, pelo companheirismo e incentivo aos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pelo dom da vida, pela sua proteção e por toda força concedida para enfrentar as barreiras e dificuldades presentes na trajetória acadêmica.

Aos meus avós Margarida Boaventura de Aragão e Valdomiro Nascimento de Aragão (em memória), por todo amor e carinho dedicado à minha criação, por terem acreditado nos meus sonhos e pelo incentivo para alcançá-los.

A minha querida noiva, Eliene Pereira da Silva Santos, pela amizade, amor, por todo cuidado, carinho e consideração.

Aos meus colegas de curso, em especial os amigos Anderson Ribeiro de Souza e Jéssica dos Santos Sampaio, pelos grupos de estudos semanais na UNEB, pelas trocas de conhecimentos e experiências.

Aos professores do curso por todos os ensinamentos, particularmente a minha orientadora, Professora Keila Lopes Viana Novais, sempre solícita e atenciosa, com sua simplicidade e sabedoria, muito contribuiu para realização deste trabalho.

A Universidade do Estado da Bahia, Campus IX, instituição pioneira na formação de Professores de Matemática na região oeste da Bahia.

A todos que de alguma forma contribuíram para a minha formação e concretização desse sonho.

.

"Quanto mais aprendemos de forma interdisciplinar, melhor compreendemos as coisas. Einstein lia muita filosofia; Kant, Milton e Borges foram muito influenciados pela física... Manter a educação separada nos faz mais ignorantes"

Carlo Rovelli

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo geral investigar se as aplicações de Trigonometria em Máquinas Simples contribuem para a aprendizagem de Trigonometria, através de uma abordagem interdisciplinar. Para tal, o estudo foi desenvolvido com os discentes da turma de 3º ano de uma instituição de ensino pertencente a rede estadual da Bahia, localizada no munícipio de Barreiras, surge como uma proposta perante as dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos estudantes de Trigonometria. A metodologia empregada no desenvolvimento dessa pesquisa caracteriza-se, no tocante aos objetivos, como exploratória e descritiva. Quanto ao procedimento técnico, foi escolhido como de qualitativa-quantitativa. Os instrumentos de coleta de dados foram dois formulários com questões fechadas e situações-problemas, e entrevistas realizadas juntos aos professores de Matemática e Física da turma, nas quais expressaram as suas opiniões e possibilidades sobre a interdisciplinaridades e o seu papel que influencia para a aprendizagem. No que se refere aos resultados, observou-se que os discentes tiveram um bom desempenho frente aos problemas propostos, além disso, assinalaram as contribuições significativas da aula ministrada sob a perspectiva interdisciplinar, realizada no período da coleta dos dados. Diante disso, constatou-se, concomitantemente, a importância da interdisciplinaridade no processo de ensino-aprendizagem de Matemática e Física por meio dos conteúdos trabalhados.

Palavras-chave: Interdisciplinaridade. Trigonometria. Máquinas Simples. Ensino-Aprendizagem.

ABSTRACT

The present work had as general objective to investigate how the applications of Trigonometry in Simple Machines contribute to the learning of Trigonometry, through an interdisciplinary approach. To this end, the study was developed with the students of the 3rd year class of an educational institution belonging to the state network of Bahia, located in the municipality of Barreiras, it appears as a proposal in the face of the learning difficulties faced by students of Trigonometry. The methodology used in the development of this research is characterized, in terms of objectives, as exploraty and descriptive. As for the technical procedure, it was chosen as qualitative-quantitative. The data collection instruments were two forms with closed questions and problem-situations, and interviews carried out with the Mathematics and Physics teachers of the class, in which they expressed their opinions and possibilities about interdisciplinarity and the role it influences for learning. Regarding results, it was observed that the students had a good performance in the face the proposed problems, in addition, they pointed out the significant contributions of the class taught under the interdisciplinary perspective, carried out during the period of data collection. In view of this, it was verified, concomitantly, the importance of interdisciplinarity in the teaching-learning process of Mathematics and Physics through contents worked.

Keywords: Interdisciplinarity; Trigonometry; Simple Machines; Teaching-Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Costumam dizer que a Matemática é a rainha de todas as ciências, outros dizem que é a Filosofia, o que há de fato são discordâncias a quem pertence esse trono. A história nos revela que o estudo da Matemática perpassa séculos, há relatos que ela surgiu no antigo Egito e no Império Babilônico. No entanto, na pré-história os conceitos de contagem e medidas já eram utilizados. Com o passar do tempo o conhecimento matemático evoluiu e se tornou indispensável para a humanidade e para diferentes ciências, como traz Pinheiro (2003).

Nesse contexto, tem-se a Física como ciência experimental que utiliza dos conceitos dos matemáticos para explicar fenômenos da natureza, desempenhando assim, um papel imprescindível para as nossas vidas. É difícil imaginar o mundo sem conhecimento físico e matemático. Como seria compreender o panorama grandioso e complexo da unidade universal da Natureza? Algo enigmático.

A Física é a ciência do estudo da natureza que se utiliza de experimentos, observações e teorias para explicar fenômenos naturais e faz isso por meio de conceitos matemáticos. Já a Matemática é a filosofia que explica o mundo pelos números como diria Galileu Galilei (1564-1642), diferente da Física, não é experimental, é abstrata, senão, como materializar, por exemplo, o princípio de indução finita da estrutura algébrica?

Dissociar essas ciências é praticamente impossível, isso vale ou pelo menos deveria valer também para o ambiente escolar. Sabe-se dos déficits na aprendizagem de Física e Matemática em boa parte das escolas de ensino médio do Brasil, como aponta o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, realidade que se deve a vários fatores, entre eles, a falta de profissionais capacitados para lecionar essas disciplinas e a abordagem tradicional dos conteúdos, aquela na qual o assunto é apresentado de forma muito abstrata, sem revelar as ligações com o cotidiano, com a vida do estudante, com as outras disciplinas, tornando o conhecimento, por vezes, apenas teórico e distante.

Diante da relação existente entre as duas ciências - Matemática e Física - e a possibilidade de reverter ou amenizar os déficits na aprendizagem, foi proposto à realização de uma pesquisa explorando a interdisciplinaridade entre as duas áreas de conhecimento, tratando especificamente das aplicações de Trigonometria nas Máquinas Simples, e como essa abordagem pode resultar em melhores índices de aprendizagem de Trigonometria.

Sendo assim, através de uma abordagem interdisciplinar dos conteúdos em questão com estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Barreiras

– BA essa pesquisa foi desenvolvida. Neste trabalho, busca-se responder de forma factual a importância da interdisciplinaridade para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, tratando, essencialmente, tal relevância com base nas aplicações de Trigonometria nas Máquinas Simples. Sendo assim, teve a seguinte problematização: como as aplicações de Trigonometria em Máquinas Simples podem contribuir para a aprendizagem de Trigonometria?

Com isso, pretendeu-se realizar uma investigação sobre a importância da interdisciplinaridade entre a Física e a Matemática durante a realização de atividades em sala de aula, estabelecendo relações entre as duas áreas de conhecimento, além de observar a percepção dos estudantes sobre a relação entre as Máquinas Simples e o conteúdo de Trigonometria. Além de propor a resolução de questões sobre as Máquinas Simples em sala, a fim de observar como os estudantes manipulam os conceitos matemáticos para alcançar resultados corretos, mas antes, discutir e apresentar as raízes da Trigonometria e as suas aplicações nas Máquinas Simples.

Diferentes são as aplicações da Matemática na Física, exemplo disso é a Trigonometria no conteúdo das Máquinas Simples. É válido citar ainda o uso desses conhecimentos no estudo de composição e decomposição de vetores. A ligação existe, inclusive, no processo de aprendizagem, como trazem Karam e Pietrocola (2009), ao explicarem sobre a importância de ensinar aos alunos a pensarem matematicamente ao se depararem com problemas de Física. Do mesmo modo, os estudantes manipulam os conhecimentos de Trigonometria ao resolverem problemas de Máquinas Simples, apresentando-se aí um caráter interdisciplinar, o que demanda um trabalho conjunto dos professores dessas disciplinas.

O trabalho dos conceitos trigonométricos que se aplicam nas Máquinas Simples através de uma abordagem interdisciplinar pode contribuir na aprendizagem de Trigonometria, visto que, é um conteúdo pouco explorado nessa perspectiva. Desse modo, acreditamos que a interdisciplinaridade entre esses componentes curriculares pode ajudar os participes do processo de ensino-aprendizagem a reverterem o notório quadro de problemas na aprendizagem de Trigonometria. Ao longo do trabalho, buscaremos explanar o valor do diálogo entre essas áreas em ambiente escolar, além de apresentar as discussões sobre as aplicações do conteúdo de Trigonometria nas Máquinas Simples e se elas podem auxiliar na construção do conhecimento do mesmo.

Para a ilustração do desenvolvimento desse trabalho e para descrição da sua elaboração, foi adotada a divisão em seis capítulos, apresentando-se no primeiro a história da Trigonometria, no segundo a parte conceitual da Trigonometria que será utilizada no estudo das Máquinas Simples, já o terceiro, trata das aplicações da Trigonometria nas Máquinas Simples, o quarto dispõe sobre a interdisciplinaridade e sua relevância para o estudo das áreas de Matemática e Física, o quinto apresenta a metodologia desta pesquisa, o último, por sua vez, traz os resultados e discussões do trabalho.

1. ABORDAGEM HISTÓRICA DA TRIGONOMETRIA

1.1. AS RAÍZES DA TRIGONOMETRIA

Nesta seção é apresentada a história da Trigonometria em diferentes lugares do mundo, do Egito à Europa, o seu surgimento e desenvolvimento ao longo dos séculos, os principais feitos, fatos e nomes de cada período histórico. Compreender sobre as origens desse campo da Matemática é, para o início, o objetivo central, para que dessa forma seja possível dimensionar a magnitude da importância de sua aprendizagem por meio de suas aplicações nas Máquinas Simples, posteriormente, é esclarecido como essa abordagem pode resultar num ensino mais atrativo.

1.1.1. TRIGONOMETRIA NO EGITO

A Matemática de hoje não se manifesta pronta e nem sempre foi tão avançada como atualmente. De outro modo, patenteou-se ao longo dos séculos, graças aos estudos na área, que resultaram em grandes descobertas. A saber, investigações como as de John Napier (1550-1617) sobre logaritmos e o seu proveito na Astronomia; ou sobre o famoso teorema matemático, do Grego sobre Pitágoras de Samos (582 - 497 a. C), relação que tem diferentes utilidades, inclusive na própria Matemática. Portanto, o saber matemático desenvolveu-se, aprimorou-se, a exemplo das teorias de Napier e Pitágoras que podem ser consideradas recentes, no entanto, com muitas aplicações. Ou seja, nos primórdios não havia esse conhecimento matemático. A evidência disso é que as noções de número se revelaram das necessidades de contagem dos homens como destaca Eves:

> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50 000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também

> contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda (EVES, 2011, p. 25).

Desse modo, percebe-se que a evolução da humanidade foi acompanhada pela Matemática. Com a Trigonometria, o ramo matemático pertencente à Geometria Plana que estuda as relações existentes entre os diferentes elementos das figuras geométricas, especialmente ângulos e lados de triângulos, não foi diferente, sua construção e aprimoramento ocorreram de forma gradual no tempo e vinculada ao contexto histórico-social de cada local. Porém, o seu princípio está rodeado de muitos mistérios, até mesmo sua origem, os lugares, os responsáveis pelos primeiros passos, o que é sabido é que a sua construção é fruto de diferentes civilizações.

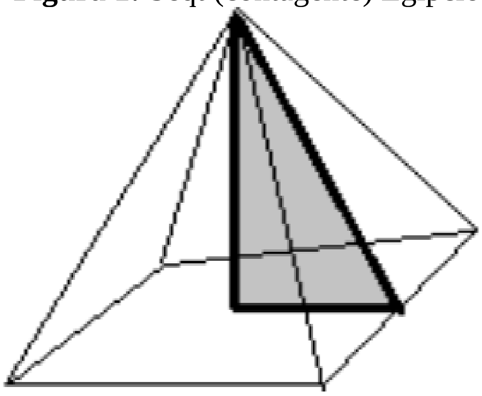
De acordo com Silva (2014, p. 32) é possível afirmar que "o início do desenvolvimento da Trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a. C., com os egípcios e babilônios". Em outras palavras, algumas necessidades de setores importantes ligados à ciência e à economia fizeram com que a Trigonometria evoluísse. Para compreender melhor a história e discussões acerca do tema faz-se fundamental apresentar o significado da palavra Trigonometria, segundo (PEREIRA, 2013, p. 2 apud BRUMMELEN, 2009, p. 9) "A própria palavra, que significa 'medição de triângulo', fornece pouca ajuda: é um termo muito antigo, do século XVI, e a trigonometria medieval utilizava círculos e seus arcos ao invés de triângulos, como seus valores de referência".

Leite (2016, p. 9) aponta o que seria os primórdios da Trigonometria no Egito "Indícios da Trigonometria são encontrados em um dos documentos históricos mais importantes da matemática: o Papiro de Rhind[1]". Segundo ela, nesse documento os egípcios fazem referência ao seqt (cotangente) de um ângulo, ou a inclinação das paredes de uma pirâmide, ideia que se manifestou em razão da construção de pirâmides. Observe na figura abaixo:

---

[1] Papiro de Rhind ou papiro de Amósis é um documento egípcio de cerca de 1 650 a.C., onde um escriba de nome Amósis detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria.

Figura 1: Seqt (contagente) Egípcio.



Fonte: Leite (2016, p. 9).

Os egípcios desenvolveram ainda o primeiro relógio do sol[2], produção que se deve a dedicação ao estudo de Geometria e Trigonometria. Sobre a criação da Geometria Elementar, empregada no cálculo de áreas e volume de figuras planas, Silva (2014) atribui a essa civilização a sua concepção e os primeiros passos da Trigonometria através da criação de cordas usadas amplamente na medição de terras, já que havia uma indispensabilidade desses conhecimentos por alguns motivos, entre eles as cheias dos rios e conflitos com propriedades vizinhas.

Outro fato prestigioso dos egípcios para esse tempo foi o uso em diversas áreas da afirmativa do que mais tarde viria a ser conhecido como teorema de Pitágoras. A Matemática egípcia era avançada para o período, mas Eves (2011) destaca que pelo fato de o Egito estar distante de uma pujança econômica, a Matemática Babilônia esteve primordialmente à frente:

> Contrariamente à opinião popular, a matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica. Esse fato pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado da Babilônia. A Babilônia localizava-se numa região que era rota de grandes caravanas, ao passo que o Egito se manteve em semi-isolamento (EVES, 2011. p. 67).

Eves (2011) traça os principais acontecimentos relacionados à Trigonometria no Egito antigo. Primeiramente cita a grande pirâmide de Gizé, construída por volta de 2600 a.C., a maior das três situadas no deserto de Gizé. Em 1850 a.C. os egípcios criam o primeiro instrumento astronômico que é caracterizado por ser um misto de fio de prumo e colimador,

[2] O relógio do sol é um relógio que indica as horas conforme a projeção da luz solar, ou seja, é um dispositivo que não depende de trabalho mecânico. A necessidade de medir o tempo incentivou a invenção de formas que servissem para que as pessoas pudessem se orientar temporalmente.

no mesmo período surge o papiro de Moscou ou Golenischev[3], texto matemático que trouxe entre os cálculos, aplicações dos conceitos de cotangente do ângulo diedro entre a base e uma face da pirâmide.

1.1.2. TRIGONOMETRIA NA BABILÔNIA

Diante das discussões acerca da história da Trigonometria no Egito, faz-se necessário uma reflexão histórica sobre o papel de outras civilizações na construção do conhecimento trigonométrico, caso da babilônica. Segundo Silva (2014, p. 33) o interesse do povo babilônio pelo assunto surgiu devido à “astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio, a esses fatos acrescentamos que não há registros de que babilônios e nem egípcios usaram em seus cálculos uma medida para ângulos”. Oliveira (2010, p. 5) explica que “descobertas fascinantes contribuíram para o desenvolvimento da Arquitetura, da Navegação, da Astronomia e da Geografia, mas foi o interesse pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria.”. Pelo fato de estarem extremamente ligados a Astronomia, ao realizarem observações do tempo, construíram um calendário astrológico, dessa forma mediam os meses de acordo com as fases lunares e os anos de acordo com a posição do sol. Alguns autores explicam que a Babilônia foi de fato o berço da Trigonometria, a exemplo Oliveira e Abdounur (2020) justificam que essa afirmativa se deve às suas aplicações na Astronomia.

O principal feito desse povo, segundo os mesmos autores, foi dividir a circunferência em 360 partes, talvez isso tenha acontecido pela proximidade com a quantidade de dias do ano e por 360 ser um múltiplo de 60, esse acontecimento influenciou os gregos a adotarem tal divisão e aprofundarem-se nos estudos da circunferência. Sobre as investigações matemáticas na Mesopotâmia Eves (2011) afirma que possivelmente os resultados no desenvolvimento da Trigonometria esférica são feitos da civilização babilônica e complementa dizendo que “os astrónomos babilónicos dos séculos IV e V a.C. acumularam uma massa considerável de dados de observações e hoje se sabe que grande parte desse material passou para os gregos. Foi essa astronomia primitiva que deu origem à trigonometria esférica” (EVES, 2011, p. 202).

[3] O Papiro de Moscou ou Papiro de Moscovo também conhecido como Papiro Golonishev em referência ao seu proprietário Vladimir Golenishchev é um papiro egípcio em forma de uma estreita tira de 5,5m de comprimento por 8 cm de largura, com 25 problemas.

As produções babilônicas tiveram grande relevância, inclusive, para matemáticos gregos como Hiparco e Eratosténes, mas não só, veio a corroborar também com os estudos de outros pensadores.

Apontando as contribuições dessa sociedade, Oliveira (2015, p. 144) sublinha:

> Dentre as primeiras contribuições para a Trigonometria de que temos notícias, estão as contribuições dos babilônicos advindas de suas observações astronômicas e registradas em suas inúmeras tábuas. Uma tábua babilônica famosa é a chamada Plimpton 322 cujo conteúdo, segundo as mais recentes interpretações, refere-se aos valores da cossecante de ângulos de 31° a 45°. Rudimentos de Trigonometria aparecem ainda no Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes, (~ 1650 a.C.) o que demonstra que os egípcios já possuíam instrumentos matemáticos para medir inclinação.

Apesar de que a forma encontrada para o registro de suas obras fora mais resistente que a dos egípcios, que compilavam seus desenvolvimentos em papiros parte de todo o conhecimento produzido veio a se perder devido algumas condições da época. Leite (2016, p. 12) explica como ocorriam esses registros: “os babilônicos registravam seus escritos em tabuletas de argila cozida de variados tamanhos. Eles escreviam em placas de argila, usando uma espécie de estilete, e eram cozidas ou secas ao sol para aumentar a resistência.” Oliveira (2010, p. 6) explica que diferentes foram as ferramentas empregadas para escrituração do desenvolvimento matemático da época “metais, pergaminho, papel, tecidos de várias espécies, cera, madeira e, principalmente, a argila que conserva a escrita com maior durabilidade.” e acrescenta, “porém, com o passar do tempo, muitos dos registros deixados pelos babilônios perderam-se, levando consigo línguas (idiomas/dialetos) e escritas sem deixar sinais.”

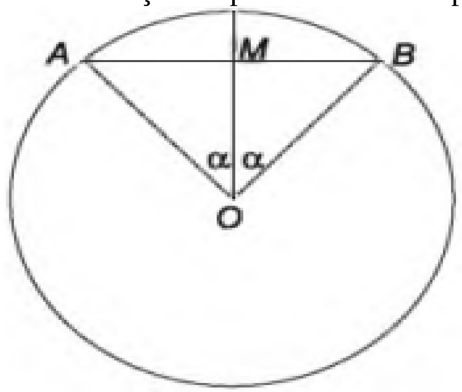
1.1.3. TRIGONOMETRIA NA GRÉCIA

Compreendido o papel dos egípcios e babilônios na construção da Trigonometria, torna-se pertinente abordar a história de outro povo que teve atuação significativa para esse conhecimento. A história dos gregos remonta há séculos antes de Cristo, marcada por muitos conflitos com vizinhos, inventos e cultura extremamente rica. Silva (2014) ressalta que as conquistas alcançadas por essa civilização na Trigonometria se devem aos feitos de Euclides ao deduzir a Geometria Plana Elementar e Sólida, porém as descobertas de egípcios e babilônios também serviram de subsídio para seus estudos.

Os gregos com um simples questionamento foram capazes de revolucionar a Matemática, ao se depararem com algumas situações, costumavam se perguntar o “por que’’.

Já babilônios e egípcios se perguntavam “como” determinado fato acontecia. Foram responsáveis por grandes conquistas para a Matemática, Silva (2014) afirma que tais proezas ocorreram em Atenas, na academia de Platão e logo depois no período helênico. Sobre esse último período e descrevendo aplicações da Trigonometria na Astronomia, Eves (2011) sublinha o papel do astrônomo, construtor de máquinas, exímio cartógrafo e matemático grego, Hiparco de Nicéia (190 a. C - 120 a. C) na realização de importantes pesquisas no observatório de Rodes, onde conseguiu determinar a duração do mês lunar médio e calcular a paralaxe lunar[4]. Segundo o mesmo autor, foi provavelmente Hiparco quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360°, além de propor a localização de pontos sobre a superfície da Terra através de longitude e latitude., como é possível observar na figura 2.

Figura 2: localização de pontos sobre a superfície da Terra.



Fonte: Eves (2011, p. 203).

Em seu livro introdução a história da Matemática, Eves (2011, p. 203), considera que “as realizações de Hiparco na astronomia são menos importantes que o papel que ele teve no desenvolvimento da trigonometria” e reforça essa afirmativa ao declarar “o comentador Têon de Alexandria (sec. IV) atribui a Hiparco um tratado em 12 livros que se ocupa da construção de uma tábua de cordas”. Como consequência disso, novos trabalhos relacionados à Astronomia basearam-se fortemente em seus escritos. No ano 100, outro matemático grego de relevância, Menelau de Alexandria (ca. 70 — 130), demonstrou em uma de suas obras, um teorema que levou seu nome: Se uma reta r intersecta os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ ou as prolongações num triângulo ΔABC nos pontos N , L e M , respectivamente, então:

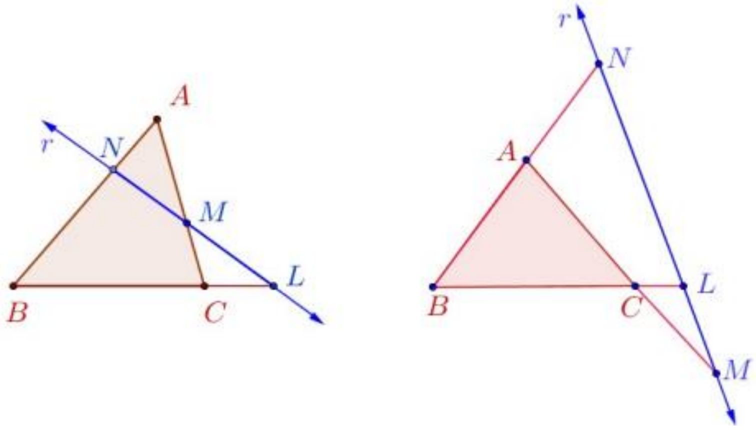
---

[4] Corresponde à metade da variação total na direção observada dos dois lados opostos da Terra.

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \qquad (1)$$

Se N, L e M são pontos respectivamente sobre os lados ou prolongamentos dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ do triângulo ΔABC tais que $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$, então os pontos N, L e M são colineares.

Figura 3: Teorema de Menelau.



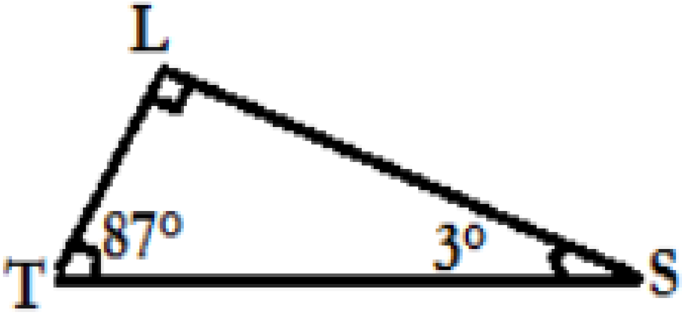
Fonte: Silva (2015, p. 16).

Eves (2011, p. 203) explica tal feito como **"**poderosa proposição", responsável por desenvolver parte da Trigonometria esférica, o que evidencia a magnitude das pesquisas de Menelau. Essa expressão é muito utilizada no campo da Geometria, especialmente nos problemas de colinearidade, e pode ser demonstrada de diferentes formas, a exemplo via teorema de Tales, através da relação entre áreas, por semelhanças de triângulos e/ou retângulos.

Ao dissertar, ler ou pesquisar sobre Matemática e a sua história na Grécia Antiga provavelmente será encontrado algo relacionado a Pitágoras de Samos. Esse pensador é conhecido principalmente pela famosa relação de que em todo triângulo retângulo a "soma dos catetos ao quadrado é igual à hipotenusa ao quadrado". Há indícios que os babilônios já a utilizavam, como certifica Leite (2016, p. 12) "Embora o Teorema que leva o seu nome "Teorema de Pitágoras" já fosse conhecido pelos babilônios, ele foi o primeiro a demostrar seu célebre resultado".

Aristarco (310 - 230 a. C.), também nascido em Samos, foi outro matemático que é reconhecido por suas descobertas. Do mesmo jeito que outros do período também se dedicou à Astronomia e, em decorrência disso, à Trigonometria. Segundo Leite (2014, p. 12) o que se tem dele é um tratado, escrito em torno de 260 a. C. sobre "*Os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua*" que admitia o sistema geocêntrico. Eves (2011), afirma que Aristarco conseguiu provar, utilizando instrumentos simples, que entre a lua e o sol, quando ela está exatamente meio cheia é de $29/30$ de ângulo de 90°. Com essa revelação, ele descobriu que a distância da terra ao sol é de aproximadamente 18 a 20 vezes a distância da terra em relação à lua. Leite (2014, p. 13) salienta como isso se deu "Aristarco determinou que o ângulo formado pelo segmento TL com o segmento TS, era 87°, que é o ângulo complementar de 3°. Ele calcula essa razão o que corresponde hoje como $sin\,3°$". A figura 4 mostra a representação dos ângulos e segmentos citada anteriormente.

Figura 4: Representação dos ângulos e segmentos feita por Aristarco.



Fonte: Boyer (1996, p. 109).

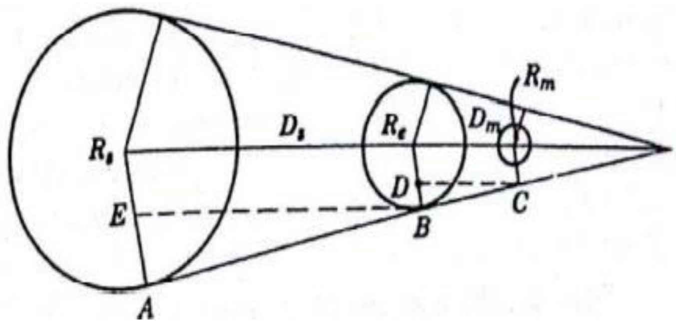
Para calcular essa razão, segundo Boyer (1996) Aristarco recorreu a um teorema que pode ser expresso:

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{tan\,\alpha}{tan\,\beta} \tag{2}$$

Sendo $0° < \beta < \propto < \; sen\,3° \; < \frac{1}{18}$. Assim, ele concluiu que a distância era de aproximadamente 18 a 20 vezes. Malgrado esse resultado fosse muito menor do que é conhecido hoje, o seu raciocínio estava correto.

Observando eclipses lunares, Aristarco deduziu a partir da largura da sombra da Terra projetada sobre a Lua, que a Terra estava a uma grande distância da Lua, com isso, pôde concluir que essa distância era duas vezes a largura da Lua, como é possível observar na figura 5.

Figura 5: Esquema de Aristarco.



Fonte: Boyer (1996, p. 109).

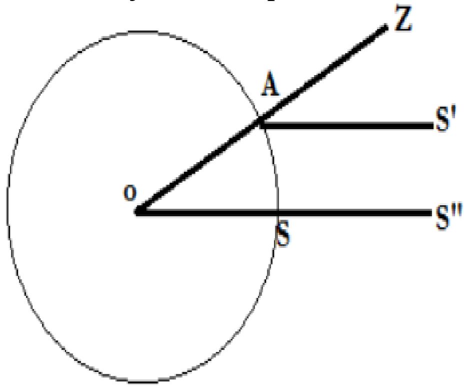
Eratosténes foi outro grande nome, que com instrumentos simples e noções de Geometria conseguiu calcular a circunferência da terra:

> Ele observou que em Siena, ao meio-dia do solstício de verão, uma vara na vertical não projetava nenhuma sombra, ao passo que em Alexandria (que ele acreditava estar no mesmo meridiano que Siena) os raios do Sol inclinavam-se de 1/50 de um círculo completo em relação à vertical. Com a distância conhecida de 5000 estádios entre Alexandria e Siena, ele então pode calcular a circunferência da Terra. Obtenha o resultado de 250 000 estádios a que Eratóstenes chegou para essa circunferência. Há razões para se admitir que o estádio de Eratóstenes era aproximadamente igual a 559 Pés (EVES 2011, p. 214).

Na figura 6 é possível verificar a representação das observações feitas por Eratóstenes.

.

Figura 6: Observações feitas por Eratóstenes.



Fonte: Boyer (1996, p. 111).

É válido destacar ainda o trabalho *Almagesto*, de 13 volumes, de Claudio Ptolomeu, matemático e astrônomo grego que introduziu a Trigonometria na Astronomia. Na figura 7 é apresentada a capa da obra mencionada.

Figura 7: Capa da obra Almagesto.

Fonte: Oliveira (2010, p. 23).

Nesta obra, segundo Oliveira (2010), Ptolomeu realizou a descrição matemática em relação à posição dos planetas. Abordando a exemplo, as proposições de Geometria estudadas por Menelau: métodos de cálculo de corda, explicações sobre diferentes corpos celestes entre outros. Outro feito notável de Ptolomeu nessa obra foi a aproximação do número pi, depois de Arquimedes ninguém havia empreendido algo do tipo. Eves (2011, p. 142) define como a maior obra de astronomia feita na Grécia antiga:

> O valor de π dado nesse trabalho é, em notação sexagesimal, 3 8’30”, que é 377/120 ou 3,1416. Sem dúvida esse valor foi obtido a partir de uma tábua de cordas que há no tratado. A tábua fornece os comprimentos das cordas de um círculo correspondentes aos ângulos centrais de 0° a 180°, com incrementos de meio grau. Multiplicando-se o comprimento da corda do ângulo central de 1o por 360o e dividindo-se o resultado pelo comprimento do diâmetro do círculo, obtém-se o valor de π acima.

Absorvidas as informações da história da Matemática grega e suas significantes contribuições para as ciências por meio da Trigonometria e seguindo uma linha cronológica dos fatos, chega-se à idade média, decurso não menos importante para a Trigonometria. No próximo tópico continuam os relatos de mais destaque sobre a história dessa ciência.

1.2. A TRIGONOMETRIA NA IDADE MÉDIA

No tópico anterior, foi realizada uma abordagem histórica sobre os principais nomes, feitos e fatos para a Trigonometria. Este tópico, na mesma linha, se propõe a descrever os avanços para essa ciência na Idade Média, período que durou de 476 a 1443, marcado pelo feudalismo, pela influência da igreja, pelas cruzadas e inquisição, porém, de grande destaque para a Trigonometria que recebeu inúmeras contribuições dos pesquisadores dessa época.

1.2.1. TRIGONOMETRIA ÁRABE

A curiosidade dos homens, de diversas nacionalidades em entenderem muitos fenômenos que os rodeava acabou por impulsionar a evolução da Trigonometria no período da Idade Média, definido entre os séculos V e XV. Para que seja entendido o papel dos árabes no progresso da Trigonometria é essencial compreender primeiramente o papel dos hindus, especialmente na criação da função seno. Oliveira (2010, p. 45) atribui tal feito a essa civilização "Influenciados pelo conhecimento trigonométrico helenístico, foi com os Hindus que surgiu a mais importante contribuição para a trigonometria, a criação da precursora função trigonométrica moderna, a função seno." Segundo ela, todo o conhecimento adquirido em relação à Trigonometria pelos árabes foi proveniente da Índia. A importância dos trabalhos dos hindus pode ser dimensionada através do pensamento de Oliveira (2015, p. 20) que afirma que "os árabes herdaram a trigonometria dos gregos e hindus, adotando do ponto de vista aritmético destes últimos. Introduziram, para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante".

Oliveira (2010) esclarece que esse povo se dedicou por muito tempo aos estudos dos gregos Ptolomeu e Hiparco, sendo que através dessas obras conseguiram concluir que com a corda era mais simples de relacionar um segmento de reta com um ângulo. A autora ainda explica que Aryabhata (476 - 550) e Bramagupta (598 - 668) foram os principais matemáticos indianos do seu tempo e proporcionaram, também, muitas contribuições, principalmente no estudo da circunferência. Leite (2016) comenta que os árabes se basearam, mais tarde, fortemente nas obras de gregos e estudiosos indianos.

Portanto, o trabalho dos matemáticos gregos se revela aqui, mais uma vez, como um forte amparo para avanços futuros da Trigonometria. Porém, não menos importantes foram as realizações do antigo povo hindu. Assim, para a continuidade da apresentação da memória da Trigonometria no mundo árabe, é interessante discorrer sobre os atos dos matemáticos dessa civilização.

Al-Battani (858 – 929), também conhecido como Ptolomeu de Bagdad, foi considerado um dos árabes com maiores contribuições para a Trigonometria, Oliveira (2010) ao tratar das produções dos hindus em relação à corda como a forma mais prática de relacionar um segmento de reta com um ângulo, confere a Al-Battani a transmissão da teoria dos senos aos europeus:

> Foi através dos árabes e não diretamente dos hindus que estas ideias chegaram ao conhecimento dos europeus. Por exemplo, o matemático astrônomo Al-Battani (850-929), conhecido na Europa como Albategnius, foi o primeiro a transmitir a teoria dos senos para os europeus (OLIVEIRA 2010, p. 47).

Battani, em seus estudos e observações, utilizando-se da função seno incluiu a circunferência de raio unitário, confirmando que a razão jiva[5] é válida para qualquer triângulo retângulo, apesar da medida da hipotenusa. O Seu sucessor foi Abu'l-Wefa (940-988) que reescreveu segundo Leite (2016) a fórmula provada por Battani em seu livro "Movimento das Estrelas". A razão foi destinada para o cálculo da elevação do sol no horizonte, onde $a = b \tan a$, sendo, respectivamente. a e b catetos oposto e adjacente ao ângulo A . Veja a razão provada por Battani:

$$b = \frac{a\, sin(90° - A)}{sin\, A} \tag{3}$$

Em seguida, o matemático confeccionou uma tabela de sombras, basicamente uma tabela de cotangentes para cada grau de 1° a 90°. Wefa foi o agente causador de outras provas matemáticas como traz Silva (2014, p. 118):

> Abu'l-Wefa definiu todas as relações trigonométricas no círculo, relação que até então havia sido introduzida no triângulo retângulo. Para as demonstrações, utilizou o teorema de Menelau, sendo paulatinamente desprezado, a partir do século X, por ter sido a época descoberta o teorema do seno.

Silva (2014), ainda explana que pouco do seu trabalho Wefa fora conservado e, o que se conservou trata da introdução à função tangente e métodos para calcular tabela

---

[5] Aryabhata, por volta do ano 500, elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que agora realmente são tabelas de senos e usou jiva no lugar de seno.

trigonométrica algo que ajudou a resolver problemas envolvendo triângulos retângulos esféricos, demonstrando alguns casos pelo teorema de Menelau:

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{1}{\cos c} \quad \frac{\sin a}{\tan b} = \frac{1}{\cot A} \tag{4}$$

O pensador concede ainda a Wefa uma nova técnica para calcular a tabela do seno, inclusive mais precisa que antecessores. Ademais, ele conseguiu provar ainda a fórmula do seno para a Geometria Esférica:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\hat{A})} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)} \tag{5}$$

Depois de Wefa, o matemático de renome foi Al-Biruni (973 - 1048), que trabalhou tanto com conceitos da Trigonometria plana quanto da esférica, e assim como os que o antecederam, em diferentes épocas, aplicou esses conhecimentos na Astronomia. Silva (2014) ordena os feitos desse matemático, sendo o primeiro feito de grande destaque a utilização de todas as seis funções trigonométricas, já o segundo, a determinação e utilização de várias identidades trigonométricas, logo após, realizou a simplificação, organização e provas de teoremas da Trigonometria esférica, por último, concedeu maior precisão das tabelas trigonométricas. Silva (2014) destaca que Al-Biruni, escreveu ainda Canon sobre a astronomia e as estrelas obra na qual reuniu todas as produções dos matemáticos que o antecederam e acrescentou suas contribuições.

Portanto, ficam evidenciadas as investigações desses grandes nomes que apesar de não poderem ter a oportunidade de trabalhar juntos, acabam por se complementar. Ptolomeu de Bagdad ao estudar sobre a função seno e apresentá-la ao velho continente, Abu'l-Wefa por definir as relações trigonométricas no círculo, Al-Biruni ao fazer história por utilizar todas as funções trigonométricas.

1.2.2. TRIGONOMETRIA DA EUROPA

Sucessora da Trigonometria árabe e herdeira de toda produção Matemática da antiga Grécia e indiana, a Trigonometria europeia conheceu muitos avanços. Segundo Pereira e Morey

(2015), esse processo de assimilação aconteceu entre os séculos XII e XV no estabelecer das primeiras universidades em solo europeu:

> A primeira delas foi a de Salerno, na Itália, no século XI; a de Bolonha, na Itália, surgiu no início do século XII. As universidades de Paris e Oxford foram criadas no início do século XII; a de Cambridge, no decorrer do século XIV; as de Praga, Cracóvia, Viena e Heidelberg, no início do século XV, entre outros. Convém lembrar que o ensino nessas primeiras universidades se dava por meio do Quadrivium, composto de Aritmética, Geometria, Astronomia e Música (PEREIRA e MOREY, 2015, p. 149).

Nesse continente, a Trigonometria se encontrava até então voltada para estudos e aplicações na área de Astronomia, mas foi lá que ela começou a criar sua identidade e passou a se colocar como ramo matemático independente. É interessante notar todo o percurso desse conhecimento ao longo do tempo em distintos lugares e civilizações realizar e observar que ela veio a se tornar um ramo analítico na Europa. Segundo Oliveira (2010) isso acontece no início do século XVI. O autor também afirma que "havia ainda outra razão para o desenvolvimento da trigonometria analítica na primeira metade do século XVII: o papel crescente da matemática em descrever o mundo físico ao nosso redor" (OLIVEIRA, 2010, p. 50). Essa declaração destaca, mais uma vez, a sua importância.

No início do século XIV, os matemáticos europeus estiveram preocupados com o estudo da Matemática grega, mais especificamente nas obras de Ptolomeu. Oliveira (2010) menciona que em decorrência desse estudo a maior realização do período foi desenvolvimento de uma nova tabela dos senos computada por Georg Von Peurbach (1423 - 1463), que foi repassada para muitos matemáticos europeus.

Seguidor de Peurbach, e agente de grande valor para a Trigonometria do século XV Johannes Muller (1436 - 1476), conhecido também como Regiomontanus, publicou obras de expressão como apontam Pereira e Morey (2015, p. 150) "muitas de suas obras, tais como *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* (1533), *Tabulae directionum et profectionum* (1490), *Tabulae primi mobilis* (1468), estavam diretamente ligadas a Matemática e principalmente a Trigonometria". Oliveira e Morey (2010) afirmam ainda que Regiomontanus desenvolveu um tratado em cinco livros, intitulado por *Tratado sobre Triângulos*. Nele, o autor discorre sobre a Trigonometria mais completa até aquele período e determina questões de Geometria Plana e Esférica, fez também novas tábuas trigonométricas, aprimorando assim o seno de Peurbach, bem como introduziu a função tangente nessas tábuas. Assim, os astrônomos que o sucederam fizeram um extenso uso de suas obras. Eves (2011) informa que Muller foi o maior matemático do século XV devido aos seus trabalhos na área de Trigonometria, destacando o *Tratado sobre triângulos* como a sua principal obra, “trata-se da primeira exposição europeia sistemática de trigonometria plana e esférica, num tratamento independente da astronomia” (EVES, 2011, p. 296).

Eves (2011) ao tratar da Matemática no século XV na Europa, explica que o estudo dessa ciência esteve centrado principalmente nas grandes cidades italianas, além de Nuremberg na Alemanha, Viena e Praga na parte ocidental da Europa. Cidades responsáveis por muitos avanços para a Matemática simplesmente por serem cidades mercantis em desenvolvimento, sob a influência do Comércio, da Navegação, da Astronomia e da Agrimensura. As pesquisas na área estiveram voltadas principalmente para a Álgebra, Aritmética e Trigonometria.

Retornando à independência da Trigonometria em relação à Astronomia, a importância do *Tratado sobre Triângulos* de Muller é reforçada pela declaração de Oliveira (2010, p. 51), que diz que “a partir deste trabalho, a trigonometria foi definida como uma ciência independente da Astronomia.” E completa que por volta de 1520 Copérnico (1473 - 1543), completou alguns trabalhos de Regiomontanus da área. Já no século XVI fora Georg Joachim Rhæticus (1514 - 1576) que veio a fazer cálculos mais precisos das tábuas de Regiomontanus.

No entanto, no século XVI, o matemático que mais se destacou foi o francês François Viète (1540 - 1603) que, por sua vez, se dedicou ao estudo de Geometria, Álgebra e Trigonometria. Para essa última, realizou muitas contribuições presentes em *Canon mathematicus seu ad triangula.* Sobre este feito Eves (2011) afirma:

> Trata-se, talvez, do primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas. Vieta obteve expressões para cos n0 como função de cos 0 para n = 1, 2, ..., 9 e posteriormente sugeriu uma solução trigonométrica para o caso irredutível das cúbicas (EVES, 2011 p. 309).

Mas não foi apenas essa a obra de relevância de Viète, publicou ainda *canomem mathematicum liber singularis*, Silva (2014) explica que foi mais um livro de Trigonometria no qual há muitas fórmulas de seno, cosseno além da apresentação de novas tabelas trigonométricas que, segundo o mesmo autor, superam as de Regiomontanus. O matemático fez um extensivo uso das seis funções trigonométricas nos seus trabalhos e em 1579 conseguiu tratar a Trigonometria de forma mais analítica. Observe a seguir algumas das identidades trigonométricas criadas por ele:

$$sin\,a = sin(60° + a) - sin(60° - a) \tag{6}$$

$$csc\,a + cot\,a = cot\left(\frac{a}{2}\right) \tag{7}$$

$$csc\,a - cot\,a = tan\left(\frac{a}{2}\right) \tag{8}$$

Sobre o caráter analítico concedido por Viète à Trigonometria Silva (2014, p. 41) explica que “ele foi o verdadeiro fundador de uma abordagem analítica generalizada para a trigonometria” uma vez que conseguiu construir trabalhos com uma abordagem completa sobre a Trigonometria Esférica. Em *Variorun de Rebus Mathematicis,* mais uma de suas produções, ele demonstra a expressão para tangentes, com $\hat{A}$ e $\hat{B}$ ângulos, e $a\ e\ b$ arcos correspondentes:

$$\frac{tan(A+B)}{tan(A-B)} = \frac{a+b}{a-b} \tag{9}$$

Quem continuou os estudos na área após Viéte foi William Oughtred (1575 - 1660), segundo Silva (2014), o britânico ao escrever *Trigonometrie* passou a utilizar algumas notações para as funções trigonométricas, assim, diversos matemáticos da época passaram a criar muitas abreviaturas para essas funções. Oliveira (2010) menciona que a partir daí a palavra seno já estava sendo utilizada pelos europeus em seus textos matemáticos, após traduzirem do árabe, mas foi Edmund Gunter (1581 - 1626) que apresentou pela primeira vez a abreviatura sin e a palavra cotangente. A autora esclarece que Thomas Fincke (1561 - 1656) foi quem criou as palavras *tangente* e *secante,* porém foi Albert Girard (1595-1632) o criador da abreviatura *sec.*

Assim, em 1658 John Newton (1622 - 1678) publicou o tratado intitulado como *Trigonometria Britannica,* sendo esta obra uma das mais completas da época sobre Trigonometria, antecedendo ideias de introdução de divisões centesimais em tábuas trigonométricas. Eves (2011) trata do papel de John Wallis (1616 - 1703), e descreve que o matemático realizou estudos do círculo trigonométrico e confere a ele à fórmula do comprimento de um elemento de arco de curva.

Isaac Newton (1642 - 1727), também se dedicou ao estudo da Trigonometria, influenciando positivamente essa ciência, Oliveira (2010) cita que, Newton ao estudar séries infinitas, expandiu o $arc\ \sin(x)$ em séries, inferindo a série para $\sin(x)$ por reversão, além de transmitir a Leibnz (1646 - 1716) a fórmula geral para $\sin(nx)$e $\cos(nx)$. Ainda é relevante destacar o papel de Leonard Euler (1707 – 1783). Foi ele quem tomou a medida do raio de um círculo como unidade e definiu funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo, mudando o que era realizado até então. Escreveu Introductio in Analysin Innitorum, onde também concebeu a funções trigonométricas um caráter analítico.

A autora explica que com Euler ocorreu uma transição das razões trigonométricas para funções periódicas, iniciada com Viète no século XVI, algo que teve impulso com o surgimento do cálculo infinitesimal nesse mesmo século e que culminou na criação da função conhecida como função de Euler. Além disso, través desta função é possível descobrir o $\sin(x)$e o $\cos(x)$ em função de uma variável x, com $x \in \mathbb{R}$. “A função de Euler permitiu que a Análise Matemática e diversas aplicações às ciências físicas abrissem as portas para a trigonometria”(Oliveira, 2010, p. 54).

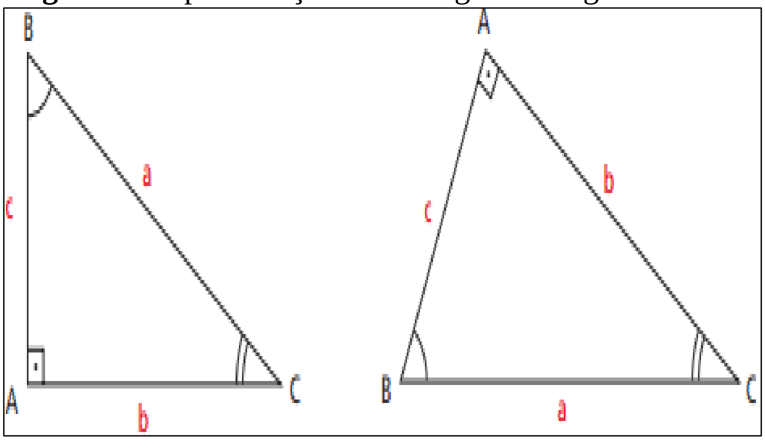
2. TRIGONOMETRIA

Neste capítulo, são exibidos tópicos da Trigonometria, ramo matemático que está relacionado com o estudo do triângulo retângulo. As propriedades trigonométricas aplicadas nessa figura são, consequentemente, expandidas para outros triângulos e, alguns dos resultados podem ser observados em triângulos cujos lados são segmentos notáveis do círculo trigonométrico. Assim, compreendido o círculo trigonométrico, é possível utilizá-lo para definir as funções trigonométricas, essas que relacionam cada elemento do conjunto dos números reais a um único elemento do mesmo conjunto. A exposição desse conteúdo, e a apresentação dessa sequência lógica, é a parte que interessa para demonstrar as aplicações da Trigonometria nas Máquinas Simples.

2.1. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo retângulo é uma figura geométrica que apresenta um ângulo reto e outros dois ângulos agudos:

Figura 8: Representações do triângulo retângulo $\triangle ABC$.



Fonte: Iezzi (2013, p. 10).

O triângulo $\triangle ABC$ tem hipotenusa a catetos b e c, adjacentes ao ângulo reto e representam as medidas dos respectivos segmentos, AC, AB. Já a representação dos ângulos internos desse triângulo é $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Nele aplica-se o teorema de Pitágoras que relaciona o comprimento dos lados do triângulo retângulo:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{10}$$

As razões trigonométricas no triângulo retângulo, são dadas através das semelhanças de triângulos dado um certo ângulo agudo $\hat{B}$:

a) seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa;

$$sin\,\hat{B} = \frac{b}{a} \tag{11}$$

b) Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa;

$$cos\,\hat{B} = \frac{c}{a} \tag{12}$$

c) Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo;

$$tan\,\hat{B} = \frac{b}{c} \tag{13}$$

d) Cotangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto ao ângulo;

$$cot\,\hat{B} = \frac{c}{b} \tag{14}$$

Com base no triângulo retângulo e nas razões trigonométricas acima pode-se fazer outras demonstrações importantes da Trigonometria, é o caso de algumas relações fundamentais. Dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$, com Â sendo o seu ângulo reto:

$$sin\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow sin\,\hat{B}\,.\,a = b \tag{15}$$

$$cos\,\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow cos\,\hat{B}\,.\,a = c \tag{16}$$

Substituindo em $a^2 = b^2 + c^2$

$$(a\,.\,sin\,\hat{B})^2 + (a\,.\,cos\,\hat{B})^2 = 1 \Rightarrow sin^2\hat{B} + cos^2\hat{B} = 1 \tag{17}$$

A segunda relação é obtida através da razão $\frac{sin\,B}{cos\,B}$, assim, sendo $sin\,\hat{B}\ =\ \frac{b}{a}\ e\ cos\,\hat{B}\ =\ \frac{c}{a}$:

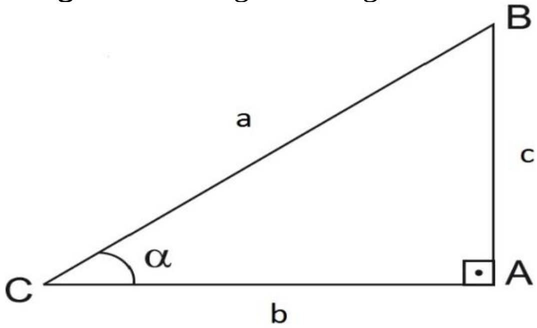
$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tan\,\hat{B} \tag{18}$$

Se for considerado cos $\hat{B}$ como numerador e $sin\,\hat{B}$ como denominador, é encontrada a inversa da segunda relação:

$$\frac{cos\,\hat{B}}{sin\,\hat{B}} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \times \frac{a}{b} = \frac{c}{b} \tag{19}$$

Com base no estudo desse triângulo podem ser definidas ainda outras relações importantes como o seno, cosseno, a tangente e cotangente de ângulos complementares. Considerando novamente um triângulo retângulo de ângulos Â, $\hat{B}\ e\ \hat{C}$ de medida $a, b\ e\ c$:

Figura 9: Triângulo retângulo $\triangle\,ABC$.



Fonte: http://breakthescience.com.br/trigonometria-no-triangulo-retangulo/.

Sabe-se Â $+\ \hat{B}\ +\ \hat{C}\ =\ 180°$; e que Â $=\ 90°$, logo $\hat{B} +\ \hat{C}\ = 90°$ e, portanto, $\hat{B}$ $+\ \hat{C}$ são complementares, daí decorrem as seguintes relações:

$$i)\qquad sin\,\hat{B}\ =\ \frac{b}{a};\ cos\,\hat{C} = \frac{b}{a}\ \Rightarrow\ sin\,\hat{B}\ =\ cos\,\hat{C}$$

$$ii)\qquad sin\,\hat{C}\ =\ \frac{c}{a};\ cos\,\hat{B}\ =\ \frac{c}{a}\ \Rightarrow\ sin\,\hat{C}\ =\ cos\,\hat{B}$$

$$iii) \quad tan\,\hat{B} = \frac{b}{c};\ cot\,\hat{C} = \frac{b}{c} \Rightarrow tan\,\hat{B} = cot\,\hat{C}$$

$$\text{iv)} \quad tan\,\hat{C} = \frac{c}{b};\ cot\,\hat{B} = \frac{c}{b} \Rightarrow tan\,\hat{C} = cot\,\hat{B}$$

A partir de um triângulo retângulo ABC, isósceles, assumindo que os seus catetos tenham medida 1 (um), torna-se possível demonstrar as razões trigonométricas especiais e montar a tabela dos ângulos notáveis $(30°, 45°, 60°)$ para o seno, cosseno e tangente e cotangente. Pela relação pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$ obtém-se razão igual a $\sqrt{2}$. Logo:

$$\hat{A} = 90°$$
$$\hat{B} = \hat{C} = 45°$$
$$b = c = 1$$

Então para um ângulo 45°:

$$\text{i)} \quad sin\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow sin\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

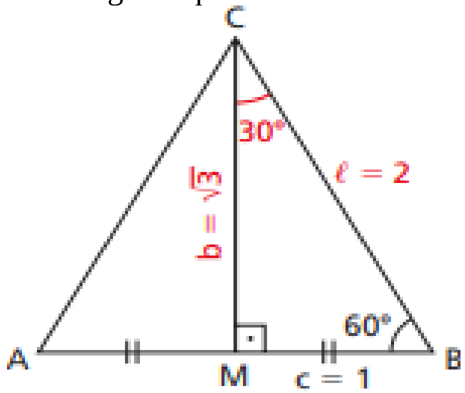
$$\text{ii)} \quad cos\,\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow cos\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{iii)} \quad tan\,\hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow tan\,45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{iv)} \quad cot\,\hat{B} = \frac{C}{B} \Rightarrow cot\,45° = \frac{1}{1} = 1$$

Para o ângulo de 30º, considera-se um triângulo equilátero $\triangle ABC$ de lado $l = 2$ (dois), logo $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$. Seja $\overline{CM}$ a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ no triângulo equilátero, $\overline{CM}$ é mediana, altura e bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$:

Figura 10: Triângulo equilátero $\triangle ABC$ de lado l = 2.



Fonte: Iezzi (2013, p. 17).

Portanto, no triângulo $\triangle MBC$: $\widehat{M} = 90°$ ($\overline{CM}$é altura); $\hat{C}$ = 30° ($\overline{CM}$ é bissetriz) c = $\frac{l}{2} = 1$ (CM é mediana). $l^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2^2 = b^2 + 1^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}$, logo:

i) $sin\ \hat{C} = \frac{c}{l} \Rightarrow sin\ 30° = \frac{1}{2}$

ii) $cos\ \hat{C} = \frac{b}{l} \Rightarrow cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iii) $tan\ \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

iv) $cot\ \hat{C} = \frac{b}{c} \Rightarrow cot\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Para definir a tabela de 60°, pode-se considerar ainda o triângulo $\triangle MBC$, assumindo $\hat{B}$ = 60° E $\hat{C}$ = 30°, portanto, complementares. Então:

i) $sin\ \hat{B} = cos\ C = \frac{b}{l} \Rightarrow sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $cos\ \hat{B} = sin\ C = \frac{c}{l} \Rightarrow cos\ 60° = \frac{1}{2}$

iii) $tan\ \hat{B} = \frac{1}{tan\ C} = \frac{b}{c} \Rightarrow tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

iv) $cot\ \hat{B} = \frac{1}{cotC} = \frac{c}{b} \Rightarrow cot\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Essas razões trigonométricas especiais podem ser expressas numa tabela:

Tabela 1: Razões trigonométricas especiais.

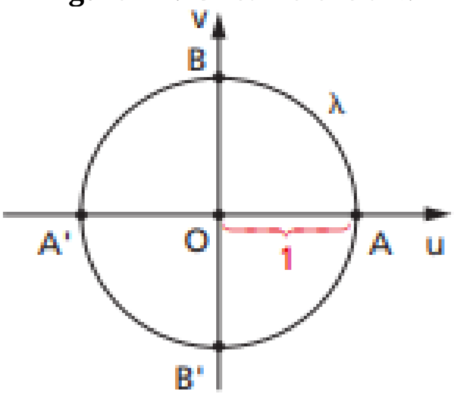
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fonte: Autoria própria, 2022.

2.2. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

No círculo trigonométrico ou circunferência trigonométrica tem-se que todos os pontos estão relacionados com números reais e ângulos. Tomando sobre um plano cartesiano ortogonal uOv e considerando uma circunferência λ de centro O e raio $r = 1$. O comprimento dessa circunferência é 2π, já que $r = 1$. Associando cada valor real x com $0 \leq x \leq 2\pi$, um único ponto P da circunferência λ, tem-se:

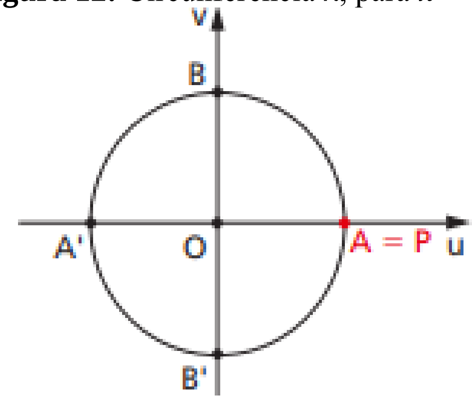
Figura 11: Circunferência λ.



Fonte: Iezzi (2013, p. 33).

1°) se $x = 0$, então P coincide com A;

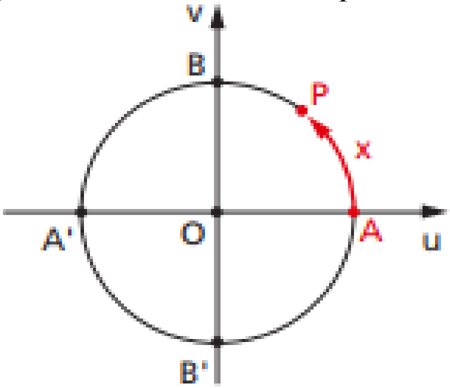
Figura 12: Circunferência λ, para $x = 0$.



Fonte: Iezzi (2013, p. 34).

2º) se $x > 0$, então realizando a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcando P como ponto final do percurso.

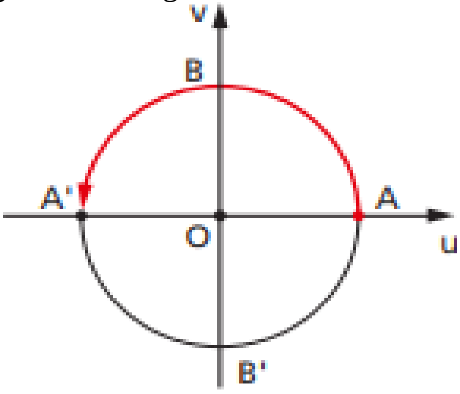
Figura 13: Circunferência λ, para $x > 0$.



Fonte: Iezzi (2013, p. 34).

Se o ponto P está associado ao número x, então P é a imagem de x na circunferência, exemplificando:

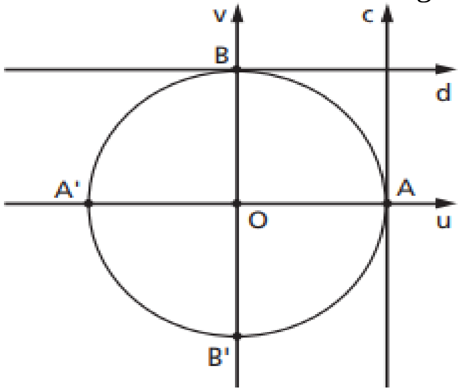
Figura 14: Imagem de um número real x.



Fonte: Iezzi (2013, p. 34).

No caso acima a imagem $de\,\pi$ é A'. Na circunferência trigonométrica é associado também as razões trigonométricas. Considere um círculo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$ onde $AO = 1$. Associando ao ciclo quatro eixos, sendo o primeiro o eixo dos cossenos (u) de direção AO e sentido positivo: $O \rightarrow A$; o segundo é o eixo dos senos (v), de direção perpendicular a u, por O com sentido positivo: $O \rightarrow B$; o terceiro eixo é o das tangentes (c) de direção paralelo a v por A, e sentido positivo: o mesmo de v; o quarto é o eixo das cotangentes (d), com direção paralela a u por B e sentido positivo: o mesmo de u.

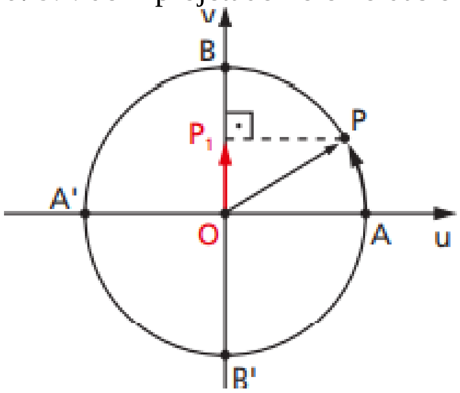
Figura 15: Eixos associados ao círculo trigonométrico.



Fonte: Iezzi (2013, p. 39).

Os respectivos eixos dividem o círculo em quatro quadrantes. Definindo primeiramente o seno: Dado um número real x pertence $[0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. Assim denomina-se seno x – indica-se por $sin\,x$ – a ordenada $OP1$ do ponto P em relação ao sistema uOv.

Figura 16: sin de P projetado no eixo das ordenadas.



Fonte: Iezzi (2013, p. 40).

Assim, para cada número real $[0, 2\pi]$ existe uma única imagem P e cada imagem P tem um único valor para $sin\, x$ $(OP1 = sin\, x)$. As principais propriedades são:

i) Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então $sin\, x$ é positivo.

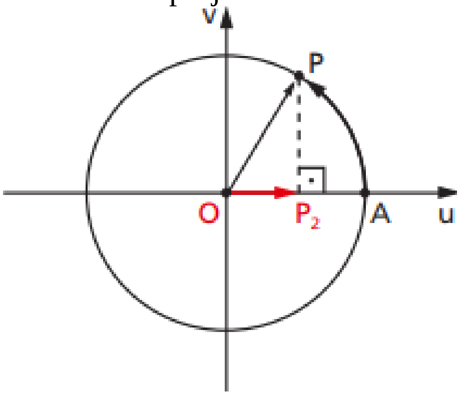
ii) Se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então $sin\, x$ é negativo.

iii) Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então $sin\, x$ é crescente.

iv) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $sin\, x$ é decrescente.

Para definir o cosseno, toma-se o um número real que pertence $[0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. Denomina-se cosseno de x (indicado por $cos\, x$) a abscissa $OP2$ do ponto P em relação ao sistema uOv.

Figura 17: cos de P projetado no eixo das abcissas.



Fonte: Iezzi (2013, p. 45).

Portanto, para cada número real x pertencente a $[0, 2\pi]$ existe uma única imagem P e cada imagem P tem um único valor para $cos\, x$ $(OP2 = cos\, x)$. Propriedades:

i) Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $cos\, x$ é positivo.

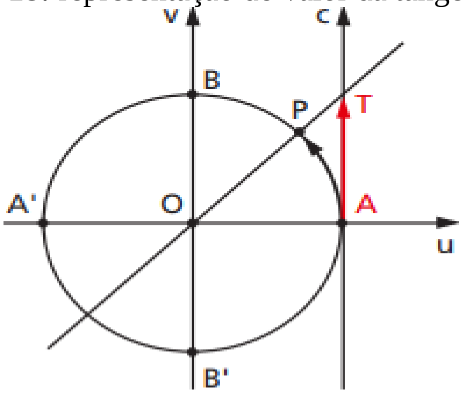
ii) Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $cos\, x$ é negativo.

iii) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $cos\, x$ é decrescente.

iv) Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $cos\, x$ é crescente.

A definição de Tangente: dado um número real x que pertence a $[0, 2\pi]$, para $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Considerando a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T a sua intersecção com o eixo das tangentes de x, indicada por $tan\, x$, a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ é o valor da tangente:

Figura 18: representação do valor da tangente de P.



Fonte: Iezzi (2013, p. 51).

Nota-se que, para $x = \frac{\pi}{2}$, P está em B e, para $x = \frac{3\pi}{2}$, P está em B', então a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a $tan\, x$ não está definida. Segue abaixo as principais propriedades:

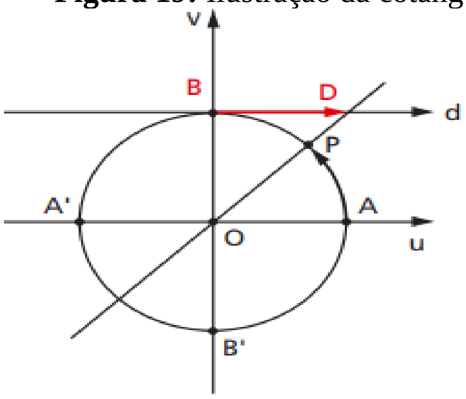
i) Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $tan\, x$ é positiva.

ii) Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $tan\, x$ é negativa.

iii) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $tan\, x$ é crescente.

A definição de cotangente é: Dado um número real x pertencente $[0, 2\pi]$, x não pertence $\{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Considerando a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denomina-se cotangente indicada por $cot\, x$, a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$.

Figura 19: Ilustração da cotangente.



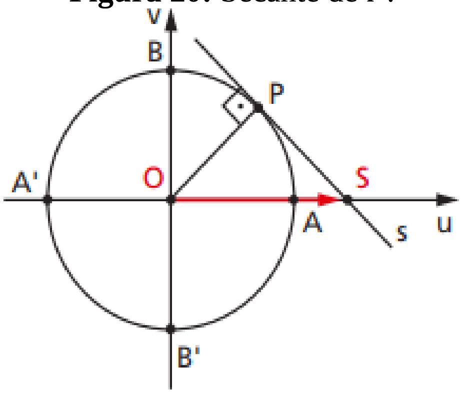
Fonte: Iezzi (2013, p. 55).

Nota-se que $para\ x = 0, x = \pi$ ou $x = 2\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Aqui não existe o ponto D, a cotangente de x (indicada por $cot\ x$) não está definida. As principais propriedades são:

i) Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $cot\ x$ é positiva.
ii) Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $cot\ x$ é negativa.
iii) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $cot\ x$ é decrescente.

A definição de secante: Dado um número real x pertencente a $[0, 2\pi]$, x não pertence $\left\{\frac{\pi}{2} \middle| \frac{3\pi}{2}\right\}$, seja P sua imagem no ciclo. Considerando a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos, denomina-se secante de x, ou $sec\ x$, a abscissa OS do ponto S:

Figura 20: Secante de P.



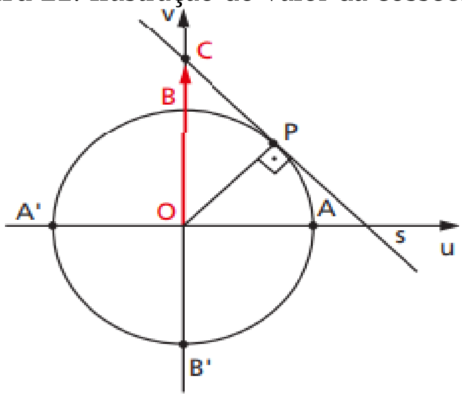
Fonte: Iezzi (2013, p. 57).

Nota-se que para $\frac{\pi}{2}\ ou\ x = \frac{3\pi}{2}$, P está em B ou B', então a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Assim, não existe o ponto S, logo a $sec\ x$ não está definida. As propriedades são:

i) Se x é do 1º ou do 4º quadrante, então $sec\ x$ é positiva.
ii) Se x é do 2º ou do 3º quadrante, então $sec\ x$ é negativa.
iii) Se x percorre o 1º ou o 2º quadrante, então $sec\ x$ é crescente.
iv) Se x percorre o 3º ou o 4º quadrante, então $sec\ x$ é decrescente.

Definindo cossecante: Dado um número real x pertence a $[0, 2\pi]$, x não pertence $\{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Considerando a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denomina-se cossecante de x (indicada $csc\, x$) a ordenada OC do ponto C.

Figura 21: Ilustração do valor da cossecante.



Fonte: Iezzi (2013, p. 59).

Nota-se que para $x = 0, x = \pi\ ou\ x = 2\pi, P$ está em A ou A' e, então a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a $csc\ x$ não está definida.

2.3. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Partindo de noções básicas: dados dois conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo subconjunto R de $A\ x\ B$, portanto:

i) R é relação binária de A em $B \Leftrightarrow R \subset A\ x\ B$.

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

ii) f é aplicação de A em $B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists \mid y \in B \mid (x, y) \in f)$.

Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se y ∈ B tal que (x, y) ∈ f. Logo:

iii) $f = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \; e \; y = f(x)\}$.

Isso significa que, dados os conjuntos A e B, a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$. Para definir uma função f definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, faz-se o uso de notações habituais, tais como: $f: A \to B$, sendo chamado de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, assim $D = A$. A imagem é o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Portanto, $Im \subset B$.

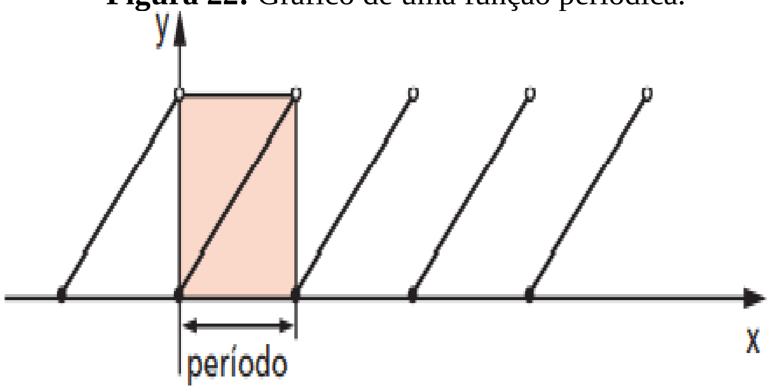
2.3.1. FUNÇÕES PERIÓDICAS

Essas funções circulares são classificadas como periódicas, isso se deve graças ao seu comportamento cíclico no gráfico. Sua Definição é: uma função $f: A \to B$ é periódica se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição, sendo que o menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado período de f:

$$f\,(x + p) = f(x), \forall x \in A. \qquad (20)$$

O seu gráfico é caracterizado por apresentar um elemento de curva que se repete. Para desenhar toda a curva basta construir um “carimbo” no qual esteja desenhado o tal elemento de curva e ir carimbando. Assim, o período é o comprimento do carimbo sendo medido no eixo dos x. Observe na figura 22:

Figura 22: Gráfico de uma função periódica.



Fonte: Iezzi (2013, p. 88).

Como visto anteriormente, inclusive em exemplo, tem-se que P é a imagem de um valor real x no círculo trigonométrico. Em resumo, P é a imagem dos elementos do conjunto: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x0 + 2k\pi, k \in Z\}$.

2.3.1.1. FUNÇÃO SENO

A definição da função seno é: Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denomina-se seno de x a ordenada $\overline{OP}_1$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Desse modo, função seno é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OP1 = sin\, x$: $f(x) = sin\, x$.

Além das propriedades já supracitadas para essa função, ainda há:

i) A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq sin\, x \leq 1$ para todo x real.

ii) A função seno é periódica e seu período é 2π.

O seu gráfico é denominado como senoide, construindo um diagrama com x em abcissas e $sin\, x$ em ordenadas, é possível identificar como varia $f(x) = sin\, x$.

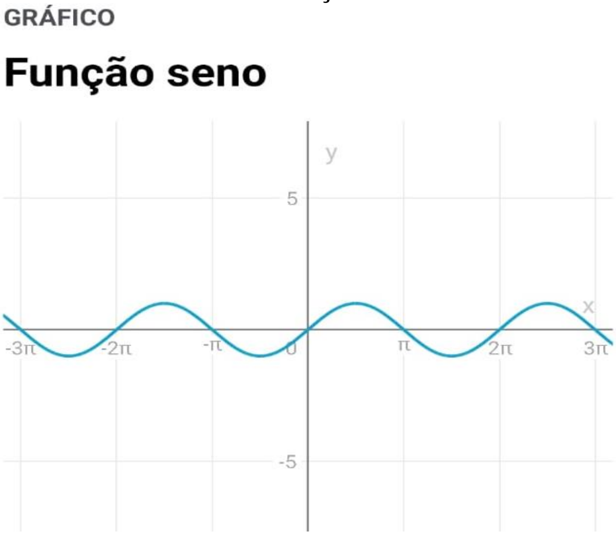
Tabela 2: Tabela de pares ordenados $(x, sin\, x)$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \sin x}$
-2π	0
$-\frac{3\pi}{2}$	1
$-\pi$	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Fonte: Autoria própria, 2022.

Portanto, o gráfico da função é:

Gráfico 1: Função seno



Fonte: Autoria própria, 2022.

2.3.1.2. FUNÇÃO COSSENO

A sua definição é: dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denomina-se $cos\ x$ a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Assim, a função cosseno é a função f: ℝ ➞ ℝ que associa a cada real x o real $OP2 = cos\ x$, isto é: $f(x) = cos\ x$.

Além das propriedades já supracitadas para essa função, ainda há:

i) A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq cos\ x \leq 1$ para todo x real.

ii) A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

O seu gráfico é denominado como cossenoide, construindo um diagrama com x em abcissas e cos x em ordenadas, é possível identificar como varia $f(x) = cos\ x$.

Tabela 3: Tabela de pares ordenados $(x, cos\ x)$.

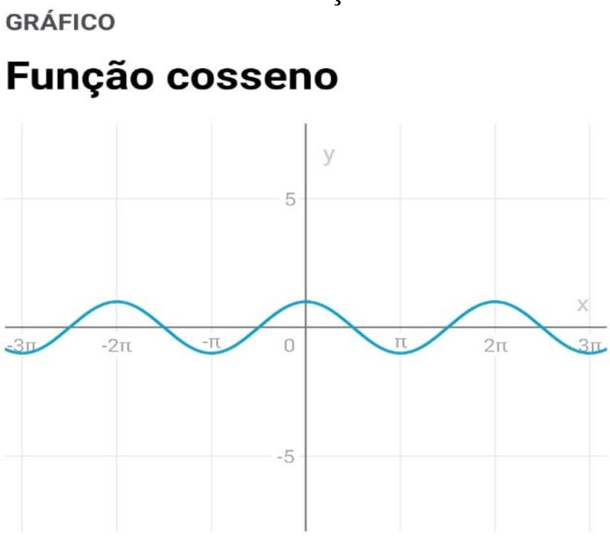
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$
$-2x$	1
$-\frac{3x}{2}$	0

$-x$	-1
$-\frac{x}{2}$	0
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Fonte: Autoria própria, 2022.

Portanto, o gráfico da função é:

Gráfico 2: Função cosseno.



Fonte: Autoria própria, 2022.

2.3.1.3. FUNÇÃO TANGENTE

A sua definição é: Dado um número real $x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Considerando a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denomina-se $tan\, x$ a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

A função tangente é denominada como a função $f: D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real $x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $AT = tan\, x$, isto é, $\mathrm{f}(x) = tan\, x$. É possível notar que, para $x =$

$\frac{\pi}{2} + k\pi$, P está entre B ou B' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a $tan\ x$ não é definida.

Além das propriedades já supracitadas para essa função, ainda há:

i) O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

ii) A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que $tan\ x = y$.

iii) A função tangente é periódica e seu período é π.

O seu gráfico é denominado como tangetoide, construindo um diagrama com x em abcissas e $tan\ x$ em ordenadas, é possível identificar como varia $f(x) = tan\ x$.

Tabela 4: Tabela de pares ordenados $(x, tan\ x)$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \tan x}$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
π	0
2π	0

Fonte: Autoria própria, 2022.

Portanto, o gráfico da função é:

Gráfico 3: Função tangente.

Fonte: Autoria própria, 2022.

2.3.1.4. FUNÇÃO COTANGENTE

A sua definição é: Dado um número real $x, x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Considerando a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua interseção com o eixo das cotangentes. Denomina-se cot x a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$. A função cotangente é denominada como a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real $x, x \neq k\pi$, o real $BD = cot\ x$, isto é: $f(x) = cot\ x$.

Nota-se que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto D, a $cot\ x$ não é definida.

Além das propriedades já supracitadas para essa função, ainda há:

i) O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.

ii) A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que $cot\ x = y$.

iii) A função cotangente é periódica e seu período é π.

Construindo um diagrama com x em abcissas e $cot\ x$ em ordenadas, é possível identificar como varia $f(x) = cot\ x$.

Tabela 5: Tabela de pares ordenados $(x, cot\ x)$.

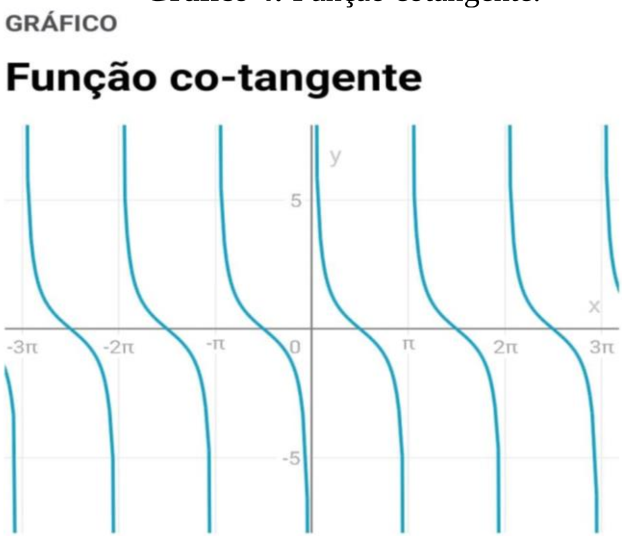
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \cot x}$
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1

$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$

Fonte: Autoria própria, 2022.

Portanto, o gráfico da função é:

Gráfico 4: Função cotangente.



Fonte: Autoria própria, 2022.

2.3.1.5. FUNÇÃO SECANTE

A sua definição é: dado um número real $x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Considerando a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos. Denomina-se $sec\ x$ a abscissa OS do ponto S. A função secante é denominada como a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real $x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $OS = sec\ x$, assim, $f(x) = sec\ x$.

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Neste caso não existe o ponto S, a $sec\ x$ não é definida.

Além das propriedades já supracitadas para essa função, ainda há:

i) O domínio da função secante é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

ii) A imagem da função secante é ℝ -]-1, 1[, assim, para todo y real, com $y \leq -1\ ou\ y \geq 1$, existe um x real tal que $sec\ x = y$.

Tabela de pares ordenados $(x,\ sec\ x)$, relativa aos valores do 1º e 2º quadrantes:

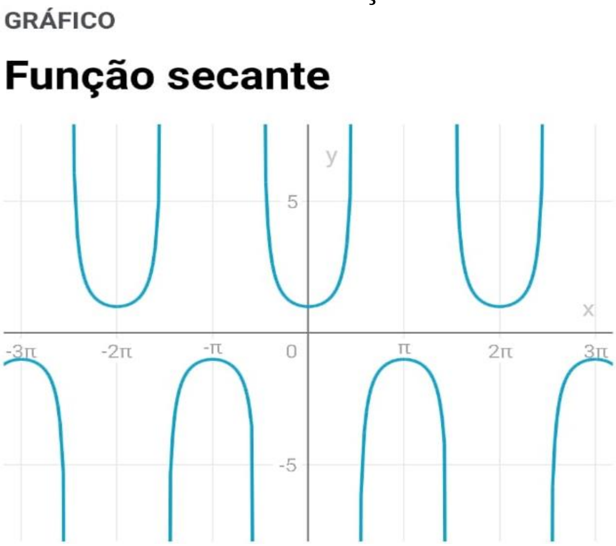
Tabela 6: Tabela de pares ordenados $(x, sec\ x)$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \sec x}$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	-2
$\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$
π	-1

Fonte: Autoria própria, 2022.

Portanto, o gráfico da função é:

Gráfico 5: Função Secante.



Fonte: Autoria própria, 2022.

2.3.1.6. FUNÇÃO COSSECANTE

A sua definição é: dado um número real $x, x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Considerando a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denomina-se $csc\, x$ a ordenada OC do ponto C. A função cossecante é denominada como a função $f: D \rightarrow R$ que associa a cada real $x, x \neq k\pi$, o real $OC = csc\, x$, assim, $f(x) = csc\, x$.

Nota-se que, para $x = k\pi, P$ está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Neste caso não existe o ponto C, logo a $csc\, x$ não é definida.

Além das propriedades já supracitadas para essa função, ainda há:

i) O domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.

ii) A imagem da função cossecante é $\mathbb{R}$ - $]-1, 1[$, desse modo, para todo real y, com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um x real tal que $csc\, x = y$.

iii) A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

Tabela 7: Tabela de pares ordenados $(x, csc\, x)$.

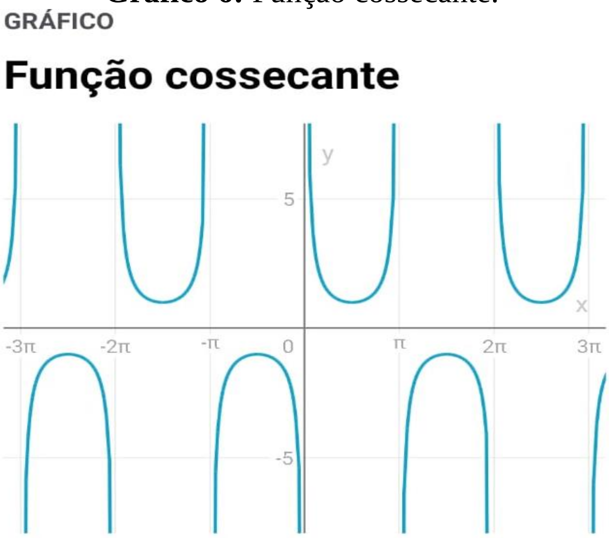
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \csc x}$
$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$

$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	2
π	Indefinido

Fonte: Autoria própria, 2022.

Portanto, o gráfico da função é:

Gráfico 6: Função cossecante.



Fonte: Autoria própria, 2022.

3. A APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA EM MÁQUINAS SIMPLES

É sabido a relevância da Matemática, e como afirma Pinheiro (2008), ao tratar da importância dela para outras ciências, tecnologia e sociedade, diferentes são as contribuições desse conhecimento, que vão da aritmética, amplamente utilizada no comércio, taxas de juros, passando pela Astronomia, culminando em desenvolvimentos importantes na área, como o do Cálculo Diferencial e Integral. Desse modo, discutidos os principais fatos históricos ligados a Trigonometria e a parte do conteúdo que interessa para este estudo, torna-se imprescindível abordar as suas aplicações nas Máquinas Simples.

3.1. TRIGONOMETRIA APLICADA NAS MÁQUINAS SIMPLES

As Máquinas Simples são instrumentos que foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar tarefas simples do dia a dia e, por definição, Máquina Simples é aquela que não pode ser decomposta em outra. Como exemplo de Máquinas Simples é possível citar a roda, a polia, a alavancas, o plano inclinado, entre outros. Todas criadas com uma mesma função: converter uma força aplicada em algum tipo de trabalho útil ou, de modo a facilitar a compreensão, a Máquina Simples pode ser encarada como um dispositivo que altera a direção e/ou modifica a intensidade de uma força. Essas máquinas são diferentes das máquinas que grande parte das pessoas estão habituadas, simplesmente por uma circunstância: a sua simplicidade. O que caracteriza as máquinas atuais são a grande quantidade de peças, engrenagens e parafusos que as compõe, desse modo, são definidas como máquinas complexas. (Barbieri 2011, p. 2)

Existem duas forças com as quais nos preocupamos quando se trata de máquinas: a força potente (F_P) – que é a força aplicada à máquina e, a força de resistência (F_R) – que é a força que a máquina deve superar para realizar o trabalho (τ). Nesse estudo, o foco é a relação das Máquinas Simples com os conhecimentos de Trigonometria, sendo assim, torna-se indispensável apresentar as principais aplicações. Barbieri (2011, p. 2) informa ainda:

> “(...) em geral, no estudo das máquinas simples as grandezas físicas de interesse são: força potente resultante, força resistente resultante, braço mecânico de potência, braço mecânico de resistência, trabalho potente, trabalho resistente, momento torsor potente (ou torque potente), momento torsor resistente (ou torque resistente)”.

Desta maneira, a vantagem mecânica de uma máquina simples pode ser definida como a razão entre a força de resistência e a força potente:

$$Vm = \frac{F_R}{F_P} \tag{21}$$

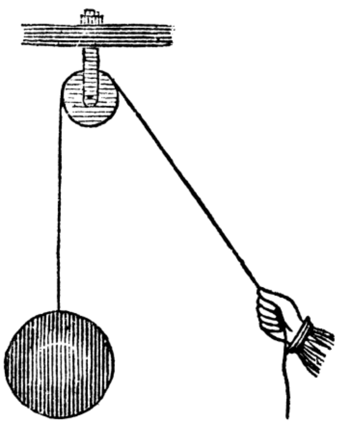
sendo Vm a vantagem mecânica, uma grandeza adimensional que está relacionada diretamente ao rendimento da máquina. A máquina utilizada facilitará a execução de alguma atividade quando $Vm \geq 1$. Deste modo, para $Vm > 1$, a força aplicada é inferior a força que a máquina deve superar e, para $Vm = 1$, apesar de não alterar a intensidade força aplicada, a máquina poderá alterar a direção da força aplicada.

Devido ao princípio da conservação de energia, independente da variação das forças, a quantidade de trabalho total será conservada, ou seja, em uma máquina podemos ter um aumento de força, mas não um aumento de energia. Sabendo que o trabalho pode ser definido como um produto escalar entre a força e o deslocamento, $\tau = \vec{F}.\vec{d} = Fd\cos\theta$, e considerando uma máquina ideal, em que toda a energia é transferida, o trabalho de saída é igual ao de entrada, $\tau_R = \tau_P$, de modo que podemos escrever a lei das máquinas simples como:

$$\vec{F}_P\,.\vec{d}_P = \vec{F}_R\,.\vec{d}_R \tag{22}$$

Faremos agora algumas aplicações de modo a ilustrar como a Trigonometria está envolvida no estudo de máquinas simples. Considere o içar de carga por meio de um cabo e com auxílio de uma polia fixa, como ilustrado abaixo:

Figura 23: Ilustração do içar de carga.



Fonte: Autoria própria, 2022.

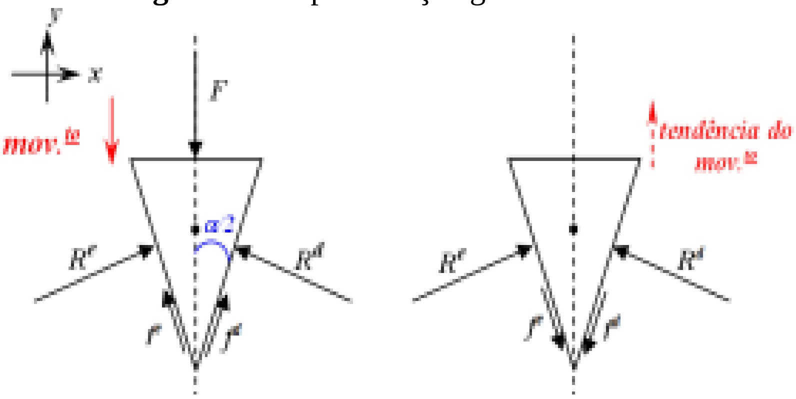
Na mesma direção e sentido em que a força potente é aplicada ocorre o deslocamento do cabo ($\theta_P = 0°$), que identificaremos por d_P, já o deslocamento da carga, d_R, se dá na mesma direção, mas, com sentido oposto ao da força resistiva ($\theta_R = 180°$), que é justamente igual ao peso do corpo. Assim, escrevemos:

$$F_P\, d_P\, \cos(0°) = F_R\, d_R\, \cos(180°) \tag{23}$$

Desta maneira, temos que $F_P\, d_P = -F_R\, d_R$ e, notando que $d_P = d_R$ e, consequentemente, $F_P = -F_R$. Demonstrando que a polia fixa não muda a magnitude da força, ela apenas altera a sua orientação

Outra máquina é a cunha, pode-se, facilmente, encontrar o seu uso no dia, é possível citar como exemplo de cunha o calço, machado e lâminas de corte. Barbieri (2011) destaca que o estudo dessa máquina perpassa os conceitos de vetores:

Figura 24: Representação gráfica da cunha.



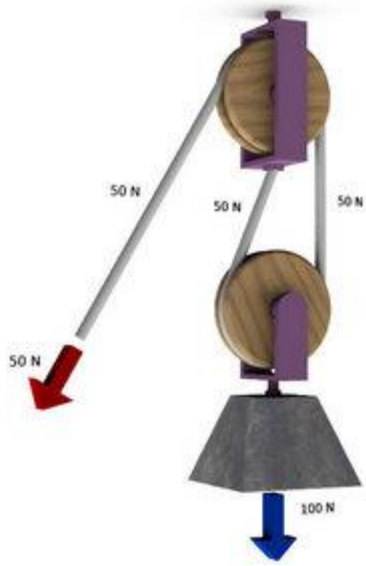
Fonte: Barbieri (2011, p. 3).

A figura representa uma cunha simétrica. A força potente, na direção vertical, e as forças de resistência, de mesma intensidade inclinadas lateralmente, são identificadas na ilustração por F, R^e e R^d, respectivamente (nos cálculos continuaremos utilizando a notação definida anteriormente). Fazendo a decomposição das forças de resistência, podemos ver que as componentes horizontais, direção $\hat{\imath}$ (versor unitário que indica a direção do eixo Ox), se cancelam, enquanto as componentes verticais, direção $\hat{\jmath}$ (versor unitário que indica a direção do eixo Oy) possui sentido oposto ao da força potente. Nota-se que na situação de equilíbrio, a igualdade abaixo será válida

$$F = 2Rsin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (24)$$

Voltemos nossa atenção para a polia móvel, constituída por uma roda que gira ao redor de um eixo que passa por seu centro. Na sua borda existe um sulco em que se encaixa uma corda, cabo flexível, ou corrente. Observe na figura abaixo a representação de uma polia fixa e uma móvel:

Figura 25: Ilustração de Polia.



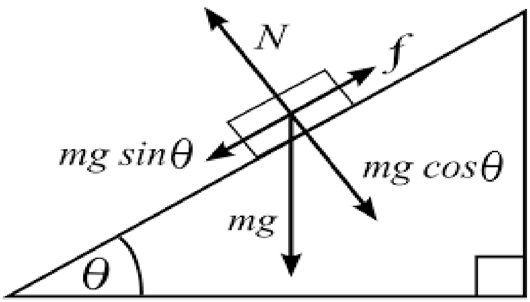
Fonte: Autoria própria, 2022.

Cada polia móvel reduz pela metade o valor da força potencial, como ilustrado acima. Considere o sistema em equilíbrio mecânico, a componente de F_P na direção $\hat{j}$ é:

$$F_{Py} = \frac{F_R}{2}\cos\theta \quad (25)$$

A Trigonometria é aplicada ainda no estudo do plano inclinado. Máquina caracterizada por ser uma superfície plana e inclinada que forma um ângulo menor que 90º com a superfície horizontal. Veja abaixo a ilustração de um plano inclinado:

Figura 26: Ilustração de um sistema de movimento de corpos sobre um plano inclinado.



Fonte: https://www.coladaweb.com/fisica/mecanica/plano-inclinado.

Num plano inclinado de superfície perfeitamente lisa, estuda-se principalmente as forças que atuam sobre um corpo que está sobre ele, além disso para esse estudo recorre-se a lei de Newton, aplicada nas direções y e x. No caso das forças, é necessário que a sua soma nas direções x e y deve ser nula ou igual à massa multiplicada pela aceleração.

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{g}\sin\theta = m\vec{a} \tag{26}$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \tag{27}$$

Dado que o corpo que se encontra sobre o plano inclinado está sujeito a uma aceleração menor que a da gravidade, desse modo Px é o cateto oposto ao ângulo θ, sendo igual a resultado do peso pelo seno do ângulo θ, assim a fórmula que permite calcular a aceleração desse corpo é:

$$a = g\sin\theta$$

Caso seja considerado a força de atrito, F_{at} ou uma força qualquer seja aplicada no sentido oposto à da componente P_x da força peso, o corpo poderá desenvolver o movimento retilíneo uniforme, pois

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \tag{28}$$

Já na direção y, tem-se a atuação da força normal, $\overrightarrow{F_N}$, e da componente y do peso, que acabam por se anularem:

$$F_N - P_y = 0 \;\therefore\; N = mgcos\theta \tag{29}$$

Para um corpo que se encontra em equilíbrio estático em um plano inclinado com atrito, temos:

$$P_x = F_{at}$$

Como, $F_{at} = \mu_e F_N$ e $F_N = P_y = mg\cos\theta$ e, sabendo que μ_e é o coeficiente de atrito estático, temos:

$$F_{at} = \mu_e mgcos\theta \tag{30}$$

Abaixo apresenta-se um exemplo de aplicações da Trigonometria num problema de plano inclinado:

Um corpo é abandonado do repouso sobre um plano inclinado sem atrito e desliza com aceleração de 5 m/s² em uma região onde a gravidade é igual a 10 m/s². O ângulo formado entre o plano e a direção horizontal é de:

a) 90º. b) 60º. c) 30º. d) 15º.

Resolução:

Utilizando primeiramente a fórmula para que o valor da aceleração de um corpo que desliza livremente sobre um plano inclinado seja encontrado, através da interpretação dos dados fornecidos pelo problema basta substituir os valores na fórmula:

$$a = gsin\theta \Rightarrow 5 = 10sin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{5}{10} \Rightarrow sin\theta = 0{,}5$$

Observando a tabela dos ângulos notáveis, encontrasse que o ângulo correspondente é o de 30°. O estudo do plano inclinado pode ocorrer ainda com associações com outras máquinas como as polias

4. INTERDISCIPLINARIDADE

Evidenciadas, portanto, as informações em relação à Trigonometria e suas aplicações no estudo das Máquinas Simples, faz-se imprescindível demonstrar o valor do trabalho baseado em uma abordagem interdisciplinar no ensino de Matemática na educação básica brasileira.

Ao longo da presente seção está detalhadamente discutida tal perspectiva metodológica de ensino, que se caracteriza por integrar conceitos, teorias e fórmulas, na tentativa de compreender o objeto de estudo como um fenômeno sistêmico. Nesse sentido, é apresentado o surgimento da interdisciplinaridade no Brasil, seu amparo legal, sua importância para a aprendizagem, e o papel que desempenha no ensino de Matemática.

4.1. INTERDISCIPLINARIDADE NO BRASIL

No Brasil, a interdisciplinaridade passou a integrar o contexto educacional com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) n° 5692/71, já revogada. Porém, ganhou maior destaque com a LDB n° 9.394/96, seguida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’S). Essas duas últimas normas, por sua vez, desempenharam um papel de influência nas instituições de ensino de todo o país, já que estiveram empenhadas em entender melhor as ligações no processo ensino-aprendizagem.

Para a compreensão do que é a interdisciplinaridade é necessário, portanto, a superação da visão de que ela se baseia apenas em uma abordagem ou leitura estanque de conceitos e teorias. Nesse sentido, Santos, Nunes e Viana (2017, p. 162) a definem como “método de interação em uma, duas ou mais disciplinas, podendo ocorrer com uma simples comunicação de ideias até a integração recíproca de finalidades, objetivos, conceitos, conteúdos e metodologia”. Já Morin (2003) informa que a definir, é algo difícil, pois é um conceito polissêmico e impreciso. Apesar de não trazer uma definição para o tema, ele explica que ela pode significar troca e cooperação, tornando-a, assim, orgânica. Já para Yared (2008, p. 161):

> Etimologicamente, interdisciplinaridade significa, em sentido geral, relação entre as disciplinas. Ainda que o termo interdisciplinaridade seja mais usado para indicar relação entre disciplinas, hoje alguns autores distinguem de outros similares, tais como a pluridisciplinaridade e a transdisciplinaridade, que também podem ser entendidas como forma de relações disciplinares em diversos níveis, como grau

> sucessivo de cooperação e coordenação crescente no sistema de ensino-aprendizagem.

Em suma, para os pensadores, a interdisciplinaridade é o processo de integração das áreas de conhecimento, no qual um fim é procurado: a aprendizagem através das ligações entre essas áreas. Compreendido tal conceito, voltemos ao seu contexto histórico no Brasil.

A lei n° 5692/71 foi criada com o intuito de resolver problemas existentes ligados à educação brasileira, os principais pontos tratados por ela foram: a reformulação do ensino de 1° e 2° grau, esse último que passou a ter como foco a profissionalização, desse modo, tanto a escola pública como a privada passaram a ser profissionalizantes. A LDB 9.394/96 veio determinar as obrigações dos entes federativos da administração pública direta em relação ao ensino público, tratando de forma abrangente em suas seções e capítulos da educação nacional. Os PCNS surgiram com a finalidade de orientar a prática docente. São divididos em dez volumes e tratam das diferentes áreas do conhecimento. Já nesse período, as leis supracitadas e os PCNS, já previam o ensino com foco na Interdisciplinaridade.

O Conselho Nacional de Educação – Câmara de Educação Básica - CNE/CEB, no parecer nº 15/98 também trata do tema, segundo a norma "o conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos" (BRASIL, 1998, p. 38). Esse parecer destaca que a interdisciplinaridade deve partir da necessidade apresentada pela escola, professores e alunos em explicar algo que desafia uma disciplina isolada e atrai a atenção de mais de um olhar (BRASIL, 1998).

As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNs), por sua vez, referem que a interdisciplinaridade "pressupõe a transferência de métodos de uma disciplina para outra" (BRASIL, 2013, p. 28), resultando em integração.

Atualmente o documento que versa sobre o assunto é a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, documento normativo para as redes de ensino e suas instituições públicas e privadas, referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio. A BNCC considera que a criação de uma escola cidadã para jovens fundamenta-se em princípios como a contextualização, a trans/interdisciplinaridade, na aprendizagem colaborativa e na autoria e protagonismo juvenil. Sob a ótica da BNCC interdisciplinaridade é:

> O princípio da interdisciplinaridade, por sua vez, nos convida a considerar o caráter integrado e complexo do conhecimento e a superar a excessiva fragmentação e a especialização dos saberes nas disciplinas tradicionais da escola. Reconhecendo que a realidade é sincrética e complexa, a interdisciplinaridade permite que possamos combinar a profundidade da especialização de cada área do conhecimento com um olhar atento às conexões, interações e implicações entre os diferentes campos do saber. A perspectiva interdisciplinar amplia a potência das aprendizagens na medida em que favorece a construção de conexões entre os saberes, ativando redes de sentido e significado (BRASIL, 2018, p. 3).

Assim, as próprias competências e habilidades do documento seguem a lógica interdisciplinar, pois se fundamentam em aplicações no cotidiano e nas relações com outras áreas do conhecimento. Como exemplo é possível mencionar as seguintes habilidades que demonstram a interdisciplinaridade: **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros; **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria; **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. A **competência 4** traz: “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas." Portanto, o desenvolvimento da educação básica, levando em consideração a BNCC, não é possível sem um envolvimento interdisciplinar.

A Base Nacional Comum Curricular prevê o estudo do conteúdo das Máquinas Simples para o 7° ano do Ensino Fundamental na disciplina de Ciências, junto com as Formas de propagação do calor, Equilíbrio termodinâmico e vida na Terra, História dos combustíveis e das Máquinas térmicas. Como habilidade traz “**(EF07CI01)** Discutir a aplicação, ao longo da história, das máquinas simples e propor soluções e invenções para a realização de tarefas mecânicas cotidianas” (BRASIL, 2018, p. 347).

Já a Trigonometria é estudada amplamente no 2° ano do Ensino Médio, no entanto, alguns conceitos introdutórios são estudados ainda nos anos finais do Ensino Fundamental como Congruência de triângulos e Demonstrações de propriedades de quadriláteros, Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares no 8° ano. No 9°, Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal, Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo, Semelhança de triângulos. O conteúdo de Máquinas Simples é estudado novamente na disciplina de Física do 1° ano. A partir daí, no 2º ano, os professores de Matemática podem explorar as ligações do conteúdo de Trigonometria com os conceitos de Máquinas Simples.

4.2. RELEVÂNCIA DA INTERDISCPLINARIDADE NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

Como ponto de partida para essa discussão é necessário que haja um entendimento sobre a fragmentação das ciências a partir do industrialismo. Segundo Fernandes (2010) a ciência se dividiu no seu interior, chegando ao ponto de uma intensiva especialização dentro das áreas de conhecimento, formando profissionais que em favor da especialização desconhecem a função da própria disciplina. O autor complementa que o conhecimento científico passou a reproduzir a fragmentação social proveniente da noção de desenvolvimento e do seu próprio método instrumental, assim como do industrialismo baseado na cadeia de produção, onde os setores não se inter-relacionam, e os indivíduos não compreendem além de suas tarefas.

Lück (2004) destaca que o processo civilizatório e de humanização está em contínuo movimento e, com o passar do tempo, ele é impulsionado por novas ideias. A autora complementa esse pensamento ao afirmar que a interdisciplinaridade é uma “ideia-força” que se manifesta a datar do enriquecimento conceitual e da consciência evidente da fragmentação criada e enfrentada pelo homem, em especial, na contemporaneidade pelos educadores. Para a estudiosa como consequência dessa fragmentação, foi rompido o elo da simplicidade e estabeleceu-se a crescente complexificação da realidade, tornando o homem despreparado para enfrentar os problemas que exigem uma formação polivalente. Essa realidade expõe o ensino à necessidade de sua própria reorganização, uma vez que sendo o meio pelo qual o conhecimento é produzido, também se encontra fragmentado, marcado pelas polarizações, territorialização das disciplinas e pela dissociação da realidade concreta.

Desse modo, provém daí, o carecimento da superação dessa fragmentação, sendo a alternativa a interdisciplinaridade. Lück (2004) defende a superação da atomização do conhecimento tanto no contexto da pesquisa, como no ensino, porém, esse processo deve-se constituir um movimento assumido e construído pelos professores, algo espontâneo, não imposto a eles.

A construção do conhecimento se deu ao longo de toda a história. No caso do conhecimento matemático o seu emprego, se dá há séculos. Desse modo, levando em consideração o que é apresentado pelos principais teóricos, é possível considerar então que as ações históricas têm caráter interdisciplinar. Assim, o estudo de Matemática também acontece dessa forma, através de suas aplicações. Sobre o enfoque interdisciplinar e a forma como se apresenta no contexto educacional Lück (2004, p. 20) traz:

> No contexto da educação, manifesta-se, portanto, como uma contribuição para a reflexão e o encaminhamento de solução às dificuldades relacionadas à pesquisa e ao ensino, e que dizem respeito à maneira como o conhecimento é tratado em ambas funções da educação.

Portanto, para a construção dessa perspectiva no contexto escolar, nesse caso entre as disciplinas de Física e Matemática, o desenvolvimento de tal perspectiva perpassa também, pelo mapeamento dos problemas relacionados à fragmentação e dissociação, já que “estão subjacentes a todo processo social” (LÜCK, 2004, p. 34). O objetivo da interdisciplinaridade, para a pensadora, é a superação da visão restrita de mundo e o discernimento da complexidade da realidade, com isso, concomitantemente, resgata-se a centralidade do homem na criação do conhecimento. (UMBELINO; ZABINI 2014, p. 6) explicam que o principal objetivo da interdisciplinaridade é:

> englobar o máximo de disciplinas que possam contribuir com o conteúdo a ser desenvolvido com determinada turma, além de despertar na comunidade escolar – professores, equipe pedagógica e alunos – um trabalho conjunto possibilitando uma visão holística dos conteúdos.

Neste sentido, a síntese dessas etapas e a fundamentação dessa abordagem estão na integração e engajamento de educadores, baseada num trabalho conjunto “(...) de interação das disciplinas do currículo escolar entre si com a realidade, de modo a superar a fragmentação do ensino, objetivando a formação integral dos alunos” (LÜCK, 2004, p. 64).

Essa perspectiva apresenta contribuições tanto para a ciência como para o ensino. Lück (2004) lista as principais para a produção do conhecimento científico e elucida que a interdisciplinaridade serve como uma direção para solucionar duas ordens de dificuldades, estando a primeira relacionada ao conhecimento já produzido e a outra, à produção de novos conhecimentos. Dessa maneira, ela é proposta com o fim de auxiliar para superação da dissociação do conhecimento produzido e conduzir a criação de uma nova ordem de conhecimento. Para tanto, superar essa circunstância é possível através da orientação da lógica interdisciplinar. Portanto, para a pensadora a primeira contribuição é *auxiliar o estabelecimento da unidade do conhecimento construído*, pois o conhecimento é comum entre as disciplinas. A segunda é *o avanço do conhecimento*, uma vez que a partir daí, surgem novos horizontes, analogias, linguagens e estruturas conceituais.

Para o campo do ensino, Lück (2004), explica que a interdisciplinaridade consiste na condição da melhoria da qualidade de ensino por meio da ultrapassagem contínua da sua clássica desintegração, visto que se destina a formação global do homem. Por isso, os benefícios se manifestam *no plano imediato*, no qual a formação integral acontece quando os educadores estabelecem *o diálogo entre as suas disciplinas*, suprimindo assim as barreiras artificialmente criadas no meio dos conhecimentos produzidos.

O *plano mediato se manifesta* no desenvolvimento da qualidade de ensino, propiciando ao estudante uma visão global de mundo e de si mesmo no mundo, algo que permite o enfrentamento da realidade e a superação do sentido de fragmentação. A interdisciplinaridade colabora ainda para a utilização de novas formas de proximidade da realidade social, permitindo ao estudante o protagonismo da própria história, numa relação de interdependência com a sociedade. Nesse sentido, (FAZENDA, 2002, p. 18-19) esclarece os benefícios:

> O processo interdisciplinar desempenha papel decisivo para dar corpo ao sonho de fundar uma obra de educação à luz da sabedoria, da coragem e da humildade. [...] A lógica que a interdisciplinaridade imprime a da invenção, da descoberta, da pesquisa, da produção científica, porém gestada num ato de vontade, num desejo planejado e construído em liberdade.

Fazenda (2011, p. 74) menciona um estudo realizado sobre o tema na década de 1970 por um grupo de pesquisadores de diferentes nacionalidades, o qual concluiu que o valor aplicabilidade interdisciplinaridade pode ser expresso através das seguintes razões:

> “(...) permitir aos estudantes melhor desenvolver suas atividades, melhor assegurar sua orientação, a fim de definir o papel que deverão desempenhar na sociedade; também necessário que “aprendam a aprender; é importante que se situem no mundo de hoje, criticando e compreendendo as inumeráveis informações que os agridem cotidianamente.”

Ou seja, somente o enfoque interdisciplinar possibilita uma identificação do vivido com o estudado depois que o vivido resulte da inter-relação de diferentes experiências.

4.3. INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Tornar o ensino de Matemática mais atrativo e dinâmico frente à fragmentação do conhecimento é, no mínimo, uma tarefa desafiadora para os professores dessa disciplina. Alves (2008), na tentativa de explicar a origem das dificuldades observadas no ensino de Matemática, explica que um dos problemas é a não há diferenciação entre a ciência e seu ensino como disciplina escolar, a consequência é que esse cenário tem conduzido simplesmente a uma transposição do conteúdo puramente científico para o contexto escolar.

> A compreensão da diferença entre ciência e matéria de ensino é conveniente porque observamos que a matemática, considerada "matéria nobre" pela possibilidade que tem de desenvolver o raciocínio, a lógica, a precisão e a objetividade, é tratada nas escolas como ciência. Isto traz implicações para a visão que os professores têm sobre os conteúdos e os métodos de ensino, os quais a afastam de seu uso no cotidiano, o que daria um sentido maior para a aprendizagem (ALVES, 2008, p. 101).

Portanto, o tratamento do conhecimento matemático como algo dissociado da realidade dos estudantes, abstrato, sem relação, diálogo e conexões com outras áreas, tais como às Ciências da Natureza, tem como decorrência o distanciamento por parte do estudante que sempre se faz o questionamento de onde irá utilizar a Matemática estudada na escola. Essa realidade implica em baixos índices de aproveitamento e de aprendizagem. Na mesma linha (Peterossi e Fazenda, 1996, p. 16) trazem:

> (...) muitos professores e propostas curriculares têm idealmente perseguido um projeto científico, em termos de experiência de atividades exigidas dos alunos, sem conseguir atingi-las e perdendo de vista necessidades mais fundamentais de introduzir o aluno no domínio do cálculo e das noções básicas que levam, através de soluções matemáticas, a resolver situações problemáticas que envolvam experiências do dia a dia.

Alves (2008) elucida, assim como Fazenda e Peterossi (1996), que a Matemática sempre foi, desde a Grécia antiga, instrumento para o desenvolvimento do raciocínio lógico, dessa maneira, as classes sociais mais privilegiadas sempre procuraram estudá-la com esse fim, já para as outras parcelas das sociedades esse conhecimento sempre foi negado e tido como inacessível, prática que persistiu por muito tempo.

Para o ensino contemporâneo a autora destaca mais um dos seus possíveis problemas, “o conhecimento é visto como algo que se acumula, um bem material” (ALVES, 2008, p.

104). Assim, segundo ela, essa linha ainda influencia fortemente os professores de Matemática em sua prática pedagógica.

Alves (2008) aponta ainda mais uma adversidade, esse por sua vez, ligado a conjuntura histórica, segundo ela, no período de pujança econômica e industrialização dos anos de 60 e 70, o país priorizou como traz a lei n° 5692/71, a formação de mão de obra, dando continuidade ao histórico excludente de ensino para as camadas sociais não privilegiadas, reforçando o modelo tecnicista[6].

Isto posto, apresenta-se como alternativa a interdisciplinaridade no ensino de Matemática, que além de promover a interação entre disciplinas apoia-se também na interação estudante-professor. Além do que, é uma proposta para ultrapassar o raciocínio mecanizado concebido pelo modelo tecnicista, o qual estimula apenas a reprodução de regras operatórias do cálculo algébrico, buscando exclusivamente a memorização, em detrimento da compreensão e a contextualização, tão necessárias para a aprendizagem significativa[7] em Matemática.

> Se é que queremos relacionar a matemática com a vida, se é que desejamos que ela se torne uma ferramenta auxiliadora para o aluno entender o que está acontecendo com o universo do qual faz parte. Para isso a interdisciplinaridade pode nos ajudar, fazendo com que entremos em contato com o lado dinâmico e vivo das coisas (...) (SOUZA; FAZENDA, 1995, p. 108)

Porém, para a implementação do trabalho com esse foco, é preciso que os professores tenham bem claro esse objetivo, pois no percurso desafios são encontrados. Nesse sentido, Alves (2008, p. 109) expõe que a concretização de ações de caráter interdisciplinar depende de alguns fatores:

> (...) é necessário planejamento, envolvimento e muita dedicação, tanto de professores quanto de alunos, os quais devem se motivar conjuntamente. Isto nos remete ao perfil de uma sala de aula interdisciplinar, onde há a transgressão das regras de controle utilizadas, porque a autoridade é conquistada.

---

[6] É uma linha de ensino, adotada por volta de 1970, que privilegiava excessivamente a tecnologia educacional e transformava professores e alunos em meros executores e receptores de projetos elaborados de forma autoritária e sem qualquer vínculo com o contexto social a que se destinavam.

[7] Por aprendizagem significativa entendemos a aprendizagem que resulta em uma boa compreensão por parte dos alunos, devido à relação dos conteúdos com o contexto e com a sua aplicabilidade, portanto, uma aprendizagem que dá significado ao assunto estudado.

O ensino com foco na interdisciplinaridade compreende ainda outros aspectos como traz Alves (2008), a exemplo: respeito ao modo de ser de cada um na busca de sua autonomia; existência de um projeto inicial claro, coerente e detalhado, sempre provisório, pois o conhecimento interdisciplinar busca a totalidade do conhecimento, respeitando-se a especificidade das disciplinas.

Seguindo a lógica da interdisciplinaridade, para o ensino de Matemática, faz-se extremamente necessário apresentar o que Lima (1999) discute de forma compreensível e com muita objetividade sobre o tema. Levando em conta que ensiná-la, têm especificidades e requer recursos próprios, o autor indica um tripé essencial no qual o ensino de Matemática deve se amparar: conceituação, manipulação e aplicações.

Lima (1999) explica que o emprego por parte dos professores desses componentes de maneira não divorciada e equilibrada, possibilitará aos estudantes a compreensão do "método matemático". Somado a isso, irão "dotá-los de habilidades para lidar desembaraçadamente com os mecanismos do cálculo e dar-lhes condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real (...)" (LIMA, 1999, p. 1).

Segundo o matemático, a conceituação compreende a formulação correta das definições, o rigor no enunciado das proposições, do raciocínio dedutivo, a exemplo: fórmulas, as ligações entre os conceitos e conteúdos, fazer com que o estudante entenda que conclusões são provenientes das hipóteses formuladas, além da interpretação e reformulação de fatos sob diversas formas e termos. É saber instruir o discente a perceber as relações entre o conhecimento matemático, considerando os seus diversos contextos.

Dentro desse componente está ainda a prática e a compreensão da demonstração, processo pelo qual se legitima uma verdade matemática, desse modo, há a consciência da lógica da razão. Em suma, essa seria a etapa da aula de transmissão da teoria. Por fim, o autor complementa que a conceituação é indispensável para bons resultados nas aplicações.

A manipulação consiste na resolução de problemas dos conteúdos estudados. Desse modo, a manipulação "está para o ensino e o aprendizado da Matemática, assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música (ou mesmo como o repetido treinamento dos chamados "fundamentos" está para certos esportes, como tênis e o voleibol)" (LIMA, 1999, p. 2). Logo, para o autor, a habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas, construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas são verdadeiros reflexos condicionados, que acabam por proporcionar aos estudantes de Matemática dedicação a pontos importantes na resolução de problemas.

No entanto, é preciso destacar que o ensino e a aprendizagem em Matemática não estão ligados apenas à manipulação como muitos veem, inclusive no próprio ambiente escolar. Nesse processo, todos os elementos do tripé devem estar conectados. O problema é que no Brasil há um enaltecimento da manipulação, isso se deve, por vezes, a forma como a maioria dos livros didáticos trata a Matemática, priorizando a reprodução do modelo tecnicista em prejuízo da contextualização.

As aplicações, último componente é, certamente, a etapa que pode aproximar os estudantes da disciplina e, consequentemente, compreenderem a importância e o sentido ao seu estudo. As aplicações não se resumem apenas ao seu uso no cotidiano como afirma Lima (1999, p. 2) “As aplicações são empregos das noções e teorias da Matemática que vão desde problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais”. Isto significa contextualizar o conhecimento matemático:

> As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LIMA, 1999, p. 2)

O matemático defende que o trabalho com as aplicações precisa ser uma constante em sala de aula e desenvolvido num ambiente de resolução de situações-problemas. Dessa maneira, o uso desses componentes proporcionará aos discentes uma aprendizagem significativa e melhor desempenho, não mais num modelo mecânico.

5. METOOLOGIA DA PESQUISA

Essa pesquisa do ponto de vista de sua natureza caracteriza-se como aplicada. Prodanov e Freitas (2013, p. 51) explicam que esse tipo de trabalho tem como objetivo "gerar conhecimentos para aplicação prática dirigida à solução de problemas específicos. Envolve verdades e interesses locais". Assim, apresenta-se como um estudo capaz de corroborar com o processo de aprendizagem de Trigonometria através de suas aplicações em Máquinas Simples.

Gil (2008, p. 08) explica o método científico como "[...] o conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos adotados para se atingir o conhecimento". Dessa forma, esta seção dedica-se a descrever os métodos que foram empregados nesta pesquisa.

5.1. A PESQUISA

Conforme a problemática formulada, a abordagem da realidade e o número de sujeitos, a metodologia exigida foi a qualitativa e quantitativa. Os resultados são descritos na forma qualitativa, em razão da análise das entrevistas com os professores das disciplinas de Física e Matemática da turma, nelas os docentes expressaram as suas opiniões sobre a possibilidade do trabalho com foco na interdisciplinaridade. Deve-se também ao fato da análise da resolução dos problemas propostos no segundo formulário, que tiveram o objetivo de identificar as contribuições para a aprendizagem das aplicações da Trigonometria. É caracterizada também como quantitativa pelo fato de os participantes terem respondido às entrevistas com questões fechadas nos formulários aplicados, e os dados obtidos terem sido expressos em porcentagem.

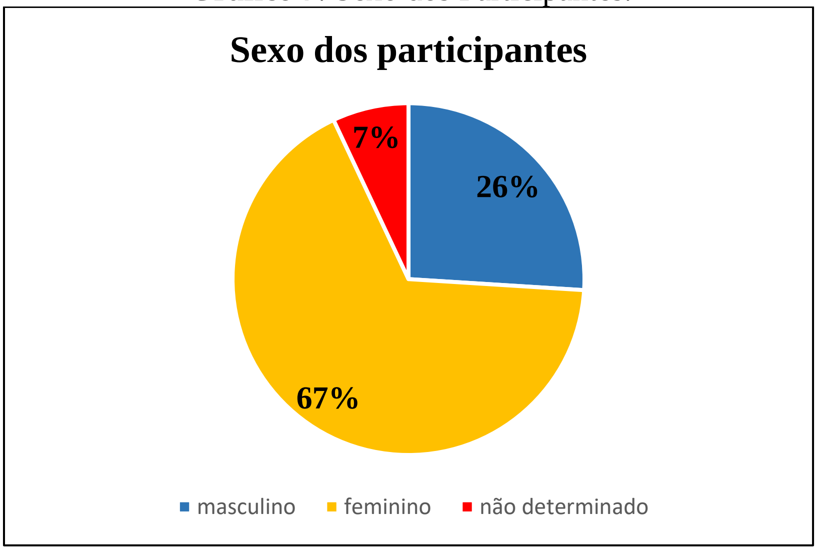
A proposta de investigação foi de uma pesquisa de campo, considerando as possibilidades defendidas por Gil (2002, p. 129) "os estudos de campo, de modo geral, apresentam objetivos muito mais amplos do que os levantamentos. Por essa razão, nesses estudos a formulação exata do projeto de pesquisa é deixada para um estágio avançado de seu processo".

Quanto aos seus objetivos foi classificada como exploratória e descritiva, visto que, esses modelos foram os que mais se aproximaram dos objetivos do projeto. Sobre a pesquisa exploratória Gil (2002, p. 41) esclarece "Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições". Sobre pesquisa descritiva Prodanov e Freitas (2013, p. 52) afirmam que primordialmente "observa, registra, analisa e ordena dados, sem manipulá-los, isto é, sem interferência do pesquisador. [A pesquisa descritiva] Procura descobrir a frequência com que um fato ocorre, sua natureza, suas características, causas, relações com outros fatos". Dessa forma, o propósito foi constatar as contribuições na aprendizagem de Trigonometria por meio de suas aplicações no conteúdo de Máquinas Simples, visando proporcionar a construção de uma metodologia que potencialize o processo de ensino-aprendizagem. Por fim, foi feita a tabulação, redução, categorização e interpretação desses dados. Com amparo no material coletado e no referencial teórico o relatório final foi redigido.

5.2. LOCAL E SUJEITO DA PESQUISA

A pesquisa aconteceu em um Colégio da rede estadual de ensino da Bahia, localizada no município de Barreiras. Foi escolhida uma turma de 3º ano B, do turno matutino da instituição, com 30 estudantes, sendo 14 do sexo masculino e 16 do feminino, sendo que 15 de ambos os sexos consentiram em participar das duas etapas. Nos gráficos 7 e 8 estão algumas informações sobre os participantes:

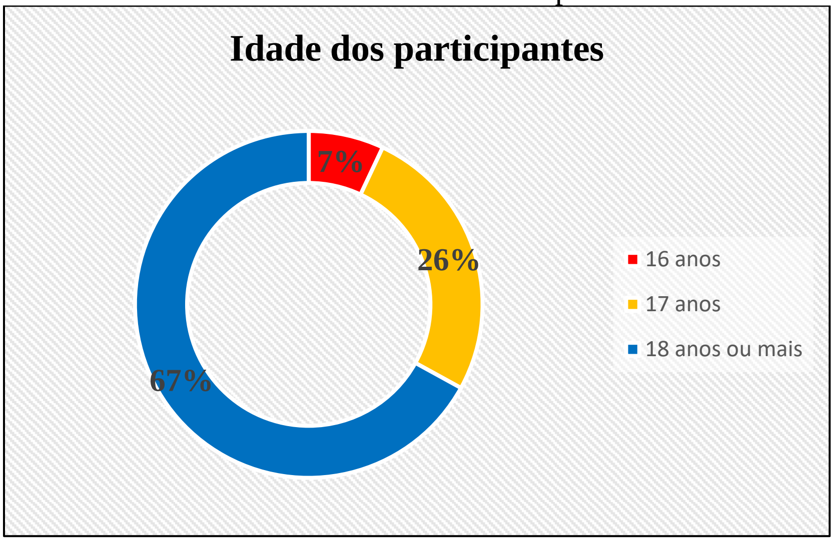
Gráfico 7: Sexo dos Participantes.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Consideramos de acordo com os nossos objetivos e com a complexidade deste estudo que essa amostra consegue reproduzir a realidade do universo alvo desta pesquisa, ofertando assim, dados que contribuam para a análise.

Gráfico 8: Idade dos Participantes.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Além disso, houve o envolvimento dos professores de Matemática e Física da turma ao responderem cada um à uma entrevista efetivada pelo Google formulários. Para a seleção da turma foi estabelecido o seguinte critério: ter estudado o conteúdo de Trigonometria, pois de acordo com as hipóteses formuladas, seria indispensável. Desse modo, procuramos verificar se estudá-la do ponto de vista da Matemática aplicada tornava o aprendizado mais significativo e efetivo. As turmas de 2º ano do período não foram escolhidas, porque ainda não haviam estudado o conteúdo em questão. Já a escolha da instituição foi graças a realização anterior do Estágio Supervisionado IV no mesmo local.

5.3. METÓDOS E INSTRUMENTOS UTILIZADOS NA COLETA DE DADOS

A coleta dos dados ocorreu em um intervalo de 15 dias, feito através de dois formulários propostos aos estudantes em sala, no horário das aulas de Matemática, em dias diferentes. O primeiro conteve seis questões, todas fechadas e de múltipla escolha, elaborado com o objetivo de conhecer a avaliação do grupo em relação a sua aprendizagem de Trigonometria e a forma pela qual poderiam compreender melhor o conteúdo.

Em seguida, foi ministrada uma aula expositiva de aproximadamente 100 minutos para o grupo, que teve por objetivo revisar os conceitos indispensáveis de Trigonometria no estudo das Máquinas Simples. Nela, foram resolvidos alguns exemplos, tratando inclusive das aplicações do conteúdo de Trigonometria nas Máquinas Simples.

O segundo formulário, realizado 15 dias depois, foi composto por problemas de múltipla escolha, tratando de Trigonometria e das suas aplicações nas Máquinas Simples. Na segunda parte do referido formulário, os estudantes responderam a mais uma entrevista com três questões fechadas, também de múltipla escolha, na qual avaliaram as contribuições dessas aplicações, demonstradas em sala, para a aprendizagem de Trigonometria.

Os métodos de coleta de dados por formulários e entrevistas foram escolhidos por melhor se enquadrarem para o modelo do trabalho em questão. Sobre esses instrumentos Gil (2002, p. 115) define formulário como: “Formulário, por fim, pode ser definido como a técnica de coleta de dados em que o pesquisador formula questões previamente elaboradas e anota as respostas”. Já a respeito da entrevista, diz que “entrevista, por sua vez, pode ser entendida como a técnica que envolve duas pessoas numa situação "face a face" em que uma delas formula questões e a outra responde” (GIL, 2002, p. 115-116).

Ademais, os professores de Física e Matemática da turma participaram de uma entrevista pelo *Google* formulário com quatro questões abertas, a fim de fornecer dados, de modo a favorecer a investigação sobre a aprendizagem dos estudantes com a proposta empregada.

6. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Nesta seção é apresentada a análise e discussão dos resultados obtidos. Considerando a aplicação dos formulários, a aula ministrada e as entrevistas, o presente capítulo está organizado em dois tópicos: no primeiro está a análise dos formulários aplicados juntos aos estudantes e da aula realizada, o segundo e último, trata das entrevistas feitas com os professores de Física e Matemática da turma. Nos apêndices A, B, C e D estão, respectivamente, os formulários e as entrevistas.

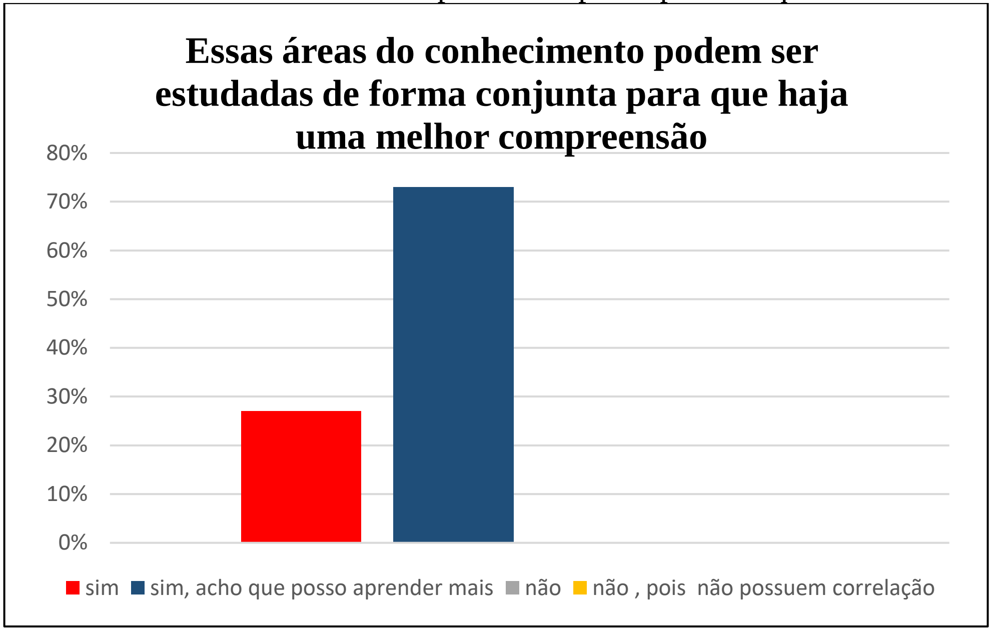
6.1. ANÁLISE DOS FORMULÁRIOS AVALIATIVOS E DA AULA EXPOSITIVA

Por questão de conveniência, o primeiro formulário foi aplicado com o intuito de reconhecer a percepção dos estudantes em relação ao conteúdo de Máquinas Simples e/ou de Trigonometria, além de conceder destaque à importância da interdisciplinaridade entre a Física e a Matemática durante a realização de atividades em sala de aula, estabelecendo relações entre as duas áreas de conhecimento.

Esse formulário dispôs de seis questões objetivas fechadas, nas quais os participantes marcaram, de acordo com as suas experiências, respostas sobre a temática trabalhada. Todos os questionamentos estiveram à volta dos objetivos estabelecidos para este trabalho, sendo assim, os estudantes responderam questões que trataram da perspectiva de um trabalho conjunto entre a Física e a Matemática; do entendimento deles sobre as ligações que existem entre elas; fizeram uma autoavaliação sobre a sua aprendizagem em Trigonometria e o nível de complexidade do conteúdo; responderam sobre as suas noções do emprego do conteúdo matemático ao resolverem problemas de Máquinas Simples; e assinalaram a forma que acreditavam ser melhor para um avanço na aprendizagem.

Observe no gráfico 9 a visão do grupo sobre a viabilidade do estudo dessas áreas de forma integrada para a obtenção de melhores resultados:

Gráfico 9: Respostas dos participantes a questão 2.



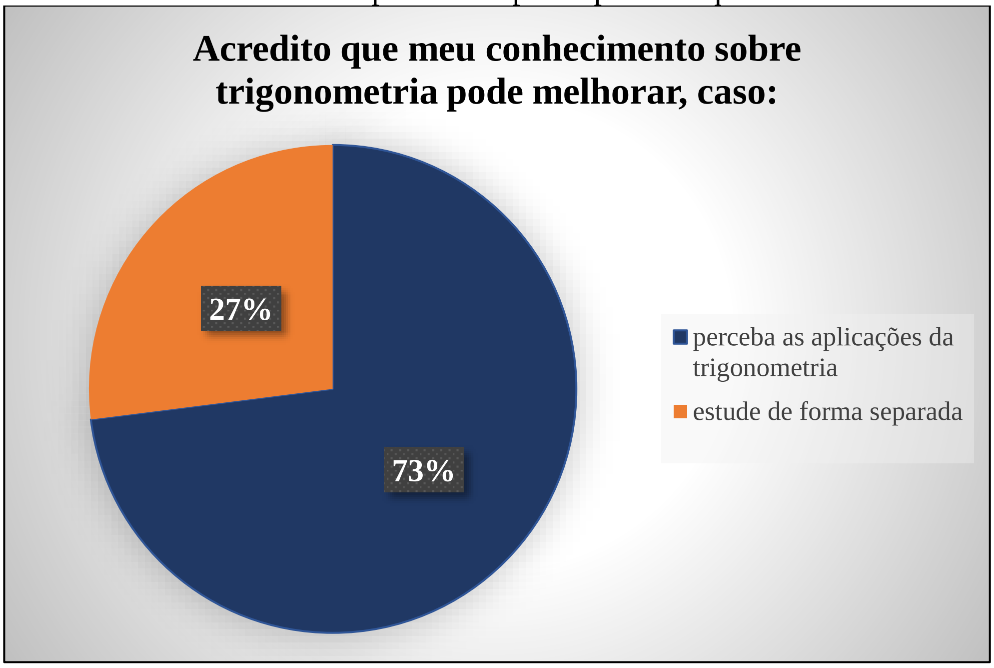
Fonte: Autoria própria, 2022.

Na segunda questão os estudantes avaliaram a possibilidade do ensino das duas áreas através de uma perspectiva com foco na interdisciplinaridade, a fim de se alcançar melhores rendimentos na aprendizagem de Trigonometria. 73% do grupo reconheceu que o trabalho pode estar pautado nessa abordagem e os outros 27% reforçaram que essa alternativa é viável. Logo, consideraram, de forma unânime, que o trabalho conjunto influenciaria positivamente em sua aprendizagem. A explicação para esse resultado pode estar baseada principalmente nos déficits em relação aos conteúdos de Matemática, algo que gera um efeito cumulativo ao longo do tempo na aprendizagem de Física. Assim, tal realidade acaba por implicar em um baixo aproveitamento, mas evidencia da mesma forma o anseio por um estudo mais atrativo, dinâmico e integrado.

Esse percentual revela ainda o que explicam Souza e Fazenda (1995), se é desejo docente relacionar a Matemática com a vida dos estudantes, para que ela seja um instrumento de aplicabilidade, a interdisciplinaridade é um caminho viável para a concretização desse objetivo. 0% optaram pela terceira e quarta alternativa.

Na mesma linha foi proposta a questão 4, na qual eles avaliaram a possibilidade de uma melhor aprendizagem do conteúdo por meio de uma relação de caráter interdisciplinar, com foco nas aplicações de Trigonometria e o no seu diálogo com outras áreas. 73% comunicaram que um trabalho que demonstre o valor das aplicações irá ocasionar rendimentos significativos. Esses dados apontam para o que defende Lima (1999) para o ensino de Matemática: uma das etapas deve mostrar o valor do uso do conhecimento estudado na escola para a resolução de situações-problemas do cotidiano, porquanto estimula a criatividade, nutre a autoestima, a imaginação e recompensa o esforço de aprender. Coincide também com o pensamento de Alves (2008) ao explicar que a Matemática no ambiente escolar precisa ser vista como uma disciplina de aplicabilidade no dia a dia, para que haja um sentido maior na arte de aprender. Os outros 27% consideraram não ser viável, esse resultado indica que preferem estudá-la de forma independente.

Gráfico 10: Respostas dos participantes a questão 4.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Para a continuidade e aprofundamento das discussões sobre a importância da interdisciplinaridade no processo de ensino-aprendizagem e a percepção dos participantes em relação ao estudo de Matemática e a Física fundamentados nessa abordagem, exibiremos nas próximas tabelas o percentual de um total de 15 respostas obtidas nas outras quatro questões do formulário:

Tabela 8: Resultado obtido na questão 1.

Afirmativa	Sim	Não, possuem fortes ligações
Para mim, a Matemática e a Física são ciências totalmente dissociadas.	13%	87%

Fonte: Autoria própria, 2022.

A tabela 8 revela o percentual de repostas da primeira questão, que versava acerca do conhecimento dos discentes em relação às ligações entre a Matemática e a Física. Observa-se como resposta, quase unânime, a segunda alternativa, isto é, o elo entre as áreas. Julgamos fundamental conhecer primeiramente como o grupo avistava a proximidade ou não das disciplinas para que, caso não tivessem tal percepção, esse cenário pudesse ser alterado por intermédio da aula planejada para a segunda etapa, aula essa, construída sobre o tripé que deve nortear o ensino da Matemática: conceituação, manipulação e aplicações.

Os resultados da questão 3 estão expostos na tabela 9, mais uma que se encaixa no objetivo de constatar a percepção e avaliação da aprendizagem de Trigonometria. Essa questão contrasta com a sétima do formulário aplicado após a aula, que investigou se o ensino com foco/destaque na interdisciplinaridade implicou em resultados satisfatórios na aprendizagem dos participantes. Destaca-se que nenhum indivíduo considerou a sua aprendizagem em Trigonometria como excelente, 60% avaliaram como mal ou insuficiente, algo que vimos inicialmente como um contexto ideal para uma possível reversão do quadro. Por último, 40% informaram que apesar do período pandêmico, obtiveram bons resultados.

Tabela 9: Resultado obtido na questão 3.

Afirmativa	Insuficiente	Mal, não tenho conseguidos bons resultados	Boa, consegui aprender quase a totalidade do que fora estudado	Excelente
Avalio minha aprendizagem em Trigonometria como.	20 %	40%	40%	0%

Fonte: Autoria própria, 2022.

Na mesma linha da questão anterior está a 5, nela os participantes ajuizaram, de acordo com as suas experiências, a Trigonometria em três níveis de complexidade. 13% julgaram como fácil, 47% mediano e 40% difícil. Isso demonstra que a maioria não percebe o conteúdo como algo distante e incompreensível, e facilita o ensino, pois os estudantes estão dispostos a internalizarem os conceitos estudados.

O percentual que considerou o conteúdo como difícil pode ser explicado pelo pensamento de Fazenda e Peterossi (1996), as autoras dissertam que a falta de noções básicas que levem, através de soluções matemáticas, a resolução de situações problemas no dia a dia, acabam por criar um efeito cascata na aprendizagem. Se falta ao discente as noções de função, um obstáculo surge no estudo das funções trigonométricas, não tendo assim, aproximação com o método matemático como afirma Lima (1999), e um conhecimento bem estruturado.

Tabela 10: Resultado obtido na questão 5.

Afirmativa	Fácil	Mediano	Difícil
Considero a Trigonometria como um conteúdo.	13%	47%	40%

Fonte: Autoria própria, 2022.

Na penúltima questão procuramos saber, se os estudantes ao resolverem os problemas do conteúdo de Máquinas Simples, percebiam a utilização dos conceitos trigonométricos, mais especificamente, o último componente do ensino de Matemática, as suas aplicações. Com isso, considerando que 72% raramente percebem essa manipulação, um resultado preocupante, podemos certificar que é possível e favorável explorar o ensino fundamentado na abordagem interdisciplinar entre as disciplinas de Matemática e Física. Desse modo, o trabalho respaldado nessa perspectiva implica, como afirma Lück (2004), na melhoria do ensino e, consequentemente, na aprendizagem de Matemática.

Tabela 11: Resultado obtido na questão 6.

Afirmativa	Raramente	Sim	Não
Ao resolver problemas envolvendo Máquinas Simples, percebo a manipulação dos conhecimentos de Trigonometria.	72%	14%	14%

Fonte: Autoria própria, 2022.

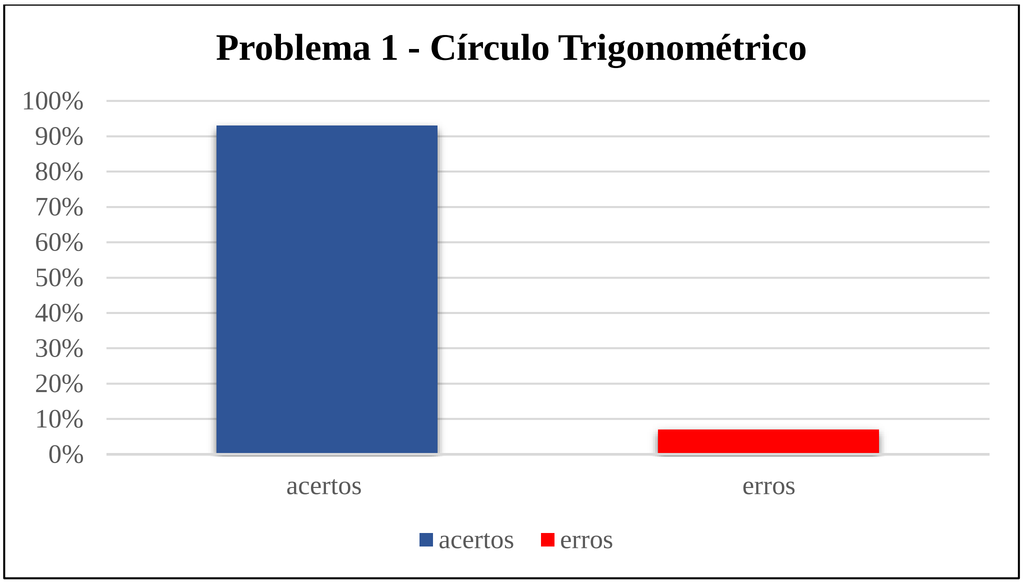
De acordo com o cronograma e o planejamento, a etapa seguinte deste trabalho foi a realização de uma aula expositiva na instituição, com o consentimento da Direção e do professor de Matemática da turma. Durante os 100 minutos foram relembrados os conceitos de Trigonometria indispensáveis para o estudo das Máquinas Simples. A revisão constituiu-se, inicialmente, de noções básicas, como a forma de unidade de medida angular utilizada no círculo trigonométrico, o radiano, consequentemente, a conversão de radianos para graus, informações sobre os quadrantes, arco e sentido do círculo. Nesse ensejo, recordamos a tabela dos ângulos notáveis, a forma de construí-la e o seu possível uso em problemas de Trigonometria e Máquinas Simples.

Dando continuidade, foi ensinado a forma de descobrir o seno e cosseno de um determinado ângulo, as respectivas informações sobre o valor máximo e mínimo que podem assumir, além das projeções sobre o eixo das ordenas $(\sin\alpha)$ e no das abcissas $(\cos\alpha)$. Do mesmo modo, através do ângulo oposto pelo vértice, relembramos como determina-se o seno ou cosseno de qualquer ângulo. Exemplificamos casos para encontrar a tangente de um certo ângulo α, processo no qual é traçada uma reta que passa pela origem de um plano cartesiano ortogonal uOv, que deve encontrar o eixo das tangentes. Para finalizar, destacamos as aplicações da Trigonometria no dia a dia e, principalmente, nas Máquinas Simples (através da resolução de alguns exemplos). Outrossim, foi discutido brevemente a história dessas Máquinas e sugerido ao grupo uma pesquisa sobre elas, para que então, pudéssemos prosseguir.

O envolvimento e participação do grupo foi integral, muitos questionamentos, sugestões, soluções e algumas dúvidas. Acreditamos que esse retorno aconteceu em razão da demonstração do valor do conhecimento matemático para as outras áreas e disciplinas, em especial a Física, tornando o ensino mais dinâmico e atrativo.

Em um dia diferente, logo após a aula em questão, o segundo formulário foi proposto, a fim de diagnosticar se os estudantes conseguiram perceber a relação/aplicação dos conteúdos ao resolverem os problemas indicados. Posteriormente, através da análise dos resultados das questões e impressões sobre a aprendizagem pós-aula, verificamos as contribuições da interdisciplinaridade através da resolução de Trigonometria aplicadas em Máquinas Simples. Nos próximos gráficos estão expressos os índices de acertos dos problemas:

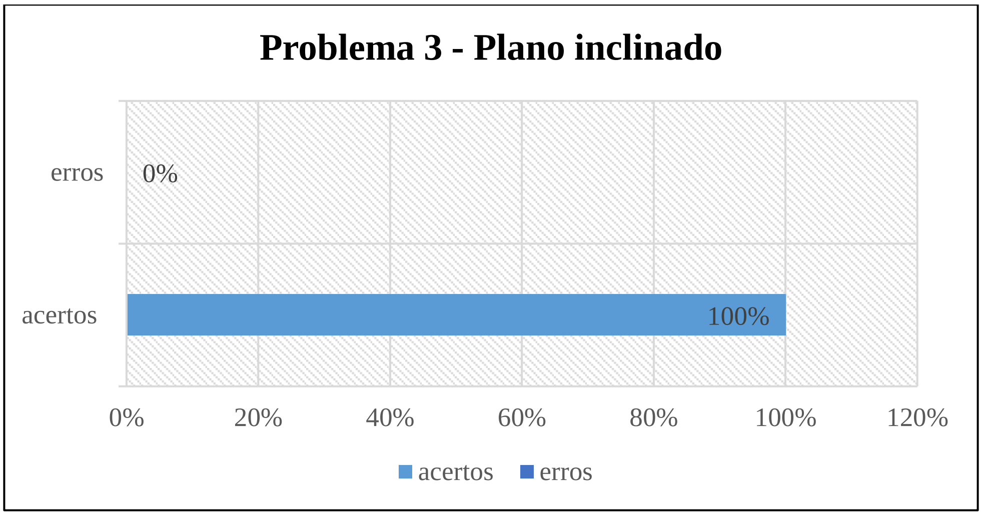
Gráfico 11: Índice de acertos – Problema 1.



Fonte: Autoria própria, 2022.

O problema 1 tratou dos conceitos introdutórios do círculo trigonométrico, trabalhados na aula expositiva, tema bastante explorado. Percebemos que os resultados foram significativos, pois uma parcela notável dos estudantes reconheceu e interpretou as informações fornecidas para solucionarem o problema. Para além disso, formularam técnicas de manipulação otimizada, desenhando e representando as informações em seus rascunhos. Para o processo, o estudante deveria relembrar das informações sobre os quadrantes nos quais o seno de um ângulo β é negativo e o cosseno desse mesmo ângulo tem valor positivo.

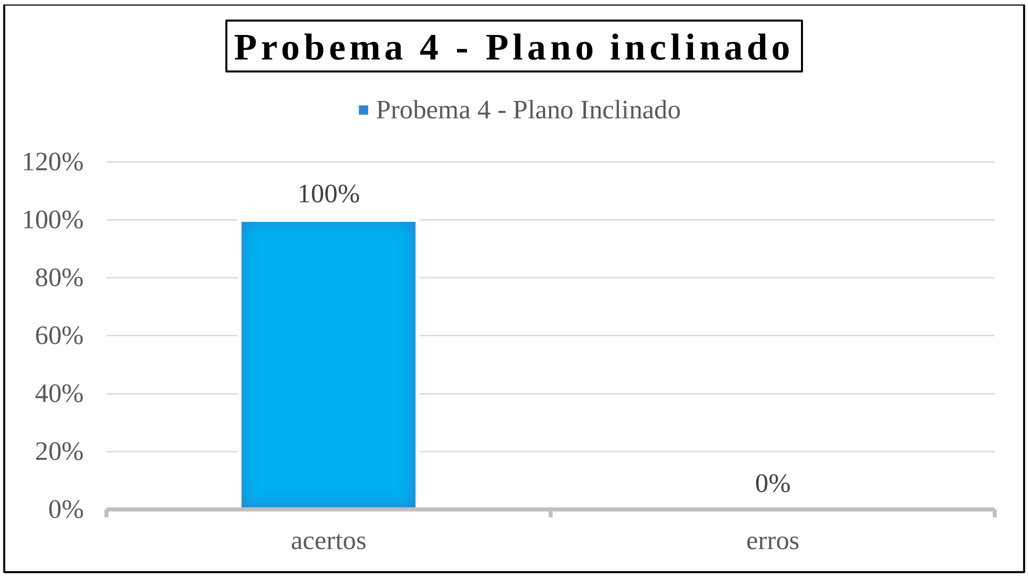
Gráfico 12: Índice de acertos – Problema 3.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Já o problema 3, tratou das aplicações da Trigonometria nas Máquinas Simples, através de uma questão de aceleração de um corpo posto a deslizar a partir do topo de um plano inclinado liso e sem atritos, que apresenta um ângulo de 30° em relação ao solo. Assim, por meio de associações com a aula passada e com a busca realizada por eles sobre as Máquinas Simples e as aplicações da Trigonometria, o procedimento a ser feito deveria determinar a aceleração desse corpo. O que a totalidade do grupo fez primeiramente foi escolher a fórmula correta, logo após, interpretaram as informações em relação ao ângulo, verificaram os conceitos a serem empregados, montaram a tabela dos ângulos notáveis e, por último, efetuaram as operações.

Gráfico 13: Índice de acertos – Problema 4.



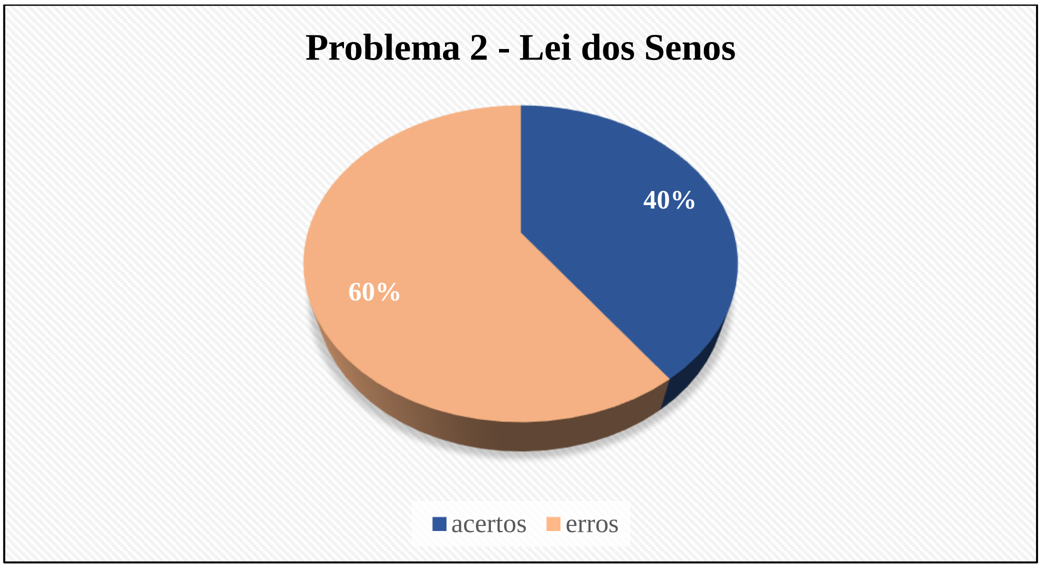
Fonte: Autoria própria, 2022.

O problema 4 também foi sobre um plano inclinado, no entanto, o ângulo formado em relação ao solo seria de 60°. A questão solicitou que a força mínima fosse determinada sobre o bloco para que ele deslizasse com velocidade constante na direção da superfície. Mais uma vez, fazendo o emprego dos conceitos e associações da aula passada, os participantes interpretaram as informações fornecidas, selecionaram a fórmula para o problema, fizeram o uso da tabela dos ângulos notáveis e por último, efetuarem as operações.

Dessa forma, podemos concluir que o estudo de Trigonometria com foco em uma abordagem interdisciplinar, mantendo relação com as aplicações em Máquinas Simples, oferece benefícios ao processo de aprendizagem. Se considerarmos que a maioria dos discentes, obtiveram bons resultados nas resoluções dos problemas e afirmaram que a aula ministrada com essa perspectiva foi um método que facilitou a compreensão do estudo de Trigonometria, permitindo-lhes investigar conceitos e comprovar teorias sobre o conteúdo abordado.

Como desafio, propusemos um problema que envolvia a lei dos senos, a fim de que os discentes empregassem os conceitos relembrados em sala. Nele, deveriam utilizar a fórmula da lei dos senos para determinarem a altura de um avião que, ao percorrer mil metros, formava um ângulo de 30° em relação ao solo. 60% não empregaram os métodos corretos para a resolução, sendo esse o principal motivo dos erros. 40% resolveram corretamente. A principal característica dessa parcela foi a representação das informações por meio de desenhos para uma melhor assimilação.

Gráfico 14: Índice de acertos – Problema 2.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Para complementar esta etapa, no mesmo formulário, tiveram outras três questões nas quais os participantes avaliaram os pontos positivos deste trabalho. Sendo assim, as questões foram fechadas e trataram da aula expositivas; da importância do conhecimento matemático e as suas aplicações no dia a dia; avaliaram o método usado na aula e as contribuições na aprendizagem de Trigonometria.

Tabela 12: Respostas dos participantes – Questão 5.

Afirmativa	Sim	Não	Tive um ligeiro avanço
Ao pesquisar sobre as aplicações em Física, consegui compreender melhor o conteúdo de Trigonometria e a sua importância.	47%	33%	20%

Fonte: Autoria própria, 2022.

A tabela 12 revela a avaliação acerca da pesquisa feita por eles sobre a utilização do conhecimento de Trigonometria em Física. 47% consideraram que conseguiram compreender melhor, 20% afirmaram que tiveram um ligeiro avanço, e outros 33% afirmaram que não evoluíram. Vale relembrar que a pesquisa foi sugerida como um complemento da aula. Considerando que 67% de alguma forma declarou um progresso depois da consulta do conteúdo matemático e sua utilidade nos conteúdos de Física, em especial, o de Máquinas

Simples, pode-se considerar um resultado positivo. Entretanto, os que afirmaram não, são também, um percentual expressivo, e que se confronta com os resultados obtidos nos problemas propostos.

Tabela 13: Respostas dos participantes – Questão 6.

Afirmativa	Sim	Não	Para alguns conhecimentos sim, para outros não
A Matemática é muito importante na minha vida e sempre consigo enxergar suas aplicações no meu dia a dia.	40%	0%	60%

Fonte: Autoria própria, 2022.

A sexta afirmativa buscou saber da percepção dos discentes em relação à Matemática, de forma geral no cotidiano. 40% marcaram a alternativa sim, 60% informaram que conseguem reconhecer essa relevância para algumas questões. É compreensível que todos não consigam associá-la em todas as situações. Uma condição para um resultado tão significativo para a segunda alternativa pode ser a falta de demonstração das aplicações dos conteúdos matemáticos.

Desse modo, a falta de contextualização, tão necessária para uma aprendizagem significativa, acaba por distanciar o estudante da Matemática. Apresenta-se a exigência da interdisciplinaridade, manifestando-se no plano mediato que, segundo Lück (2004), possibilita uma visão global, a fim de superar a fragmentação. No entanto, para a concretização desse objetivo é necessário planejamento, envolvimento e muita dedicação, tanto de professores como de estudantes como afirma Alves (2008).

Tabela 14: Respostas dos participantes – Questão 7.

Afirmativa	Sim	Não	Para alguns conhecimentos sim, para outros não
O método dos professores de relacionar essas áreas do conhecimento me ajudou a entender melhor o conteúdo de Trigonometria.	47%	13%	40%

Fonte: Autoria própria, 2022.

A última questão do segundo formulário constatou a opinião discente sobre a influência da aula ministrada na sua aprendizagem de Trigonometria, mais especificamente sobre o método de aplicar os conteúdos. 47% dos participantes assinalaram que a aula desempenhou um papel importante, 40% informaram que para alguns conhecimentos tiveram avanços, mas para outros não. 13% disseram que não obtiveram avanços. Ao considerarmos que 87% alcançaram ganhos em sua aprendizagem, podemos destacar mais uma vez a importância da interdisciplinaridade no ensino de Matemática e as contribuições das aplicações Trigonometria para a sua aprendizagem.

6.2. ANÁLISE DAS ENTREVISTAS COM OS PROFESSORES DE FISÍCA E MATEMÁTICA

A segunda etapa de coleta de dados consistiu nas entrevistas dos professores de Matemática e Física da turma, com o intuito de examinar as concepções deles sobre a questão central deste trabalho: as contribuições na aprendizagem de Trigonometria por meio das aplicações em Máquinas Simples, sob uma perspectiva interdisciplinar.

Os dados coletados através das entrevistas são mostrados em duas tabelas presentes neste tópico, a primeira do professor de Matemática (Tabela 15) e a segunda do de Física (Tabela 16). Os questionamentos procuraram identificar os principais motivos que obstam o trabalho baseado numa perspectiva interdisciplinar entre essas disciplinas; as principais dificuldades apresentadas na aprendizagem de Trigonometria; o entendimento dos professores sobre as possibilidades do trabalho com foco nessa abordagem, integrando esses conhecimentos; as contribuições dela para aprendizagem desses componentes; por último, a percepção dos estudantes na construção do conhecimento físico e a sua relação com o matemático. Segue abaixo a primeira tabela com questões e respostas:

Tabela 15: Questionamentos referentes à Interdisciplinaridade.

Questionamento	Respostas
Quais são os principais obstáculos que impossibilitam ou dificultam o trabalho interdisciplinar, em especial entre as áreas de Ciências da Natureza e Matemática?	Posso citar alguns obstáculos que dificultam o trabalho interdisciplinar, em especial a relação entre o tempo de aula e o plano de curso a ser ministrado, além disso, têm os efeitos causados pela pandemia, onde muitos alunos por problemas diversos não tiveram acesso aos conteúdos das séries anteriores, então de forma recorrente temos que fazer um paralelo entre o conteúdo que deve ser aprendido com aqueles que o indivíduo deveria ter sistematizado.

Quais os principais erros e/ou dificuldades apresentados pelos estudantes no processo de aprendizagem de Trigonometria?	A principal dificuldade para o estudante é contextualizar a situação em problemas recorrentes do seu cotidiano.
O trabalho conjunto entre essas áreas, mais especificamente nos conteúdos de Trigonometria e Máquinas Simples, pode contribuir de alguma forma na aprendizagem dos componentes?	Com certeza, a interdisciplinaridade entre as áreas do conhecimento tem papel fundamental, uma vez que podemos explorar várias situações e mostrar ao aluno as aplicações desses conceitos em situações cotidianas.
Ao resolverem problemas envolvendo Máquinas Simples, os estudantes conseguem visualizar a aplicação do conhecimento de Trigonometria? Se sim, quais as contribuições na aprendizagem de Trigonometria?	Parcialmente, pois eles ainda apresentam algumas dificuldades em perceber essa contextualização.

Fonte: Autoria própria, 2022.

No que tange ao terceiro questionamento da primeira entrevista e o quarto da segunda, os docentes expressaram os entendimentos sobre a possibilidade do ensino com essa perspectiva. Seria algo benéfico para a aprendizagem? O mesmo questionamento teve respostas parecidas, daí o nosso interesse em discuti-la primeiramente. O professor de Matemática afirmou, reforçando a relevância da interdisciplinaridade no processo de ensino-aprendizagem, que sim, pois a partir dela é possível demonstrar aos estudantes a utilidade dos conceitos estudados no cotidiano. Essa afirmação coincide com o pensamento de Lima (1999) ao discutir a terceira componente do ensino da disciplina e o seu valor.

A resposta do professor de Física também foi positiva, para ele, um conhecimento matemático bem estruturado é fundamental para a aprendizagem em Física. Segundo o ele ainda, outra vantagem da interdisciplinaridade é a capacidade que ela tem de proporcionar a visualização de conceitos matemáticos de maneira menos abstrata, valendo-se das associações e ligações. Ambas as opiniões são, portanto, comuns no que se refere às vantagens dessa abordagem para o processo de ensino-aprendizagem. Por esse motivo, são pontos de vistas que devem ser levados em consideração, para que a implementação desse trabalho se torne cada vez mais viável, consistindo na melhoria da qualidade de ensino, por meio da ultrapassagem contínua da desintegração e uma formação completa como explica Lück (2004).

Outro questionamento comum aos professores foi a respeito da percepção dos discentes na resolução de problemas de Máquinas Simples e as aplicações de Trigonometria no seu estudo. O professor de Matemática dissertou que a percepção acontece parcialmente, pois ainda existem dificuldades na interpretação de situações do tipo. Essa informação é corroborada pelos dados obtidos no primeiro formulário realizado junto aos discentes, no qual 72% dos participantes destacaram que observam raramente os conhecimentos de Trigonometria quando ela está envolvida nesses casos e, outros 14% afirmaram não possuir tal habilidade.

O professor de Física declarou que sim, essa percepção existe, e reiterou a importância da interdisciplinaridade, mais uma vez, ao frisar que nesse momento de resolução de problemas, acontece a visualização da aplicabilidade dos conceitos estudados em Matemática. Aplicar esse conhecimento em diversas situações, como no dia a dia, em problemas mais formais, em outras áreas, ou ter a capacidade de formulá-los e resolvê-los, como destaca Lima (1999), desenvolve a criatividade e recompensa o esforço de aprender. Sendo assim, essa experiência implica, como destaca o estudioso, na motivação de estudar Matemática, criando assim, um ciclo de costume em relação ao seu estudo seja criado, ponto de partida a demonstração do seu valor.

Procuramos saber ainda quais fatores obstam um trabalho respaldado na interdisciplinaridade, em outra questão comum para ambos. O professor de Matemática enumerou primeiramente a relação tempo de aula e o plano de curso a ser ministrado, o segundo, que no nosso entendimento merece mais destaque, são os efeitos causados pela pandemia na aprendizagem, período no qual, muitos não puderam estudar uma série de conteúdos, gerando um efeito cumulativo. Ele complementou que, por vezes, é inevitável retornar a conteúdos que já deveriam estar organizados para o ensino de suas aplicações.

O professor de Física informou acreditar que todo professor que ministra essa disciplina, acaba por utilizar inevitavelmente da interdisciplinaridade em suas aulas, uma vez que princípios/leis que descrevem fenômenos da natureza, são expressões dadas em linguagem matemática, além das ligações dos conceitos aprendidos em Química. Contudo, para ele, é difícil encontrar na disciplina de Matemática professores que estejam dispostos a adotarem essa linha de trabalho, tornando-se um problema, pois, tal linha permite resultados significativos na aprendizagem tanto no plano mediato como no imediato, como explica Lück (2004). Além disso torna o ensino mais vivo, atrativo e dinâmico como destaca Lima (1999). Por último, ele informa que essa realidade pode ser alterada com o novo Ensino Médio, porquanto pode ajudar a suprimir esses obstáculos.

Em relação às principais dificuldades apresentadas na aprendizagem de Trigonometria, no segundo questionamento, o professor de Matemática explicou que os principais obstáculos no estudo do conteúdo estão relacionados com a contextualização na resolução de problemas do cotidiano. Essa resposta pode indicar um norte para as nossas aulas: explorar mais a componente aplicações, por exemplo: formular problemas que exijam recursos trigonométricos, propor momentos para a solução desses problemas com toda a turma, exibir o uso desses conhecimentos na própria Matemática e mesmo na Física, como o cálculo da altura de um edifício com o auxílio de um teodolito etc. Tudo isso compõe a prática interdisciplinar e agrega diretamente para a formação individual, para o progresso na aprendizagem de Matemática.

Tabela 16: Questionamentos referente à Interdisciplinaridade.

Questionamento	Respostas
Os estudantes conseguem perceber e relacionar a construção do conhecimento físico com conhecimento matemático?	Sim. Como a Física utiliza cálculos matemáticos para explicar os fenômenos da natureza, eles conseguem perceber a relação entre essas duas disciplinas.
Quais são os principais obstáculos que impossibilitam ou dificultam o trabalho interdisciplinar, em especial entre as áreas de Ciências da Natureza e Matemática?	Acredito que todo professor de Física utiliza um pouco da interdisciplinaridade em suas aulas, devido à utilização dos cálculos matemáticos e de alguns conceitos que são aprendidos em Química, porém é mais difícil encontrar na matéria de Matemática professores que exploram essa possibilidade, mas acredito que com o novo ensino médio esse problema deva diminuir.
Ao resolverem problemas envolvendo Máquinas Simples, os estudantes conseguem visualizar a aplicação do conhecimento de Trigonometria? Se sim, quais as contribuições na aprendizagem de Trigonometria?	Sim. É importante, pois eles conseguem visualizar uma aplicabilidade dos conceitos vistos em Matemática.
O trabalho conjunto entre essas áreas, mais especificamente nos conteúdos de Trigonometria e Máquinas Simples, pode contribuir de alguma forma na aprendizagem dos componentes?	Sim, pois os conceitos matemáticos são fundamentais para a aprendizagem dos conteúdos de Física, por outro lado, ao estudarem física, eles têm a possibilidade de realizar associações com os conceitos matemáticos visualizando os conteúdos de uma forma menos abstrata.

Fonte: Autoria própria, 2022.

Com o objetivo de sabermos se, para o professor de Física, acontece uma associação por parte dos discentes em relação à construção do conhecimento da disciplina com o matemático, propomos a primeira questão da tabela acima. De acordo com ele, esse processo acontece, há uma certa integração das áreas, graças à expressão dos fenômenos da natureza em linguagem matemática.

Desse modo, com base nos dados coletados junto aos professores nessas entrevistas, destaca-se que as aplicações do conteúdo de Trigonometria em Máquinas Simples repercutem positivamente na aprendizagem de Trigonometria. Ademais, eles ressaltam que a interdisciplinaridade desempenha papel fundamental para o processo de ensino-aprendizagem e concluem, de acordo com a suas experiências, sobre essencialidade dela no ambiente escolar, a fim de que, o ensino de Matemática implique na tão desejada aprendizagem-significativa.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho oportunizou verificar se a proposta interdisciplinar entre o conteúdo de Trigonometria e suas aplicações em Máquinas Simples contribuem e facilitam o processo de aprendizagem dos conceitos de Trigonometria. Proporcionou também uma discussão acerca dessa perspectiva e a sua importância tanto para o ensino como para a aprendizagem, de acordo com a visão dos envolvidos.

A procura de atingir tais objetivos, realizamos uma revisão de literatura, na qual buscamos saber o contexto histórico que originou a Trigonometria e as suas aplicações nas Máquinas Simples. Logo depois, observamos as recomendações expressas nos documentos oficiais para os conteúdos abordados e visamos experiências com o ensino pautado na interdisciplinaridade, tratando do conhecimento matemático aplicado. Portanto, este estudo nos ofereceu uma resposta à seguinte questão: como as aplicações em Máquinas Simples podem contribuir na aprendizagem de Trigonometria?

De modo geral, os estudantes demonstraram bons resultados na resolução de problemas que envolveram essa contextualização, porém, é fato que tal abordagem precisa ser mais explorada, para que tenhamos a aprendizagem significativa. Mas para que isso seja possível, é indispensável, também, a abertura dos professores para trabalharem essa metodologia em sala de aula.

Diante dos dados obtidos nas entrevistas e formulários, ficou claro que o objetivo de identificar as contribuições das aplicações de Trigonometria em Máquinas Simples para a sua aprendizagem através da perspectiva interdisciplinar foi alcançado. Porém, ficou evidente também que variados são os motivos que obstam esse trabalho, a exemplo a relação tempo de aula e plano de curso a serem ministrados, déficits de aprendizagem, fatores que se devem, em grande parte, ao cenário pandêmico dos anos 2020/2021.

A aula expositiva criou um ambiente onde os estudantes puderam experienciar tal metodologia, trocarem ideias, solucionaram dúvidas e curiosidades do conteúdo. Já os exemplos resolvidos reforçaram a teoria, por conseguinte concederam aos discentes entendimento e melhor assimilação da matéria, por apresentarem aplicações e relações com as Máquinas Simples.

Dada à significância do tema, torna-se imprescindível o desenvolvimento de projetos que visem à interdisciplinaridade no contexto do processo de ensino, para que possam desencadear competências e habilidades que garantam um ensino de maior qualidade e atendam diferentes necessidades dos estudantes, a fim de efetivar uma prática pedagógica diferenciada.

Nesse sentido, a interdisciplinaridade entre as disciplinas de Matemática e Física, mais especificamente no trabalho dos conteúdos de Trigonometria e Máquinas Simples viabiliza aos professores mediarem o processo ensino-aprendizagem de forma mais enriquecedora, motivando o estudante em aprender, além de colaborar para que a aprendizagem de Trigonometria seja eficiente, eficaz e significativa.

Recomendamos a produção de pesquisas futuras com uma investigação mais profunda sobre o tema abordado, com uma maior amostra de participantes, tanto professores como estudantes. Também sugerimos que sejam investigadas as conexões entre outros conteúdos de Matemática e Física sob a ótica da interdisciplinaridade.

REFERÊNCIAS

BARBIERI, Paulo Fernando. "**Reavaliação E Rememoração Dos Conceitos Da Mecânica Geral Com Análises Geométricas E/ou Gráficas:** Máquinas Simples. Parte II." Revista Brasileira De Ensino De Física 33.4 (2011): 4305. Web.

BOYER, Carl C. **História da Matemática**. Editora, 470 p., Edgard Bucler, São Paulo, 1996.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP, 2014.

BRASIL. **Lei nº 5692, de 11 de agosto de 1971**. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. Brasília, 1971.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase. Acesso em: 09 abr. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação**. Uma escola cidadã para as juventudes brasileiras:** contextualização, interdisciplinaridade, aprendizagem colaborativa e autoria/protagonismo juvenil. Brasília: MEC. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/205-uma-escola-cidada-para-as-juventudes-brasileiras-contextualizacao-interdisciplinaridade-aprendizagem-colaborativa-e-autoria-protagonismo juvenil?highlight=WyJpbnRlcmRpc2NpcGxpbmFyaWRhZGUiXQ==.Acesso em: 09 abr. 2022.

BRASIL. **Parecer CNE n° 15/98 aprovado em 1º de junho de 1998**. Diretrizes curriculares nacionais para o ensino médio. Brasília, 1998.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** /Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 1. Matemática - História. I. Título. EXERCÍCIOS SOBRE ROLDANAS. [*S. l.*], 2018. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-fisica/exercicios-sobre-roldanas.htm. Acesso em: 8 mar. 2022.

FERNANDES, Valdir. Interdisciplinaridade: a possibilidade de reintegração social e recuperação da capacidade de reflexão na ciência. **Revista Internacional Interdisciplinar: INTERthesis**, Florianópolis - SC, ano 2010, v. 7, n. 2, p. 66-80, 2010.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** - 4. ed. - São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 3:** trigonometria: 506 exercícios propostos com resposta, 167 testes de vestibulares com resposta / Gelson Iezzi. — 9. ed. — São Paulo: Atual, 2013.

KARAM[1]; PIETROCOLA[2], Ricardo Avelar Sotomaior; Maurício. Habilidades Técnicas Versus Habilidades Estruturantes: Resolução de Problemas e o Papel da Matemática como Estruturante do Pensamento Físico. **Matemática e o pensamento físico**, [*s. l.*], ano 2009, v. 2, ed. 2, p. 181-205, 2009. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/Pluginfile.php/275894/mod_resource/content/8/Publicado_Alexandria.pdf. Acesso em: 05 de jun. 2021.

LEITE, Lindevânia de Almeida. **Breve história da Trigonometria** / Lindevânia de Almeida Leite. – João Pessoa, PB, 2016. 42p: il. color.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, Manipulação e Aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. In: **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, n.41, 1999.

LUCK, Heloísa. **Pedagogia interdisciplinar: fundamentos teórico-metodológicos**. 12. ed. Petrópolis: Vozes, 2004.

OLIVEIRA, Jaqueline. **Tópicos selecionados de trigonometria e sua história**. Orientador: João Carlos Vieira Sampaio. 2010. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos - SP, 2010. Disponível em: file:///C:/Users/pc/OneDrive/MONOGRAFIA/FUNDAMENTA%C3%87%C3%83O%20DA%20HISTORIA%20DE%20TRIGONOMETRIA/historia%20trigonometria%202.pdf. Acesso em: 30 mar. 2022.

OLIVEIRA, Joerk da Silva. **Aplicações da trigonometria nas ciências**. Orientador: Dr Joselito de Oliveira. 2015. 125 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de Roraima, Boa Vista - RR, 2015.

OLIVEIRA; ABDOUNUR, João Pedro Almeida, Oscar João. **Trigonometria na Antiguidade**. 2020. 10 p. Trabalho Acadêmico (Bacharelado em Física) - Universidade de São Paulo - Universidade de São Paulo, [*S. l.*], 2020. Disponível em: file:///C:/Users/pc/Downloads/trigono%20(1).pdf. Acesso em: 26 fev. 2022.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. TK029 - A trigonometria esférica presente na obra de Triangulis de Regiomontanus. **X Seminário Nacional de História da Matemática**, Campinas - SP, ano 2013, p. 1-8, 2013. X Seminário Nacional de História da Matemática, 2013, Campinas - SP, 2013.

PETERROSSI, Helena G.; FAZENDA, Ivani C. A. **Anotações sobre metodologias e práticas de ensino na escola de 1º grau**. 4. ed. São Paulo: Loyola, 1996.

PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel. Uma reflexão sobre a importância do conhecimento matemático para a ciência, para tecnologia e para sociedade. **Publicatio uepg - Ciências Humanas, Linguística, Letras e Artes**, Ponta Grossa - PR, ano 2003, v. 11, n. 1, p. 21-31, 2003. Disponível em: https://revistas2.uepg.br/index.php/humanas/article/view/488/489. Acesso em: 17 mar. 2022.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SANTOS; NUNES; VIANA. FERNANDA PEREIRA, CELIA MARIA FERNANDES, MARGER DA CONCEIÇÃO VENTURA. Currículo, interdisciplinaridade e contextualização na disciplina de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo - SP, v. 19, n. 3, p. 157-181, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/33080/pdf. Acesso em: 12 abr. 2022.

SILVA, Everaldo Raiol. **O surgimento da trigonometria em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas**. Orientador: Drª Maria José de Freitas Mendes. 2014. 211 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, Belém, PA, 2014.

SILVA, José Constantino. **Os Teoremas de Menelaus e Ceva**. Orientador: Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera. 2015. 111 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2015.

SOUZA, Ricardo Luís de. **Conversando sobre interdisciplinaridade no ensino de matemática**. In: FAZENDA, Ivani (Org.). A academia vai à escola. Campinas: Papirus, 1995.
TRIGONOMETRIA no triângulo retângulo. [*S. l.*], 2. sem. maio 2018. Disponível em: http://breakthescience.com.br/trigonometria-no-triangulo-retangulo/. Acesso em: 31 mar. 2022.

UMBELINO; ZABINI, Moacir, Franciele Oliveira. A importância da interdisciplinaridade na formação do docente. **Seminário Internacional de Educação Superior 2014**, [*s. l.*], p. 1-8, 2014. Disponível em: http://www.uniso.br/assets/docs/publicacoes/publicacoes-eventos/anais-do-sies/edicoes/edu-formacao-professores/44.pdf. Acesso em: 16 mar. 2022.

APÊNDICES

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Participante:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Idade:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Sexo: ( ) FEMININO ( ) MASCULINO ( ) NÃO DETERMINADO</td><td>Data:____/____/____</td></tr>
</table>

APÊNDICE A – FORMULÁRIO 1

Formulário – 1

1º) - Para mim a Matemática e a Física são ciências totalmente dissociadas;

( ) Sim **( ) Não, possuem fortes ligações**

2º) - Essas áreas do conhecimento podem ser estudadas de forma conjunta para que haja uma melhor compreensão;

( ) Sim **( ) Sim, acho que posso aprender mais** **( ) Não** **( ) Não, pois não possuem correlação**

3º) - Avalio minha aprendizagem em Trigonometria como;

( ) Excelente ( ) Boa, consigo compreender quase a totalidade do que fora estudado

( ) Mal, não tenho conseguido bons resultados **(Insuficiente**

4º) - Acredito que meu conhecimento sobre Trigonometria pode melhorar, caso;

( ) Perceba as aplicações da trigonometria **( ) Estude de forma separada**

5º) - Considero a Trigonometria como um conteúdo;

( ) Fácil **( ) Mediano** **( ) Difícil**

6º) - Ao resolver problemas envolvendo Máquinas Simples, percebo a manipulação dos conhecimentos de Trigonometria;

( ) Sim **( ) Não** **( ) Raramente**

APÊNDICE B – FORMULÁRIO 2

Participante:		
Idade:		
Sexo: ( ) FEMININO ( ) MASCULINO ( ) NÃO DETERMINADO		Data:____/____/____

Formulário – 2

1º) - Considere um ângulo β, tal que $0° \leq \beta < 360°$ e suas respectivas relações no círculo trigonométrico. Considerando que: sen $\beta < 0$ e que cos $\beta > 0$, pode-se afirmar que este ângulo pertence a qual quadrante?

a) 1° b) 2° c)3° d) 4°

2°) - Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 30º (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

3°) - Um plano inclinado liso e sem atritos apresenta ângulo de 30º em relação ao solo. Sendo a gravidade local de 10 m/s², determine a aceleração adquirida por um corpo posto a deslizar a partir do topo desse plano.

a) 20 m/s² b) 5 m/s² c) 3 m/s² d) 12 m/s² e) 2 m/s²

4°) - Um bloco de 2 kg desliza sobre uma superfície sem atrito de um plano inclinado em 60º. Determine a força mínima a ser aplicada sobre o bloco, na direção da superfície desse plano, para que o corpo deslize com velocidade constante. Admita g = 10m/s²

Dados: g = 10 m/s²

a) 20 N b) 45 N c) $10\sqrt{3}$ N d) 15 N e) $100\sqrt{2}$ N

5º) - Ao pesquisar sobre as aplicações em Física, consegui compreender melhor o conteúdo de Trigonometria e a sua importância;

( ) Sim **( ) Não** **( ) Tive um ligeiro avanço**

6º) - A Matemática é muito importante na minha vida e sempre consigo enxergar aplicações no meu dia a dia;

( ) Sim ( ) Não ( ) Para alguns conhecimentos sim, outros não

7º) - O método do professor de relacionar essas áreas do conhecimento me ajudou a entender melhor o conteúdo de Trigonometria;

( ) Sim ( ) Não ( ) Para alguns conceitos sim, para outros não

APÊNDICE C – ENTREVISTA COM O PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA TURMA.

Pesquisa: Trigonometria Aplicada em Máquinas Simples: Uma Abordagem Interdisciplinar

Este formulário é destinado ao professor de Matemática da turma do 3° ano B, do turno matutino da instituição pertencente a rede estadual de ensino da Bahia, localizada no munícipio de Barreiras-BA selecionada para participação nesta pesquisa, sendo esta entrevista uma das etapas da pesquisa em questão. Dessa forma, segue abaixo algumas questões sobre a possibilidade do trabalho com foco na abordagem interdisciplinar entre as áreas de Ciências da Natureza e Matemática.

1°) - Quais são os principais obstáculos que impossibilitam ou dificultam o trabalho interdisciplinar, em especial entre as áreas de Ciências da Natureza e Matemática?

2°) - Quais os principais erros e/ou dificuldades apresentados pelos estudantes no processo de aprendizagem de Trigonometria?

3°) - O trabalho conjunto entre essas áreas, mais especificamente nos conteúdos de Trigonometria e Máquinas Simples, pode contribuir de alguma forma na aprendizagem dos componentes?

4°) - Ao resolverem problemas envolvendo Máquinas Simples, os estudantes conseguem visualizar a aplicação do conhecimento de Trigonometria? Se sim, quais as contribuições na aprendizagem de Trigonometria?

APÊNDICE D – ENTREVISTA COM O PROFESSOR DE FÍSICA DA TURMA.

Pesquisa: Trigonometria Aplicada em Máquinas Simples: Uma Abordagem Interdisciplinar

Este formulário é destinado ao professor de Física da turma do 3° ano B, do turno matutino da instituição pertencente a rede estadual de ensino da Bahia, localizada no munícipio de Barreiras-BA selecionada para participação nesta pesquisa, sendo esta entrevista uma das etapas da pesquisa em questão. Dessa forma, segue abaixo algumas questões sobre a possibilidade do trabalho com foco na abordagem interdisciplinar entre as áreas de Ciências da Natureza e Matemática

1°) - Os estudantes conseguem perceber e relacionar a construção do conhecimento físico com conhecimento matemático?

2°) - Quais são os principais obstáculos que impossibilitam ou dificultam o trabalho interdisciplinar, em especial entre as áreas de Ciências da Natureza e Matemática?

3°) - Ao resolverem problemas envolvendo Máquinas Simples, os estudantes conseguem visualizar a aplicação do conhecimento de Trigonometria? Se sim, quais as contribuições na aprendizagem de Trigonometria?

4°) - O trabalho conjunto entre essas áreas, mais especificamente nos conteúdos de Trigonometria e Máquinas Simples, pode contribuir de alguma forma na aprendizagem dos componentes?

ANEXOS

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – CAMPUS IX
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS
Colegiado De Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome da Pesquisador(a): Hian Melo de Aragão

Título da pesquisa: Trigonometria Aplicada em Máquinas Simples: Uma Abordagem Interdisciplinar

Na condição de participante desta investigação fui esclarecido dos objetivos deste Projeto de Pesquisa e declaro que:

1. Não poderei esperar benefícios pessoais advindos da colaboração nesta pesquisa;
2. Não existem possíveis desconfortos, e riscos decorrentes da participação;
3. Minha privacidade será respeitada, ou seja, qualquer dado ou elemento que possa, de qualquer forma, me identificar, será mantido em sigilo;
4. Posso me recusar a participar e a retirar meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem precisar justificar-me, e sem qualquer prejuízo pessoal;
5. Tenho livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências durante a pesquisa; enfim, tudo o que eu queira saber antes, durante, e depois da minha participação.
6. Finalmente, tendo sido orientado quanto ao teor do projeto e compreendido o objetivo dos testes, entrevistas, questionários, ou oficinas de estudos, e manifesto meu livre consentimento em participar.

Nome:____

RG:_____________________________CPF: ____________________________

E-mail:____

( ) Concordo ( ) Não Concordo

E por estar assim ciente

Assinam o presente em (02) duas vias de igual teor

Barreiras, _____ de ___________ de 2022

_______________________________ Participante/Responsável

__________________________ Pesquisador (a)